Ehrenfeucht–Fraïssé-peleistä

Pauli Niva

06.04.2016

Intro

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli on malliteorian menetelmä, joka perustuu struktuurien samankaltaisuuden tarkasteluun.

Intro

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli on malliteorian menetelmä, joka perustuu struktuurien samankaltaisuuden tarkasteluun. Malliteorian menetelmistä suurin osa ei kuitenkaan toimi äärellisten mallien tapauksessa.

Intro

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli on malliteorian menetelmä, joka perustuu struktuurien samankaltaisuuden tarkasteluun. Malliteorian menetelmistä suurin osa ei kuitenkaan toimi äärellisten mallien tapauksessa. EF-peli on yksi harvoista menetelmistä, joka toimii myös äärellisillä malleilla.

Intro

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli on malliteorian menetelmä, joka perustuu struktuurien samankaltaisuuden tarkasteluun. Malliteorian menetelmistä suurin osa ei kuitenkaan toimi äärellisten mallien tapauksessa. EF-peli on yksi harvoista menetelmistä, joka toimii myös äärellisillä malleilla. Äärellisten mallien teoria on matemaattisen logiikan ja teoreettisen tietojenkäsittelytieteen, tarkemmin laskennan teorian osa-alue.

Sovellusalueita

EF-peli on teoreettinen työkalu jota pääasiassa käytetään määriteltävyyskysymyksiin ja todistusten apuna. Äärellisten mallien teoriaa ja sen menetelmää EF-peliä voidaan soveltaa tietojenkäsittelytieteessä muun muassa seuraavilla osa-alueilla:

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi
- sanoiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi
- sanoiksi

eli niitä voidaan käyttää laskennan olioina ja täten niillä voidaan kuvata äärellistilallisia systeemejä ja tutkia näiden toiminnan oikeellisuutta.

Tietokantateoria

Relationaalinen malli samaistaa tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa.

Tietokantateoria

Relationaalinen malli samaistaa tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa. Formaalin kielen kaavat voidaan ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida.

Tietokantateoria

Relationaalinen malli samaistaa tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa. Formaalin kielen kaavat voidaan ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida. Ja toisinpäin, voidaan esittää jonkin laskennallisen vaativuusluokan kyselyitä jollakin formaalilla kielellä

Laskennan vaativuus

Tarjoaa laskennan vaativuusluokkien loogisen karakterisoinnin ja mahdollistaa vaativuusteoreettisten tulosten todistamisen tätä kautta.

Laskennan vaativuus

Tarjoaa laskennan vaativuusluokkien loogisen karakterisoinnin ja mahdollistaa vaativuusteoreettisten tulosten todistamisen tätä kautta.
Esimerkiksi $P = NP$ -ongelma redusoituu kysymykseksi: onko kahdella kiintopistelogiikalla sama ilmaisuvoima äärellisissä malleissa

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa:
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa:
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.
- 1954 Roland Fraïssé esittelee osittaisisomorfismin, jonka avulla saadaan elementaarinen ekvivalenssi predikaattilogiikalle

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa:
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.
- 1954 Roland Fraïssé esittelee osittaisisomorfismin, jonka avulla saadaan elementaarinen ekvivalenssi predikaattilogiikalle
- 1961 Andrzej Ehrenfeucht muokkasi Fraïssén menetelmästä peliteoreettisen version

Relaatiot

Joukon X *kaksipaikkainen relaatio* R on mikä tahansa joukko joukon X alkioista muodostettuja pareja (x, y), joiden molemmat alkiot ovat joukossa X, eli $R \subset X^2$.

Relaatiot

Joukon X *kaksipaikkainen relaatio* R on mikä tahansa joukko joukon X alkioista muodostettuja pareja (x, y), joiden molemmat alkiot ovat joukossa X, eli $R \subset X^2$. Jos $(x, y) \in R$, sanotaan, että x on y:n kanssa *relaatiossa* R.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.
- Funktioista $f^M : M^m \to M$, jokaiselle funktiosymbolille $f \in L$, $\#f = m$, jossa $m \in \mathbb{Z}_+$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.
- Funktioista $f^M : M^m \to M$, jokaiselle funktiosymbolille $f \in L$, $\#f = m$, jossa $m \in \mathbb{Z}_+$.

