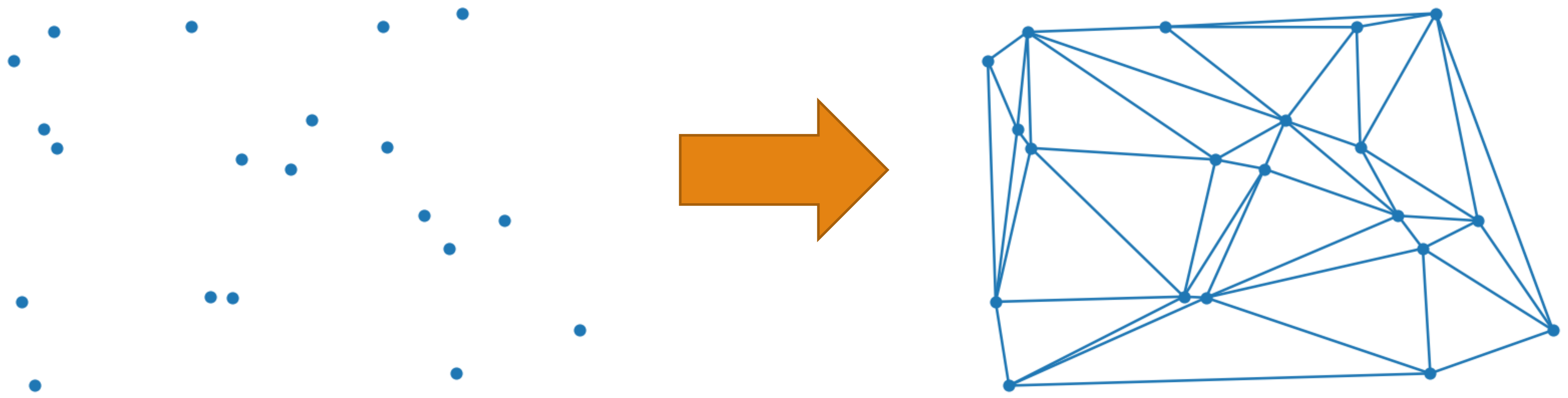
Triangulacja Delaunay’a powierzchni 2d

PAULINA JĘDRYCHOWSKA I OSKAR SIMON

Opis projektu

Zadawany jest zbiór punktów na płaszczyźnie

Celem jest znalezienie jego triangulacji Dalauna'ya przy użyciu dwóch metod iteracyjnych



Triangulacja - definicja

Triangulacja – technika stosowana w grafice komputerowej polegająca na rozbiciu bardziej złożonych powierzchni obiektów na trójkąty. Rozkładowi takiemu poddane mogą być nawet figury o łukowych krawędziach, jak np. koło czy elipsa.

Ułatwia ona rozwiązywanie wielu zadań, takich jak: wypełnianie obszarów, określanie zasłaniania i oświetlenia obiektów trójwymiarowych, a także wyznaczenie linii ich przecięcia.

Dla efektywności tych zastosowań triangulacji ważne jest, aby liczba składowych trójkątów była jak najmniejsza i nie trzeba było definiować nowych danych. Z tych m.in. powodów zadanie triangulacji definiuje się jako: podział wielokąta zwykłego na sumę nienakładających się na siebie trójkątów, których wierzchołkami mogą być tylko wierzchołki danego wielokąta.

