

# Kapitola 1

## Linear Algebra

### 1.1 Systems of linear equations

**Cvičení 1.1.1.** Solve the given system of linear algebraic equations using the Gauss elimination.

$$\begin{array}{lcl} a) \begin{array}{l} 2x + 2y + 5z = 11 \\ x + y + z = 4 \\ 4x + 6y + 8z = 24 \end{array} & b) \begin{array}{l} 3x + y + z - 2w = 6 \\ 2x - z + w = 9 \\ x - 2y + z + 3w = 2 \\ -3x + y + z - 2w = -12 \end{array} & c) \begin{array}{l} 2x - 3y - 2z + w = 3 \\ x - y - z - w = 2 \\ x - 2y - z + 2w = 1 \\ 2y + 2z + w = 1 \end{array} \\ \\ d) \begin{array}{l} x - 2y + z - 3w = -3 \\ x + y - 2z + 2w = 5 \\ 3x - 3z + w = 7 \\ 2x - y - z - w = 2 \end{array} & e) \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ where } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \\ & \mathbf{b} = (1, 4, -2, 7)^T. \end{array}$$

**Cvičení 1.1.2.** Solve the given system of linear algebraic equations dependent on a parameter  $\lambda \in \mathbf{R}$ .

$$a) \begin{array}{l} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{array}$$

### 1.2 Matrices, eigenvalues and eigenvectors

**Cvičení 1.2.1.** Compute the determinant of the given matrix  $\mathbf{A}$  and the inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ .

$$a) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -16 \\ -1 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad b) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -16 \\ -1 & -3 & 10 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad c) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Cvičení 1.2.2.** Compute the eigenvalues and eigenvectors of the given matrix:

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \\
 4. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & 
 \end{array}$$

### 1.3 Linear combination, vector space basis

**Cvičení 1.3.1.** Are the vectors linearly independent?

$$\begin{array}{lll}
 \vec{x}_1 = (1, -1, 2) & \vec{x}_1 = (1, -1, 2) & \vec{x}_1 = (1, 2, 4) \\
 a) \vec{x}_2 = (-2, 3, 1) & b) \vec{x}_2 = (-2, 3, 1) & c) \vec{x}_2 = (2, 1, 3) \\
 \vec{x}_3 = (-1, 3, 8) & \vec{x}_3 = (-1, 3, 7) & \vec{x}_3 = (4, -1, 1)
 \end{array}$$

**Cvičení 1.3.2.** Check if the vector  $\vec{y}$  is a linear combination of the vector set  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{x}_2$  and  $\vec{x}_3$ .

1.  $\vec{y} = (2, 8, 12)$ ,  $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{x}_2 = (3, 2, -1)$  a  $\vec{x}_3 = (1, 2, 3)$
2.  $\vec{y} = (2, 8, 8)$ ,  $\vec{x}_1 = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{x}_2 = (3, 3, 5)$  a  $\vec{x}_3 = (1, -1, 3)$

**Cvičení 1.3.3.** Express the polynomial  $p = x^2 + x + 1$  as a linear combination of the given polynomials

$$\begin{array}{ll}
 p_1 &= 2x + 3 \\
 p_2 &= x^2 + 2x + 3 \\
 p_3 &= -x^2 + 2x \\
 p_4 &= -2x^2 + x + 2
 \end{array}$$

**Cvičení 1.3.4.** Can the given matrices make a basis of the space  $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ ? If not, write an arbitrary basis of that space.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

**Cvičení 1.3.5.** Let  $V(\Omega)$  be a vector space of continuous functions defined in the given interval  $\Omega$ . Find out whether the functions  $a, b, c \in V(\Omega)$  are linearly independent.

- a)  $a = e^x$ ,  $b = x$ ,  $x \in \Omega = \mathbf{R}$ ,
- b)  $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3}$ ,  $c = x^2 + x - 2$ ,  $x \in \Omega = \mathbf{R}$ ,
- c)  $a = \sin x$ ,  $b = \cos x$ ,  $x \in \Omega = [0, 2\pi]$ ,
- d)  $a = 2 \cos 2x$ ,  $b = -\cos 2x$ ,  $c = -1$ ,  $x \in \Omega = [-\pi, \pi]$ .

