Ehrenfeucht–Fraïssé-peleistä

Pauli Niva

Kandidaatintutkielma

HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 18. toukokuuta 2016

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Pauli Niva

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Ehrenfeucht–Fraïssé-peleistä

Oppiaine — Läroämne — Subject

Tietojenkäsittelytiede

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Kandidaatintutkielma	18. toukokuuta 2016	23

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tämä kirjallisuuskatsaus esittelee Ehrenfeucht–Fraïssé-pelin, sen ominaisuuksia sekä sitä, miten ja missä sitä käytetään. Ehrenfeucht–Fraïssé-peli on malliteorian työkalu, jonka avulla voidaan määritellä, toteuttavatko kaksi matemaattista rakennelmaa samat predikaattilogiikan lauseet eli ovatko rakennelmat elementaarisesti ekvivalentit. Malliteoria on matemaattisen logiikan ja laskettavuuden teorian osa-alue, joka tutkii matemaattisia rakennelmia. Näitä rakennelmia kutsutaan myös struktuureiksi tai malleiksi.

Pelin pääsovellusalue on todistuksissa, joissa osoitetaan, että jokin määrätty mallin ominaisuus ei ole ilmaistavissa predikaattilogiikan kielellä. Ehrenfeucht–Fraïssé-pelistä on kehitetty monia variaatioita eri tarpeisiin ja eri logiikoille.

Ehrenfeucht–Fraïssé-pelit ovat erityisen tärkeitä äärellisten mallien teoriassa ja sen sovelluksissa tietojenkäsittelytieteessä, koska ne ovat yksi harvoista malliteorian tekniikoista, jotka toimivat rajoituttaessa äärettömästä äärelliseen. Monet muut yleisesti käytetyt tekniikat, kuten kompaktisuusteoreema, eivät toimi äärellisillä malleilla.

ACM Computing Classification System (CCS):
Theory of computation → Finite Model Theory

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli, äärellisten mallien teoria

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tarkastellaan Ehrenfeucht–Fraïssé-pelejä, joita sovelletaan logiikan määrittelemättömyystulosten todistamisessa ja tietojenkäsittelytieteessä esimerkiksi tietokantakielien ilmaisuvoiman mittaamisessa tai verkkojen tutkimisessa. Alun perin Ehrenfeucht–Fraïssé-peli määriteltiin ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikalle, mutta tästä pelistä kehitettiin nopeasti erilaisia variaatioita monille muille logiikoille, kuten esimerkiksi kiintopistelogiikalle (fixpoint logic) [3] ja lineaariselle temporaalilogiikalle (linear temporal logic) [6].

Ensimmäisen kerran *elementaarisen ekvivalenssin* käsite eli se, että täsmälleen samat ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseet ovat tosia *malliteoreettisissa struktuureissa* A ja B, esiintyy kirjallisuudessa Alfred Tarskin artikkelissa Grundzüge der Systemenkalküls 1 vuodelta 1935 [26]. Roland Fraïssé käytti väitöskirjatyössään [9] vuonna 1954 *äärellistä isomorfismia* osoittaakseen, että kaksi malliteoreettista struktuuria ovat elementaarisesti ekvivalentit. Andrzej Ehrenfeucht muokkasi tästä Fraïssén menetelmästä peliteoreettisen version, joka julkaistiin vuonna 1961 Fundamenta Mathematicae:ssa [5]. Nykyisin nämä pelit tunnetaan nimeltä *Ehrenfeucht–Fraïssé-pelit* (jatkossa EF-pelit). Näitä kutsutaan joskus myös edestakaisin-peleiksi.

Äärellinen isomorfismi eli jono *osittaisisomorfismien* joukkoja siis karakterisoi elementaarisen ekvivalenssin. Tässä ideana on, että osittaisisomorfismeja tutkitaan yksi kerrallaan ja katsotaan, kuinka niitä voisi laajentaa aina yhä suuremmille osittaisisomorfismeille samalla muodostaen näistä laajennuksista joukkoja ja joukoista tarvittaessa jonoja.

Tämän tutkielman tavoitteena on esitellä täsmällisesti, mutta samalla kuitenkin havainnollisesti EF-peliä ja sen hyödyllisyyttä matemaattisen logiikan ja tietojenkäsittelytieteen saralla. Tässä työssä esitellään joitain logiikan peruskäsitteitä, mutta työn seuraaminen kuitenkin edellyttää lukijalta yliopistotasoisen matematiikan perusteiden hallintaa ja joitain logiikan peruskäsitteiden tuntemista. Lukijan oletetaan esimerkiksi tuntevan joukon ja kuvauksien käsitteet.

Luvussa kaksi esitellään lyhyesti peruskäsitteistö, kuten relaatiot, isomorfismi, kielet, mallit, elementaarinen ekvivalenssi ja sen algebrallinen karakterisointi. Kolmannessa luvussa esitellään itse EF-peli, sen kulku ja voittokriteerit ja -strategia sekä todistetaan, että toisen pelaajan voittostrategian avulla saadaan mallit jaettua ekvivalenssiluokkiin. Lisäksi kolmannessa luvussa tarkastellaan EF-pelin ominaisuuksia. Neljännessä luvussa esitellään EF-pelin sovellusaloja ja muutamia konkreettisia esimerkkejä siitä, miten EF-peliä sovelletaan.

2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa esitellään joitakin *ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan* peruskäsitteitä. Alaluku 2.1 käsittelee relaatioita. Alaluvussa 2.2 määritellään kieli ja sen alakäsitteet aakkosto, termit ja atomikaavat. Alaluvussa 2.3 puolestaan määritellään mallin sekä alimallin käsitteet. Alaluku 2.4 keskittyy isomorfiaan ja osittaisisomorfiaan. Lisäksi alaluvussa esitetään Tarskin totuusmääritelmä. Alaluvussa 2.5 määritellään elementaarinen ekvivalenssi ja esitellään isomorfian ja elementaarisen ekvivalenssin keskinäistä suhdetta. Peruskäsitteiden määrittelyssä seurataan karkeasti Wilfrid Hodgesia [14].

2.1 Relaatiot

Olkoon X jokin joukko. Joukon X *n-kertainen karteesinen tulo* tarkoittaa kaikkien joukon X alkioiden n-pituisten jonojen joukkoa. Tätä merkitään X^n tai vaihtoehtoisesti $X \times X \times \ldots \times X$, missä X esiintyy n kertaa. Esimerkiksi joukko $\mathbb{R}^2$ on järjestettyjen reaalilukuparien joukko. Sen geometrinen vastine on taso. $\mathbb{R}^3$ on järjestettyjen reaalilukukolmikoiden joukko. Sen geometrinen vastine on kolmiulotteinen avaruus.

Määritelmä 1 (Kaksipaikkainen relaatio)**.** Joukon X *kaksipaikkainen relaatio* R on mikä tahansa joukko joukon X alkioista muodostettuja pareja (x, y), joiden molemmat alkiot ovat joukossa X, eli $R \subset X^2$. Jos $(x, y) \in R$, sanotaan, että x on y:n kanssa *relaatiossa* R. Joukon X kaksipaikkainen relaatio R on:

- *refleksiivinen*, jos $(x, x) \in R$ kaikilla $x \in X$.
- *irrefleksiivinen*, jos $(x, x) \notin R$ kaikilla $x \in X$.
- *symmetrinen*, jos $(x, y) \in R$ aina kun $(y, x) \in R$.
- *antisymmetrinen*, jos seuraava ehto toteutuu: jos $(x, y) \in R$ ja $(y, x) \in R$, niin $x = y$.
- *transitiivinen*, jos seuraava ehto toteutuu: jos $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$, niin $(x, z) \in R$.
- *vertailullinen*, jos $(x, y) \in R$ tai $(y, x) \in R$ kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$.

2.2 Kielet

Tässä alaluvussa määritellään aakkosto, termit, atomikaavat sekä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kieli. Tarkemmin sanottuna, ei ole olemassa vain yhtä predikaattilogiikan kieltä, vaan jokaista aakkostoa kohden on oma kielensä, jolla voidaan puhua sen aakkoston malleista.

Määritelmä 2 (Aakkosto)**.** Olkoot l, m ja n kardinaalilukuja. *Aakkosto* on joukko $L = \{R_i \mid i \leq l\} \cup \{c_i \mid i \leq m\} \cup \{f_i \mid i \leq n\}$, joka sisältää l relaatiosymbolia R_i, m vakiosymbolia c_i ja n funktiosymbolia f_i.

