Paul Catala Wintersemester 2023/2024

Fallstudien der Mathematischen Modellbildung: Teil 2 (MA 2902)

Themen für Hausarbeiten

Thema 1: MEG/EEG-Bildgebung

- Diskutieren Sie das Prinzip der MEG/EEG-Bildgebung [1]. Beschreiben Sie das/die lineare(n) Modell(e), und erklären Sie, warum das zugehörige inverse Problem schlecht gestellt ist.
- Diskutieren Sie die folgenden A-prioris für die Quellen, die in [1] vorgestellt werden: Sp1, Sp2, Sp3, Sp4, Te1, Te2. Geben Sie Beispiele für mögliche Regularisierungsfunktionen.
- Welche Regularisierung könnte verwendet werden, um Quellen mit geringer Energie und spärlicher räumlicher Verteilung zu begünstigen (bei festem Zeitraster t)? Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Lösung des entsprechenden regularisierten Kleinste-Quadrate-Problems.
- Definieren Sie die ℓ^1/ℓ^2-Norm, die *e.g.* in der Einführung von [4] beschrieben wird. Kommentieren Sie ihre Verwendung als Regularisierung für das MEG/EEG-Wiederherstellungsproblem.

Thema 2: Total Least-Squares

- Definieren und diskutieren Sie das Total-Least-Squares-Problem, das in [3] beschrieben wird. Gehen Sie insbesondere auf die Unterschiede zum gewöhnlichen Least-Squares-Problem.
- Wir verwenden hier die Notationen von [3]. Sei $C \overset{\text{def.}}{=} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ und $\delta C = \begin{bmatrix} \delta A & \delta B \end{bmatrix}$. Formulieren Sie die Nebenbedingung in (TLS1) in Bezug auf C und δC. Leiten Sie eine untere Schranke für $\|\delta C\|$ und einen Minimierer δC_* ab, indem Sie den Satz von Eckart-Young verwenden (siehe *e.g.* Lemma 4). Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Ker}(C + \delta C_*) = \mathrm{Ran} \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}.$$
Leiten Sie einen Beweis für Theorem 2 her.
- In [3] heißt es, dass für einen Vektor auf der rechten Seite b die Lösung x_* von (TLS1)
$$(A^\top A - \sigma_{n+1}^2 I)x_* = A^\top b, \tag{1}$$
erfüllt, wobei σ_{n+1} der letzte Singulärwert von C ist. Vergleichen Sie mit den Normalgleichungen für ein gewöhnliches Least-Squares-Problem. Was können Sie über die Konditionierung von TLS im Vergleich zu LS ableiten? Geben Sie die Lagrange-Funktion des (TLS1) Problems an. Wie könnte eine Strategie zur Ableitung von (1) aussehen?
- Erklären Sie das inverses Problem, das in [2] behandelt wird, und warum TLS in diesem Fall nützlich sein kann.

References

[1] H. Becker, L. Albera, P. Comon, R. Gribonval, F. Wendling, and I. Merlet. Brain-source imaging: from sparse to tensor models. *IEEE Signal Proc. Mag.*, 32(6):100–112, 2015.

[2] N. Bose, H. Kim, and H. Valenzuela. Recursive total least-squares algorithm for image reconstruction from noisy, undersampled frames. *Mult. Sys. Sig. Proc.*, 4:253–268, 1993.

[3] I. Markovsky and S. Van Huffel. Overview of total least-squares methods. *Sig. Proc.*, 87(10):2283–2302, 2007.

[4] W. Ou, P. Golland, and M. Hämäläinen. A distributed spatio-temporal EEG/MEG inverse solver. *Med. Ima. Comput. Comput. Assist. Interv. (MICCAI)*, 11(1):26–34, 2008.