Relaatiota R^M sanotaan relaatiosymbolin R *tulkinnaksi mallissa* M, funktiota f^M sanotaan funktiosymbolin f *tulkinnaksi mallissa* M, ja alkiota c^M kutsutaan vakiosymbolin c *tulkinnaksi mallissa* M.

Mallit jatkuu

Malli siis antaa aakkoston L symboleille *semantiikan* eli merkityksen sekä kontekstin, jossa formaalin kielen lauseet voivat olla tosia tai epätosia.

Mallit jatkuu

Malli siis antaa aakkoston L symboleille *semantiikan* eli merkityksen sekä kontekstin, jossa formaalin kielen lauseet voivat olla tosia tai epätosia. Samaa merkintää M käytetään sekä mallista kokonaisuutena että mallin *universumista* eli mallin alkioiden joukosta.

Symbolin ja sen tulkinnan erosta

Relaatiosymbolin R ja sen tulkinnan R^M välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan "tietokone" ja tietokoneen välisellä erolla.

Symbolin ja sen tulkinnan erosta

Relaatiosymbolin R ja sen tulkinnan R^M välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan "tietokone" ja tietokoneen välisellä erolla. Sana "tietokone" on suomen kieltä, joka koostuu yhdeksästä merkistä ja sitä voidaan käyttää muodostettaessa suomenkielisiä lauseita.

Symbolin ja sen tulkinnan erosta

Relaatiosymbolin R ja sen tulkinnan R^M välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan “tietokone” ja tietokoneen välisellä erolla. Sana “tietokone” on suomen kieltä, joka koostuu yhdeksästä merkistä ja sitä voidaan käyttää muodostettaessa suomenkielisiä lauseita. Tietokone taas on fyysinen laite, joka käsittelee tietoa ohjelmointinsa mukaisesti, eikä sitä voida käyttää suomen kielen lauseiden osana.

Symbolin ja sen tulkinnan erosta

Relaatiosymbolin R ja sen tulkinnan R^M välistä eroa voidaan havainnollistaa esimerkiksi sanan “tietokone” ja tietokoneen välisellä erolla. Sana “tietokone” on suomen kieltä, joka koostuu yhdeksästä merkistä ja sitä voidaan käyttää muodostettaessa suomenkielisiä lauseita. Tietokone taas on fyysinen laite, joka käsittelee tietoa ohjelmointinsa mukaisesti, eikä sitä voida käyttää suomen kielen lauseiden osana. Lause “Tietokoneeni on Mac” on totta tai epätotta, riippuen siitä, mihin nimenomaiseen tietokoneeseen sana “tietokone” viittaa.

Isomorfiset mallit

Kaksi mallia A ja B yli saman äärellisen aakkoston L ovat isomorfisia ($A \cong B$) jos on olemassa isomorfismi A:lta B:hen, eli on olemassa bijektio $f : A \to B$, joka säilyttää relaatiot ja vakiot.

Elementaarinen ekvivalenssi

Siinä missä isomorfismi kuvailee kahden mallin rakenteellista samanlaisuutta, niin elementaarinen ekvivalenssi puolestaan vertailee malleja suhteessa käytettyyn kieleen.

Elementaarinen ekvivalenssi

Siinä missä isomorfismi kuvailee kahden mallin rakenteellista samanlaisuutta, niin elementaarinen ekvivalenssi puolestaan vertailee malleja suhteessa käytettyyn kieleen. Olkoon L aakkosto joka muodostaa kielen K. Olkoon A ja B kummatkin L-malleja. A:ta ja B:tä sanotaan *elementaarisesti ekvivalenteiksi*, jos kaikilla lauseilla $S \in K$ pätee $A \models S \iff B \models S$. Tätä merkitään $A \equiv B$

Elementaarinen ekvivalenssi jatkuu

Jos L-mallit A ja B ovat isomorfiset, niin ne ovat elementaarisesti ekvivalentit.

