Análise de Complexidade

Algoritmos e Estruturas de Dados 2
2017-1
Flavio Figueiredo (http://flaviovdf.github.io)

Lembrando da aula passada

- Criamos um Banco Simples
- TAD para Conta Corrente

conta_bancaria.h e conta_bancaria.c (respectivamente)

```c
#ifndef CONTA_BANCARIA_H
#define CONTA_BANCARIA_H

// definição do tipo
typedef struct {
    int numero;
    double saldo;
} ContaBancaria;

// cabeçalho das funções
ContaBancaria* NovaConta(int, double);
void Deposito(ContaBancaria*, double);
void Saque(ContaBancaria*, double);
void Imprime(ContaBancaria*);

#endif
```

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "conta_bancaria.h"

ContaBancaria *NovaConta(int num, double saldo) {
    ContaBancaria *conta = malloc(sizeof(ContaBancaria));
    conta->numero = num;
    conta->saldo = saldo;
    return conta;
}

void Deposito(ContaBancaria *conta, double valor) {
    conta->saldo += valor;
}

void Saque(ContaBancaria *conta, double valor) {
    conta->saldo -= valor;
}

void Imprime(ContaBancaria *conta) {
    printf("Numero: %d\n", conta->numero);
    printf("Saldo: %f\n", conta->saldo);
}
```

Vamos adicionar um extrato

- Um extrato é?

Extrato

- Um extrato é?
  - Uma série de **operações bancárias**
  - Precisamos então de uma **transação** antes do extrato

transacao

- Um extrato é?
  - Uma série de **operações bancárias**
  - Precisamos então de uma **transação** antes do extrato
- Novo transacao.h ao lado
- TAD simples
- time.h
  - Funções de data e hora em C
  - time_t guarda a quantidade de segundos desde 01/01/1970

```c
#ifndef TRANSACAO_H
#define TRANSACAO_H

#include <time.h>

#define CONTA_VAZIA -1

typedef struct {
    int daConta;   //conta que originou a transacao
    int paraConta; //conta receptora da transacao
    double valor;
    time_t data;
} Transacao;

/*
 * Função auxiliar para casos de transferências.
 * Inverte do daConta com o paraConta
 */
Transacao* InverteDePara(ContaBancaria*);
void Imprime(Transacao*);

#endif
```

[Pequena Pausa] Como contamos tempo em C?

- Tempo é uma abstração no computador

- Solução:
  - Fixar um dia
    - Primeiro de Janeiro de 1970

  - Contamos a quantidade de segundos, ou milissegundos, ou micro-segundos desde essa data

  - 2 de Janeiro de 1970
    - 86400 (1 Dia em Segundos)

Extrato

- Fizemos um include de “transacao.h”
  - Qual o motivo?
- A ideia é que cada método como Saque atualize o Extrato da conta
- Novo método Transferencia

```
#ifndef CONTA_BANCARIA_H
#define CONTA_BANCARIA_H

#include “transacao.h”

typedef struct {
    int numero;
    double saldo;
} ContaBancaria;

// Agora retornamos a transacao. Adicionamos a
// transferencia
ContaBancaria* NovaConta(int, double);
void Deposito(ContaBancaria*, double);
void Saque(ContaBancaria*, double);
void Transferencia(ContaBancaria*, ContaBancaria*, double);
void Imprime(ContaBancaria*);

#endif
```

Extrato

- Um extrato é?
  - Uma série de **operações bancárias**
  - Precisamos então de uma **transação** antes do extrato **(DONE!)**

- Precisamos agora da série. Opções?
  - Usar um array

Adicionando um Extrato utilizando um Array

```c
#ifndef CONTA_BANCARIA_H
#define CONTA_BANCARIA_H

#include “transacao.h”

#define TAMANHO_INICIAL 30
typedef Transacao Extrato[TAMANHO_INICIAL];

typedef struct {
    int numero;
    double saldo;
    Extrato extrato;
} ContaBancaria;

ContaBancaria* NovaConta(int, double);
void Deposito(ContaBancaria*, double);
void Saque(ContaBancaria*, double);
void Transferencia(ContaBancaria*, ContaBancaria*, double);
void Imprime(ContaBancaria*);
#endif
```

- Vantagens e Desvantagens?
- Quais são as operações que vocês querem fazer no seu extrato?

Adicionando um Extrato com Array

