

# **Ehrenfeucht–Fraïssé-peleistä**

Pauli Niva

Kandidaatintutkielma  
HELSINGIN YLIOPISTO  
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 28. huhtikuuta 2016

Tiedekunta — Fakultet — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Tietojenkäsittelytieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Pauli Niva			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Ehrenfeucht–Fraïssé-peleistä			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Tietojenkäsittelytiede			
Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages	
Kandidaatintutkielma	28. huhtikuuta 2016	17	
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Kirjoitan tiivistelmän vasta sitten kun lopullinen työ alkaa olla valmis</p> <p>ACM Computing Classification System (CCS): Theory of computation → Finite Model Theory</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Ehrenfeucht–Fraïssé-peli, äärellisten mallien teoria			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Peruskäsitteitä</b>	<b>1</b>
2.1	Relaatiot . . . . .	2
2.2	Kielet . . . . .	2
2.3	Mallit . . . . .	3
2.4	Isomorfia . . . . .	4
2.5	Elementaarinen ekvivalenssi . . . . .	6
<b>3</b>	<b>EF-peli</b>	<b>6</b>
3.1	Pelin kulku . . . . .	6
3.2	EF-pelin ominaisuuksia . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Sovelluksia</b>	<b>10</b>
4.1	Sovellusaloja . . . . .	10
4.2	Ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan rajoitteet . . . .	11
4.3	Kongruenssiapulauseet . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>15</b>
	<b>Lähteet</b>	<b>16</b>

# 1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Ehrenfeucht–Fraïssé-pelejä, joita sovelletaan logiikan määrittelemättömyystulosten todistamisessa ja tietojenkäsittelytieteessä esimerkiksi tietokantakielien ilmaisuvoiman mittaamisessa tai verkkojen tutkimisessa. Alunperin Ehrenfeucht–Fraïssé-peli määriteltiin ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikalle, mutta tästä pelistä kehitettiin nopeasti erilaisia variaatioita monille muille logiikoille, kuten esimerkiksi kiintopistelogiikalle (fixpoint logic) [1] ja lineaariselle temporaalilogiikalle (linear temporal logic) [3].

Ensimmäisen kerran *elementaarinen ekvivalenssi* eli se, että täsmälleen samat ensimmäisen kertaluokan lauseet ovat tosia  $A$ :ssa ja  $B$ :ssä, esiintyy kirjallisuudessa Alfred Tarskin artikkelissa Grundzüge der Systemenkalküls 1 vuodelta 1935 [15]. Roland Fraïssé käytti väitöskirjatyössään [6] vuonna 1954 *edestakaisin-menetelmää* osoittaakseen, että kaksi *malliteoreettista struktuuria* ovat elementaarisesti ekvivalentit. Andrzej Ehrenfeucht muokkasi tästä Fraïssén menetelmästä peliteoreettisen version, joka julkaistiin vuonna 1961 Fundamenta Mathematicae:ssa [2]. Nykyisin nämä pelit tunnetaan nimeltä *Ehrenfeucht–Fraïssé-pelit* (jatkossa EF-pelit), joskus niitä kutsutaan myös edestakaisin-peleiksi.

Tämä edestakaisin-menetelmä siis karakterisoi elementaarisen ekvivalenssin. Ideana on, että *isomorfismeja* tutkitaan yksi kerrallaan ja katsotaan, kuinka niitä voisi laajentaa suuremmille äärellisille isomorfismeille.

Tämän tutkielman tavoitteena on esitellä täsmällisesti, mutta kuitenkin samalla havainnollisesti EF-peliä ja sen hyödyllisyyttä matemaattisen logiikan ja tietojenkäsittelytieteen saralla. Tässä työssä esitellään joitain logiikan peruskäsitteitä, mutta työn seuraaminen edellyttää kuitenkin lukijalta yliopistotasoisien matematiikan perusteiden hallintaa ja joitain logiikan peruskäsitteiden tuntemista. Lukijan oletetaan esimerkiksi tuntevan joukon ja kuvauksien käsitteet.

Luvussa kaksi esitellään lyhyesti peruskäsitteistö, kuten relaatiot, isomorfian, kielet ja mallit. Kolmannessa luvussa esittelen itse EF-pelin, sen kulun ja voittokriteerit ja -strategian, sekä todistetaan että toisen pelaajan voittostrategian avulla saadaan mallit jaettua *ekvivalenssiluokkiin*. Lisäksi kolmannessa luvussa havainnollistetaan esimerkin avulla miten peliä pelataan ja esitellään voittava samalla voittostrategia toiselle pelaajalle kyseisessä pelissä. Neljännessä kappaleessa esitellään EF-pelin sovellusaloja ja muutamia konkreettisia esimerkkejä siitä miten EF-peliä sovelletaan.

## 2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa esitellään joitakin *ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan* peruskäsitteitä. Alaluku 2.1 käsittelee relaatioita. Alaluvussa 2.2 määritel-

län kieli ja sen alakäsitteet aakkosto, termit ja atomikaavat. Alaluvussa 2.3 puolestaan määritellään mallin sekä alimallin käsitteet. 2.4 keskittyy isomorfiaan ja osittaisisomorfiaan. Lisäksi kappaleessa esitellään Tarskin totuusmääritelmä. Alaluvussa 2.5 määritellään elementaarinen ekvivalenssi ja tuodaan esiin isomorfian ja elementaarisen ekvivalenssin keskinäistä suhdetta. Peruskäsitteiden määrittelyssä seuraan karkeasti Wilfrid Hodgesia [10].

## 2.1 Relaatiot

Olkoon  $X$  jokin joukko. Joukon  $X$   $n$ -kertainen *karteesinen tulo* tarkoittaa kaikkien joukon  $X$  alkioiden  $n$ -pituisten jonojen joukkoa. Tätä merkitään  $X^n$  tai vaihtoehtoisesti  $X \times X \times \dots \times X$ ,  $n$  kertaa. Esimerkiksi joukko  $\mathbb{R}^2$  on järjestettyjen reaalilukuparien joukko. Sen geometrinen vastine on taso.  $\mathbb{R}^3$  on järjestettyjen reaalilukukolmikoiden joukko. Sen geometrinen vastine on kolmiulotteinen avaruus.