## 1.4 Vector spaces

**Cvičení 1.4.1.** *Ověřte, že daná množina je uzavřená pro definované operace sčítání a násobení a dohromady tvoří lineární vektorový prostor.*

$$x \oplus y = x \cdot y, \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad x, y \in \mathbf{R}^+$$

**Cvičení 1.4.2.** *Mějme lineární vektorový prostor  $M = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$  nad tělesem reálných čísel (odpovídá  $\mathbf{R}^3$ ). Ověřte, že množina  $N = \{(a, b, c) \mid a + 2b = 0, c \in \mathbf{R}\}$  je jeho podprostorem  $N \subset M$ .*

**Cvičení 1.4.3.** *Mějme lineární vektorový prostor  $\mathbf{R}^3$ . Ověřte, že množina  $N$  je jeho podprostorem:  $N = \{(a, b, c) \mid 2a - b - c = 3\}$ ,  $N \subset \mathbf{R}^3$ .*

**Cvičení 1.4.4.** *Ověřte, že  $M = \{p \in \mathcal{P} \mid 2p(0) = p(1)\}$  je podprostorem polynomů  $\mathcal{P}$ .*

**Cvičení 1.4.5.** *Určete, která z následujících množin funkcí spolu s operací sčítání funkcí a operací násobení funkce reálným číslem tvoří vektorový prostor.*

- a) množina funkcí ohraničených na  $[a, b]$ ,
- b) množina funkcí rostoucích na  $[a, b]$ ,
- c) množina funkcí monotonních na  $[a, b]$ ,
- d) množina sudých funkcí na  $[-a, a]$ ,  $a > 0$ .

**Cvičení 1.4.6.** *Určete, které z číselných množin při sčítání a násobení reálným číslem definovanými přirozeným způsobem tvoří vektorový prostor, a v kladném případě určete jeho nulový vektor.*

- a) množina komplexních čísel  $\mathbf{C}$ ,
- b) množina reálných čísel  $\mathbf{R}$ ,
- c) množina kladných reálných čísel  $\mathbf{R}^+$ ,
- d) množina racionálních čísel  $\mathbf{Q}$ .

**Cvičení 1.4.7.** *Nechť  $P$  je množina posloupností reálných čísel spolu s operací sčítání (součet posloupností) a násobení reálným číslem (násobení posloupnosti reálným číslem). Zjistěte, zda  $P$  tvoří vektorový prostor, jestliže*

- a)  $P$  je množina všech posloupností, které mají limitu 0,
- b)  $P$  je množina všech posloupností, které mají limitu 1,
- c)  $P$  je množina všech konvergentních posloupností.

**Cvičení 1.4.8.** *Ověřte, zdali množina všech polynomů  $\mathcal{P}^n$  nejvýše stupně  $n$  tvoří vektorový prostor. Operace sčítání a násobení reálným číslem jsou definovány přirozeně.*

## 1.5 Řešení

### 1.1.1

- a)  $S = \{(1, 2, 1)\}$
- b)  $S = \{(3, 1, -2, 1)\}$
- c)  $S = \{\frac{1}{2}(t+5, 6t+2, -7t-1, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$
- d)  $S = \{(t, 5t-4s-9, s, -3t+3s+7) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$
- e) nemá řešení,  $S = \emptyset$

### 1.1.2

- $\lambda_1 = 0, S_1 = \{(1-r-s, r, s) \mid r, s \in \mathbf{R}\};$
- $\lambda_2 = -2, S_2 = \emptyset;$
- $\lambda_3 \in \mathbf{R} \setminus \{-2, 1\}, S_3 = \{\frac{1}{\lambda+2}(1, 1, 1)\}$

- 1.2.1 a)  $\det \mathbf{A} = 9, \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  b)  $\det \mathbf{A} = 0, \mathbf{A}^{-1}$  neexistuje c)  $\det \mathbf{A} = -1,$   
 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

### 1.2.2

- 1.  $\lambda = \{5, -1\}, v = \{(1, 2), (1, -1)\}$
- 2.  $\lambda = \{2, 3\}, v = \{(1, -1), (-2, 1)\}$
- 3.  $\lambda = \{1, -1, 2\}, v = \{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 2, 3)\}$
- 4.  $\lambda = \{-1, 2, -2\}, v = \{(-1, -1, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 2)\}$

- 1.3.1 a) ne, b) ano, c) ano

- 1.3.2 ano, s koeficienty  $a = (2, -1, 3)$

- 1.3.3  $p = \alpha_i p_i$ , kde koeficienty  $\vec{\alpha} = \{(-\frac{1}{6}(17t+5), \frac{1}{6}(13t+7), \frac{1}{6}(t+1), t) \mid t \in \mathbf{R}\}$