```
#ifndef CONTA_BANCARIA_H
#define CONTA_BANCARIA_H

#include “transacao.h”

#define TAMANHO_INICIAL 30
typedef transacao Extrato[TAMANHO_INICIAL];

typedef struct {
    int numero;
    double saldo;
    Extrato extrato;
} ContaBancaria;

ContaBancaria* NovaConta(int, double);
void Deposito(ContaBancaria*, double);
void Saque(ContaBancaria*, double);
void Transferencia(ContaBancaria*, ContaBancaria*, \
          double);
void Imprime(ContaBancaria*);
#endif
```

- Vantagens e Desvantagens?
- Vantagens
  - Simples
  - Acesso direto pelo índice
- Desvantagens?
  - Número fixo de operações
    - Arrays tem tamanho fixo
    - Se aloquei 30 posições
    - Como colocar a 31 transacao?
- Operações
  - Como achar uma transacao por data?
  - Como achar a transacao de maior valor?

Análise de complexidade

- AEDS2 tem como foco problemas como os do slide anterior
- Vamos sair um pouco do código para discutir este foco agora
- Análise de complexidade vai ajudar nas questões levantadas
- Lembre-se que seu código é:
  - Algoritmos
  - Dados
  - Bons TADs ajudam a gerar bons algoritmos

Análise de complexidade

- O trabalho do programador completo envolve diversos problemas

- Projeto de algoritmos
  - Análise do problema
  - Decisões de projeto
  - Algoritmo a ser utilizado de acordo com seu comportamento
  - Comportamento depende de
    - tempo de execução
    - espaço ocupado

Para um algoritmo particular

- Tempo de execução
  - Quantas passos o algoritmo executa
- Memória
  - [Por exemplo] Tamanho da pilha e alocações
- No nosso estudo de caso:
  - Achar uma transação bancária com maior valor
    - Quantas passos?
    - Quanto de memória alocada?
  - Achar uma transação bancária com menor valor
    - Quantos passos?
    - Quanto de memória alocada?
  - Achar as transações que ocorreram em uma certa data
    - Quantos passos?
    - Quanto de memória alocada?

Classes de algoritmos

- Nos preocupamos com o custo de algoritmos para problemas específicos
  - Pensem em funções. Custo de uma função no seu código
- Para um mesmo problema existem diversos algoritmos
  - Diversas formas de achar a transação bancária de maior valor
- A análise de complexidade nos permite comparar tais algoritmos
- Existem algoritmos que são tidos como ótimos:
  - [Exemplo] Podemos provar que eles executam no menor número de passos possível
  - Casos triviais

A representação de dados vai afetar o custo

- Uma boa escolha de um TAD pode melhorar o custo do seu algoritmo

- Uma má escolha vai afetar seu algoritmo

Medida de custo utilizando um modelo matemático

- Usamos uma **abstração matemática** de do **número de passos** que um computador executa durante um algoritmo

- Vamos abstrair o computador
  - Nosso foco aqui **não** é se um tipo memória RAM é mais rápida do que outra
  - Como também **não** é se um disco rígido é eficiente
  - Como também **não** é no tempo de compilação
  - **Não** é mensurado em segundos, bits etc.

- Vamos focar em número de passos de um algoritmo inicialmente

- Existe também complexidade de memória

Nosso custo é uma **função** de **complexidade**

- Função de complexidade f(n)
- f(n) é o número de passos para executar um algoritmo cuja entrada tem tamanho n
- [Geralmente] n é mensurado como o número de passos
  - Em um vetor de 10 posições n = 10
  - Não o número de bits
- Falamos ***complexidade para um problema de tamanho n***

Voltando para o exemplo do banco

- Vamos manter o extrato como um array
- Queremos achar a transacao que tem o maior valor

```
double TransacaoDeMaiorValor(int n, Transacao extrato[n]) {
     double maiorValor = extrato[0].valor;
     for (int i = 1; i < n; i++) {
          if (extrato[i].valor > maiorValor) {
               maiorValor = extrato[i].valor;
          }
     }
     return maiorValor;
}
```

Achando o maior elemento de um vetor

- O código acima é uma instância do problema de achar o maior elemento de um vetor
- Podemos pensar nele independente do tipo que é passado
  - Achar o maior número de um array de inteiros é um algoritmo similar
- Existem outros algoritmos para o problema acima
- Vamos mostrar que o nosso é **ótimo!**
- Vamos computar f(n) para nosso algoritmo

Complexidade do algoritmo