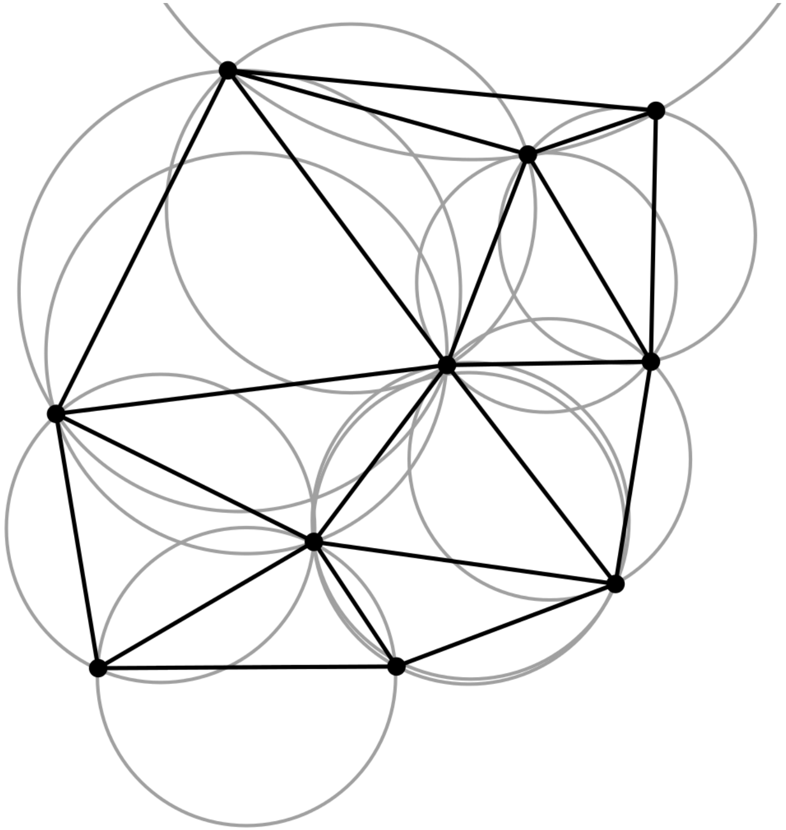
Triangulacja Delaunay'a

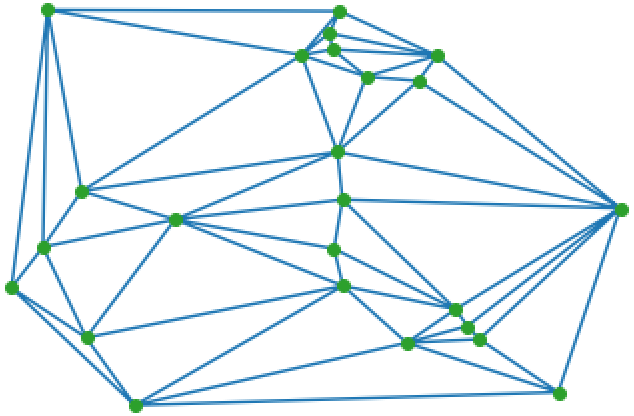
Jest to specjalny rodzaj triangulacji T, spełniający następujące warunki:

Każde dwa elementy z T mają wspólną ścianę lub nie mają części wspólnej wcale

Wnętrze kuli opisanej na dowolnym elemencie z T nie zawiera wierzchołków żadnego elementu z T

Przykłady triangulacji Delaunay'a





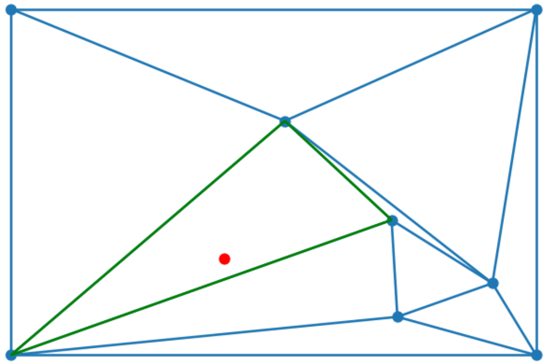
Pierwsza metoda

Zaczynamy od stworzenia pomocniczego prostokąta obejmującego wszystkie punkty ze zbioru, podzielonego na dwa trójkąty

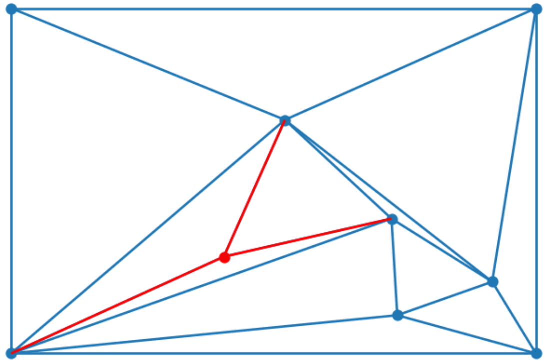
Następnie dodajemy kolejne punkty ze zbioru i wykonujemy dla każdego poniższe kroki:

- Znajdujemy trójkąt, w którym znajduje się dodawany punkt
- Rozbijamy go na 3 mniejsze trójkąty, których wspólnym wierzchołkiem jest dany punkt
- Dla każdego czworokąta stworzonego przez połączenie jednego z 3 trójkątów z jego nienależącym do nich sąsiadem sprawdzamy, czy jego przekątna spełnia warunki triangulacji Delauna'ya (okręgi opisane na tych trójkątach nie powinny zawierać w sobie wierzchołków z poza tego trójkąta)

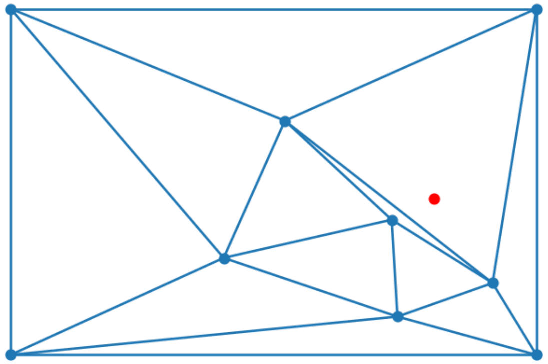
1



2



3



Trójkąty pomocnicze

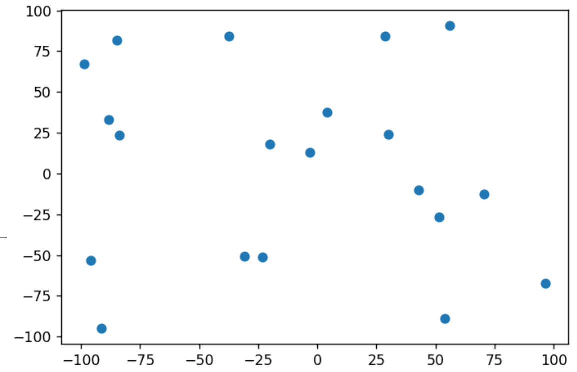
Algorytm zakłada stworzenie pomocniczego trójkąta obejmującego wszystkie punkty z zadanego zbioru

Dla ułatwienia implementacji można stworzyć prostokąt, który następnie zostaje podzielony na dwa trójkąty

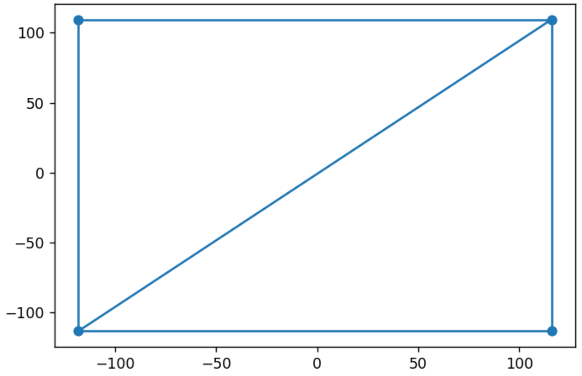
Triangulacja Delaunay'a jest niejednoznaczna dla prostokąta i wybranie dowolnej przekątnej do jego podzielenia spełnia jej warunki

Pomocnicze trójkąty mogą potencjalnie zmienić rezultat triangulacji, dlatego powinny być one odpowiednio duże