Elementaarinen ekvivalenssi jatkuu

Jos L-mallit A ja B ovat isomorfiset, niin ne ovat elementaarisesti ekvivalentit.
On huomattava, että tämä ei päde toisinpäin. Mallien A ja B välinen elementaarinen ekvivalenssi ei kerro mitään mallien isomorfisuudesta.

EF-pelissä ideana on, että peli on kahdelle pelaajalle, joita kutsutaan nimillä Pelaaja I ja Pelaaja II. Peliä pelataan kahdella mallilla A ja B, joilla on sama aakkosto. Pelaaja II haluaa osoittaa, että kyseiset mallit ovat jossain määrin samankaltaiset, kun taas Pelaaja I haluaa osoittaa, että mallit ovat erilaiset. Pelissä on äärellinen määrä vuoroja ja vuorojen määrä on alussa sovittu.

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista A tai B sekä jonkin alkion $a_i \in A$ tai $b_i \in B$ tästä mallista.

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista A tai B sekä jonkin alkion $a_i \in A$ tai $b_i \in B$ tästä mallista.
- Tämän jälkeen Pelaaja II valitsee malleista sen, jota Pelaaja I ei valinnut ja valitsee tästä mallista jonkin alkion.

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \ldots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i.

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \ldots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i. Pelaajan II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella $i \leq n$ pari (a, b) määrää osittaisen isomorfismin $A \to B$ eli on olemassa kuvaus $h : A \to B$, siten että $a \in A \mapsto b \in B$

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \ldots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i. Pelaajan II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella $i \leq n$ pari (a, b) määrää osittaisen isomorfismin $A \to B$ eli on olemassa kuvaus $h : A \to B$, siten että $a \in A \mapsto b \in B$ Muussa tapauksessa Pelaaja I voittaa.

Voittostrategia

Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen.

Voittostrategia

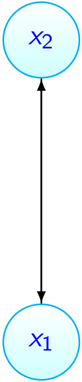
Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*.

Voittostrategia

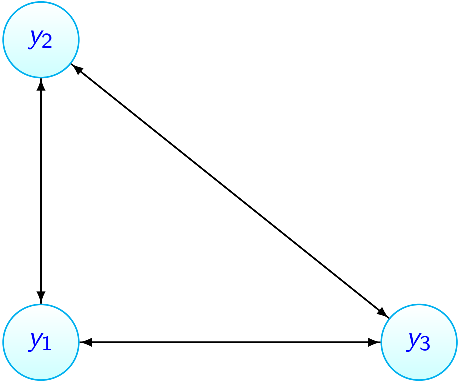
Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta mitä valintoja toinen pelajaa tekee kutsutaan *voittavaksi strategiaksi*.

Voittostrategia

Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta mitä valintoja toinen pelajaa tekee kutsutaan *voittavaksi strategiaksi*. Jos Pelaaja II:lla on voittava strategia EF-pelissä $EF_k(A, B)$, niin tätä merkitään $A \sim_k B$.