Jokaiseen relaatiosymboliin R liittyy *paikkaluku* $\#R$ ilmaisemaan sitä, kuinka monipaikkainen kyseinen relaatio on. Samoin jokaiseen funktiosymboliin liittyy paikkaluku $\#f$ ilmaisemaan sitä, kuinka monipaikkainen funktio on kyseessä. Jos jokin kardinaaliluvuista on 0, niin tällöin tätä vastaavia symboleja ei ole aakkostossa. Aakkostoa kutsutaan *relationaaliseksi*, jos se ei sisällä funktiosymboleja tai vakiosymboleja [28].

Määritelmä 3 (Termit)**.** Olkoon R joukko relaatioita, C joukko vakioita ja F joukko funktioita, jotka muodostavat aakkoston L. Olkoon X joukko muuttujia. *Termien* joukko T yli aakkoston L sekä muuttujien joukon X on joukko äärellisiä merkkijonoja, joka määritellään seuraavasti:

- Jos $x \in X$, niin $x \in T$.
- Jos $c \in C$, niin $c \in T$.
- Jos $f \in F$, $\#f = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $t_1, \ldots, t_n \in T$, niin $f(t_1, \ldots, t_n) \in T$.

Määritelmä 4 (Atomikaavat)**.** Olkoon R joukko relaatioita, C joukko vakioita ja F joukko funktioita, jotka muodostavat aakkoston L. Olkoon T termien joukko yli aakkoston L. *Atomikaavojen* joukko A on joukko äärellisiä merkkijonoja, joka määritellään seuraavasti:

- Jos $s, t \in T$, niin $s = t \in A$. Toisin sanoen $s = t$ on atomikaava.
- Jos $r \in R$, $\#r = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $t_1, \ldots, t_n \in T$, niin $r(t_1, \ldots, t_n) \in A$.

Määritelmä 5 (Kieli)**.** Olkoon A atomikaavojen joukko ja olkoon X muuttujien joukko. *Kieli* K yli aakkoston L on kokoelma merkkijonoja, jotka muodostetaan rekursiivisesti atomikaavoista seuraavanlaisesti:

- Kaikki atomikaavat kuuluvat kieleen K eli $A \subset K$.
- Jos ψ ja $\varphi \in K$, niin $\neg\varphi \in K$, $(\psi \vee \varphi) \in K$, $(\psi \wedge \varphi) \in K$, $(\psi \rightarrow \varphi) \in K$, sekä $(\psi \leftrightarrow \varphi) \in K$.
- Jos $\varphi \in K$ ja $x \in X$, niin $\forall x(\varphi) \in K$ ja $\exists x(\varphi) \in K$.

Kieli K on ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kieli, joka sisältää merkkijonoja. Näitä merkkijonoja kutsutaan kirjallisuudessa usein myös *kaavoiksi*. Kaavojen *alikaavoja* ovat kaikki kaavan osat, jotka itsekin ovat kaavoja.

2.3 Mallit

Tässä alaluvussa määritellään, mikä on *malli* eli *struktuuri*. Karkeasti ottaen se on joukko, jolla on jonkinlainen rakenne ja joka koostuu relaatioista, vakioista ja funktioista. Malli ja struktuuri ovat synonyymeja. Näitä kahta sanaa käytetään rinnakkain kontekstista riippuen sen mukaan, kumpi soveltuu kyseiseen tilanteeseen. Sanaa "malli" käytetään yleensä kontekstissa "Olkoon M malli kaavalle φ", mikä tarkoittaa samaa kuin "Olkoon M struktuuri siten, että $M \models \varphi$" Nämä konseptit määritellään myöhemmin tässä luvussa.

Määritelmä 6 (Malli)**.** Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin L-*malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M, jota kutsutaan mallin *perusjoukoksi*, eli *universumiksi*.
- Relaatioista $R^M \subset M^n$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.
- Funktioista $f^M : M^m \to M$, jokaiselle funktiosymbolille $f \in L$, $\#f = m$, missä $m \in \mathbb{Z}_+$.

Relaatiota R^M sanotaan relaatiosymbolin R *tulkinnaksi mallissa* M, funktiota f^M sanotaan funktiosymbolin f *tulkinnaksi mallissa* M, ja alkiota c^M kutsutaan vakiosymbolin c *tulkinnaksi mallissa* M.

Malli siis antaa aakkoston L symboleille *semantiikan* eli merkityksen sekä kontekstin, jossa formaalin kielen lauseet voivat olla tosia tai epätosia. Samaa merkintää M käytetään sekä mallista kokonaisuutena että mallin *universumista* eli mallin alkioiden joukosta.

Relaatiosymbolin R ja sen tulkinnan R^M välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan "tietokone" ja tietokoneen välisellä erolla. Sana "tietokone" on suomen kieltä, joka koostuu yhdeksästä merkistä ja sitä voidaan käyttää muodostettaessa suomenkielisiä lauseita. Tietokone taas on fyysinen laite, joka käsittelee tietoa ohjelmointinsa mukaisesti, eikä sitä voida käyttää suomen kielen lauseiden osana. Lause "Tietokoneeni on Mac" on totta tai epätotta, riippuen siitä, mihin nimenomaiseen tietokoneeseen sana "tietokone" viittaa.

Määritelmä 7 (Alimalli)**.** Oletetaan, että A on L-malli. A:n *alimalli* on sellainen L-malli B, että

- $B \subset A$.
- jos $R \in L$ on relaatiosymboli ja $\#R = n \in \mathbb{Z}_+$, niin tällöin $R^B = R^A \cap B^n$.
- jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin tällöin $c^B = c^A$ ja $c^B \in B$.

- jos $f \in L$ on funktiosymboli ja $\#f = n \in \mathbb{Z}_+$, niin tällöin $f^A(B^n) \subset B$ ja $f^B = f^A \restriction B^n$ eli f^B on f^A:n rajoittuma osajoukkoon B^n. Siis B on suljettu f^A:n suhteen.

Olkoon A malli ja $B \subset A$. Tällöin $\langle B \rangle$ on pienin A:n alimalli, joka sisältää joukon B.

2.4 Isomorfia

Mallien kohdalla puhuttiin "jonkinlaisesta rakenteesta" eli struktuurista. Mallin objekteille annettiin nimiä, symboleja ja kaavoja, jotta tätä rakennetta voitiin kuvailla. Malleja, joiden rakenne on samanlainen, kutsutaan isomorfisiksi.

Määritelmä 8 (Isomorfismi)**.** Oletetaan, että L on aakkosto ja A sekä B ovat L-malleja. Kuvaus $g : A \to B$ on *isomorfismi* mallista A mallille B, jos

- g on bijektio.
- jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$ pätee $g(c^A) = c^B$.
- jokaisella relaatiosymbolilla $R \in L, \#R = n$ pätee $(a_1, \ldots, a_n) \in R^A \iff (g(a_1), \ldots, g(a_n)) \in R^B$.
- jokaisella funktiosymbolilla $f \in L, \#f = m$ pätee $g(f^A(a_1, \ldots, a_m)) = f^B(g(a_1), \ldots, g(a_m))$.

Jos on olemassa isomorfinen kuvaus $A \to B$, niin sanotaan, että A ja B ovat isomorfiset ja tätä merkitään $A \cong B$.

Isomorfia mallien välillä on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen. Jotta mallien välillä voisi olla isomorfia, mallien täytyy olla samankokoiset, sillä muuten niiden välillä ei voi olla bijektiota eikä siten isomorfiaakaan. EF-pelien kannalta tärkeä isomorfian ominaisuus on, että se säilyttää totuuden eli jos L-mallit A ja B ovat isomorfiset, niin kaikilla ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseille φ pätee $A \models \varphi$ jos ja vain jos $B \models \varphi$ pätee. Seuraava määritelmä on Kulikovilta [17]:

Määritelmä 9 (Osittaisisomorfismi)**.** Olkoon L aakkosto sekä olkoot A ja B kumpikin L-malleja. Olkoon $A' \subset A$ ja $B' \subset B$. Lisäksi olkoon $p : A' \to B'$. Kuvaus p on *osittaisisomorfismi*, jos on olemassa isomorfismi $g : \langle A' \rangle \to \langle B' \rangle$, jolle $g \restriction A' = p$ eli kuvaus p on kuvauksen g rajoittuma osajoukkoon A'.

Toisin kuin isomorfismissa, osittaisisomorfismissa totuus ei välttämättä säily. Joissain tilanteissa osittaisisomorfismi kuitenkin säilyttää totuuden. Erityisesti näin on relationaalisten aakkostojen tapauksessa. Mallien A ja B välisten osittaisisomorfismien joukkoa merkitään $\mathrm{Part}(A, B)$. Seuraavat kaksi määritelmää mukailevat Ebbinghausia [4]:

Määritelmä 10 (Äärellinen isomorfismi)**.** Olkoon L aakkosto sekä olkoot A ja B kumpikin L-malleja. L-mallit A ja B ovat *äärellisesti isomorfiset*, jos on olemassa jono $(I_n), n \in \mathbb{N}$ joukkoja siten, että $\emptyset \in I_n \subseteq \mathrm{Part}(A, B)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, ja jolla pätee seuraavat *Back* ja *Forth* ehdot:

- (Back) Jokaisella $p \in I_{n+1}$ ja $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolla $p \cup \{(a, b)\} \in I_n$.
- (Forth) Jokaisella $p \in I_{n+1}$ ja $a \in A$ on olemassa $b \in B$, jolla $p \cup \{(a, b)\} \in I_n$.