**Määritelmä 1.** Joukon  $X$  *kaksipaikkainen relatio*  $R$  on mikä tahansa joukko joukon  $X$  alkioista muodostettuja pareja  $(x, y)$ , joiden molemmat alkiot ovat joukossa  $X$ , eli  $R \subset X^2$ . Jos  $(x, y) \in R$ , sanotaan, että  $x$  on  $y$ :n kanssa *relaatiossa*  $R$ . Joukon  $X$  kaksipaikkaista relaatiota  $R$  sanotaan

- *refleksiiviseksi*, jos  $(x, x) \in R$ , kaikilla  $x \in X$
- *irrefleksiiviseksi*, jos  $(x, x) \notin R$ , kaikilla  $x \in X$
- *symmetriseksi*, jos  $(x, y) \in R$ , aina kun  $(y, x) \in R$
- *antisymmetriseksi*, jos  $(x, y) \in R$  ja  $(y, x) \in R$ , niin  $x = y$
- *transitiiviseksi*, jos  $(x, y) \in R$  ja  $(y, z) \in R$ , niin  $(x, z) \in R$
- *vertailulliseksi*, jos  $(x, y) \in R$  tai  $(y, x) \in R$ , kaikilla  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$

## 2.2 Kielet

Tässä alaluvussa määritellään aakkosto, termit, atomikaavat sekä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kieli. Tarkemmin sanottuna, ei ole olemassa vain yhtä predikaattilogiikan kieltä, vaan jokaista aakkostoa kohden on oma kielensä, jolla voidaan puhua sen aakkoston malleista.

**Määritelmä 2** (Aakkosto). Olkoon  $l, m$  ja  $n$  kardinaalilukuja. *Aakkosto* on joukko  $L = \{R_i \mid i < l\} \cup \{c_i \mid i < m\} \cup \{f_i \mid i < n\}$  joka sisältää  $l$  relaatioymbolia  $R_i$ ,  $m$  vakiosymbolia  $c_i$  ja  $n$  funktiosymbolia  $f_i$

Jokaiseen relaatioon  $R$  liittyy *paikkaluku*  $\#R$ , ilmaisemaan kuinka monipaikkainen kyseinen relatio on. Samoin jokaiseen funktioon liittyy *paikkaluku*  $\#f$  ilmaisemaan kuinka monipaikkainen funktio on kyseessä. Jos jokin kardinaaliluvuista on 0, niin tällöin tätä vastaavia symboleja ei ole aakkostossa.

**Määritelmä 3** (Termit). Olkoon  $R$  joukko relaatioita,  $C$  joukko vakioita ja  $F$  joukko funktioita jotka muodostavat aakkoston  $L$ . Olkoon  $X$  joukko muuttujia. *Termien* joukko  $T$  yli aakkoston  $L$  on joukko äärellisiä merkkijonoja joka määritellään seuraavasti:

- Jos  $x \in X$ , niin  $x \in T$ .
- Jos  $c \in C$ , niin  $c \in T$ .
- Jos  $f \in F$ ,  $\#f = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  ja  $t_1, \dots, t_n \in T$ , niin  $f(t_1, \dots, t_n) \in T$ .

**Määritelmä 4** (Atomikaavat). Olkoon  $R$  joukko relaatioita,  $C$  joukko vakioita ja  $F$  joukko funktioita jotka muodostavat aakkoston  $L$ . Olkoon  $T$  termien joukko yli aakkoston  $L$ . *Atomikaavojen* joukko  $A$  on joukko äärellisiä merkkijonoja joka määritellään seuraavasti:

- Jos  $s, t \in T$ , niin  $s = t \in A$ . Toisin sanoen  $s = t$  on atomikaava.
- Jos  $r \in R$ ,  $\#r = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  ja  $t_1, \dots, t_n \in T$ , niin  $r(t_1, \dots, t_n) \in A$ .

**Määritelmä 5** (Kieli). Olkoon  $A$  atomikaavojen joukko ja olkoon  $X$  muuttujien joukko. *Kieli*  $K$  yli aakkoston  $L$  on kokoelma merkkijonoja jotka muodostetaan rekursiivisesti atomikaavoista seuraavanlaisesti:

- Kaikki atomikaavat kuuluvat kieleen  $K$ ,  $A \subset K$ .
- Jos  $\psi$  ja  $\varphi \in K$ , niin  $\neg\varphi \in K$ ,  $(\psi \vee \varphi) \in K$ ,  $(\psi \wedge \varphi) \in K$ ,  $(\psi \rightarrow \varphi) \in K$ , sekä  $(\psi \leftrightarrow \varphi) \in K$ .
- Jos  $\varphi \in K$  ja  $x \in X$ , niin  $\forall x(\varphi) \in K$  ja  $\exists x(\varphi) \in K$ .

Kieli  $K$  on *ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan* kieli, joka sisältää merkkijonoja. Näitä merkkijonoja kutsutaan usein kirjallisuudessa myös kaavoiksi. Kaavojen *alikaavoja* ovat kaikki kaavan osat jotka itsekin ovat kaavoja.

## 2.3 Mallit

Tässä alaluvussa määritellään, mikä on *malli* eli *strukturi*. Karkeasti ottaen se on joukko, jolla on jonkinlainen rakenne ja joka koostuu relaatioista, vakioista ja funktioista. Malli ja strukturi ovat synonyymeja. Näitä kahta sanaa käytetään rinnakkain kontekstista riippuen sen mukaan kumpi soveltuu kyseiseen tilanteeseen. Sanaa malli käytetään yleensä tällaisessa kontekstissa “Olkoon  $M$  malli kaavalle  $\varphi$ ”, joka tarkoittaa samaa kuin “Olkoon  $M$  strukturi siten että  $M \models \varphi$ ” Nämä konseptit määritellään myöhemmin tässä kappaleessa.

**Määritelmä 6** (Malli). Olkoon  $L$  aakkosto ja olkoon  $M$  epätyhjä joukko. Tällöin  $L$ -*malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta  $M$ .
- Relaatioista  $R^M \subset M$ , jokaiselle relaatiotähtäälle  $R \in L$ ,  $\#R = n$ , jossa  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- Vakioista  $c^M \in M$ , jokaiselle vakiotähtäälle  $c \in L$ .
- Funktioista  $f^M : M^m \rightarrow M$ , jokaiselle funktiotähtäälle  $f \in L$ ,  $\#f = m$ , jossa  $m \in \mathbb{Z}_+$ .

Relaatiota  $R^M$  sanotaan relaatiotähtäälle  $R$  *tulkinnaksi mallissa  $M$* , funktiota  $f^M$  sanotaan funktiotähtäälle  $f$  *tulkinnaksi mallissa  $M$* , ja alkiota  $c^M$  kutsutaan vakiotähtäälle  $c$  *tulkinnaksi mallissa  $M$* .