1



2

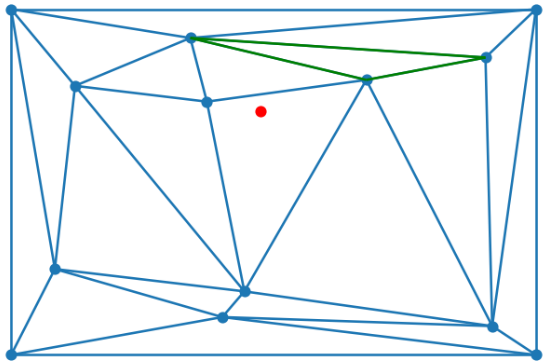


Odnajdywanie trójkąta

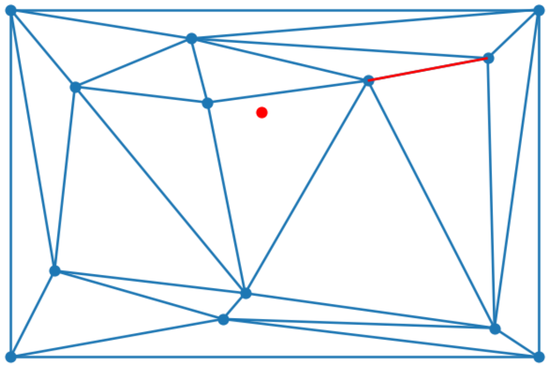
Jedną z najprostszych i najefektywniejszych metod odnajdywania trójkąta, do którego należy zadany punkt jest zaczęcie poszukiwania od dowolnego trójkąta i przemieszczanie się po kolejnych topologicznych sąsiadach w kierunku zadanego punku

Kierunek położenia punktu względem trójkąta można wyznaczyć za pomocą wyznacznika. Jeżeli szukany punkt znajduje się po przeciwnej stronie prostej zadanej przez pewną krawędź, względem wierzchołka tego trójkąta nienależącego do wspomnianej krawędzi, to należy przejść do topologicznego sąsiada tego trójkąta, którego wspólna krawędź to ta badana.

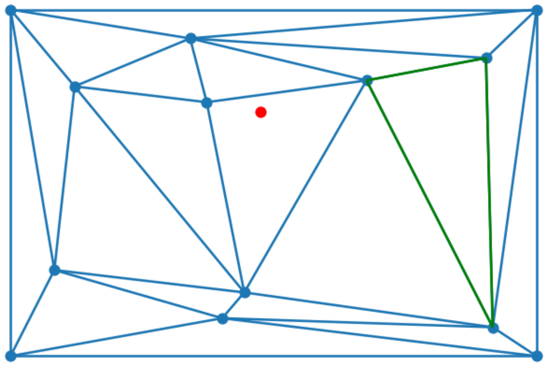
1



2



3

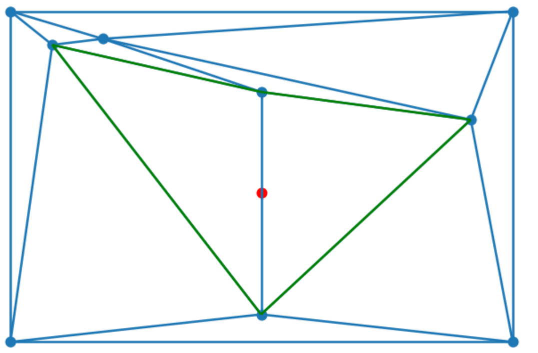


Specjalny przypadek

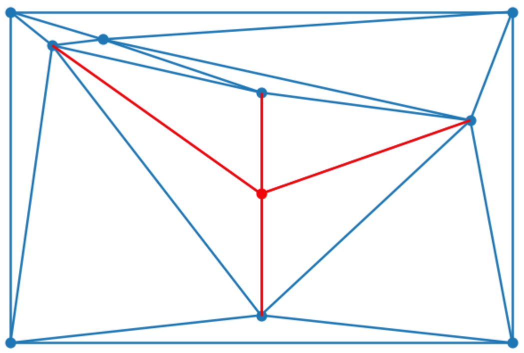
Przypadkiem, który należy osobno rozpatrywać jest wypadek, gdy nowo dodany punkt znajdzie się na krawędzi łączącej dwa trójkąty.

Wtedy należy rozbić te dwa trójkąty na cztery mniejsze, których wspólnym wierzchołkiem jest właśnie ten dodawany

