Otsikko

Pauli Niva

April 4, 2016

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.
- 1954 Roland Fraïssé esittelee osittaisisomorfismin, jonka avulla saadaan elementaarinen ekvivalenssi predikaattilogiikalle

Historiallinen tausta

- 1930-luvulla Alfred Tarski esittelee elementaarisen ekvivalenssin käsitteen
- 1946 Tarski Princetonissa pidetyssä konferenssissa joka käsittelee ongelmia matematiikassa
  On olemassa algebroja jotka eivät ole isomorfisia, mutta joita ei kuitenkaan voi erottaa toisistaan näiden aritmeettisten ominaisuuksien perusteella; Tarvitaan teoria algebrojen aritmeettiselle ekvivalenssille joka on käsitteenä yhtä perustavanlaatuinen kuin isomorfismi.
- 1954 Roland Fraïssé esittelee osittaisisomorfismin, jonka avulla saadaan elementaarinen ekvivalenssi predikaattilogiikalle
- 1961 Andrzej Ehrenfeucht muokkasi Fraïssén menetelmästä peliteoreettisen version

Relaatiot

Joukon X *kaksipaikkainen relaatio* R on mikä tahansa joukko joukon X alkioista muodostettuja pareja (x, y), joiden molemmat alkiot ovat joukossa X, eli $R \subset X^2$.

Relaatiot

Joukon X *kaksipaikkainen relaatio* R on mikä tahansa joukko joukon X alkioista muodostettuja pareja (x, y), joiden molemmat alkiot ovat joukossa X, eli $R \subset X^2$. Jos $(x, y) \in R$, sanotaan, että x on y:n kanssa *relaatiossa* R.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.
- Funktioista $f^M : M^m \to M$, jokaiselle funktiosymbolille $f \in L$, $\#f = m$, jossa $m \in \mathbb{Z}_+$.

Mallit

Olkoon L aakkosto ja olkoon M epätyhjä joukko. Tällöin *L-malli* koostuu seuraavista:

- Joukosta M.
- Relaatioista $R^M \subset M$, jokaiselle relaatiosymbolille $R \in L$, $\#R = n$, jossa $n \in \mathbb{Z}_+$.
- Vakioista $c^M \in M$, jokaiselle vakiosymbolille $c \in L$.
- Funktioista $f^M : M^m \to M$, jokaiselle funktiosymbolille $f \in L$, $\#f = m$, jossa $m \in \mathbb{Z}_+$.

Relaatiota R^M sanotaan relaatiosymbolin R *tulkinnaksi mallissa* M, funktiota f^M sanotaan funktiosymbolin f *tulkinnaksi mallissa* M, ja alkiota c^M kutsutaan vakiosymbolin c *tulkinnaksi mallissa* M.

Isomorfiset mallit

Kaksi mallia A ja B yli saman äärellisen aakkoston L ovat isomorfisia ($A \cong B$) jos on olemassa isomorfismi A:lta B:hen, eli on olemassa bijektio $f : A \to B$, joka säilyttää relaatiot ja vakiot.

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi
- sanoiksi

Verifikaatio

Äärelliset mallit voidaan koodata

- puiksi
- verkoiksi
- sanoiksi

eli niitä voidaan käyttää laskennan olioina ja täten niillä voidaan kuvata äärellistilallisia systeemejä ja tutkia näiden toiminnan oikeellisuutta

Tietokantateoria

Relationaalinen malli identifioi tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa.

Tietokantateoria

Relationaalinen malli identifioi tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa. Formaalin kielen kaavat voidaan ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida

Tietokantateoria

Relationaalinen malli identifioi tietokannan äärellisen relaationaalisen struktuurin kanssa. Formaalin kielen kaavat voidaan ajatella ohjelmina, jotta niiden merkitystä struktuurissa voidaan arvioida Ja toisinpäin, voidaan esittää jonkin laskennallisen vaativuusluokan kyselyitä jollakin formaalilla kielellä

Laskennan vaativuus

Laskennan vaativuusluokkien looginen selitys

Laskennan vaativuus

Laskennan vaativuusluokkien looginen selitys Esimerkiksi $P = NP$ -ongelma redusoituu kysymykseksi: onko kahdella kiintopistelogiikalla sama ilmaisuvoima äärellisissä malleissa

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \dots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista A tai B sekä jonkin alkion $a_i \in A$ tai $b_i \in B$ tästä mallista.