Malli siis antaa aakkoston  $L$  symboleille *semantiikan* eli merkityksen sekä kontekstin, jossa formaalin kielen lauseet voivat olla tosia tai epätosia. Samaa merkintää  $M$  käytetään sekä mallista kokonaisuutena että mallin *universumista* eli mallin alkioden joukosta.

Relaatiotähtäälle  $R$  ja sen tulkinnan  $R^M$  välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan “tietokone” ja tietokoneen välisellä erolla. Sana “tietokone” on suomen kieltä, joka koostuu yhdeksästä merkidstä ja sitä voidaan käyttää muodostettaessa suomenkielisiä lauseita. Tietokone taas on fyysinen laite, joka käsittelee tietoa ohjelmointinsa mukaisesti, eikä sitä voida käyttää suomen kielen lauseiden osana. Lause “Tietokoneeni on Mac” on totta tai epätotta, riippuen siitä, mihin nimenomaiseen tietokoneeseen sana “tietokone” viittaa.

**Määritelmä 7** (Alimalli). Oletaan, että  $A$  on  $L$ -malli.  $A$ :n *alimalli*  $B$  on  $L$ -malli, jolle pätee

- $B \subset A$
- jos  $R \in L$  on relaatiotähtäälle ja  $\#R = n \in \mathbb{Z}_+$ , niin tällöin  $R^B = R^A \cap B^n$
- jos  $c \in L$  on vakiotähtäälle, niin tällöin  $c^B = c^A$  ja  $c^b \in B$
- jos  $f \in L$  on funktiotähtäälle ja  $\#f = n \in \mathbb{Z}_+$ , niin tällöin  $f^A(B^n) \subset B$  ja  $f^B = f^A \upharpoonright B^n$  eli  $f^B$  on  $f^A$ :n rajoittuma osajoukkoon  $B^n$ . Siis  $B$  on suljettu  $f^A$ :n suhteen.

Olkoon  $A$  malli ja  $B \subset A$ . Tällöin  $\langle B \rangle$  on pienin  $A$ :n alimalli, joka sisältää joukon  $B$ .

## 2.4 Isomorfia

Mallien kohdalla puhuttiin “jonkinlaisesta rakenteesta”, eli struktuurista. Mallin objekteille annettiin nimiä, symboleja ja kaavoja, jotta tätä rakennetta voitiin kuvailla. Malleja joiden rakenne on samanlainen kutsutaan isomorfeisiksi.

**Määritelmä 8** (Isomorfismi). Oletetaan, että  $L$  on aakkosto ja  $A$  sekä  $B$  ovat  $L$ -malleja. Kuvaus  $g : A \rightarrow B$  on *isomorfismi* mallista  $A$  mallille  $B$ , jos

- $g$  on bijektio.
- Jokaisella vakiosymbolilla  $c \in L$  pätee  $g(c^A) = c^B$ .
- Jokaisella relaatiot symbolilla  $R \in L, \#R = n$  pätee  $(a_1, \dots, a_n) \in R^A \iff (g(a_1), \dots, g(a_n)) \in R^B$ .
- Jokaisella funktiosymbolilla  $f \in L, \#f = m$  pätee  $g(f^A(a_1, \dots, a_m)) = f^B(g(a_1), \dots, g(a_m))$ .

Jos on olemassa isomorfinen kuvaus  $A \rightarrow B$ , niin sanotaan, että  $A$  ja  $B$  ovat isomorfiset ja tätä merkitään  $A \cong B$ .

Isomorfia mallien välillä on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Jotta mallien välillä voi olla isomorfia, niin mallien täytyy olla saman kokoiset, sillä muuten niiden välillä ei voi olla bijektiota, eikä siten isomorfaakaan. EF-pelien kannalta tärkeä isomorfian ominaisuus on, että se säilyttää totuuden.

**Määritelmä 9** (Osittaisisomorfismi). Olkoon  $L$  aakkosto sekä olkoon  $A$  ja  $B$  kummatkin  $L$ -malleja. Olkoon  $A' \subset A$  ja  $B' \subset B$ . Lisäksi olkoon  $f : A' \rightarrow B'$ . Jos on olemassa isomorfismi  $g : \langle A' \rangle \rightarrow \langle B' \rangle$ , siten että  $g \upharpoonright A' = f$  eli kuvaus  $g$  on kuvauksen  $f$  rajoittuma osajoukkoon  $A'$ . Tällöin kuvausta  $f$  kutsutaan *osittaisisomorfismiksi*  $A \rightarrow B$  ja tätä merkitään  $A \cong_p B$ .

Toisin kuin isomorfismissa, osittaisisomorfismissa totuus ei välttämättä säily. Joissain tilanteissa osittaisisomorfismi kuitenkin säilyttää totuuden. Eri-tyisesti näin on *relaatiomaalisten* aakkostojen, eli aakkostojen jotka sisältävät vain relaatiot symbolia ja vakioita, tapauksessa.

Edellä puhuttiin paljon totuudesta ja määritellään seuraavaksi mitä sillä tarkalleen ottaen tarkoitetaan.

**Määritelmä 10** (Tarski). Oletetaan, että  $A$  on  $L$ -malli ja olkoon  $L$  aakkosto ja  $K$  kieli. Määritellään rekursiivisesti että kielen  $K$  kaava  $\varphi$  on totta  $A$ :ssa, eli  $A$  toteuttaa  $\varphi$ , eli  $A \models \varphi$  seuraavasti:

- Jos  $\varphi$  on kaava  $s = t$  jossa  $s$  ja  $t$  ovat termejä, niin  $A \models \varphi$  jos ja vain jos  $s^A = t^A$ .
- Jos  $\varphi$  on kaava  $R(t_1, \dots, t_n)$ , missä  $R$  on  $n$ -paikkainen relaatiot symboli ja  $t_1, \dots, t_n$  ovat termejä, niin  $A \models \varphi$  jos ja vain jos  $(t_1^A, \dots, t_n^A) \in R$ .
- $A \models \neg \varphi$  jos ja vain jos  $A \not\models \varphi$ .
- $A \models (\varphi \wedge \psi)$  jos ja vain jos  $A \models \varphi$  ja  $A \models \psi$ .
- $A \models (\varphi \vee \psi)$  jos ja vain jos  $A \models \varphi$  tai  $A \models \psi$ .