L-mallien A ja B äärellistä isomorfismia merkitään $A \cong_f B$.

Määritelmä 11 (Mallien osittaisisomorfismi)**.** Olkoon L aakkosto sekä olkoot A ja B kumpikin L-malleja. L-mallit A ja B ovat *osittaisisomorfiset*, jos on olemassa joukko I siten, että $\emptyset \in I \subseteq \mathrm{Part}(A, B)$, ja jolla pätee seuraavat *Back* ja *Forth* ehdot:

- (Back) Jokaisella $p \in I$ ja $b \in B$ on olemassa $a \in A$, jolla $p \cup \{(a, b)\} \in I$.
- (Forth) Jokaisella $p \in I$ ja $a \in A$ on olemassa $b \in B$, jolla $p \cup \{(a, b)\} \in I$.

L-mallien A ja B osittaisisomorfisuutta merkitään $A \cong_p B$.

Määritellään seuraavaksi, mitä keskeisellä käsitteellä *totuus* tarkalleen ottaen tarkoitetaan.

Määritelmä 12 (Tarskin totuusmääritelmä)**.** Oletetaan, että A on L-malli ja olkoon L aakkosto ja K kieli. Määritellään rekursiivisesti, että kielen K kaava φ on totta A:ssa, eli A toteuttaa φ:n, eli $A \models \varphi$ seuraavasti:

- Jos φ on kaava $s = t$, missä s ja t ovat termejä, niin $A \models \varphi$ jos ja vain jos $s^A = t^A$.
- Jos φ on kaava $R(t_1, \ldots, t_n)$, missä R on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $A \models \varphi$ jos ja vain jos $(t_1^A, \ldots, t_n^A) \in R^A$.
- $A \models \neg\varphi$ jos ja vain jos $A \not\models \varphi$.
- $A \models (\varphi \wedge \psi)$ jos ja vain jos $A \models \varphi$ ja $A \models \psi$.
- $A \models (\varphi \vee \psi)$ jos ja vain jos $A \models \varphi$ tai $A \models \psi$.
- $A \models (\varphi \rightarrow \psi)$ jos ja vain jos $A \not\models \varphi$ tai $A \models \psi$.
- $A \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ jos ja vain jos $A \models \varphi$ ja $A \models \psi$ tai $A \not\models \varphi$ ja $A \not\models \psi$.
- $A \models \forall x(\varphi)$ jos ja vain jos jokaisella mallin A alkiolla a pätee $A \models \varphi$ kun muuttaja x tulkitaan a:ksi.
- $A \models \exists x(\varphi)$ jos ja vain jos löytyy jokin mallin A alkio a, jolla $A \models \varphi$, kun muuttuja x tulkitaan a:ksi.

2.5 Elementaarinen ekvivalenssi

Siinä missä isomorfismi kuvailee kahden mallin rakenteellista samanlaisuutta, elementaarinen ekvivalenssi puolestaan vertailee malleja suhteessa käytettyyn kieleen.

Määritelmä 13 (Elementaarinen ekvivalenssi)**.** Olkoon L aakkosto, joka muodostaa kielen K. Olkoot A ja B kummatkin L-malleja. A:ta ja B:tä sanotaan *elementaarisesti ekvivalenteiksi*, jos kaikilla lauseilla $S \in K$ pätee $A \models S \iff B \models S$. Tätä merkitään $A \equiv B$.

Toisin sanoen, jos kaksi mallia ovat elementaarisesti ekvivalentit, niitä ei voi erottaa toisistaan millään ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseella. Isomorfian ja elementaarisen ekvivalenssin määritelmistä voidaan osoittaa seuraava tärkeä tulos:

Korollaari 14. *Jos L-mallit A ja B ovat isomorfiset, niin ne ovat elementaarisesti ekvivalentit.*

On huomattava, että tämä ei päde toisinpäin. Mallien A ja B välinen elementaarinen ekvivalenssi ei kerro mitään mallien isomorfisuudesta. Äärellisten mallien eräs tärkeä ominaisuus on, että ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka karakterisoi yksittäiset äärelliset mallit isomorfiaan asti [28]:

Lause 15. *Jokaiselle äärelliselle mallille A on olemassa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lause φ siten, että $B \models \varphi$, jos ja vain jos mielivaltainen malli B ja malli A ovat isomorfiset.*

Vaikka jokaiselle mallille on ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lause, joka karakterisoi kyseisen mallin, isomorfia on kuitenkin liian vahva elementaarisen ekvivalenssin ilmaisemiseen. Esimerkiksi, mitkä tahansa kaksi tiheää lineaarijärjestystä ilman päätepisteitä ovat elementaarisesti ekvivalentit mutta eivät kuitenkaan isomorfiset. Erityisesti lineaarijärjestykset $(\mathbb{Q}, <)$ ja $(\mathbb{R}, <)$ ovat elementaarisesti ekvivalentit, eli esimerkiksi reaalilukujen täydellisyyttä ei voi ilmaista ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kielellä.

Ratkaisu siihen ongelmaan, että isomorfismi on liian vahva elementaarisen ekvivalenssin ilmaisemiseksi, on isomorfismin heikennys, äärellinen isomorfismi. Fraïssén kehittämä äärellinen isomorfismi karakterisoi elementaarisen ekvivalenssin:

Lause 16 (Fraïssén lause)**.** *Olkoon L äärellinen aakkosto ja olkoot A ja B kumpikin L-malleja. Tällöin $A \equiv B$ jos ja vain jos $A \cong_f B$. Toisin sanoen, A ja B ovat elementaarisesti ekvivalentit jos ja vain jos A ja B ovat äärellisesti isomorfiset.*

Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan ole tarvetta käyttää äärellistä isomorfismia, koska kaikkiin käytettyihin esimerkkeihin riittää mallien osittaisisomorfismi. Tästä syystä tutkielmassa on otettu vapaus heikentää Fraïssén lausetta siten, että äärellisen isomorfismin sijaan rajoitutaan osittaisisomorfismiin. Tämä heikennys oikeutetaan sillä, että jos kaksi mallia ovat osittaisisomorfiset, niin ne ovat äärellisesti isomorfiset.

Lause 17 (Fraïssén lauseen heikennetty versio)**.** *Olkoon L äärellinen aakkosto ja olkoot A ja B kumpikin L-malleja. Tällöin jos $A \cong_p B$, niin $A \equiv B$. Toisin sanoen, A ja B ovat elementaarisesti ekvivalentit jos A ja B ovat osittaisisomorfiset.*

Fraïssén teoreema ja sen heikennetty muoto, jota tässä tutkielmassa käytetään, antavat siis algebrallisen keinon käsitellä elementaarista ekvivalenssia, jonka käyttö suoraan määritelmästä olisi hyvin hankalaa ja rajallista. Toinen keino käsitellä elementaarista ekvivalenssia on Fraïssén teoreeman peliteoreettinen muotoilu EF-peli.

3 EF-peli

Tässä luvussa esitellään EF-peli ja sen säännöt sekä strategian ja voittostrategian käsitteet, joissa seurataan pitkälti Jouko Väänästä [28]. Lisäksi havainnollistetaan EF-peliä esimerkin avulla kahdelle verkolle.

EF-peli on kahdelle pelaajalle, joita kutsutaan nimillä Pelaaja I ja Pelaaja II. Peliä pelataan kahdella mallilla A ja B, joilla on sama relationaalinen aakkosto.

Huomautus. Jatkossa aakkostolla tarkoitetaan aina relationaalista aakkostoa, ellei toisin mainita.

Pelaaja II haluaa osoittaa, että kyseiset mallit ovat jossain määrin samankaltaiset eli että kyseisten mallien välillä on osittaisisomorfismi. Pelaaja I haluaa puolestaan osoittaa, että mallit ovat erilaiset. Pelissä on äärellinen määrä vuoroja ja vuorojen määrä on alussa sovittu.

3.1 Pelin kulku

Pelin kulku kuvataan kirjallisuudessa lähes aina samalla tavalla. Määritellään aluksi mielivaltaisen kierroksen kulku ja kummankin pelaajan voittokriteerit.

Määritelmä 18 (Kierroksen kulku)**.** Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista A tai B sekä jonkin alkion $a_i \in A$ tai $b_i \in B$ tästä mallista.