```
double TransacaoDeMaiorValor(int n, Transacao extrato[n]) {
     double maiorValor = extrato[0].valor;                    //1
     for (int i = 1; i < n; i++) {                            //n-1
          if (extrato[i].valor > maiorValor) {                //n-1
               maiorValor = extrato[i].valor;                 //n-1
          }
     }
     return maiorValor;                                       //n-1
}
```

Qual o motivo das linhas do **for** serem n-1?

Laços geram repetições

- Um for de 0 até n [0, n)
  - for (int i = 0; i < n; i++)
- Repete tudo dentro dele n vezes
- Nosso for no slide anterior iniciar de 1
  - 1 passo a menos do que iniciar de 0
- Logo:
  - n - 1 passos
- Qual o valor de f(n)

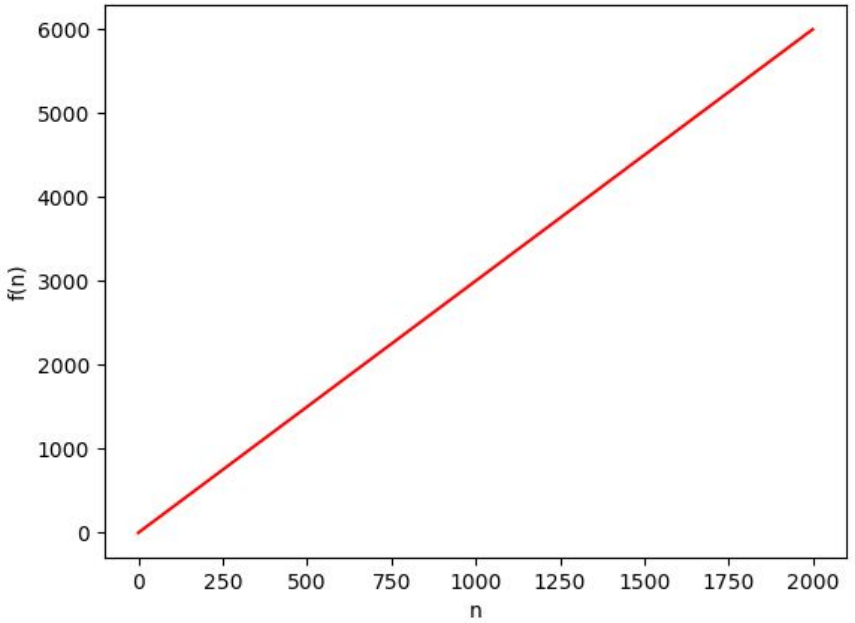
f(n) da função como um todo

- f(n) = 1 + 1 + 3 * (n - 1)
- f(n) = 3n - 3 + 2
- f(n) = 3n - 1
- Qual a implicação disto?

```
double TransacaoDeMaiorValor(int n, Transacao extrato[n]) {
     double maiorValor = extrato[0].valor;                    //1
     for (int i = 1; i < n; i++) {                            //n-1
          if (extrato[i].valor > maiorValor) {                //n-1
               maiorValor = extrato[i].valor;                 //n-1
          }
     }
     return maiorValor;                                       //n-1
}
```

f(n) da função como um todo

- f(n) = 3n
  - Vamos ignorar o -1
    3n >> -1
- Para cada elemento de entrada temos 3 operações
- Existe um crescimento linear na complexidade do meu algoritmo com a entrada



Algoritmo Ótimo:
Vamos focar apenas nas comparações

- O algoritmo abaixo faz n-1 comparações
- Linha do if
  - Cada if é uma comparação
- É impossível achar o menor elemento fazendo menos comparações
  - Em um vetor fora de ordem como o nosso