- $A \models (\varphi \rightarrow \psi)$  jos ja vain jos  $A \not\models \varphi$  tai  $A \models \psi$ .
- $A \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$  jos ja vain jos  $A \models \varphi$  ja  $A \models \psi$  tai  $A \not\models \varphi$  ja  $A \not\models \psi$ .
- $A \models \forall x(\varphi)$  jos ja vain jos jokaisella mallin  $A$  alkiolla  $a$  pätee  $A \models \varphi$  kun muuttaja  $x$  tulkitaan  $a$ :ksi.
- $A \models \exists x(\varphi)$  jos ja vain jos löytyy jokin mallin  $A$  alkio  $a$  jolla  $A \models \varphi$  kun muuttaja  $x$  tulkitaan  $a$ :ksi.

## 2.5 Elementaarinen ekvivalenssi

Siinä missä isomorfismi kuvailee kahden mallin rakenteellista samanlaisuutta, niin elementaarinen ekvivalenssi puolestaan vertailee malleja suhteessa käytettyyn kieleen.

**Määritelmä 11** (Elementaarinen ekvivalenssi). Olkoon  $L$  aakkosto joka muodostaa kielen  $K$ . Olkoon  $A$  ja  $B$  kummatkin  $L$ -malleja.  $A$ :ta ja  $B$ :tä sanotaan *elementaarisesti ekvivalenteiksi*, jos kaikilla lauseilla  $S \in K$  pätee  $A \models S \iff B \models S$ . Tätä merkitään  $A \equiv B$ .

**Korollari 12.** *Jos  $L$ -mallit  $A$  ja  $B$  ovat isomorfiset, niin ne ovat elementaarisesti ekvivalentit.*

On huomattava, että tämä ei päde toisinpäin. Mallien  $A$  ja  $B$  välinen elementaarinen ekvivalenssi ei kerro mitään mallien isomorfisuudesta.

## 3 EF-peli

*Huomautus.* Jatkossa aakkostolla tarkoitetaan aina relationaalista aakkostoa, ellei toisin mainita.

Tässä kappaleessa esitellään EF-peli, sen säännöt, strategian ja voitettavan strategian käsitteet, joissa seuraan pitkälti Jouko Väänästä [18] ja havainnollistetaan EF-peliä esimerkillä kahdelle verkolle.

EF-pelissä ideana on, että peli on kahdelle pelaajalle, joita kutsutaan nimillä Pelaaja I ja Pelaaja II. Peliä pelataan kahdella mallilla  $A$  ja  $B$ , joilla on sama aakkosto. Pelaaja II haluaa osoittaa, että kyseiset mallit ovat jossain määrin samankaltaiset, kun taas Pelaaja I haluaa osoittaa, että mallit ovat erilaiset. Pelissä on äärellinen määrä vuoroja ja vuorojen määrä on alussa sovittu.

### 3.1 Pelin kulku

Pelin kulku kuvataan kirjallisuudessa lähes aina samalla tavalla. Määritellään aluksi mielivaltaisen kierroksen kulku ja kummankin pelaajan voittokriteerit.

**Määritelmä 13** (Kierroksen kulku). Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla  $k \in \mathbb{Z}_+$ . EF-peliä pituudeltaan  $k$ -kierrosta malleilla  $A$  ja  $B$  merkitään  $EF_k(A, B)$ . Pelin  $EF_k(A, B)$  mielivaltaisen kierroksen  $i \in \{1, \dots, k\}$  kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista  $A$  tai  $B$  sekä jonkin alkion  $a_i \in A$  tai  $b_i \in B$  tästä mallista.
- Tämän jälkeen Pelaaja II valitsee malleista sen, jota Pelaaja I ei valinnut ja valitsee tästä mallista jonkin alkion.

**Määritelmä 14** (Voittokriteeri). Olkoon  $a = (a_1, \dots, a_i)$  mallista  $A$  valitut alkiot ja  $b = (b_1, \dots, b_i)$  mallista  $B$  valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella  $i$ . Pelaajan II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella  $i \leq n$  pari  $(a, b)$  määrää osittaisen isomorfismin  $A \rightarrow B$  eli on olemassa kuvaus  $h : A \rightarrow B$ , siten että  $a \in A \mapsto b \in B$  Muussa tapauksessa Pelaaja I voittaa.

*Strategia* on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta mitä valintoja toinen pelajaa tekee kutsutaan *voittavaksi strategiaksi*. Jos Pelaaja II:lla on voittava strategia EF-pelissä  $EF_k(A, B)$ , niin tätä merkitään  $A \sim_k B$ .

**Lause 15.** *Relaatio  $\sim_k$  on  $L$ -mallien ekvivalenssirelaatio.*

**Todistus:** Todistus on Jouko Väänäsen kirjassa [18] esiintyvää todistusta mukaileva. Oletetaan, että  $A, B$  ja  $C$  ovat kaikki saman aakkoston  $L$ -malleja. Tällöin

- Refleksiivisyys:  $A \sim_k A$ .  
Voittava strategia Pelaajalle II on valita aina sama alkio minkä Pelaaja I valitsi. Täten  $\sim_k$  on refleksiivinen.
- Symmetrisyys:  $A \sim_k B \iff B \sim_k A$ .  
EF-pelin määritelmä ei millään tavoin tee eroa pelien  $EF_k(A, B)$ :n ja  $EF_k(B, A)$ :n välillä. Täten jos  $A \sim_k B$ , niin Pelaaja II voi käyttää samaa voittostrategiaa myös pelissä  $EF_k(B, A)$ . Jos taas  $B \sim_k A$ , niin Pelaaja II voi käyttää samaa voittostrategiaa pelissä  $EF_k(A, B)$ . Siis  $\sim_k$  on symmetrinen.
- Transitiivisuus:  $A \sim_k C \wedge B \sim_k C \implies A \sim_k C$ .  
Todistetaan väite käsittelemällä kaikki väitteen ja implikaation pelit samaan aikaan. Peli  $EF_k(A, C)$  pelataan siten, että Pelaaja II tekee valintansa pelaamalla samaan aikaan kuvitteellisia pelejä  $EF_k(A, B)$  ja

$EF_k(B, C)$ . Oletetaan, että peli  $EF_k(A, C)$  alkaa Pelaajan II valinnalla  $a_1 \in A$ , jolloin Pelaaja II valitsee seuraavalla strategialla:

Pelaaja II kuvittelee, että Pelaaja I valitsi alkion  $a_1 \in A$  pelissä  $EF_k(A, B)$ , jolloin hän valitsee alkion  $b_1 \in B$  pelin  $EF_k(A, B)$  voittostrategian mukaisesti. Seuraavaksi Pelaaja II kuvittelee, että äsken valinta oli Pelaajan I valinta pelissä  $EF_k(B, C)$  ja valitsee alkion  $c_1 \in C$  pelin  $EF_k(B, C)$  voittostrategian mukaisesti. Tämä valinta  $c_1$  on Pelaajan II vastaus Pelaajan I valintaan  $a_1$  pelissä  $EF_k(A, C)$ .