- Tämän jälkeen Pelaaja II valitsee malleista sen, jota Pelaaja I ei valinnut ja valitsee tästä mallista jonkin alkion.

Määritelmä 19 (Voittokriteeri)**.** Olkoon $a = (a_1, \dots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \dots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i. Pelaaja II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella $i \leq k$ pari (a, b) määrää osittaisen isomorfismin $A \to B$ eli on olemassa kuvaus $h : A \to B$ siten, että $a_i \in A \mapsto b_i \in B$. Muussa tapauksessa Pelaaja I voittaa.

Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossaan mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta siitä, mitä valintoja toinen pelaaja tekee, kutsutaan *voittostrategiaksi*. Jos Pelaajalla II on voittostrategia EF-pelissä $EF_k(A, B)$, tällöin tätä merkitään $A \sim_k B$.

Lause 20. *Relaatio $\sim_k$ on L-mallien ekvivalenssirelaatio.*

Todistus: Todistus on Väänäsen teoksessa [28] esiintyvää todistusta mukaileva. Oletetaan, että A, B ja C ovat kaikki saman aakkoston L-malleja. Tällöin:

- Refleksiivisyys: $A \sim_k A$.
  Voittostrategia Pelaajalle II on valita aina sama alkio, jonka Pelaaja I valitsi. Täten $\sim_k$ on refleksiivinen.

- Symmetrisyys: $A \sim_k B \iff B \sim_k A$.
  EF-pelin määritelmä ei tee millään tavoin eroa pelien $EF_k(A, B)$ ja $EF_k(B, A)$ välillä. Täten jos $A \sim_k B$, niin Pelaaja II voi käyttää samaa voittostrategiaa myös pelissä $EF_k(B, A)$. Jos taas $B \sim_k A$, niin Pelaaja II voi käyttää samaa voittostrategiaa pelissä $EF_k(A, B)$. Siis $\sim_k$ on symmetrinen.

- Transitiivisuus: $A \sim_k B \wedge B \sim_k C \implies A \sim_k C$.
  Todistetaan väite käsittelemällä kaikki väitteen ja implikaation pelit samaan aikaan. Peli $EF_k(A, C)$ pelataan siten, että Pelaaja II tekee valintansa pelaamalla samaan aikaa kuvitteellisia pelejä $EF_k(A, B)$ ja $EF_k(B, C)$. Oletetaan, että peli $EF_k(A, C)$ alkaa Pelaajan II valinnalla $a_1 \in A$, jolloin Pelaaja II valitsee seuraavalla strategialla:

  Pelaaja II kuvittelee, että Pelaaja I valitsi alkion $a_1 \in A$ pelissä $EF_k(A, B)$, jolloin hän valitsee alkion $b_1 \in B$ pelin $EF_k(A, B)$ voittostrategian mukaisesti. Seuraavaksi Pelaaja II kuvittelee, että äskeinen valinta oli Pelaajan I valinta pelissä $EF_k(B, C)$ ja valitsee alkion $c_1 \in C$ pelin $EF_k(B, C)$ voittostrategian mukaisesti. Tämä valinta c_1 on Pelaajan II vastaus Pelaajan I valintaan a_1 pelissä $EF_k(A, C)$.

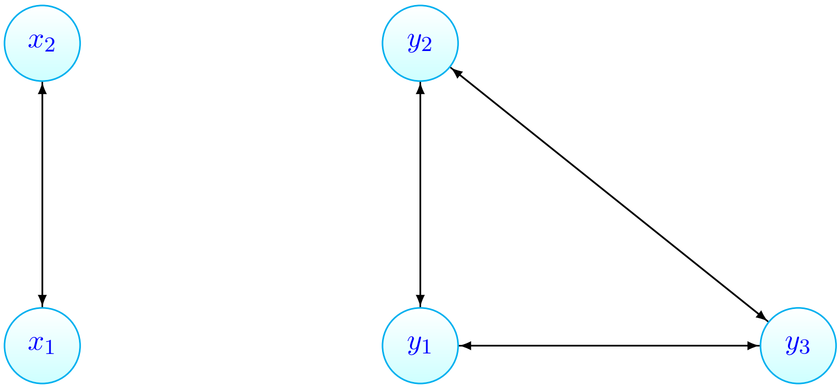
Jos Pelaaja I valitseekin alkion $c_1 \in C$, niin Pelaaja II yksinkertaisesti seuraa strategiaa toiseen suuntaan. Näin voidaan toimia, sillä kuten äsken todistettiin, voittostrategiat ovat symmetrisiä.

Kun peliä on pelattu k-kierrosta, niin meillä on valinnoista muodostuneet jonot $a_1, \ldots, a_k$, $b1, \ldots, b_k$ ja $c_1, \ldots, c_k$. Oletusten nojalla on olemassa osittaisisomorfismit $f : \{a_1, \ldots, a_k\} \to \{b_1, \ldots, b_k\}$ ja $g : \{b_1, \ldots, b_k\} \to \{c_1, \ldots, c_k\}$. Nyt voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus $(g \circ f)(a_i) = g(f(a_i))$ siten, että $a_i \mapsto c_i$ on osittaisisomorfismi, kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. Täten $A \sim_k C$, siis relaatio $\sim_k$ on transitiivinen.

Koska relaatio $\sim_k$ on refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen, niin se on tällöin ekvivalenssirelaatio. □

Kuten aikaisemmin todettiin, EF-pelistä on kehitetty monia erilaisia variaatioita, kuten esimerkiksi EF-peli verkoille. Verkoilla voidaan esittää ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaavoja. Verkon kaaret ovat relaatioita verkon pisteiden välillä. Havainnollistetaan nyt EF-pelin ideaa yksinkertaisella esimerkillä kahden kierroksen EF-pelillä verkoille X ja Y, joita havainnollistetaan kuvassa 1. Lisäksi esitetään samalla voittostrategia Pelaajalle II.

Esimerkki 21. Tässä EF-pelissä verkoille ideana on, että rakennetaan pelaajien tekemistä valinnoista kahta uutta verkkoa A ja B siten, että verkosta X valittu solmu merkitään verkon A solmuksi a_i ja verkosta Y valittu solmu verkon B solmuksi b_i, missä i ilmaisee kierrosta, jolla valinta on tapahtunut. Uudet verkot A ja B rakennetaan helpottamaan tehtyjen valintojen ja näiden relaatioiden muodostaman kokonaisuuden hahmottamista ja hallintaa.



Verkko X Verkko Y

Kuva 1. Verkot X ja Y.

Kierros 1:

- Pelaaja I voi valita solmun kummasta verkosta tahansa.
- Jos Pelaaja I valitsee solmun verkosta X, Pelaaja II valitsee vastinpariksi verkosta Y solmun y_1, muulloin Pelaaja II valitsee vastinpariksi solmun x_1.
- Oletetaan, että Pelaaja I valitsee solmun x_2. Tällöin meillä on $a_1 \coloneqq x_2, b_1 \coloneqq y_1$ ensimmäisen kierroksen jälkeen.

Kierros 2:

- Minkä tahansa solmun Pelaaja I valitseekin, Pelaaja II voi peilata valinnan. Oletetaan, että tällä kertaa Pelaaja I valitsee verkosta Y.
- Jos Pelaaja I valitsee solmun y_1, eli saman solmun kuin $b_1 = y_1$, on Pelaajan II valittava vastinpariksi Pelaajan I ensimmäisen kierroksen valinta x_2.
- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun y_2 tai y_3, eli jommankumman solmun $b_1 = y_1$ naapureista, Pelaajan II täytyy valita vastinpariksi solmun $a_1 = x_2$ naapuri.
- Toisen kierroksen jälkeen tilanne on $a_2 \coloneqq x_2, b_2 \coloneqq y_1$ tai $a_2 \coloneqq x_1, b_2 \coloneqq y_2/y_3$.
- Pelaaja II voittaa, koska kuvaus f verkolta A verkolle B, $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$ säilyttää naapuruussuhteet, eli f on osittaisisomorfismi.

Jos Pelaaja I olisi tehnyt toisellakin kierroksella valintansa verkosta X:

- Jos Pelaaja I valitsee solmun x_1, niin Pelaaja II valitsee solmun y_1.
- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun x_2, niin Pelaaja II valitsee solmun y_2.
- Tällöin toisen kierroksen jälkeen tilanne olisi ollut $a_2 \coloneqq x_1, b_2 \coloneqq y_1$ tai $a_2 \coloneqq x_2, b_2 \coloneqq y_2$.
- Pelaaja II voittaa tässäkin skenaariossa, koska kuvaus f verkolta A verkolle B, $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$ säilyttää naapuruussuhteet, eli f on osittaisisomorfismi.

