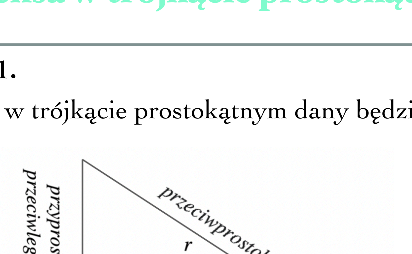
Trygonometria

Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym

Definicja 1.

Niech w trójkącie prostokątnym dany będzie kąt ostry α.



a) Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta a do przyprostokątnej przyległej do kąta α:

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

b) Cotangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta a do przyprostokątnej przeciwległej kątowi α:

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

c) Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

$$sin\alpha = \frac{y}{r}$$

d) Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do przeciwprostokątnej:

$$cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa dla kątów 30°, 45° i 60°

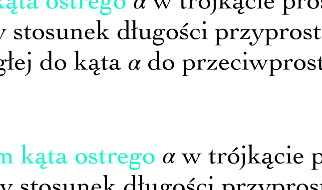
Tabela wartości funkcji trygonometrycznych:

α	30°	45°	60°
$sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Kąt skierowany

Definicja 1.

Kątem skierowanym nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. W kącie skierowanym pierwszą z półprostych nazywamy ramieniem początkowym kąta, drugą - ramieniem końcowym.



Kąt skierowany oznaczamy $|\sphericalangle AOB|$. Wtedy punkt O jest wierzchołkiem kąta, półprosta $OA^{\rightarrow}$ ramieniem początkowym, półprosta $OB^{\rightarrow}$ - ramieniem końcowym.

Kąt skierowany $|\sphericalangle BOA|$ nazywamy kątem przeciwnym do $|\sphericalangle AOB|$.

O kątach skierowanych możemy myśleć w następujący sposób: dane są dwie półproste o wspólnym początku w punkcie O. Jedna z nich (początkowe ramię kąta) jest nieruchoma, a druga (końcowe ramię kąta) obraca się wokół punktu O. Po zatrzymaniu się drugiego ramienia kąta mamy wyznaczony pewien kąt skierowany.

Jak łatwo zauważyć druga półprosta może wykonywać dwa rodzaje obrotów: zgodnie z ruchem wskazówek zegara i przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

W pierwszym przypadku mówimy o kącie skierowanym ujemnie - miarę takiego kąta wyrażamy ujemną liczbą (stopni). W drugim przypadku mówimy o kącie skierowanym dodatnio - miarę takiego kąta wyrażamy dodatnią liczbą (stopni).

O dwóch kątach skierowanych, z których jeden ma miarę dodatnią, a drugi - miarę ujemną, powiemy, że są przeciwnie skierowane, w pozostałych przypadkach - że są zgodnie skierowane.

Rozpatrzmy kąt skierowany z „ruchomym" ramieniem końcowym. Załóżmy, że końcowe ramię kąta „obróciło się” o 45°, a następnie jeszcze o 360°. Możemy temu kątowi przypisać miarę 45°+ 360°, czyli 405°.

Zauważ, że otrzymalibyśmy taki sam kąt (czyli kąt przystający), gdyby ramię „obróciło się” o $45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, $45^\circ + 3 \cdot 360^\circ$ lub $45^\circ + 4 \cdot 360^\circ$.

Tak więc przyjmujemy, że każdy kąt skierowany ma nieskończenie wiele miar.Wszystkie te miary różnią się o wielokrotność 360°. Zapisujemy je w postaci:

$$\alpha + k \cdot 360^\circ, \text{ gdzie } \alpha \in \langle 0, 360^\circ) \text{ i } k \in C,$$

przy czym a nazywamy miarą główną kąta skierowanego.

Powiemy, że dwa kąty skierowane są przystające, jeżeli ich miary główne są równe.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta

Załóżmy, że mamy dany dowolny skierowany kąta. Umieszczamy kąta w układzie współrzędnych w następujący sposób: ramię początkowe tego kąta pokrywa się z dodatnią półosią OX, a ramię końcowe tego kąta znajduje się w pierwszej, drugiej, trzeciej albo w czwartej ćwiartce układu współrzędnych. O tak umiejscowionym kącie powiemy, że jest w położeniu standardowym.