```
double TransacaoDeMaiorValor(int n, Transacao extrato[n]) {
    double maiorValor = extrato[0].valor;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        if (extrato[i].valor > maiorValor) {          // n-1
            maiorValor = extrato[i].valor;            // n-1
        }
    }
    return maiorValor;
}
```

Provando

- Vamos assumir que:
  - Existe um algoritmo que acha o maior elemento com n - 1 - 1 (ou seja n - 2) operações
  - Não existe ordem no vetor
- Obviamente:
  - n - 2 < n - 1
  - Assumimos que um algoritmo com n - 2 comparações existe
  - Vamos mostrar que nunca poderá garantir corretude
- Como o vetor não tem ordem
  - Ao olhar n - 2 elementos sempre vai sobrar 1 elemento para comparar
  - Sempre existe uma chance do maior elemento ser este último
    - Assumimos que o vetor não tem ordem
- Por contradição:
  - Um algoritmo com menos n - 2 operações não existe
  - Podemos generalizar com o mesmo argumento para n - 1 - x, onde x é um inteiro positivo

E se vetor estiver ordenado

789.0	700.0	430.2	150.0	50.0	50.0	22.23	8.50	8.50	2.0

- Neste caso achamos o maior elemento fácilmente
  - array[0]
- Achamos o menor elemento também
  - array[n - 1]
- 1 operação cada
- Ou seja:
  - Se você armazenar seu vetor sempre ordenado, a operação **maior** e **menor** tem custo **f(n) = 1**
- Existem outras estruturas de dados que resolvem este problema com custo 1
  - MinHeap
  - MaxHeap

Tipos de casos

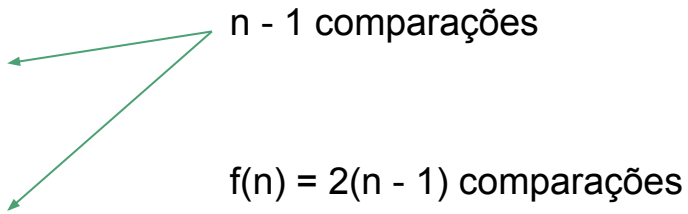
- Melhor caso
  - Vetor ordenado
  - Resolvo os problemas com 1 operação
- Caso médio
  - Vetor sem ordem
  - Cada elemento tem probabilidade 1/n de aparecer na posição n
- Pior caso
  - Vetor na ordem inversa
  - O maior elemento sempre é o último
  - Meu for só encontra ele na última comparação

Maior e Menor Elemento de um Vetor sem Ordem

```
//Vamos sair do mundo bancário.
//Agora usamos um ponteiro ao invés de um array.
//Não muda muito nossa vida (lembre-se da revisão)
void MinMax(int *vec, int n, int *min, int *max) {
     int i;
     int min = vec[0];
     int max = vec[0];
     for(i = 1; i < n; i++) {
          if(vec[i] < *min) {
               *min = vec[i];
          }
          if(vec[i] > *max) {
               *max = vec[i];
          }
     }
}
```

Maior e Menor Elemento de um Vetor sem Ordem

```
//Vamos sair do mundo bancário.
//Agora usamos um ponteiro ao invés de um array.
//Não muda muito nossa vida (lembre-se da revisão)
void MinMax(int *vec, int n, int *min, int *max) {
     int i;
     int min = vec[0];
     int max = vec[0];
     for(i = 1; i < n; i++) {
          if(vec[i] < *min) {
               *min = vec[i];
          }
          if(vec[i] > *max) {
               *max = vec[i];
          }
     }
}
```



Melhorando um Pouco

```
void MinMax2(int *vec, int n, int *min, int *max) {
     int i;
     int *min = vec[0];
     int *max = vec[0];
     for(i = 1; i < n; i++) {
          if(vec[i] < *min) {          //n - 1
               *min = vec[i];          //A (sempre que true)
          } else {
               *max = vec[i];          //n - 1 - A
          }
     }
}
```

Existe um algoritmo ótimo para MinMax

- O mesmo executa com 3n/2 - 2 comparações
- Veremos ele com cuidado em outra aula

Observações

- Estamos falando de f(n) em números de comparações
- Falamos também no caso da função como um todo
  - Faz sentido no problema do mínimo e máximo
- Na próxima aula vamos generalizar
  - Complexidade de qualquer problema

Exercícios

- Copie o esqueleto de código do banco
  - https://github.com/flaviovdf/AEDS2-2017-1/tree/master/exemplos/banco-01
- Implemente todas as funções
- [Q1] Implementa uma função para achar a transação de maior e menor valor. Use a MinMax2 como base
- [Q2] Faça seu código funcionar com mais de 30 transações
  - Não vale apenas aumentar a constante para um valor maior
  - Seu código deve funcionar com infinitas transações
  - Você possivelmente vai ter que ficar re-alocando o vetor