3.2 EF-pelin ominaisuuksia

EF-peleillä on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista muutamia esitellään tässä alaluvussa. Aikaisemmin esiteltiin voittostrategian käsite, jossa todettiin, että voittostrategian omaava pelaaja voittaa kyseisen pelin, teki toinen pelaaja mitä tahansa. Tämän suora seuraus on, että vain toisella pelaajalla voi olla voittostrategia kyseisessä EF-pelissä. Tarkemmin sanottuna:

Lause 22. *Olkoot A ja B malleja. Tällöin enintään toisella pelaajista I ja II on voittostrategia k-kierroksisessa EF-pelissä* $EF_k(A, B)$.

Pelaaja II voittaa EF-pelin $EF_k(A, B)$, jos osittaisisomorfismi $A \to B$ toteutuu jokaisella kierroksella. Tästä seuraa, että Pelaaja II olisi voittanut kaikki EF-pelit $EF_r(A, B), r \leq k$. Tämä ominaisuus voidaan ilmaista voittostrategian näkökulmasta seuraavasti:

Lause 23. *Jos Pelaajalla II on voittostrategia EF-pelissä* $EF_k(A, B)$, *niin Pelaajalla II on voittostrategia kaikissa peleissä* $EF_r(A, B), r \leq k$.

Tämä ei kuitenkaan päde peleillä $EF_t(A, B), k < t$. Esimerkiksi, jos edellä olevassa esimerkissä 21 pelattu kahden kierroksen EF-peli verkoille olisi pelattu kolmekierroksisena pelinä, voittostrategia olisikin Pelaajalla I. Hän yksinkertaisesti valitsisi yksi kerrallaan kaikki verkon Y solmut, jolloin kolmannella kierroksella Pelaaja II ei enää pystyisi valitsemaan solmua, joka säilyttää relaatiot.

Lause 23 ei kuitenkaan päde kaikissa EF-peleissä. Esimerkiksi Vadim Kulikov ja Tapani Hyttinen [15] ovat kehittäneet EF-pelistä version, jota he kutsuvat *heikoksi EF-Peliksi.* Tässä pelissä, vaikka Pelaajalla II olisi voittostrategia suurempikierroksisessa pelissä, Pelaajalla I voi olla voittostrategia samoilla malleilla pelattavassa vähempikierroksisessa EF-pelissä.

Heikon EF-pelin ero tavalliseen EF-peliin on siinä, että heikossa EF-pelissä riittää, että pelin päättyessä mallien A ja B välillä on osittaisisomorfismi $A \to B$, mutta näin ei välttämättä täydy olla pelin aikaisempien kierroksien jälkeen, kun taas tavallisessa EF-pelissä osittaisisomorfian pitää päteä kaikkien kierrosten jälkeen.

Esitellään lopuksi Ehrenfeuchtin ja Fraïssen teoreema, eli se miten EF-peli, elementaarinen ekvivalenssi ja Fraïssén teoreema nivoutuvat yhteen.

Lause 24 (Ehrenfeucht–Fraïssé)**.** *Olkoon L aakkosto ja olkoot A ja B kumpikin L-malleja. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

- $A \equiv B$, *toisin sanoen A ja B eivät ole erotettavissa toisistaan ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseilla.*
- *Kaikilla kokonaisluvuilla k pätee* $A \sim_k B$, *toisin sanoen Pelaajalla II on voittostrategia k-kierroksisessa EF-pelissä.*

4 Sovelluksia

EF-peli on teoreettisen tietojenkäsittelyn ja äärellisten mallien teorian työkalu, jota pääasiassa käytetään määriteltävyyskysymyksiin ja todistusten apuna. Äärellisten mallien teoriaa ja sen menetelmää EF-peliä voidaan soveltaa tietojenkäsittelytieteessä muun muassa verifioinnissa.

Alaluvussa 4.1 esitellään EF-pelin yleisiä sovellusaloja. Lisäksi esitellään metodologiateoreema sekä määritellään Boolen kysely ja havainnollistetaan esimerkin avulla, miten metodologiateoreemaa käytetään sovelluksissa. Alaluvussa 4.2 käsitellään sitä, mitä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikalla voi ilmaista ja mitä rajoitteita sillä on. Alaluvussa 4.3 määritellään kvanttoriaste ja esitellään miten EF-pelejä sovelletaan kongruenssiapulauseiden saamiseksi. Alaluvussa 4.4 määritellään ja esitellään bisimulaatio, joka on eräänlainen heikennetty versio EF-pelistä.

4.1 Sovellusaloja

Kaikki äärelliset mallit voidaan koodata verkkoina, puina tai merkkijonoina [4]. Tällöin niitä voidaan käyttää laskennan olioina ja siten niillä voidaan kuvata äärellistilallisia systeemejä ja tutkia näiden toiminnan oikeellisuutta.

Yksi sovellusala on tietokantateoria, koska relationaalinen malli samaistaa tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa [21]. Formaalin kielen kaavat voidaan siis ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida [23]. Ja toisinpäin, jonkin laskennallisen vaativuusluokan kyselyitä voidaan esittää jollakin formaalilla kielellä.

Muita tietojenkäsittelytieteen osa-alueita, joihin EF-peliä voi soveltaa, on esimerkiksi vaativuusteoria, koska äärelliset mallit tarjoavat laskennan vaativuusluokkien loogisen karakterisoinnin ja mahdollistavat vaativuusteoreettisten tulosten todistamisen tätä kautta [21]. Esimerkiksi P $\neq$ NP -ongelma redusoituu kysymykseksi: onko kolmella värillä väritettävien suunnattujen verkkojen luokka määriteltävissä pienimmän kiintopisteen logiikassa [16]? Määriteltävyystulosten todistuksissa seuraava teoreema on keskeinen:

Lause 25 (Metodologiateoreema)**.** *Ei ole olemassa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lausetta, joka ilmaisee ominaisuuden P, jos ja vain jos kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, on olemassa mallit A ja B, joille pätee:*

- *Ominaisuus P on totta A:ssä.*
- *Ominaisuus P on epätotta B:ssä.*
- *$A \sim_n B$, eli Pelaaja II voittaa n-kierroksisen EF-pelin A:lla ja B:llä.*

Esitetään yksinkertainen relaatioalgebran ongelma esimerkkinä siitä, miten metodologiateoreemaa käytetään määrittelemättömyystuloksia todistettaessa. Tässä esimerkissä käytämme Boolen kyselyä, joten ensimmäiseksi määritellään tämän tarkasti.

Määritelmä 26 (Boolen kysely)**.** Olkoon M malli. Tällöin *Boolen kysely Q* on kuvaus $Q : M \to \{0, 1\}$, joka säilyy isomorfismeissa. Siis jos $A \cong B$, niin $Q(A) = Q(B)$. Kuvauksen maalijoukon alkioista 1 merkitsee totuusarvoa “tosi” ja 0 totuusarvoa “epätosi”.

Esimerkki 27. Olkoon A malli, joka sisältää vain vakioita. Tutkitaan Boolen kyselyä "onko A:ssa parillinen määrä alkioita?". Konstruoidaan mallit A ja B todistusta varten seuraavanlaisiksi: $A := \{a_1, \ldots, a_n\}$ ja $B := \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$ on yhtäsuuri kuin mielivaltaisen pelin kierrosten määrä. Eli toisessa mallissa on yksi alkio enemmän kuin toisessa. Täten toinen malleista sisältää parittoman määrän alkioita ja toinen parillisen määrän alkioita.

Voittostrategia Pelaajalle II on sellainen, että Pelaajan I valitessa mielivaltaisella kierroksella i alkion jommastakummasta mallista, Pelaajan II voittostrategia on, että hän yksinkertaisesti valitsee pelin sääntöjen mukaisesti alkion toisesta mallista. Tämä strategia toimii, koska mallissa B on yksi alkio enemmän kuin mikä pelattavien kierroksien määrä on, eikä mallien alkioilla ole mitään relaatioita keskenään. Koska $A \sim_n B$ ja koska toisessa mallissa on parillinen ja toisessa pariton määrä alkioita, niin ominaisuus "parillinen määrä alkioita" on totta toisessa mallissa ja epätotta toisessa. Täten metodologiateoreeman nojalla Boolen kysely "onko mallissa A parillinen määrä alkioita" ei ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseeksi eikä siten myöskään relaatioalgebran kyselyksi.

Edellinen esimerkki voidaan muuttaa koskemaan verkkoja lisäämällä malleihin kaarirelaatio R. Mallin A alkiot ovat verkon solmuja siten, että solmusta a_i on kaari solmuun a_{i+1}. Lisäksi viimeisestä solmusta on kaari takaisin ensimmäiseen solmuun. Vastavuoroisesti B muodostetaan samalla tavalla. Eli verkoille ei ole olemassa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lausetta, jolla voisi esittää sen ominaisuuden, että verkko sisältää parillisen määrän solmuja.

