

Predikaattilogiikka ja mallit

Pauli Niva

Kypsyysnäyte
HELSINGIN YLIOPISTO
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Helsinki, 15. huhtikuuta 2016

“Malli? Mikä ihmeen malli?” Tämän kysymyksen kuulee hyvin usein tietojenkäsittelytieteilijän suusta. Syynä tähän on todennäköisesti se, että tietojenkäsittelytieteen opetuksessa teoreettisia asioita painotetaan aivan liian vähän.

Mitä nämä *mallit* sitten ovat? Malleja ovat esimerkiksi luonnolliset luvut, reaalitylvut, kompleksiluvut, relaatiotietokannat. Samoin erilaiset tietorakenteet, verkot, erilaiset algebralliset struktuurit, kuten ryhmät, renkaat ja kunnat ovat malleja. Malliksi voidaan kutsua myös kaikkien tätä kypsyyssnäytettä lukevien ihmisten joukkoa kaveruussuhteineen – mitäpä olisi logiikkaa käsittelevä kirjoitus ilman itseensä viittaamista. Mallin käsite on siis kaiken kaikkiaan hyvin geneerinen ja abstrakti.

Otetaan esimerkiksi *järjestetyt kunnat*, tarkemmin sanottuna reaalitylukujen ja rationaalitylukujen muodostamat systeemit. Kummassakin systeemissä on yhteenlasku, kertolasku, nolla, ykkönen ja järjestys. Kun näitä vastaavat symbolit kerätään joukoksi, saadaan aikaan näiden yhteinen aakkosto. *Aakkosto* on siis mallin skemaattinen esitys, joka kertoo mallin rakenteen pääpiirteet. Yleisesti ottaen mallin aakkosto voi sisältää seuraavanlaisia olioita: a) relaatioita, joita edellä mainitussa aakkostossa edustaa järjestys sekä b) vakioita, joita määrittelemässämme aakkostossa vastaavat ykkönen ja nolla. Lisäksi malli voi sisältää myös c) kuvauksia. Näitä vastaa esimerkkaaakkoston yhteen- ja kertolasku.

Predikaattilogiikka puolestaan on symbolisen logiikan osa-alue, joka tutkii luonnollisen kielen subjekti-predikaatti-muotoisia lauseita mallintavia formaaleja kieliä. Mallit tarjoavat predikaattilogiikalle semantiikan eli merkityksen ja kontekstin, jossa formaalin kieleen lauseet voivat olla tosia tai epätosia. Totuus predikaattilogiikassa tarkoittaa siis totuutta jossakin mallissa.

Malleja on äärettömiä, kuten esimerkiksi reaalitylukujen joukko, sekä äärellisiä, kuten esimerkiksi jokin määrätty relaatiotietokanta. Äärettömiä malleja on tutkittu hyvin pitkään, mutta tietotekniikan nousu on luonut tarpeen rajoittua äärettömistä malleista äärellisiin malleihin. Äärellisten mallien teorian kehittelyn ohessa nopeasti huomattiin, että aikojen saatossa äärettömille malleille kehitetyt työkalut eivät enää pääsääntöisesti toimineetkaan äärellisillä malleilla. Yksi harvoista työkaluista, joka kuitenkin toimii myös äärellisten mallien tapauksessa, on Ehrenfeucht–Fraïssé-peli.

Monet laskennan vaativuusongelmat sekä tietokantateorian ongelmat voidaan uudelleen muotoilla matemaattisen logiikan ongelmina, kunhan rajoitutaan äärellisiin malleihin. Malleja voi ajatella esimerkiksi tietokoneohjelmien syötteinä eli relationaalisina tietokantoina. Kun tätä ideaa kehitellään eteenpäin, päädytään deskriptiiviseen vaativuusteoriaan. Yleisemmällä tasolla voidaan sanoa, että jos ongelma voidaan muotoilla predikaattilogiikan lauseeksi, voidaan ongelman ratkaisuun käyttää predikaattilogiikan työkaluja, kuten Ehrenfeucht–Fraïssé-peliä.

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli tarjoaa keinon kahden mallin samankaltaisuu-

den mittaamiseen. Muita samankaltaisuuden mittareita on muun muassa isomorfismi, mutta mallien samankaltaisuuden mittaamiseen se on yleensä aivan liian karkea työkalu. Keskeinen ero Ehrenfeucht–Fraïssé-pelissä isomorfismiin verrattuna on se, että edellisen tapauksessa mallien tutkimiseen riittää rajoitetun pistemäärän tarkastelu. Mallien tarkasteluun vaadittava aika on siis rajattu, jos ajatellaan että yksi Ehrenfeucht–Fraïssé-pelin kierros kuluttaa yhden aikayksikön.

Ehrenfeucht–Fraïssé-peli voidaan muotoilla algebralliseen muotoon tai peliteoreettiseen muotoon. Fraïssé kehitti vuonna 1954 Fraïssén systeemin mallien samankaltaisuuden mittaamista varten. Tämä on edellä mainittu Ehrenfeucht–Fraïssé-pelin algebrallinen muotoilu. Ehrenfeucht puki tämän systeemin peliteoreettiseen muotoon 1960-luvun alussa. Vaikka peli on varsinaisesti peräisin Ehrenfeuchtilta, muotoilujen yhtäpitävyyden vuoksi on tapana puhua Ehrenfeucht–Fraïssé-pelistä.

Predikaattilogiikassa on muitakin työkaluja mallien samankaltaisuuden tarkasteluun kuin Ehrenfeucht–Fraïssé-peli. Nämä ovat kuitenkin suurimmaksi osaksi vain muunnoksia Ehrenfeucht–Fraïssé-pelistä. Tällaisia pelejä ovat muun muassa Barwisen peli ja helmipeli. Esimerkiksi helmipeli on Ehrenfeucht–Fraïssé-pelin muunnos, jossa aikaresurssin sijaan rajoitetaan muistiresurssia. Tämä toteutetaan siten, että toisella pelaajista on oikeus peruuttaa siirtonsa.

Koska mallit tarjoavat keinon tarkastella predikaattilogiikan lauseiden totuutta ja Ehrenfeucht–Fraïssé-pelillä voidaan mitata mallien samankaltaisuutta, soveltuvat nämä yhdessä erinomaisesti predikaattilogiikan ilmaisuvaikeuden mittaamiseen. Tämä taas vuorostaan mahdollistaa monien teoreettisen tietojenkäsittelytieteen ongelmien ratkaisun, mutta nämä ovatkin jo uusia aiheita itsessään.