EF-pelin kierroksen kulku

Merkitään pelattavien kierrosten määrää luvulla $k \in \mathbb{Z}_+$. EF-peliä pituudeltaan k-kierrosta malleilla A ja B merkitään $EF_k(A, B)$. Pelin $EF_k(A, B)$ mielivaltaisen kierroksen $i \in \{1, \ldots, k\}$ kulku on seuraavanlainen:

- Ensin Pelaaja I valitsee toisen malleista A tai B sekä jonkin alkion $a_i \in A$ tai $b_i \in B$ tästä mallista.
- Tämän jälkeen Pelaaja II valitsee malleista sen, jota Pelaaja I ei valinnut ja valitsee tästä mallista jonkin alkion.

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \ldots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i.

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \ldots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \ldots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i. Pelaajan II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella $i \leq n$ pari (a, b) määrää osittaisen isomorfismin $A \to B$ eli on olemassa kuvaus $h : A \to B$, siten että $a \in A \mapsto b \in B$

EF-pelin voittaminen

Olkoon $a = (a_1, \dots, a_i)$ mallista A valitut alkiot ja $b = (b_1, \dots, b_i)$ mallista B valitut alkiot mielivaltaisella kierroksella i. Pelaajan II voittaa jos ja vain jos jokaisella kierroksella $i \leq n$ pari (a, b) määrää osittaisen isomorfismin $A \to B$ eli on olemassa kuvaus $h : A \to B$, siten että $a \in A \mapsto b \in B$ Muussa tapauksessa Pelaaja I voittaa.

Voittostrategia

Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen.

Voittostrategia

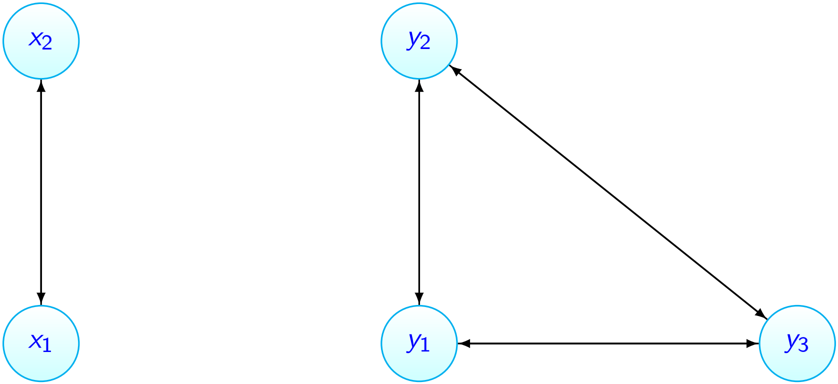
Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*.

Voittostrategia

Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta mitä valintoja toinen pelajaa tekee kutsutaan *voittavaksi strategiaksi*.

Voittostrategia

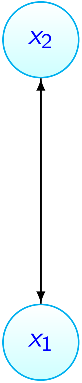
Strategia on joukko sääntöjä, joiden mukaan pelaaja tekee valintansa toisen pelaajan valinnasta riippuen. EF-pelissä kummallakin pelaajalla on koko ajan tiedossa mallit, niiden rakenne ja jo tehdyt valinnat, eli peli on *täydellisen informaation peli*. Strategiaa, jota seuraamalla pelaaja voittaa pelin riippumatta mitä valintoja toinen pelajaa tekee kutsutaan *voittavaksi strategiaksi*. Jos Pelaaja II:lla on voittava strategia EF-pelissä $EF_k(A, B)$, niin tätä merkitään $A \sim_k B$.



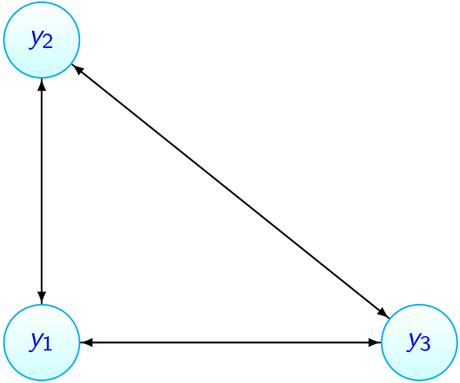
Verkko X

Verkko Y

Kierros 1:



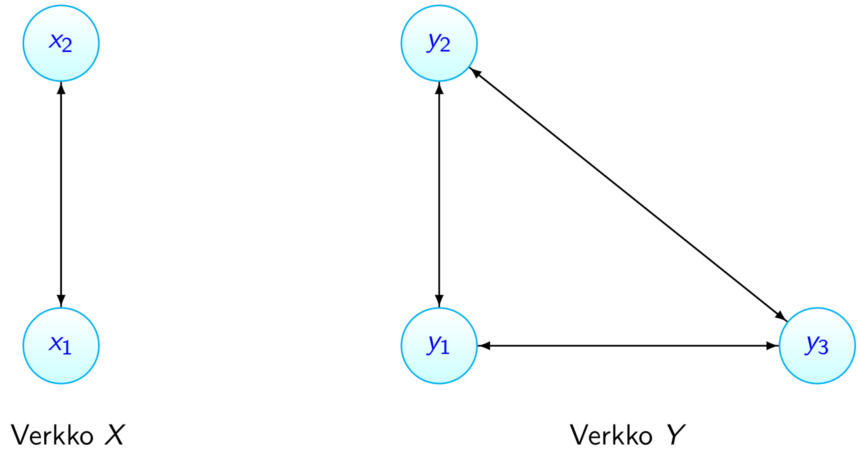
Verkko X



Verkko Y

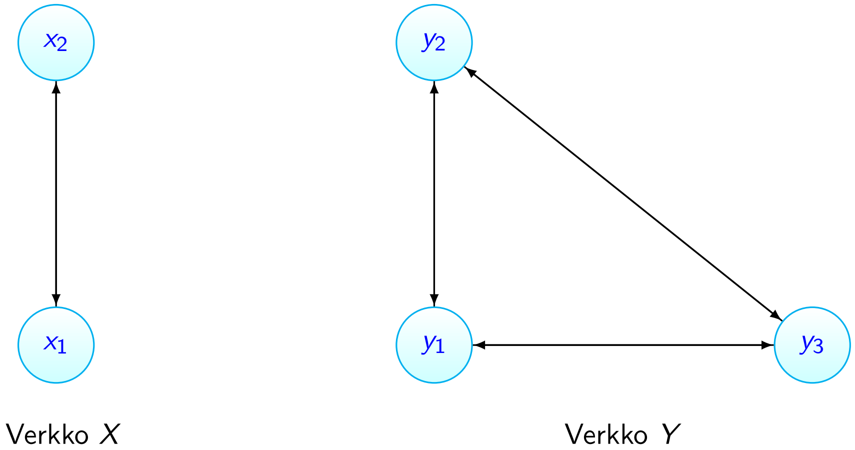
Kierros 1:

- Pelaaja I voi valita solmun kummasta verkosta tahansa.



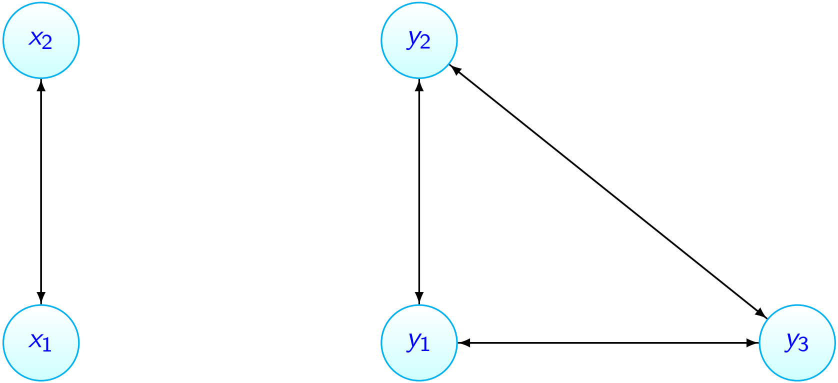
Kierros 1:

- Jos Pelaaja I valitsee solmun verkosta X, Pelaaja II valitsee vastinpariksi verkosta Y solmun y_1, muulloin Pelaaja II valitsee vastinpariksi solmun x_1.



Kierros 1:

- Oletetaan, että Pelaaja I valitsee solmun x_2. Tällöin meillä on $a_1 := x_2, b_1 := y_1$ ensimmäisen kierroksen jälkeen.