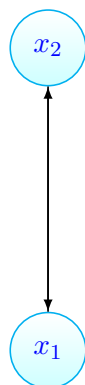
Jos Pelaaja I valitseekin alkion  $c_1 \in C$ , niin Pelaaja II yksinkertaisesti seuraa strategiaa toiseen suuntaan. Näin voidaan toimia, koska äsken todistimme, että voittavat strategiat ovat symmetrisiä.

Kun peliä on pelattu  $k$ -kierrosta, niin meillä on valinnoista muodostuneet jonot  $a_1, \dots, a_k$ ,  $b_1, \dots, b_k$  ja  $c_1, \dots, c_k$ . Oletusten nojalla on olemassa osittaisisomorfismit  $f : A \cong_p B$  ja  $g : B \cong_p C$ . Nyt voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus  $h(f(a_i)) = g(a_i)$ , siten että  $a_i \mapsto c_i$  on osittaisisomorfismi, kaikilla  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Täten  $A \sim_k C$ , siis relaatio  $\sim_k$  on transitiivinen.

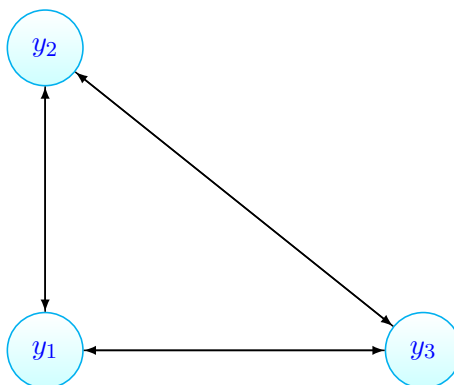
Koska relaatio  $\sim_k$  on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin se on tällöin ekvivalenssirelaatio.  $\square$

Kuten aikaisemmin todettiin, EF-pelistä on kehitetty monia erilaisia variaatioita, kuten esimerkiksi EF-peli verkoille (verkoilla voidaan esittää ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan kaavoja. Verkon kaarethan ovat käytännössä relaatioita verkon pisteiden välillä). Havainnollistetaan nyt EF-pelin ideaa yksinkertaisella esimerkillä kahden kierroksen EF-pelillä verkoille  $X$  ja  $Y$ , sekä esitetään samalla strategia  $X \sim_k Y$ , eli voittava strategia Pelaajalle II.

**Esimerkki 16.** Tässä EF-pelissä verkoille ideana on, että rakennetaan pelaajien tekemistä valinnoista kahta uutta verkkoa  $A$  ja  $B$ , siten että verkosta  $X$  valittu solmu merkitään verkon  $A$  solmuksi  $a_i$  ja verkosta  $Y$  valittu solmu verkon  $B$  solmuksi  $b_i$ , jossa  $i$  ilmaisee millä kierroksella valinta on tapahtunut. Uudet verkot  $A$  ja  $B$  rakennetaan helpottamaan tehtyjen valintojen ja näiden relaatioiden muodostaman kokonaisuuden hahmottamista ja hallintaa.



Verkko  $X$



Verkko  $Y$

Kierros 1:

- Pelaaja I voi valita solmun kummasta verkosta tahansa.
- Jos Pelaaja I valitsee solmun verkosta  $X$ , Pelaaja II valitsee vastinpariksi verkosta  $Y$  solmun  $y_1$ , muulloin Pelaaja II valitsee vastinpariksi solmun  $x_1$ .
- Oletetaan, että Pelaaja I valitsee solmun  $x_2$ . Tällöin meillä on  $a_1 := x_2, b_1 := y_1$  ensimmäisen kierroksen jälkeen.

Kierros 2:

- Minkä tahansa solmun Pelaaja I valitseekin, Pelaaja II voi peilata valinnan. Oletetaan, että tällä kertaa Pelaaja I valitsee verkosta  $Y$ .
- Jos Pelaaja I valitsee solmun  $y_1$ , eli saman solmun kuin  $b_1 = y_1$ , on Pelaajan II valittava vastinpariksi Pelaajan I ensimmäisen kierroksen valinta  $x_2$ .
- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun  $y_2$  tai  $y_3$ , eli jommankumman solmun  $b_1 = y_1$  naapureista, Pelaajan II täytyy valita vastinpariksi solmun  $a_1 = x_2$  naapuri.
- Toisen kierroksen jälkeen tilanne on  $a_2 := x_2, b_2 := y_1$  tai  $a_2 := x_1, b_2 := y_2/y_3$ .
- Pelaaja II voittaa, koska kuvaus  $f$  verkolta  $A$  verkolle  $B$ ,  $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$  säilyttää naapuruussuhteet, eli  $f$  on osittaisisomorfismi.

Jos Pelaaja I olisi tehnyt toisellakin kierroksella valintansa verkosta  $X$ :

- Jos Pelaaja I valitsee solmun  $x_1$ , niin Pelaaja II valitsee solmun  $y_1$ .

- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun  $x_2$ , niin Pelaaja II valitsee solmun  $y_2$ .
- Tällöin toisen kierroksen jälkeen tilanne olisi ollut  $a_2 := x_1, b_2 := y_1$  tai  $a_2 := x_2, b_2 := y_2$ .
- Pelaaja II voittaa tässäkin skenaariossa, koska kuvaus  $f$  verkolta  $A$  verkolle  $B$ ,  $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$  säilyttää naapuruussuhteet, eli  $f$  on osittaisisomorfismi.

### 3.2 EF-pelin ominaisuuksia

## 4 Sovelluksia

EF-peli on teoreettisen tietojenkäsittelyn ja äärellisten mallien teorian työkalu jota pääasiassa käytetään määriteltävyyksymyksiin ja todistusten apuna. Äärellisten mallien teoriaa ja sen menetelmää EF-peliä voidaan soveltaa tietojenkäsittelytieteessä muun muassa verifikoinnissa.