4.2 Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan rajoitteet

Verkoilla on paljon ominaisuuksia, jotka eivät ole määriteltävissä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan keinoin [10]. Jos G on äärellisten verkkojen luokka, niin esimerkiksi seuraavat kyselyt eivät ole määriteltävissä G:lle ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan keinoin: transitiivinen sulkeuma, tasoverkkoisuus, eulerilaisuus, hamiltonilaisuus, k-värittyvyys, kaikilla $k \geq 2$, asyklisyys, leikkaussolmu ja verkon yhtenäisyys [19].

Todistetaan epäsuorasti verkon yhtenäisyyden määrittelemättömyys esimerkin vuoksi.

Esimerkki 28. Oletetaan, että ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lause φ määrittelee verkkojen yhtenäisyyden aakkostossa, joka muodostuu kaksipaikkaisesta relaatiosymbolista E. Olkoon L jokin lineaarijärjestys. Muodostetaan lineaarijärjestyksestä L suunnattu verkko G seuraavanlaisesti: Määritellään ensimmäiseksi seuraajarelaatio S lineaarijärjestyksestä L

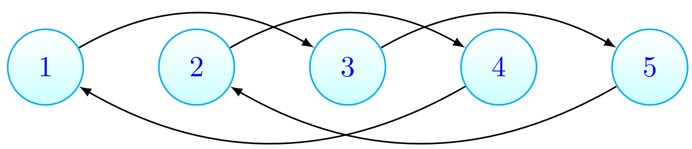
$$S(x, y) := (x < y) \wedge \forall z((z \leq x) \vee (y \leq z))$$

Määritellään ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaava $\psi(x, y)$ siten, että $\psi(x, y)$ on toteutuva jos ja vain jos jokin seuraavista on totta:

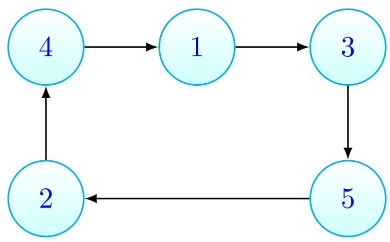
- $\exists z(S(x,z) \wedge S(z,y)$, toisin sanoen y on x:n seuraajan seuraaja.
- $\forall u(y \leq u) \wedge (\exists z(S(x,z) \wedge \forall u(u \leq z)))$, toisin sanoen x on viimeisen alkion edeltäjä ja y on ensimmäinen alkio.
- $\forall u(u \leq x) \wedge (\exists z(S(z,y) \wedge \forall u(z \leq u)))$, toisin sanoen x on viimeinen alkio ja y on ensimmäisen alkion seuraaja.

Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaavan ψ määräämä suunnattu verkko G lineaarijärjestyksen L alkioista on yhtenäinen, jos sen solmujen määrä on pariton. Tarkemmin sanoen se muodostuu yhdestä syklistä. Kuvat 2 ja 3 havainnollistavat tätä:

Huomautus. Verkot on numeroitu vain havainnollistamisen helpottamiseksi.

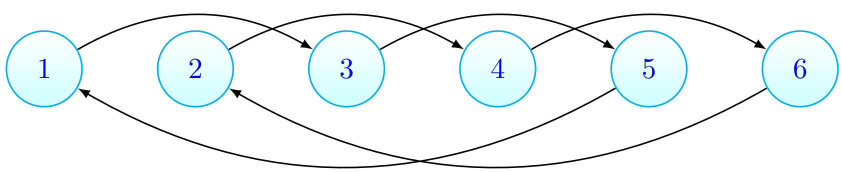


Kuva 2. Verkko G, jossa on pariton määrä solmuja (lineaarijärjestystä korostaen).

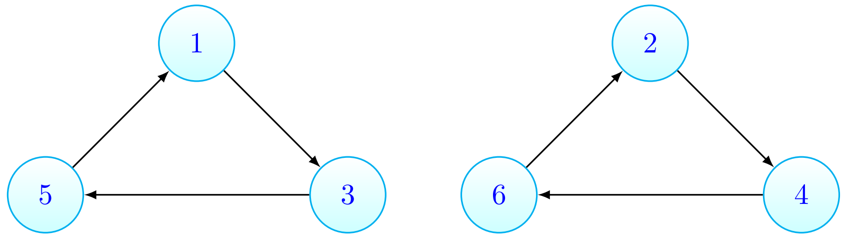


Kuva 3. Verkko G, jossa on pariton määrä solmuja (syklisyyttä korostaen).

Jos solmujen määrä on parillinen, niin verkko ei ole yhtenäinen. Tarkemmin sanoen se koostuu kahdesta erillisestä syklistä. Havainnollistetaan tätä kuvilla 4 ja 5:



Kuva 4. Verkko G, jossa on parillinen määrä solmuja (lineaarijärjestystä korostaen).



Kuva 5. Verkko G, jossa on parillinen määrä solmuja (syklisyyttä korostaen).

Sijoittamalla kaavan ψ relaatiosymbolin E ilmentymien tilalle lauseessa $\neg\varphi$ voidaan nyt testata verkon G parillisuutta. Aikaisemman esimerkin Boolen kyselyn ja sen yleistyksen verkoille perusteella tiedetään, ettei kyseinen testaus ole mahdollista, joten päädymme ristiriitaan. Täten ei ole olemassa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lausetta φ, joka määrittelisi verkkojen yhtenäisyyden.

Näiden lisäksi on hyvin monia muitakin verkkojen ominaisuuksia, joita ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka ei pysty ilmaisemaan. Itse asiassa, on osoitettu, että ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka kykenee ilmaisemaan vain verkkojen paikallisia ominaisuuksia [12]. William Hanf käytti tässä todistuksessaan EF-peliä, tarkemmin Fraïssén algebrallista versiota siitä. Sama paikallisuus on osoitettu myöhemmin myös toisella metodilla, kvanttorien eliminoinnilla [10]. Nämä tulokset ovat motivoineet pyrkimyksiä kehittää ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan laajennuksia verkoille, samoin kuin kehittämään näille omia EF-pelejä ilmaisuvoiman tutkimiseen. Tällaisia tutkimuksia on tehty muun muassa monadiselle toisen kertaluvun predikaattilogiikalle [7] [8], transitiivisen sulkeuman logiikalle [11] ja erilaisille kiintopistelogiikoille [3].

Vaikka ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka on hyvin rajoittunut kieli esimerkiksi verkkojen ominaisuuksien ilmaisemiseen, voi sillä kuitenkin ilmaista joitain hyödyllisiäkin kyselyitä verkkojen suhteen. Esimerkiksi seuraavat lauseet ovat ilmaistavissa ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikalla (oletetaan, että E on relaatio joka ilmaisee verkon solmujen välistä kaarta ja symbolit x, y, z_i, q ovat solmuja):

- "Solmulla x on vähintään kaksi toisistaan eroavaa naapuria".

$$(\exists y)(\exists q)(\neg(y = q) \wedge E(x, y) \wedge E(x, q))$$

- "Jokaisella solmulla x on vähintään kaksi toisistaan eroavaa naapuria".

$$(\forall x)(\exists y)(\exists q)(\neg(y = q) \wedge E(x, y) \wedge E(x, q))$$

- "On olemassa polku solmusta x solmuun y, jonka pituus on 3".

$$(\exists z_1)(\exists z_2)(E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y))$$

Verkkojen ohella EF-pelit ovat olleet hyödyllisiä ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan ja formaalien kielten teorian määriteltävyyskysymysten välisen suhteen tutkimisessa. Erityisesti *tähtivapaat säännölliset kielet* (star-free regular languages) ovat olleet mielenkiinnon kohteena.

4.3 Kongruenssiapulauseet

Kieltä kutsutaan *tähtivapaaksi*, jos sen pystyy kuvailemaan säännöllisenä lausekkeena, joka on konstruoitu aakkoston symboleista, tyhjän joukon symbolista ja kaikista muista loogisista operaatioista, kuten konkatenaatiosta ja komplementista, paitsi Kleenen tähdestä. Hyvin tunnettu tulos formaalien kielten teoriassa on, että kieli on määriteltävissä ensimmäinen kertaluvun predikaattilogiikan keinoin jos ja vain jos se on tähtivapaa [22]. Tämän todistuksessa käytetään yleensä induktiota kvanttorisyvyyden suhteen, kuten esimerkiksi Richard Ladner tekee [18].

Määritelmä 29 (Kvanttoriaste)**.** Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan kaavan φ *kvanttoriaste* $qr(\varphi)$ on sisäkkäisten kvanttorien syvyys ja se määritellään seuraavasti:

- Jos φ on atomikaava, niin $qr(\varphi) = 0$.
- $qr(\neg\varphi) = qr(\varphi)$.
- $qr(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = qr(\varphi_1 \vee \varphi_2) = max\{qr(\varphi_1), qr(\varphi_2)\}$
- $qr(\forall x\varphi) = qr(\exists x\varphi) = qr(\varphi) + 1$.