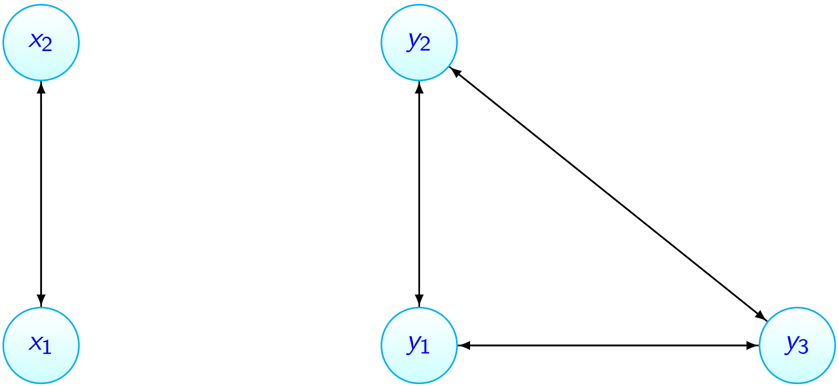


Verkko X



Verkko Y

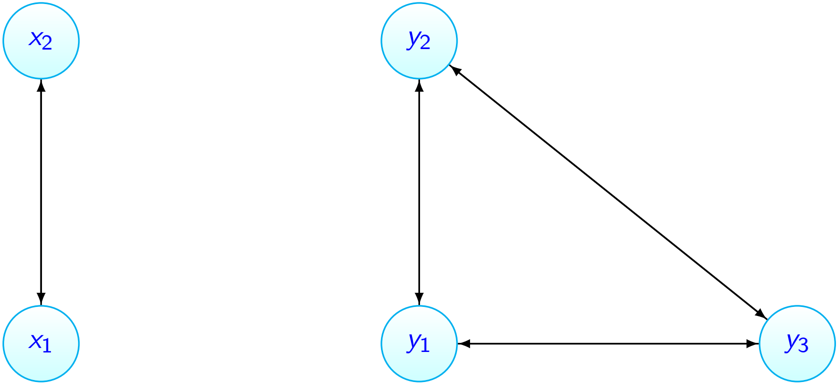
Kierros 1:



Verkko X Verkko Y

Kierros 1:

- Pelaaja I voi valita solmun kummasta verkosta tahansa.

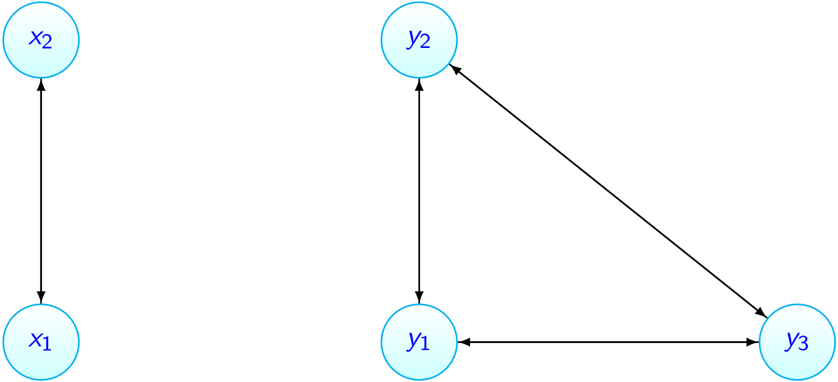


Verkko X

Verkko Y

Kierros 1:

- Jos Pelaaja I valitsee solmun verkosta X, Pelaaja II valitsee vastinpariksi verkosta Y solmun y_1, muulloin Pelaaja II valitsee vastinpariksi solmun x_1.