### 4.1 Sovellusaloja

Äärelliset mallit voidaan koodata verkkoina, puina tai merkkijonoina. Tällöin niitä voidaan käyttää laskennan olioina ja siten niillä voidaan kuvata äärellistilallisia systeemejä ja tutkia näiden toiminnan oikeellisuutta.

Yksi sovellusala on tietokantateoria, koska relationaalinen malli samaistaa tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa. Formaalin kielen kaavat voidaan siis ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida. Ja toisinpäin, voidaan esittää jonkin laskennallisen vaativuusluokan kyselyitä jollakin formaalilla kielellä.

Muita tietojenkäsittelytieteen osa-alueita joihin EF-peliä voi soveltaa on esimerkiksi vaativuusteoria, koska äärelliset mallit tarjoavat laskennan vaativuusluokkien loogisen karakterisoinnin ja mahdollistavat vaativuusteoreettisten tulosten todistamisen tätä kautta. Esimerkiksi  $P = NP$  -ongelma redusoituu kysymykseksi: onko kahdella kiintopistelogiikalla sama ilmaisuvoima äärellisissä malleissa? Määriteltävyystulosten todistuksissa seuraava teoreema on keskeinen:

**Lause 17** (Metodologia teoreema). *Ei ole olemassa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lausetta joka ilmaisee ominaisuuden  $P$ , jos ja vain jos, kaikilla  $n \in \mathbb{Z}_+$ , on olemassa mallit  $A$  ja  $B$ , joille pätee:*

- *Ominaisuus  $P$  on totta  $A$ :ssä.*
- *Ominaisuus  $P$  on epätotta  $B$ :ssä.*
- *$A \sim_n B$ , eli Pelaaja II voittaa  $n$ -kierroksisen EF-pelin  $A$ :lla ja  $B$ :llä.*

Esitetään yksinkertainen relaatioalgebran ongelma esimerkkinä siitä miten metodologia teoremaa käytetään määrittelemättömyystuloksia todistettaessa. Tässä esimerkissä käytämme Boolean kyselyä, joten ensimmäiseksi määrittelemme tämä tarkasti.

**Määritelmä 18** (Boolean kysely). Olkoon  $M$  malli. Tällöin *Boolean kysely*  $Q$  on kuvaus  $Q : M \rightarrow \{0, 1\}$  joka säilyy isomorfismeissa. Siis jos  $A \cong B$ , niin  $Q(A) = Q(B)$

**Esimerkki 19.** Olkoon  $A$  malli, joka sisältää vain vakioita. Tutkitaan Boolean kyselyä: onko  $A$ :ssa parillinen määrä alkioita? Konstruoidaan mallit  $A$  ja  $B$  todistusta varten seuraavanlaisiksi:  $A_n := \{a_1, \dots, a_n\}$  ja  $B_n := \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ , mielivaltaisella  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Eli toisessa mallissa on yksi alkio enemmän kuin toisessa. Täten toinen malleista sisältää parittoman määrän alkioita ja toinen parillisen määrän alkioita.

Voittostrategia Pelaajalle II on sellainen, että jos Pelaaja I valitsee mielivaltaisella kierroksella  $i$  alkion  $a_i$ , niin Pelaaja II yksinkertaisesti valitsee alkion  $b_i$ . Eli  $A \sim_n B$  ja koska toisessa mallissa on parillinen ja toisessa pariton määrä alkioita, niin ominaisuus ”parillinen määrä alkioita” on totta toisessa mallissa ja epätotta toisessa. Täten metodologia teoreman nojalla Boolean kysely onko mallissa  $A$  parillinen määrä alkioita ei ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseeksi, eikä siten myöskään relaatioalgebran kyselyksi.

Edellinen esimerkki toimii suoraan verkoille, kunhan käsittää mallit  $A$  ja  $B$  verkoiksi ja alkiot verkon solmuiksi siten, että  $a_i$ :sta on kaari  $a_{i+1}$ :ssaan ja niin edelleen, sekä vastavuoroisesti  $B$ :n samalla tavalla. Eli verkoille ei ole olemassa ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan lausetta jolla voisi esittää ominaisuuden, että verkko sisältää parillisen määrän solmuja.

## 4.2 Ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan rajoitteet

Verkoilla on paljon ominaisuuksia jotka eivät ole ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikka määriteltäviä. Jos  $G$  on äärellisten verkkojen luokka, niin esimerkiksi seuraavat kyselyt eivät ole ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikka määriteltävissä  $G$ :lle: transitiivinen sulkeuma, tasoverkkoisuus, Eulerilaisuus, Hamiltonilaisuus,  $k$ -värittyvyys, kaikilla  $k \geq 2$ , asykliisyys, leikkaussolmu ja verkon yhtenäisyys.

Todistetaan esimerkin vuoksi näistä epäsuorasti verkon yhtenäisyyden määrittelemättömyys.

**Esimerkki 20.** Oletetaan että ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan lause  $\varphi$  määrittelee verkkojen yhtenäisyyden aakkostossa joka muodostuu binaarisesta relaatiotymbolista  $E$ . Olkoon  $L$  jokin lineaarijärjestys. Muodostetaan lineaarijärjestyksestä  $L$  suunnattu verkko  $G$  seuraavanlaisesti:

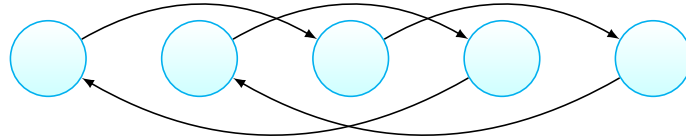
Määritellään seuraajarelaatio  $S$  lineaarijärjestyksestä  $L$  seuraavasti:

$$S(x, y) := (x < y) \wedge \forall z((z \leq x) \vee (y \leq z))$$

Määritellään että ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan kaava  $\psi(x, y)$  siten että  $\psi(x, y)$  on toteutuva jos ja vain jos jokin seuraavista on totta:

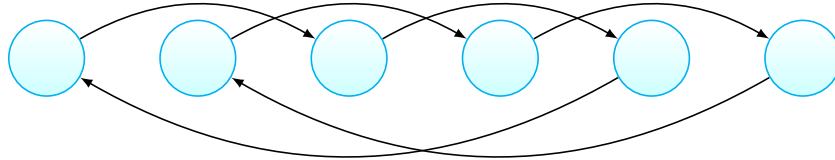
- $\exists z(S(x, z) \wedge S(z, y))$ , toisin sanoen  $y$  on  $x$ :n seuraajan seuraaja.
- $\forall u(y \leq u) \wedge (\exists z(S(x, z) \wedge \forall u(u \leq z)))$ , toisin sanoen  $x$  on viimeisen alkion edeltäjä ja  $y$  on ensimmäinen alkio.
- $\forall u(u \leq x) \wedge (\exists z(S(z, y) \wedge \forall u(z \leq u)))$ , toisin sanoen  $x$  on viimeinen alkio ja  $y$  on ensimmäisen alkion seuraaja.

Ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan kaavan  $\psi$  määräämä suunnattu verkko  $G$  lineaarijärjestyksen  $L$  alkioista on yhtenäinen, tarkemmin sanoen se muodostuu yhdestä syklistä, jos sen solmujen määrä on pariton.



Verkko jossa pariton määrä solmuja

Jos solmujen määrä on parillinen niin verkko ei ole yhtenäinen, tarkemmin sanoen se koostuu kahdesta erillisestä syklistä.



Verkko jossa parillinen määrä solmuja

Sijoittamalla kaavan  $\psi$  relaationsymbolin  $E$  ilmentymien tilalle lauseessa  $\neg\varphi$  voidaan nyt testata verkon  $G$  parillisuutta. Edellisen esimerkin Boolean kyselyn ja sen yleistämisen verkoille perusteella tiedetään, ettei kyseinen testaus ole mahdollista, joten päädymme ristiriitaan. Täten ei ole olemassa ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan lausetta  $\varphi$  joka määritteli verkkojen yhtenäisyyden.

Näiden lisäksi on hyvin monia muitakin verkkojen ominaisuuksia, joita ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikka ei pysty ilmaisemaan. Itse

asiassa on osoitettu, että ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikka kykenee ilmaisemaan vain verkkojen lokaaleja ominaisuuksia [9]. Hanf käytti tässä todistuksessaan EF-peliä, tarkemmin Fraïssén algebrallista versiota siitä. Sama lokaalisuus on osoitettu myöhemmin myös toisella metodilla, kvanttorien eliminoinnilla [7]. Nämä tulokset ovat motivoineet pyrkimyksiä kehittää ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan laajennuksia verkoille, samoin kuin kehittämään näille omia EF-pelejä ilmaisuvoiman mittaamiseen. Tällaisia mittauksia on tehty muun muassa monadiselle toisen kertaluokan predikaattilogiikalle [5] [4], transitiivisen sulkeuman logiikalle [8] ja erilaisille kiintopistelogiikoille [1].

Vaikka ensimmäisen kertaluokan logiikka on hyvin rajoittunut kieli esimerkiksi verkkojen ominaisuuksien ilmaisemiseen, niin kuitenkin sillä voi joitain hyödyllisiäkin kyselyitä verkkojen suhteen ilmaista. Esimerkiksi seuraavat lauseet ovat ilmaistavissa ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikalla (oletetaan, että  $E$  on relaatio joka ilmaisee verkon solmujen välistä kaarta ja symbolit  $x, y, z_i$  ovat solmuja):

- “solmulla  $x$  on vähintään kaksi toisistaan eroavaa naapuria”

$$(\exists y)(\exists z)(\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$$

- “jokaisella solmulla  $x$  on vähintään kaksi toisistaan eroavaa naapuria”

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg(y = z) \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$$

- “on olemassa polku solmusta  $x$  solmuun  $y$  jonka pituus on 3”

$$(\exists z_1)(\exists z_2)(E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y))$$

Verkkojen ohella EF-pelit ovat olleet hyödyllisiä ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan ja formaalien kielten teorian määriteltävyysskysymysten välisen suhteen tutkimisessa. Erityisesti tähtivapaat säännölliset kielet (star-free regular languages) ovat olleet mielenkiinnon kohteena.

### 4.3 Kongruenssiapulauseet

Kieltä kutsutaan tähtivapaaaksi, jos sen pystyy kuvailemaan säännöllisenä lausekkeena joka on konstruoitu aakkoston symboleista, tyhjän joukon symbolista ja kaikista muista loogisista operaatioista, kuten konkatenatiosta ja komplementista paitsi Kleenen tähdestä. Hyvin tunnettu tulos formaalien kielten teoriassa on, että kieli on ensimmäinen kertaluokka predikaattilogiikkamääriteltävä jos ja vain jos se on tähtivapaa [13]. Tämän todistuksessa käytetään yleensä induktiota kvanttorisyyden suhteen kuten esimerkiksi Ladner tekee [11].



**Määritelmä 21** (Kvanttoriaste). Ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan kaavan  $\varphi$  kvanttoriaste  $qr(\varphi)$  on sisäkkäisten kvanttorien syvyys ja se määritellään seuraavasti:

- Jos  $\varphi$  on atomikaava, niin  $qr(\varphi) = 0$ .
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$ .
- $qr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = qr(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \max\{qr(\varphi_1), qr(\varphi_2)\}$
- $qr(\forall x\varphi) = qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$ .

Tähtivapaan kielen ja kielen ensimmäisen kertaluokkalogiikan määriteltävyyden välisen loogisen ekvivalenssin todistuksen induktioaskeleen kriittinen kohta on seuraava väite:

**Lemma 22** (Kongruenssilemma). *Olkoon  $s, s', t, t'$  sanoja yli aakkoston  $\Sigma$  ja olkoon  $S, S', T, T'$  näitä kuvailevia malleja. Tällöin:*

$$S \cong_m S' \wedge T \cong_m T' \implies S \cdot T \cong_m S' \cdot T'$$

Lemman todistus on EF-peliä käyttämällä hyvin suoraviivainen. Oletuksen nojalla Pelaajalla II on voittostrategia peleissä  $EF_m(S, S')$  ja  $EF_m(T, T')$ . Pelaajan II voittostrategia pelille  $EF_m(S \cdot T, S' \cdot T')$  on kompositio kummas-takin oletuksen voittostrategiasta. Siis osille  $S$  ja  $S'$  käytetään ensimmäisen pelin voittostrategiaa ja osille  $T$  ja  $T'$  toisen pelin voittostrategiaa.

