Problem KtoMiPizzęZżera

Dane:

$$n \text{ -- liczba potrzeb}$$

$$m \text{ -- liczba pizz}$$

$$k \text{ -- liczba składników}$$

$$p \text{ -- liczba kawałków w jednej pizzy}$$

$$L_i \text{ -- zbiór składników lubianych dla potrzeby } i\text{-tej}$$

$$N_i \text{ -- zbiór składników nielubianych dla potrzeby } i\text{-tej}$$

$$S_i \text{ -- zbiór składników pizzy } i\text{-tej}$$

$$\boldsymbol{c}_{m\times 1} \text{ -- wektor cen pizz}$$

$$[\boldsymbol{A}_{m\times k}]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_j \in S_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{B}_{n\times k}]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_j \in L_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{C}_{n\times k}]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } s_j \in N_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^T\right]_{i,j} = [\boldsymbol{D}_{n\times m}]_{i,j} = |L_i \cap S_j|$$

$$\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^T\right]_{i,j} = [\boldsymbol{E}_{n\times m}]_{i,j} = |N_i \cap S_j|$$

Zapis rozwiązania:

$$[\boldsymbol{R}_{n\times m}]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if potrzebie } i\text{-tej została przydzielona pizza } j\text{-ta} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

przy założeniu, że $\boldsymbol{R}\,\mathbf{1}_{m\times 1} = \mathbf{1}_{n\times 1}$.

Jakość dopasowania dla każdej potrzeby możemy wyliczyć następująco:

$$\boldsymbol{d}_{n\times 1} = (\boldsymbol{R} \odot \boldsymbol{D})\,\mathbf{1}_{m\times 1}$$

$$\boldsymbol{e}_{n\times 1} = (\boldsymbol{R} \odot \boldsymbol{E})\,\mathbf{1}_{m\times 1}$$

gdzie $\odot$ to iloczyn Hadamarda (element-wise multiplication).

Do obliczenia jakości rozwiązania możemy użyć funkcji:

Liczba dopasowań pozytywnych:

$$f(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}_{1\times n}\boldsymbol{d} = \mathbf{1}_{1\times n}\,(\boldsymbol{R} \odot \boldsymbol{D})\,\mathbf{1}_{m\times 1}$$

Liczba dopasowań negatywnych:

$$g(\boldsymbol{R}) = \mathbf{1}_{1\times n}\boldsymbol{e} = \mathbf{1}_{1\times n}\,(\boldsymbol{R} \odot \boldsymbol{E})\,\mathbf{1}_{m\times 1}$$

Liczba kawałków nietworzących całej pizzy:

$$h(\boldsymbol{R}) = (\mathbf{1}_{1\times n}\boldsymbol{R} \bmod p)\,\mathbf{1}_{m\times 1}$$

Funkcja celu:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{R}) = \alpha f(\boldsymbol{R}) + \beta g(\boldsymbol{R}) + \gamma h(\boldsymbol{R})$$

Warunek:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \left\lceil \frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}_{i,j} \right\rceil \leqslant c_{max}$$

$$\left\lceil \frac{1}{p} \cdot \mathbf{1}_{1\times n}\boldsymbol{R} \right\rceil \boldsymbol{c} \leqslant c_{max}$$

Przestrzeń rozwiązań spełniających powyższy warunek to rodzina macierzy:

$$\mathcal{R}^{n\times m}_{c_{max}} = \left\{ \boldsymbol{R}_{n\times m} \;\middle|\; \boldsymbol{R}\,\mathbf{1}_{m\times 1} = \mathbf{1}_{n\times 1} \wedge \left\lceil \frac{1}{p} \cdot \mathbf{1}_{1\times n}\boldsymbol{R} \right\rceil \boldsymbol{c} \leqslant c_{max} \right\}$$

Szukane:

$$\boldsymbol{R}^* = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}^{n\times m}_{c_{max}}} \mathcal{F}(\boldsymbol{R})$$