Esitellään seuraavaksi sitä, miten EF-peliä käytetään tähtivapaan kielen ja kielen ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan määriteltävyyden välisen loogisen ekvivalenssin todistamiseen. Edellä mainitun ekvivalenssin todistuksen induktioaskeleen kriittinen kohta on seuraava väite:

Lemma 30 (Kongruenssilemma)**.** *Sanan w yli aakkoston $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_k\}$ voi esittää mallina $W = (\{1, \ldots, |w|\}, <, R_1, \ldots, R_k)$, jossa R_i on yksipaikkainen relaatio ja $j \in R_i$ jos ja vain jos j:s kirjain sanasta w on s_i. Olkoot s, s', t, t' sanoja yli aakkoston Σ ja olkoon S, S', T, T' näitä kuvailevia malleja. Tällöin:*

$$S \cong_p S' \wedge T \cong_p T' \Longrightarrow S \cdot T \cong_p S' \cdot T'$$

Eli jos mallien S ja S' välillä on osittaisisomorfismi sekä mallien T ja T' välillä on osittaisisomorfismi, niin tällöin mallien S ja T konkatenaation ja mallien S' ja T' konkatenaation välillä on osittaisisomorfismi. Mallien konkatenaation on tässä tavallinen sanojen konkatenaatio, koska mallit ovat vain sanojen esitysmuotoja.

Lemman todistus on EF-peliä käyttämällä hyvin suoraviivainen. Oletuksen nojalla Pelaajalla II on voittostrategia peleissä $EF_m(S, S')$ ja $EF_m(T, T')$, joten Pelaajan II voittostrategia pelille $EF_m(S \cdot T, S' \cdot T')$ on kompositio kummastakin oletuksen voittostrategiasta. Siis osille S ja S' käytetään ensimmäisen pelin voittostrategiaa ja osille T ja T' toisen pelin voittostrategiaa.

Yllä esitetty kongruenssilemma sanoo, että mallin ominaisuudet määräytyvät osiensa ominaisuuksien mukaan. Täten mallit voidaan myös rakentaa osista ja näiden ominaisuuksista. Kongruenssilemmat ovat tyypillisiä EF-pelien sovelluksia. Näitä on todistettu monille muille logiikoille sekä sanoja monimutkaisemmille malleille. Esimerkiksi Saharon Shelah esittelee esimerkkejä monadisen logiikan kongruenssilemmoista lineaarijärjestyksille [25]. Wolfgang Thomas käyttää EF-pelejä todistaakseen kongruenssilemman ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan muunnokselle, jossa kaavat ovat *prenex-normaalimuodossa*, eli kaavat on muokattu niin, että kvanttorit ovat jonona kaavan alussa määrätynlaisessa järjestyksessä, minkä jälkeen seuraa kvanttoreilla sitomaton osuus [27].

Predikaattilogiikan ja tähtivapaiden lausekkeiden ekvivalenssi on hyvin tunnettu. Thomas yhdessä D. Lippertin kanssa esittelee EF-pelin muunnoksen, konkatenaatiopelin, jonka avulla he havainnollistavat ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan ja *relativoitujen tähtivapaiden säännöllisten lausekkeiden* (relativized star-free expressions) välisiä eroja. Tähtivapaa säännöllinen lauseke on relativoitu, jos siihen on lisätty ylimääräinen vakio ja tämä vakio kiinnitetään johonkin kieleen. Työssään Thomas ja Lippert näyttävät että relativoidut tähtivapaat lausekkeet ovat heikompia kuin vastaavat ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikan lauseet [20].

4.4 Bisimulaatio

Yksi tärkeä malliteoreettisten pelien sovellus automaattien ja tilasiirtymäsysteemien teoriassa on David Parkin esittelemä *bisimulaation* käsite [24]. Bisimulaatiota voi tarkastella eräänlaisena osittaisisomorfismien "perheenä", joka vastaa rajoitettua EF-peliä. Tässä pelissä osittaisisomorfismia on heikennetty niin, että kuvauksen ei tarvitse olla enää injektiivinen. Vaikka klassisen, tässä tutkielmassa määritellyn, EF-pelin ja bisimulaation välillä on hyvin läheinen kytkös, ne on kehitetty kuitenkin hyvin pitkälti toisistaan erillään. Bisimulaatiota käytetään esimerkiksi Matthew Hennessyn ja Robin Milnerin modaalilogiikassa [13].

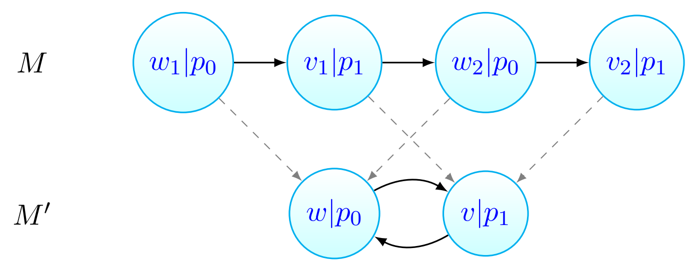
Hennessyn ja Milnerin modaalilogiikkaa käytetään tilasiirtymäsysteemien ominaisuuksien määrittelyyn. Tilasiirtymäsysteemit ovat hyvin paljon automaatteja muistuttavia struktuureja. Modaalilogiikka on propositiologiikan laajennus, jossa propositiologiikan kieleen on lisätty uusia operaattoreita. Näitä kutsutaan *modaalioperaattoreiksi* tai *modaliteeteiksi*. Modaliteetti tarkoittaa jonkin asian tai tapahtuman laatua eli niiden tapaa olla. Modaalilogiikassa sen voi ajatella määrittävän tavan, jolla väite on tosi. Modaliteetin tarkempi määrittely ei ole tämän tutkielman kontekstissa oleellista. Määritellään seuraavaksi bisimulaatio.

Määritelmä 31 (Bisimulaatio)**.** Olkoot M ja M' malleja, jotka koostuvat solmujen (tilojen) joukosta W, solmujen välisistä relaatioista (kaarista) R ja funktiosta V, joka liittää jokaiseen propositiosymboliin p_i joukon W osajoukon $V(p_i)$. Intuitiivisesti ajatellen joukko $V(p_i)$ on niiden tilojen joukko, jossa p_i on tosi. *Bisimulaatio* mallien M ja M' välillä on epätyhjä relaatio $B \subseteq W \times W'$, jolle pätee kaikilla $(w, w') \in B$ seuraavat ehdot:

- Tilat w ja w' toteuttavat samat propositiosymbolit.
- Jos $(w, v) \in R$, niin on olemassa $v' \in W'$, jolle pätee $(w', v') \in R'$ ja $(v, v') \in B$.
- Jos $(w', v') \in R'$, niin on olemassa $v \in W$, jolle pätee $(w, v) \in R$ ja $(v, v') \in B$.

Jos on olemassa jokin bisimulaatio B mallien M ja M' välillä ja $(w, w') \in B$ niin sanotaan, että tilat ovat bisimilaarisia.

Kaksi tilaa ovat siis bisimilaarisia, jos ja vain jos niiden toteuttamat propositiosymbolit sekä tilojen mahdolliset tilasiirtymät vastaavat toisiaan. Yleensä tilat nimetään siten, että niistä ilmenee tilan nimi sekä tilan mahdollisesti toteuttamat propositiosymbolit. Kuva 6 havainnollistaa tilojen bisimilaarisuutta:



Kuva 6. Bisimilaariset tilat on yhdistetty katkonuolilla

Bisimulaation käsitteen avulla voi tutkia sitä, mitä mallien ominaisuuksia on mahdollista kuvailla modaalilogiikan avulla ja mitä taas ei ole mahdollista kuvailla. Bisimulaatio on yksi modaalilogiikan tärkeimpiä työkaluja ja sopii mainiosti ohjelmien verifiointiin [2]. Se onkin yksi verifioinnin ja samanaikaisuusteorian kulmakivistä. Sille löytyy käyttöä myös tekoälytutkimuksessa, lingvistiikassa ja filosofiassa [1].

5 Yhteenveto

Tässä tutkielmassa on tarkasteltu Ehrenfeucht–Fraïssé-pelejä ja näiden sovelluksia eri näkökulmista. Teoreettiselta kannalta tutkielmassa esiteltiin EF-peli sääntöineen ja esiteltiin esimerkin avulla, miten EF-peliä käytännössä pelataan. Lisäksi todistettiin, että Pelaajan II voittostrategia on ekvivalenssirelaatio, jolloin voittostrategian avulla malleja voidaan jakaa ekvivalenssiluokkiin ja täten tarvittaessa samaistaa nämä mallit yhdeksi malliksi.