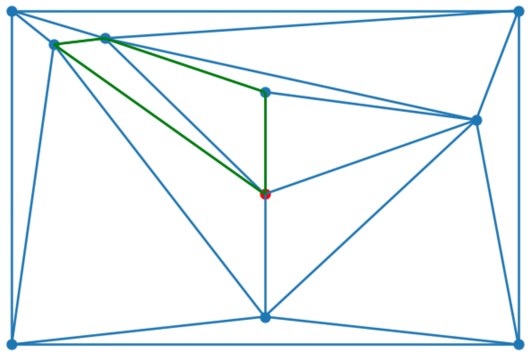
1



2



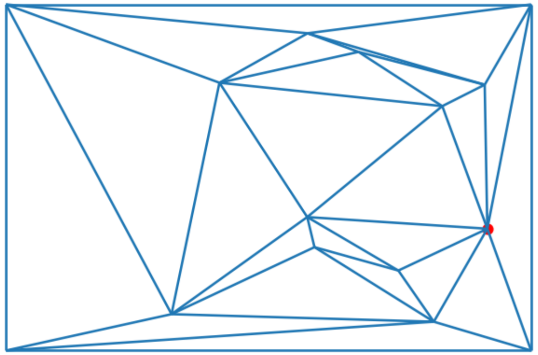
3



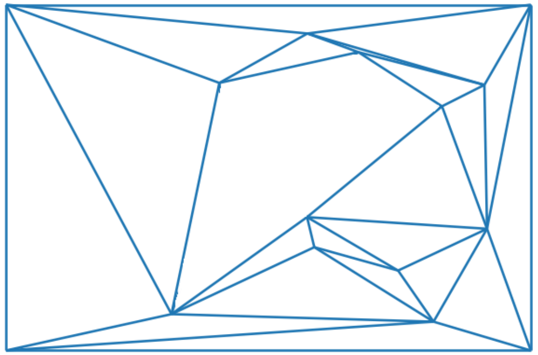
Druga metoda

- Pierwsze kroki drugiej metody są takie same jak w metodzie pierwszej
- Należy stworzyć trójkąty pomocnicze, a następnie dodawać do nich kolejne punkty, znajdując trójkąty do których należą
- Po dodaniu punktu należy usunąć ze struktury wszystkie trójkąty, których okręgi na nich opisane zawierają dodany punkt
- W rezultacie w strukturze powstanie w ich miejscu „dziura”
- W jej miejscu należy stworzyć trójkąty o dodanym punkcie jako ich wspólnym wierzchołku

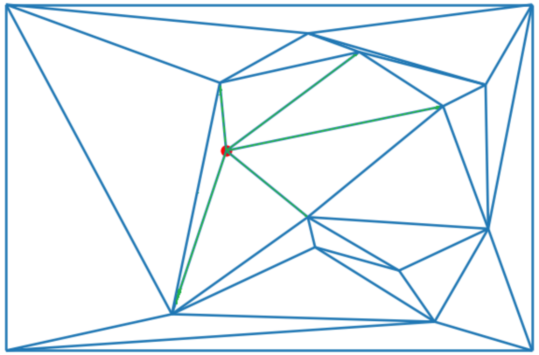
1



2



3



Usuwanie nieprawidłowych trójkątów

W celu usunięcia nieprawidłowych trójkątów należy stworzyć pustą listę trójkątów do usunięcia oraz ich stos

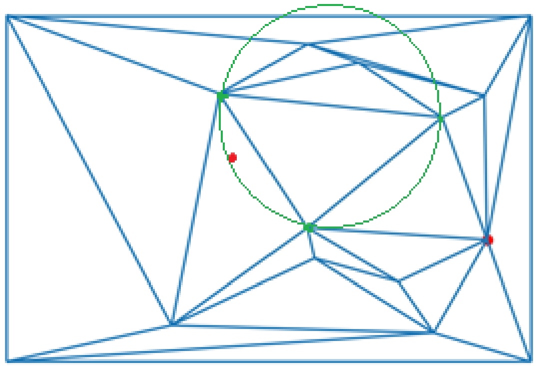
Na początku do stosu oraz listy dodawany jest trójkąt, w którym znajduje się punkt

Dopóki stos nie jest pusty należy:

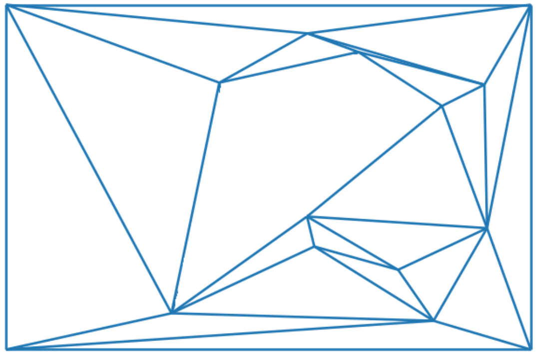
- Ściągnąć trójkąt ze stosu
- Jeżeli nie został on jeszcze odwiedzony, należy zbadać jego topologicznych sąsiadów
- Każdego z nich, którego koło opisane na nim zawiera dodany punkt należy dodać do stosu oraz listy trójkątów do usunięcia