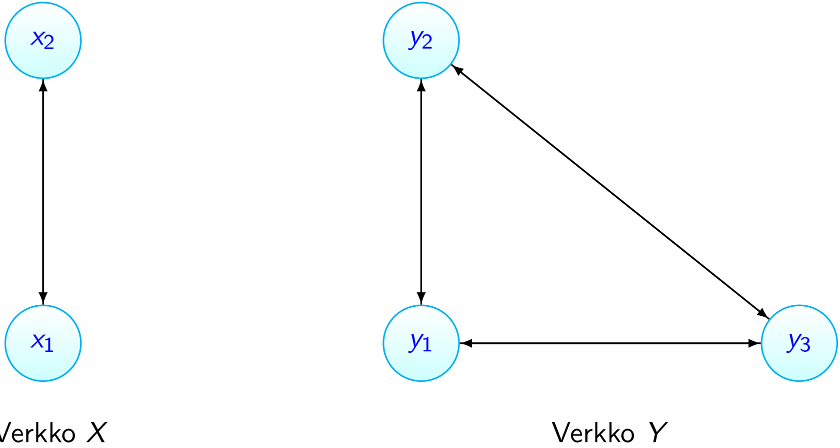


Verkko X

Verkko Y

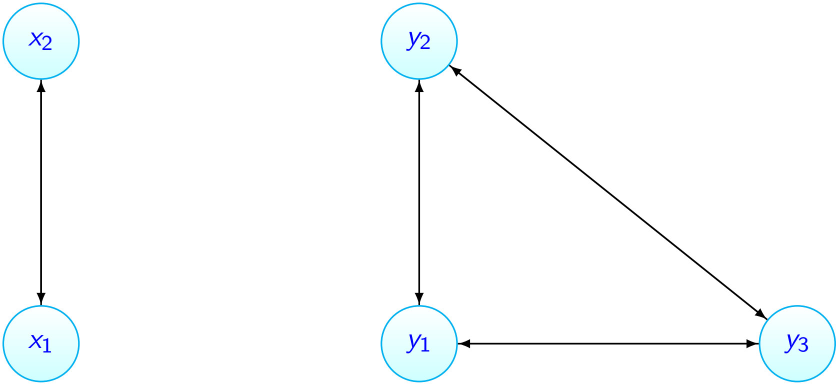
Kierros 1:

- Oletetaan, että Pelaaja I valitsee solmun x_2. Tällöin meillä on $a_1 := x_2, b_1 := y_1$ ensimmäisen kierroksen jälkeen.



Kierros 2:

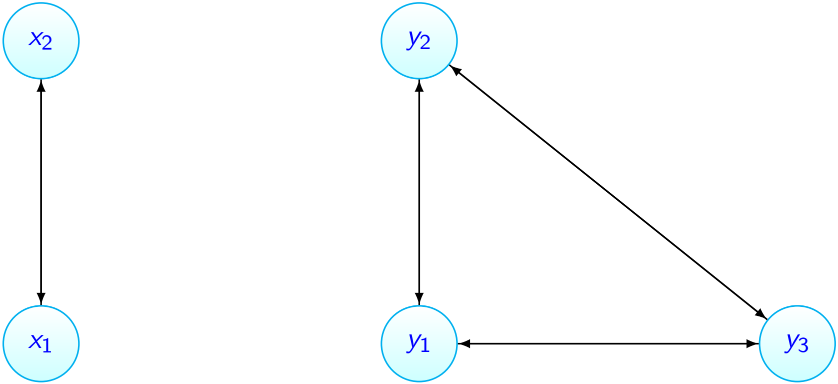
- Minkä tahansa solmun Pelaaja I valitseekin, Pelaaja II voi peilata valinnan. Oletetaan, että tällä kertaa Pelaaja I valitsee verkosta Y.



Verkko X Verkko Y

Kierros 2:

- Jos Pelaaja I valitsee solmun y_1, eli saman solmun kuin $b_1 = y_1$, on Pelaajan II valittava vastinpariksi Pelaajan I ensimmäisen kierroksen valinta x_2.

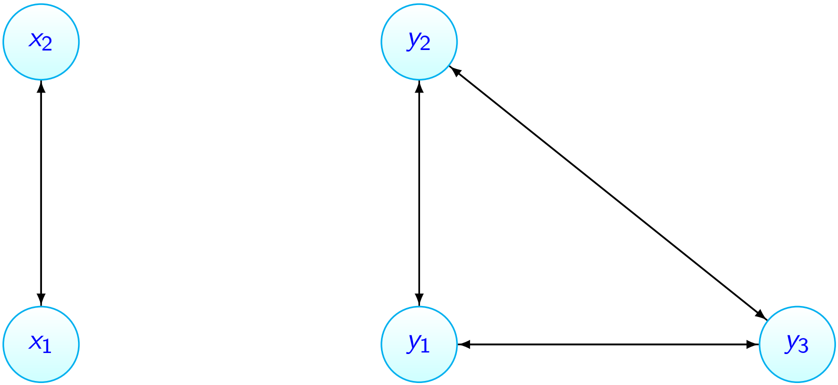


Verkko X

Verkko Y

Kierros 2:

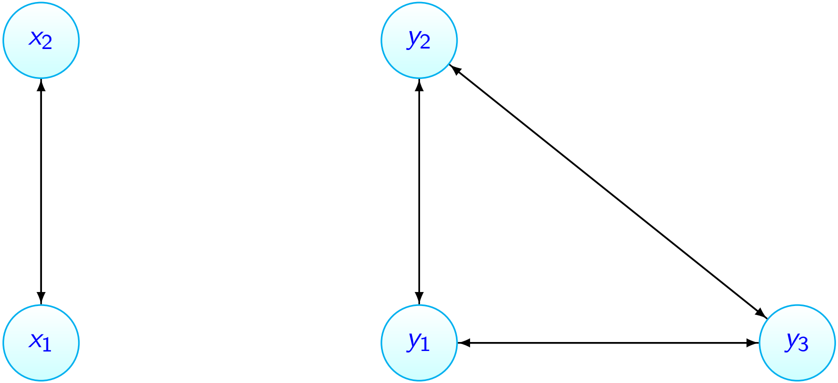
- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun y_2 tai y_3, eli jommankumman solmun $b_1 = y_1$ naapureista, Pelaajan II täytyy valita vastinpariksi solmun $a_1 = x_2$ naapuri.



Verkko X Verkko Y

Kierros 2:

- Toisen kierroksen jälkeen tilanne on $a_2 := x_2, b_2 := y_1$ tai $a_2 := x_1, b_2 := y_2/y_3$.



Verkko X Verkko Y

Kierros 2:

- Pelaaja II voittaa, koska kuvaus f verkolta A verkolle B, $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$ säilyttää naapuruussuhteet, eli f on osittaisisomorfismi.

Metodologia teoreema: Ei ole olemassa propositiologiikanlausetta joka ilmaisee ominaisuuden P, jos ja vain jos, kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, on olemassa mallit A_n ja B_n, joille pätee:

Metodologia teoreema: Ei ole olemassa propositiologiikanlausetta joka ilmaisee ominaisuuden P, jos ja vain jos, kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, on olemassa mallit A_n ja B_n, joille pätee:

- Ominaisuus P on totta A_n:ssä.

Metodologia teoreema: Ei ole olemassa propositiologiikanlausetta joka ilmaisee ominaisuuden P, jos ja vain jos, kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, on olemassa mallit A_n ja B_n, joille pätee:

- Ominaisuus P on totta A_n:ssä.
- Ominaisuus P on epätotta B_n:ssä.

Metodologia teoreema: Ei ole olemassa propositiologiikanlausetta joka ilmaisee ominaisuuden P, jos ja vain jos, kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, on olemassa mallit A_n ja B_n, joille pätee:

- Ominaisuus P on totta A_n:ssä.
- Ominaisuus P on epätotta B_n:ssä.
- $A \sim_n B$, eli Pelaaja II voittaa n-kierroksisen EF-pelin A:lla ja B:llä.

Esimerkki määrittelemättömyystuloksesta

Olkoon A malli, joka sisältää vain vakioita.

Esimerkki määrittelemättömyystuloksesta

Olkoon A malli, joka sisältää vain vakioita. Boolean kysely: onko A:ssa parillinen määrä alkioita?

Esimerkki määrittelemättömyystuloksesta

Olkoon A malli, joka sisältää vain vakioita. Boolean kysely: onko A:ssa parillinen määrä alkioita?
A:n ja B:n konstruktio on tällöin: $|A_n| := \{a_1, \ldots, a_n\}$ ja $|B_n| := \{b_1, \ldots, b_n + 1\}$, mielivaltaisella $n \in \mathbb{Z}_+$.

Esimerkki jatkuu

Konstruoidaan voittostrategia Pelaajalle II

Esimerkki jatkuu

Konstruoidaan voittostrategia Pelaajalle II Jos Pelaaja I valitsee mielivaltaisella kierroksella i alkion a_i, niin Pelaaja II yksinkertaisesti valitsee alkion b_i.

Esimerkki jatkuu

Konstruoidaan voittostrategia Pelaajalle II Jos Pelaaja I valitsee mielivaltaisella kierroksella i alkion a_i, niin Pelaaja II yksinkertaisesti valitsee alkion b_i. Eli Boolean kysely onko mallissa A parillinen määrä alkioita ei ole määriteltävissä propositiologiikan lauseeksi metodologia teoreeman nojalla, eikä siten myöskään relaatioalgebran kyselyksi.