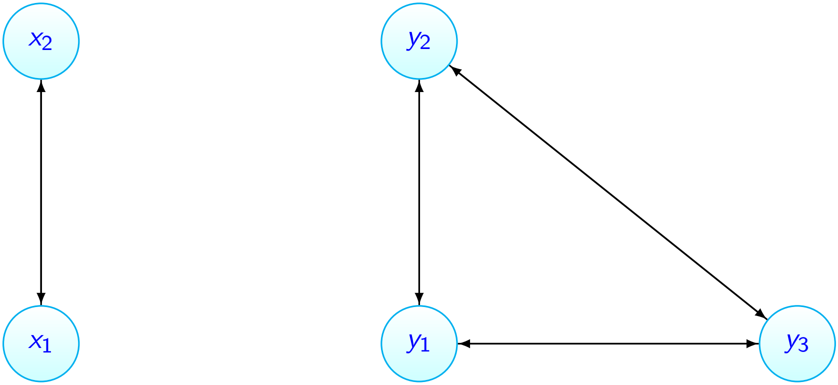


Verkko X

Verkko Y

Kierros 2:

- Minkä tahansa solmun Pelaaja I valitseekin, Pelaaja II voi peilata valinnan. Oletetaan, että tällä kertaa Pelaaja I valitsee verkosta Y.

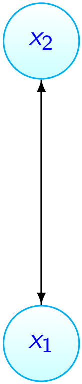


Verkko X

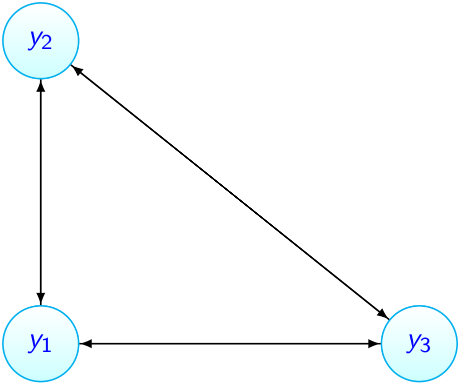
Verkko Y

Kierros 2:

- Jos Pelaaja I valitsee solmun y_1, eli saman solmun kuin $b_1 = y_1$, on Pelaajan II valittava vastinpariksi Pelaajan I ensimmäisen kierroksen valinta x_2.



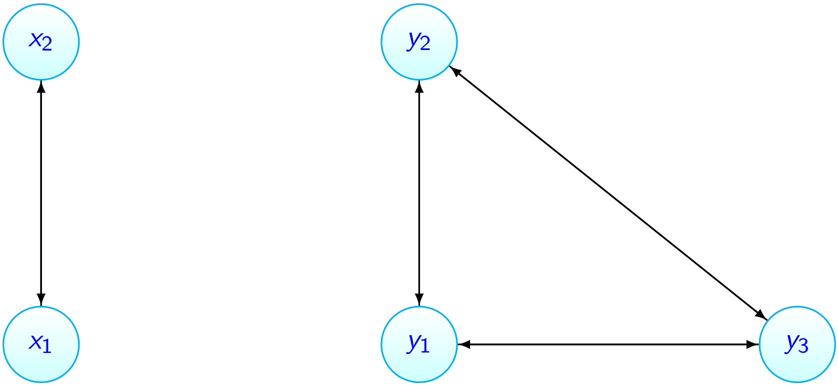
Verkko X



Verkko Y

Kierros 2:

- Jos Pelaaja I taas valitsee solmun y_2 tai y_3, eli jommankumman solmun $b_1 = y_1$ naapureista, Pelaajan II täytyy valita vastinpariksi solmun $a_1 = x_2$ naapuri.

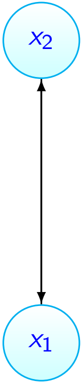


Verkko X

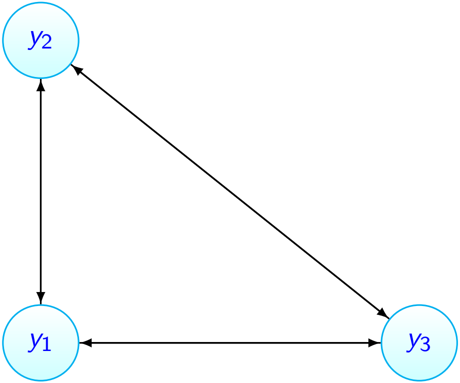
Verkko Y

Kierros 2:

- Toisen kierroksen jälkeen tilanne on $a_2 := x_2, b_2 := y_1$ tai $a_2 := x_1, b_2 := y_2/y_3$.



Verkko X



Verkko Y

Kierros 2:

- Pelaaja II voittaa, koska kuvaus f verkolta A verkolle B, $f(a_i) = b_i, i = 1, 2$ säilyttää naapuruussuhteet, eli f on osittaisisomorfismi.