Na koniec należy usunąć wszystkie trójkąty znajdujące się na liście

1



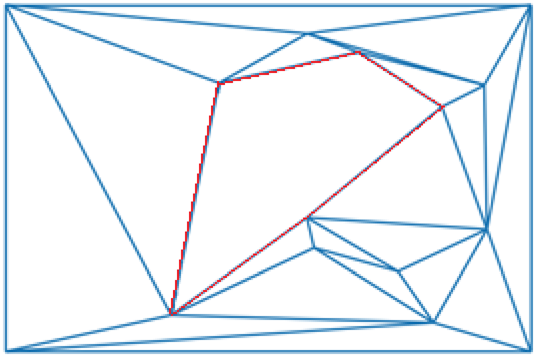
2



Odnajdywanie brzegów dziury

Odnajdywanie brzegów dziury powstałej w wyniku usuwania trójkątów odbywa się właśnie podczas ich usuwania.

Jeżeli topologiczny sąsiad ściąganego ze stosu trójkąta nie spełnia warunku usunięcia, bądź jest zewnętrzną częścią płaszczyzny, nienależącą do triangulacji, to dodajemy ich wspólną krawędź do listy krawędzi



Wypełnianie dziury

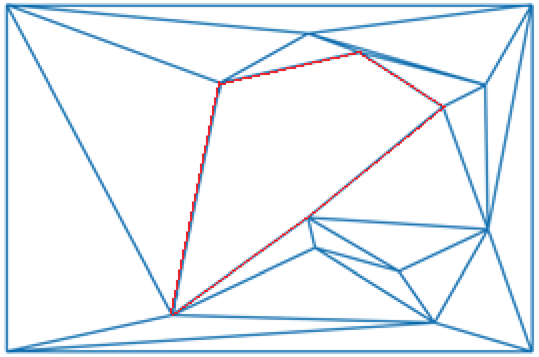
Aby wypełnić dziurę należy posortować krawędzie na podstawie kąta pomiędzy osią x, a prostą leżącą na dodanym punkcie i dowolnym punkcie krawędzi (najlepiej w tym celu użyć wyznacznik)

Do każdej takiej krawędzi tworzona jest nowa krawędź, pomiędzy jednym z jej końców, a dodanym punktem

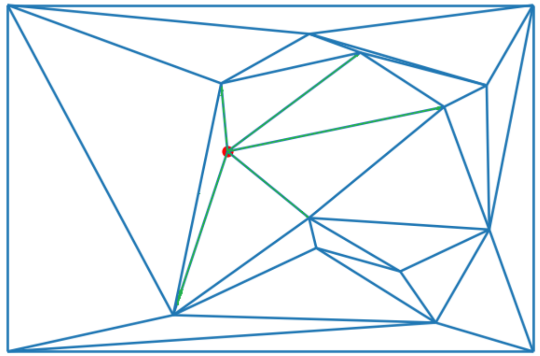
Ważne jest, aby dodawane krawędzie nie powielały się

Nowe krawędzie łączone są odpowiednio z krawędziami dziury, aby utworzyć nowe trójkąty

1



2



Porównanie złożoności czasowej metod

Obie metody mają zaskakująco podobną złożoność czasową

Można zauważyć niewielką tendencję do osiągania lepszych czasów przez drugą metodę przy większych zbiorach punktów, jednak jest to zaledwie marginalne odchylenie

Algorytm	100 pkt	500 pkt	1000 pkt	10 000 pkt	50 000 pkt	100 000 pkt	200 000 pkt
Pierwszy	0.04 s	0.14 s	0.32 s	8.38 s	95.52 s	266.59 s	714.18 s
Drugi	0.04 s	0.26 s	0.40 s	8.41 s	95.52 s	262.51 s	700.64 s

Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Triangulacja_(grafika_komputerowa)

https://pl.wikipedia.org/wiki/Triangulacja_Delone

http://web.mit.edu/alexmv/Public/6.850-lectures/lecture09.pdf?fbclid=IwAR2lgWJPYhq0qIEDLJiMnxf1EvYlwkXrWiXT51sf_xAV6kMDA8VQvTkZjqI