- 1.3.4 ne, jsou lineárně závislé, báze:  $\{(\frac{1}{0} \frac{0}{0}), (\frac{0}{0} \frac{1}{0}), (\frac{0}{1} \frac{0}{0}), (\frac{0}{0} \frac{0}{1})\}$

### 1.3.5

- a) nezávislé
- b) závislé, s koeficienty  $\vec{\alpha} = \{(-2t, 3t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$
- c) nezávislé
- d) závislé, s koeficienty  $\vec{\alpha} = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$

### 1.4.1

### 1.4.2

- 1.4.3 ne, není uzavřen pro  $\oplus$  1.4.4 ano

### 1.4.5

- a) ano
- b) ne, pro rostoucí funkci  $f(x)$ , není  $kf(x)$  pro  $k < 0$  rostoucí
- c) ne, např. pro funkce  $f(x) = -x$  a  $g(x) = x^2$  na intervalu  $[0, 1]$ , je  $f(x) + g(x)$  nemonotonní
- d) ano

### 1.4.6

- a) ano,  $\vec{0} = 0$
- b) ano,  $\vec{0} = 0$
- c) ne, pro  $x \in \mathbf{R}^+, k \in \mathbf{R}$  neplatí  $kx \in \mathbf{R}^+$
- d) ne, pro  $x \in \mathbf{Q}, k \in \mathbf{R}$  neplatí  $kx \in \mathbf{Q}$

### 1.4.7

- a) ano
- b) ne,  $\lim((a) + (b)) = \lim(a) + \lim(b) = 2$
- c) ano

## Kapitola 2

# Metrické, normované prostory, operátory, konvergence

*Norma splňuje:*

$$N) \|x\| = 0$$

$$N) \|x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

*Metrika je generována normou  $d(x, y) = \|x - y\|$  (neplatí opačně), splňuje:*

$$M) d(x, y) \geq 0$$

$$M) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

**Cvičení 2.0.1.** *Ověřte, že množina  $M \subset \mathbf{R}^2, M = \{\vec{x} = (a, 2a) \mid a \in \mathbf{R}\}$  s normou  $\|(x_1, x_2)\| = |x_1|$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.2.** *Ověřte, že množina  $M \subset \mathbf{R}^2$  s normou  $\|(x_1, x_2)\| = (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.3.** *Ověřte, že zadané funkce jsou normami nebo metrikami.*

$$1. \|u\| = \sqrt{\int_a^b |u(x)| \, dx} \quad 2. \|u\| = \sqrt{\int_a^b |u(x)|^2 \, dx} \quad 3. \|u\| = \sqrt{\int_a^b |u(x)|^3 \, dx}$$

**Cvičení 2.0.4.** *Ověřte, že množina funkcí  $M \subset \mathbf{C}[0, 1]$  s normou  $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.5.** *Ověřte, že množina polynomů  $M = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$  s normou  $\|p\| = |p(0)| + |p(1)| + |p(2)|$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.6.** *Ověřte, že množina polynomů  $M = \{p(x) = ax^2 + 2(a+b)x + b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$  s normou  $\|p\| = |p'(-1)| + |p'(1)| + |p''(0)|$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.7.** *Ověřte, že množina polynomů  $M = \{p(x) = ax^2 + bx + b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$  s normou  $\|p\|$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

- a)  $\|p\| = |p'(-1) + p'(1)|$
- b)  $\|p\| = |p'(-1) + p'(1)| + |p''(0)|$
- c)  $\|p\| = |p'(-1) + p'(1)| + |p''(0)|^{\frac{1}{2}}$
- d)  $\|p\| = \left( \sqrt{|p'(-1) + p'(1)|} + \sqrt{|p''(0)|} \right)^2$

**Cvičení 2.0.8.** *Ověřte, že množina polynomů  $M = \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$  s normou  $\|p\| = \left| \int_0^1 p(x) dx \right| + \sqrt{p(1)^2 + p(0)^2}$  tvoří normovaný vektorový podprostor.*

**Cvičení 2.0.9.** *Vypočítejte normu funkcí.*

- a)  $L^1$ ,  $L^\infty$ , a  $H^1$  normu pro funkci  $f(x) = (x+1)(x-2)$  na intervalu  $[-2, 3]$ .
- b)  $\|f\|_{L^1([0,2])}$  a  $\|f\|_{L^\infty([0,1])}$  pro  $f(x) = -x(x-1)$
- c)  $\|f\|_{L^1([0,1])}$  a  $\|f\|_{L^2([0,1])}$  pro  $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
- d)  $\|f\|_{L^2([0,2\pi])}$  pro  $f(x) = \sin(kx)$  a  $f(x) = \cos(kx)$  kde  $k$  je libovolné celé číslo.
- e)  $\|f\|_{L^1([-\infty, \infty])}$  a  $\|f\|_{L^\infty([-\infty, \infty])}$  pro  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- f) normu v prostoru  $H^1([-1, 1])$  pro funkce  $\sqrt[3]{x}$  a  $\sqrt[3]{x^2}$ , pro které hodnoty parametru  $p$  bude mít funkce  $x^p$  konečnou normu?