Definicja 1.

Niech dany będzie kąt skierowany α w położeniu standardowym. Na końcowym ramieniu kąta wybieramy punkt $P(x, y)$ różny od punktu $O(0,0)$. Wówczas:.

a) Tangensem kąta α nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu P przez odciętą tego punktu; jeśli odcięta punktu P jest równa zeru, to tangens kąta α nie istnieje,

$$tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad x \neq 0$$

b) Cotangensem kąta nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu P przez rzędną tego punktu; jeśli rzędna punktu P jest równa zeru, to cotangens kąta a nie istnieje,

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}, \qquad y \neq 0$$

c) Sinusem kąta nazywamy liczbę będącą ilorazem rzędnej punktu P przez odległość punktu P od początku układu współrzędnych,

$$sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

d) Cosinusem kąta nazywamy liczbę będącą ilorazem odciętej punktu P przez odległość punktu P od początku układu współrzędnych,

$$cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Znaki wartości funkcji trygonometrycznych kąta a zależą od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się końcowe ramię tego kąta. Ponieważ dla dowolnego punktu $P(x, y)$ różnego od punktu $O(0,0)$ wyrażenie $\sqrt{x^2 + y^2}$ jest liczbą dodatnią, więc znaki wartości funkcji trygonometrycznych zależą od znaków współrzędnych punktu P. Jeśli końcowe ramię kąta a znajduje się

a) w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, to

$x > 0$ i $y > 0$.

Wtedy wszystkie funkcje trygonometryczne kąta a są dodatnie.

b) w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, to

$x < 0$ i $y > 0$.

Wówczas $sin\alpha$ jest liczbą dodatnią, a pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α są ujemne.

c) w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, to

$x < 0$ i $y < 0$.

Zatem wartości tangensa α i cotangensa α są dodatnie, natomiast sinus α i cosinus α są liczbami ujemnymi.

d) w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, to

$x > 0$ i $y < 0$.

Wtedy cosinus α jest dodatni, a pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych kąta a są ujemne.

Ostatecznie mamy:

Nauczenie się znaków wartości funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach ułatwi poniższa „rymowanka”:

W pierwszej ćwiartce same plusy
w drugiej - tylko sinus
w trzeciej - tangens i cotangens
a w czwartej zaś cosinus.

Podstawowe tożsamości trygonometryczne

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych i która jest prawdziwa

dla wszystkich wartości tych zmiennych (dla których funkcje są określone).

Twierdzenie 1.

1) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, jeśli α jest dowolnym kątem
2) $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$
3) $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$
4) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, gdzie $k \in C$

Wzory redukcyjne

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ \qquad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3} = -\tan 60^\circ \qquad \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\cot 60^\circ$$

Twierdzenie 1.

1) $tg(-\alpha) = -tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(-\alpha) = -sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(-\alpha) = cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie 2.

1) $tg(360^\circ - \alpha) = -tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(360^\circ - \alpha) = -ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(360^\circ - \alpha) = -sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(360^\circ - \alpha) = cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie 3.

1) $tg(180^\circ + \alpha) = tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(180^\circ + \alpha) = ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(180^\circ + \alpha) = -sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(360^\circ + \alpha) = -cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie 4.

1) $tg(180^\circ - \alpha) = -tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(180^\circ - \alpha) = -ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(180^\circ - \alpha) = sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(360^\circ - \alpha) = -cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie 5.

1) $tg(90^\circ + \alpha) = -ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(90^\circ + \alpha) = -tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(90^\circ + \alpha) = cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(90^\circ + \alpha) = sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie 6.

1) $tg(90^\circ - \alpha) = ctg\alpha$, jeśli $\alpha \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, $k \in C$
2) $ctg(90^\circ - \alpha) = -tg\alpha$, jeśli $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ i $k \in C$
3) $sin(90^\circ - \alpha) = cos\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem
4) $cos(90^\circ - \alpha) = sin\alpha$, jeśli α jest dowolnym kątem.

Twierdzenie sinusów

Twierdzenie 1. (sinusów)

W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$$

Twierdzenie cosinusów

Twierdzenie 1. (cosinusów)

W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\gamma$$