Voittostrategia voi olla vain toisella pelaajista. Lisäksi jos pelaajalla on voittostrategia pelissä, jonka kesto on k kierrosta, niin tällä pääsääntöisesti on voittostrategia myös kaikissa tätä lyhyemmissä peleissä. On myös kehitelty EF-pelin variaatio, jossa kyseinen ominaisuus ei päde.

EF-peleistä on monia eri variaatioita, monille erilaisille logiikoille ja moniin eri käyttötarpeisiin. EF-pelejä käytetään esimerkiksi kongruenssiapulauseiden johtamiseen, verkkojen ominaisuuksien tutkimiseen, eri logiikoiden sekä tietokantakielien ilmaisuvoiman tutkimiseen ja tietokoneohjelmien verifiointiin ja moneen muuhun. Etenkin ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa on tutkittu paljon EF-pelien avulla.

Ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikka karakterisoi äärelliset mallit isomorfiaan asti. Isomorfismi on kuitenkin liian voimakas työkalu elementaarisen ekvivalenssin ilmaisemiseen. Tämä ongelma ratkeaa heikentämällä isomorfismia äärelliseksi isomorfismiksi. Kaikki osittaisisomorfismit ovat myös äärellisiä isomorfismeja, mutta kaikki äärelliset isomorfismit eivät ole osittaisisomorfismeja. Äärellinen isomorfismi karakterisoi elementaarisen ekvivalenssin. Tämä algebrallinen karakterisointi voidaan muotoilla myös peliteoreettiseen asuun, EF-peliin.

EF-pelit ovat yksi äärellisten mallien tärkeimmistä työkaluista, koska suurin osa malliteorian työkaluista ei toimi äärellisillä malleilla. Keskeisestä roolistaan huolimatta EF-pelejä on kuitenkin työlästä käyttää. Jos malli vähänkin monimutkaistuu, voittostrategian löytäminen vaikeutuu suhteessa vielä enemmän. EF-pelit toimivat myös äärettömillä malleilla, mutta näille on monia huomattavasti helpompikäyttöisiä työkaluja tarjolla.

Käytännön kannalta tutkielmassa on esimerkkien avulla esitelty, miten EF-peliä sovelletaan määriteltävyyskysymyksissä ja todistuksissa. Kirjallisuutta ja tutkimuksia on esitelty syvällisemmän aiheeseen tutustumisen helpottamiseksi.

Yksi mielenkiintoinen jatkotutkimuskohde voisi olla EF-pelit hyperpelien (hypergame) kontekstissa. Hyperpeli on kahdelle pelaajalle ja sitä pelataan siten, että pelaaja I valitsee ensin minkä tahansa äärellisen pelin, minkä jälkeen pelaaja II tekee ensimmäisen siirron valitussa pelissä. Tämän jälkeen valittu peli jatkuu tavallisesti. Se kumpi voittaa valitun pelin, voittaa myös hyperpelin.

Lähteet

[1] Blackburn, Patrick, Benthem, Johan F. A. K. van ja Wolter, Frank: *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006, ISBN 0444516905.

[2] Blackburn, Patrick, Rijke, Maarten de ja Venema, Yde: *Modal Logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001, ISBN 0-521-80200-8.

[3] Bosse, Uwe: *An Ehrenfeucht-Fraïssé game for fixpoint logic and stratified fixpoint logic*. Teoksessa *Selected Papers from the Workshop on Computer Science Logic*, CSL '92, sivut 100–114, London, UK, 1993. Springer-Verlag, ISBN 3-540-56992-8.

[4] Ebbinghaus, Heinz Dieter ja Flum, Jörg: *Finite Model Theory*. Springer, Berlin, 1999, ISBN 3-540-65758-4.

[5] Ehrenfeucht, Andrzej: *An application of games to the completeness problem for formalized theories*. Fundamenta Mathematicae, 49(2):129–141, 1961.

[6] Etessami, Kousha ja Thomas, Wilke: *An until hierarchy for temporal logic*. Teoksessa *Logic in Computer Science, Proceedings of Eleventh Annual IEEE Symposium*, sivut 108–117, 1996.

[7] Fagin, Ronald: *Monadic generalized spectra*. Mathematical Logic Quarterly, 21(1):89–96, 1975.

[8] Fagin, Ronald, Stockmeyer, Larry J. ja Vardi, Moshe Y.: *On monadic NP vs. monadic co-NP*. Teoksessa *Proceedings of 1993 IEEE 8th Annual Conference on Structure in Complexity Theory*, sivut 19–30, 1993.

[9] Fraïssé, Roland: *Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 71(4):363–388, 1954.

[10] Gaifman, Haim: *On local and non-local properties*. Teoksessa Stern, J. (toimittaja): *Proceedings of the Herbrand Symposium*, nide 107 sarjassa *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, sivut 105–135. Elsevier, 1982.

[11] Grädel, Erich: *On transitive closure logic*. Teoksessa Börger, Egon, Jäger, Gerhard, Kleine Büning, Hans ja Richter, Michael M. (toimittajat): *Computer Science Logic: 5th Workshop, Berne, Switzerland*, sivut 149–163. Springer Berlin Heidelberg, 1992, ISBN 978-3-540-47285-8.

[12] Hanf, William: *Model-theoretic methods in the study of elementary logic.* Teoksessa Addison, J.W. (toimittaja): *Journal of Symbolic Logic*, sivut 132–145. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1965.

[13] Hennessy, Matthew ja Milner, Robin: *On observing nondeterminism and concurrency.* Teoksessa Bakker, Jaco de ja Leeuwen, Jan van (toimittajat): *Automata, Languages and Programming: Seventh Colloquium Noordwijkerhout*, sivut 299–309. Springer Berlin Heidelberg, 1980, ISBN 978-3-540-39346-7.

[14] Hodges, Wilfrid: *A Shorter Model Theory.* Cambridge University Press, 1997, ISBN 0-521-58713-1.

[15] Hyttinen, Tapani ja Kulikov, Vadim: *Weak Ehrenfeucht-Fraïssé games.* Transactions of the American Mathematical Society, 363(6):3309–3334, 2011.

[16] Immerman, Neil: *Relational Queries Computable in Polynomial Time.* Information and Control, 68:86–104, 1986.

[17] Kulikov, Vadim: *Weak Ehrenfeucht-Fraïssé games.* Pro gradu -tutkielma. Helsingin Yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2008.

[18] Ladner, Richard E.: *Application of model theoretic games to discrete linear orders and finite automata.* Information and Control, 33(4):281–303, 1977, ISSN 0019-9958.

[19] Libkin, Leonid ja Nurmonen, Juha: *Counting and locality over finite structures a survey.* Teoksessa Väänänen, Jouko (toimittaja): *Generalized Quantifiers and Computation: 9th European Summer School in Logic, Language, and Information ESSLLI'97*, sivut 18–50. Springer Berlin Heidelberg, 1999, ISBN 978-3-540-46583-6.

[20] Lippert, D. ja Thomas, W.: *Relativized star-free expressions, first-order logic, and a concatenation game.* Teoksessa Jürgensen, Helmut, Lallement, Gérard ja Weinert, Hanns Joachim (toimittajat): *Semigroups Theory and Applications: Proceedings of a Conference held in Oberwolfach*, sivut 194–204. Springer Berlin Heidelberg, 1988, ISBN 978-3-540-39225-5.

[21] Luosto, Kerkko: *Äärellisten mallien teoria, kurssimateriaali.* Helsingin Yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2010.

[22] McNaughton, Robert ja Papert, Seymour A.: *Counter-Free Automata (M.I.T. Research Monograph No. 65).* The MIT Press, 1971, ISBN 0262130769.

[23] Niemistö, Hannu: *Locality and order-invariant logics.* Väitöstutkimus. Helsingin Yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2007.

[24] Park, David: *Concurrency and automata on infinite sequences.* Teoksessa Deussen, Peter (toimittaja): *Theoretical Computer Science: 5th GI-Conference Karlsruhe*, sivut 167–183. Springer Berlin Heidelberg, 1981, ISBN 978-3-540-38561-5.

[25] Shelah, Saharon: *The monadic theory of order.* Annals of Mathematics, sivut 379–419, 1975.

[26] Tarski, Alfred: *Grundzüge der systemenkalküls I.* Fundamenta Mathematicae, 25(1):503–526, 1935.

[27] Thomas, Wolfgang: *An application of the Ehrenfeucht-Fraïssé game in formal language theory.* Mémoires de la Société Mathématique de France, 16:11–21, 1984.

[28] Väänänen, Jouko: *Models and Games.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2011, ISBN 9780521518123.