Kongruenssilemma sanoo, että mallin ominaisuudet määräytyvät osiensa ominaisuuksien mukaan. Täten mallit voidaan myös rakentaa osista ja näiden ominaisuuksista. Kongruenssilemmat ovat tyypillisiä EF-pelien sovelluksia. Näitä on todistettu monille muille logiikoilla sekä sanoja monimutkaisem-mille malleille. Esimerkiksi Shelah esittelee esimerkkejä monadisen logiikan kongruenssilemmoista lineaarijärjestyksille [14]. Thomas käyttää EF-pelejä todistaakseen kongruenssilemmän ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan muunnokselle jossa kaavat ovat prenex-normaali muodossa ja kvanttorit määrätynlaisessa prefiksimuodossa [16], sekä tähtivapaille säännöllisille ilmauksille [17].

Predikaattilogiikan ja tähtivapaiden ilmausten ekvivalenssi on hyvin tunnettu. Thomas ja Lippert esittelevät tähtivapaiden säännöllisten ilmauksien joissa ylimääräinen vakio kiinnitetään johonkin kieleen, eli relativoidut tähtivapaat ilmaukset (relativized star-free expressions) ja ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan eroja EF-pelin muunnoksen, konkatenatiopelin, avulla. Tässä työssään he näyttävät että relativoidut tähtivapaat ilmaukset ovat heikompia kuin vastaavat ensimmäisen kertaluokan predikaattilogiikan lauseet. [12]

## 5 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on tarkasteltu Ehrenfeucht–Fraïssé-pelejä ja näiden sovelluksia eri näkökulmista. Teoreettiselta kannalta tutkielmassa esiteltiin EF-peli, sen säännöt ja esiteltiin esimerkin avulla miten EF-peliä käytännössä pelataan. Lisäksi todistettiin, että Pelaajan II voittostrategia on ekvivalenssirelaatio joten voittostrategian avulla voidaan jakaa malleja ekvivalenssiluokkiin ja täten tarvittaessa samaistaa nämä mallit yhdeksi malliksi. Käytännön kannalta tutkielmassa on esimerkkien avulla esitelty miten EF-peliä sovelletaan määriteltävyyksymyksissä ja todistuksissa. Kirjallisuutta ja tutkimuksia on esitelty syvällistä aiheeseen tutustumista helpottamaan.

Tutkielmassa esiteltiin myös laajalti EF-peleihin liittyvää matemaattista peruskäsitteistöä, kuten kielet ja mallit sekä isomorfismi ja totuus predikaattilogiikassa. Lisäksi aivan aluksi luotiin pikainen katsaus EF-pelien historiaan ja syihin miksi EF-pelit ovat äärellisten mallien teoriassa niin keskeisessä osassa.

## Lähteet

- [1] Bosse, Uwe: *An Ehrenfeucht-Fraïssé Game for Fixpoint Logic and Stratified Fixpoint Logic*. Teoksessa *Selected Papers from the Workshop on Computer Science Logic, CSL '92*, sivut 100–114, London, UK, UK, 1993. Springer-Verlag, ISBN 3-540-56992-8. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=647842.736408>.
- [2] Ehrenfeucht, Andrzej: *An application of games to the completeness problem for formalized theories*. *Fundamenta Mathematicae*, 49(2):129–141, 1961. <http://eudml.org/doc/213582>.
- [3] Etessami, K. ja Wilke, T.: *An Until hierarchy for temporal logic*. Teoksessa *Logic in Computer Science, 1996. LICS '96. Proceedings., Eleventh Annual IEEE Symposium on*, sivut 108–117, Jul 1996.
- [4] Fagin, R., Stockmeyer, L. ja Vardi, M. Y.: *On monadic NP vs. monadic co-NP*. Teoksessa *Structure in Complexity Theory Conference, 1993., Proceedings of the Eighth Annual*, sivut 19–30, May 1993.
- [5] Fagin, Ronald: *Monadic Generalized Spectra*. *Mathematical Logic Quarterly*, 21(1):89–96, 1975.
- [6] Fraïssé, Roland: *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 71(4):363–388, 1954. <http://eudml.org/doc/81696>.
- [7] Gaifman, Haim: *On Local and Non-Local Properties*. Teoksessa Stern, J. (toimittaja): *Proceedings of the Herbrand Symposium*, nide 107 sarjassa *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, sivut 105 – 135. Elsevier, 1982. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X08718792>.
- [8] Grädel, Erich: *Computer Science Logic: 5th Workshop, CSL '91 Berne, Switzerland, October 7–11, 1991 Proceedings*, luku On transitive closure logic, sivut 149–163. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1992, ISBN 978-3-540-47285-8. <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0023764>.
- [9] Hanf, William: *Model-Theoretic Methods in the Study of Elementary Logic*. Teoksessa Addison, J. W. (toimittaja): *Journal of Symbolic Logic*, sivut 132–145. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1965.
- [10] Hodges, Wilfrid: *A Shorter Model Theory*. Cambridge University Press, 1997, ISBN 0-521-58713-1.
- [11] Ladner, Richard E.: *Application of model theoretic games to discrete linear orders and finite automata*. *Information and Control*,

- 33(4):281 – 303, 1977, ISSN 0019-9958. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019995877904430>.
- [12] Lippert, D. ja Thomas, W.: *Semigroups Theory and Applications: Proceedings of a Conference held in Oberwolfach, FRG, Feb. 23–Mar. 1, 1986*, luku Relativized star-free expressions, first-order logic, and a concatenation game, sivut 194–204. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1988, ISBN 978-3-540-39225-5. <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0083433>.
  - [13] McNaughton, Robert ja Papert, Seymour A.: *Counter-Free Automata (M.I.T. Research Monograph No. 65)*. The MIT Press, 1971, ISBN 0262130769.
  - [14] Shelah, Saharon: *The monadic theory of order*. Annals of Mathematics, sivut 379–419, 1975.
  - [15] Tarski, Alfred: *Grundzüge der Systemenkalküls I*. Fundamenta Mathematicae, 25(1):503–526, 1935. <http://eudml.org/doc/212807>.
  - [16] Thomas, Wolfgang: *An application of the Ehrenfeucht-Fraïssé game in formal language theory*. Mémoires de la Société Mathématique de France, 16:11–21, 1984.
  - [17] Thomas, Wolfgang: *Computation Theory and Logic*. luku A Concatenation Game and the Dot-depth Hierarchy, sivut 415–426. Springer-Verlag, London, UK, UK, 1987, ISBN 0-387-18170-9. <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=36545.36580>.
  - [18] Väänänen, J.: *Models and Games*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2011, ISBN 9780521518123.