**Cvičení 2.0.10.** *Ověřte, zda zadaný operátor je symetrický a pozitivně definitní.*

- a)  $A(u) = -\frac{\partial u}{\partial x}$  na intervalu  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\text{Tr}(\Omega) = 0$ .
- b)  $A(u) = -x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u$  na  $C_0^2(\Omega)$ ,  $\Omega = (0, 1)(0, 1)$
- c)  $A(u) = \lambda(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u$  na  $C_0^2(\Omega)$ ,  $\Omega = (0, 1)(0, 1)$
- d)  $A(u) = -4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u$  na  $C_0^2(\Omega)$ ,  $\Omega = (-2, 2)(-2, 2)$
- e)  $A(u) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( 2x \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( 4y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u$  na  $C_0^2(\Omega)$ ,  $\Omega = (0, 2)(0, 2)$

**Cvičení 2.0.11.** *Ověřte, zda zadaný operátor  $A : X \rightarrow Y$  je lineární, symetrický a pozitivně definitní na daném prostoru se skalárním součinem  $Z$ .*

- a)  $A : C^2((0, 1)) \rightarrow L^2((0, 1))$ ,  $A(f) = \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \right)$ ,  $Z = L^2((0, 1))$

- b)  $A : C^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $A(f) = \left( -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f \right)$ ,  $Z = L^2(\Omega)$ ,  $\Omega =$  koule v  $\mathbf{R}^2$

**Cvičení 2.0.12.** *Ověřte, zda zadaný operátor  $A : X \rightarrow Y$  je lineární, symetrický a pozitivně definitní na daném prostoru se skalárním součinem  $Z$ . Bude potřeba použít nerovnosti  $(Af, f)_X \geq c(f', f')_X$  a  $(f', f')_X \geq c(f, f)_X$ .*

- a)  $A : C^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $A(f) = \left( -2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$ ,  $Z = L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

b)

$$A : C^2((1, 2)) \rightarrow L^2((1, 2)), \quad A(f) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right) + f, \quad Z = L^2((1, 2))$$

**Cvičení 2.0.13.** *Ověřte, zdali je zadaná posloupnost konvergentní v normě  $L_1$  a  $L_\infty$ .*

a)  $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}$  na  $[-1, 1]$

b)  $f_n(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{n}\right) e^x$  na  $[-1, 1]$

c)  $f_n(x) = x^2 + \frac{x}{n}$  na  $[0, 1]$

d)  $f_n(x) = x^n$  na  $[0, 1]$

e)  $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$  na  $[-1, 1]$

**Cvičení 2.0.14.** *Vyberte z uvedených normovaných prostorů neúplné a svou volbu podložte stručně okomentovaným příkladem.*

$$(Q, \|\cdot\|), (\mathbf{R}, \|\cdot\|), (C, \|\cdot\|_{L_1}), (C, \|\cdot\|_{L_\infty}), (L_1, \|\cdot\|_{L_1}), (L_2, \|\cdot\|_{L_2}), (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$$

**Cvičení 2.0.15.** *Definujte prostor  $H^1(\Omega)$  a normu zavedenou pomocí standardního skalárního součinu.*

## 2.1 Řešení

2.0.1 ano - uzavřenost pro sčítání, násobení reálným číslem, platí norma

2.0.2 ne, neplatí  $N$ )

2.0.3

a) norma ne ( $N$ )), metrika ano

b) norma ano, metrika ano

c) norma ne, metrika ano

2.0.4 ne, neplatí  $N$ )

2.0.5 ano

2.0.6 ano

2.0.8 ano

2.0.9

a)  $1, \frac{1}{4}$

b)  $2, \infty$

c)  $\sqrt{\pi}$

d)  $\pi, 1$

e)  $\infty, \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + (6)^2}, p > \frac{1}{2}$

