a. Pokaż, że zadanie stojące przed Panią Dyrektor jest co najmniej tak trudne, jak problem trzykolorowania z wykładu, tzn., że $3COL \leq_p$ Tutory.

Pokażmy najpierw, że problem Tutory jest co najmniej tak trudny jak problem czterokolorowania grafu, czyli że $4COL \leq_p$ Tutory.
Aby to pokazać chcemy reprezentować problem Tutory przy pomocy grafu G:

- niech każdy student będzie reprezentowany poprzez wierzchołek grafu
- niech każdy tutor będzie jednym z 4 unikalnych kolorów

Wtedy student i ma przydzielonego tutora k wtw. gdy wierzchołek i ma kolor k
oraz dla dowolnych dwóch wierzchołków u i w jeśli są połączone krawędzią tzn jeśli $\exists e=(u,w) \in E(G)$ to student u nie chce być przypisany do tego samego tutora co student w lub student w nie chce tam gdzie student u. lub i u i w nie chcą tego samego tutora
Stąd problem tutory można traktować jak problem czterokolorowania grafu, gdyż dla połączonych ze sobą wierzchołków, jeśli możliwe jest prawidłowe kolorowanie tego grafu, wtedy studenci są w różnych grupach (u różnych tutorów), czyli jeśli potrafimy w ten sposób pokolorować $G \Rightarrow$ zwróć 1, gdy nie 0

Teraz chcemy pokazać, że $3COL \leq_p$ Tutory.

Zbudujmy redukcję:

niech $3COL(G)=$ " stwórz graf G' wg poniższych zasad:

→ weź G

→ dodaj nowy wierzchołek v

→ połącz wierzch. v ze wszystkimi wierzchołkami z G

zwróć $Tutony(G')$ "

dowód, że redukcja jest poprawna:

$$G \in 3COL \iff 3COL(G) \in Tutony$$

"⇒" zał. $G \in 3COL$

Skoro tak, to gdy dodamy wierzchołek v i połączymy go z każdym wierzchołkiem grafu G to w najgorszym przypadku konieczne stanie się przypisanie mu 4 koloru, unikalnego, gdyż wcześniej G był 3 kolorowalny.

Stąd G' jest 4-kolorowalny czyli $(G' = 3COL(G)) \in Tutony$

"⇐" zał. $(3COL(G) = G') \in Tutony$

Skoro tak to G' jest 4-kolorowalny oraz $\exists v \in V(G')$ taki, że v jest połączony z każdym wierzchołkiem z G.

Skoro tak, to:

1° G' jest 4-kolorowalny, czyli gdy usunę v wystarczą nam 3 kolory (gdyby wciąż potrzebne były 4, to któryś z wierzchołków po usunięciu v wciąż miałby 4-ty kolor więc v musiałby mieć 5-ty gdyż były połączone, więc sprz. z zał.)

(2° G' można poprawnie pokolorować przy użyciu mniej niż 4 kolorów, wtedy po usunięciu v, wciąż potrzeba mniej niż 4 kolorów by pokolorować powstały graf.

Stąd z 1° i 2° G można pokolorować na 3-kolory czyli G jest trykolorowalny = $G \in 3COL$

---

b. Pokaż, że problem Tutory można rozwiązać w czasie wielomianowym przy zał., że będzie co najwyżej 15 zrzęd.

Chcemy mieć taki graf jak w a. dla studentów

Stwórzmy program, który przyjmuje liczbę studentów i zrzęd i rozwiązuje problem w czasie wielomianowym.

tutory(studenci) = " stwórz graf G wg. zasad:
- → wierzchołki G to zrzędy
- → krawędzie to krawędzie z grafu studenci, których końce są zrzędami

dla G rozpatrz wszystkie możliwe 4-kolorowania
dla każdego 4-kolorowania G:
- → sprawdź poprawność kolorowania gdy jest niepoprawne - sprawdź następną możliwość kolorowania
- → dla każdego studenta, który nie jest zrzędą
  - • sprawdź czy podgraf z wierzch. z nim połączonych jest 3col. (stud., który nie są zrzędami nie są poł. krawędzią)
  - – jeśli nie ⇒ następne kolorowanie.

zwróć 1

zwróć 0 "

b. cd.

Analiza programu:

- utworzenie grafu G to czas stały : $O(1)$
- generowanie wszystkich możliwych 4-kolorowań to $O(4^{15}) = O(1)$
- sprawdzenie czy kolorowanie jest poprawne:
  dla każdego wierzch. po każdej krawędzi:
  zręd jest max 15, czyli dla każdego wierzch trzeba sprawdzić max 14 krawędzi => łącznie: $15 \cdot 14 = O(1)$
- sprawdzanie studentów, którzy nie są zrędami: $O(n)$, n - liczba studentów

Stąd otrzymujemy złożoność wielomianową.

Dla danego grafu H, o którym wiemy, że jest 4-kolorowalny dołączenie do niego nowego wierzchołka v nie zaburzy kolorowania wtw. gdy sprawdzimy, że wierzchołki sąsiednie z v tworzące podgraf I, tworzą podgraf 3-kolorowalny.

- jeśli I jest 3-kol., dodanie v nie zaburzy kolorowania
- I nie jest 3-kol, potrzeba więcej kolorów, wtedy po dodaniu v potrzebne będzie 5 kolorów

Studenci, którzy nie są zrędami nie są połączeni krawędziami ze sobą, co sprawia, że ich kolory na siebie nie wpływają, stąd wystarczy sprawdzić połączenia ze zrędami.