2.0.10

a) ano

b) není symetrický, ani poz. def.

c) ano, pro  $\lambda = \text{konst.}$  a  $\lambda(y) > 0, \mu(x) < 0$

d) ano

e) *není symetrický, ani poz. def.*

2.0.11

a) *per partes*

b) *Greenova věta*

2.0.12

a) *per partes v obou osách*

b) *doplňená nerovnost (Poincareova)*

2.0.13

a)  $L_1$  ano,  $L_\infty$  ano

b)  $L_1$  ano,  $L_\infty$  ano

c)  $L_1$  ano,  $L_\infty$  ano

d)  $L_1$  ano,  $L_\infty$  ne

e)  $L_1$  ano,  $L_\infty$  ne



## Kapitola 3

# ODR, SODR, standardní fundamentální systém

**Cvičení 3.0.1.** *Určete standardní fundamentální systém řešení soustavy*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + 5x_3 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + 6x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - x_2 + 6x_3\end{aligned}$$

**Cvičení 3.0.2.** *Určete standardní fundamentální systém řešení soustavy*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

**Cvičení 3.0.3.** *Určete řešení soustavy pomocí standardního fundamentálního systému*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \cos t, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 1,\end{aligned}$$

*které splňuje počáteční podmínky  $x_1(0) = 1$  a  $x_2(0) = 1$ .*

**Cvičení 3.0.4.** *Určete řešení soustavy pomocí standardního fundamentálního systému*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 + 5x_1 + x_2 &= e^t, \\ \dot{x}_2 + 3x_2 - x_1 &= e^{2t},\end{aligned}$$

*které splňuje počáteční podmínky  $x_1(0) = 1$  a  $x_2(0) = 1$ .*

**Cvičení 3.0.5.** *Určete řešení soustavy pomocí standardního fundamentálního systému*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2e^t, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + t^2,\end{aligned}$$

*které splňuje počáteční podmínky  $x_1(0) = -2$  a  $x_2(0) = 1$ .*

**Cvičení 3.0.6.** *Určete řešení soustavy pomocí standardního fundamentálního systému*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 - 5e^t \sin t,\end{aligned}$$

*které splňuje počáteční podmínky  $x_1(0) = 1$  a  $x_2(0) = 1$ .*

**Cvičení 3.0.7.** *Určete řešení soustavy pomocí standardního fundamentálního systému*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2e^{-t}, \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 + 4x_2 - 4e^{-t},\end{aligned}$$

*které splňuje počáteční podmínky*

- a)  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$
- b)  $x_1(1) = 1, x_2(1) = 1$

# Kapitola 4

## PDR

**Cvičení 4.0.8.** Řešte metodou sítí rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y - x \quad \text{na } \Omega \text{ s hranicí } \Gamma.$$

Oblast  $\Omega$  je pětiúhelník s vrcholy  $V_1[-1, 0]$ ,  $V_2[-1, 1.5]$ ,  $V_3[0, 1.5]$ ,  $V_4[0.5, 1]$  a  $V_5[-0.5, 0]$ . Okrajová podmínka je zadána

$$u(x, y) = y \quad \text{na } \Gamma.$$

Krok volte 0.5 v obou souřadnicích. Druhou derivaci aproximujte centrální diferencí.

**Cvičení 4.0.9.** Řešte metodou sítí rovnici

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = (x - y)^2 \quad \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, 0.8).$$

Jsou zadány následující okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= -y \\ u(1, y) &= 2y \\ u(x, 0.8) &= -0.8 + 2.4x \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Krok volte 0.25 v obou souřadnicích. Derivace aproximujte diferencí 2. řádu.

**Cvičení 4.0.10.** Řešte úlohu vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \quad \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, 0.4),$$

s počáteční podmínkou  $u(x, 0) = x^2$  pro  $x \in [0, 1]$

a okrajovými podmínkami  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 1$  pro  $t > 0$ .

Zvolte prostorový krok 0.25 a časový krok co největší tak, aby numerické schéma bylo stabilní.

**Cvičení 4.0.11.** Řešte úlohu vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + x \quad \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, T),$$

s počáteční podmínkou  $u(x, 0) = 0$  pro  $x \in [0, 1]$   
a okrajovými podmínkami  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 3t$  pro  $t > 0$ .  
Zvolte prostorový krok  $0.25$  a časový krok  $0.1$ . Ověřte, že explicitní numerické schéma bude stabilní a spočtěte aproximaci  $u(0.75, 0.4)$ .