Wzór interpolacyjny Newtona

Wzór interpolacyjny Lagrange'a jets niewygodny do stosowania w przypadku, gdy zmienia się liczba węzłów. Wtedy do wyznaczenia wialomianu określonego stopnia trzeba powtarzać obliczenia od początku. Zatem poprzez dodanie nowych węzłów interpolacyjnych nie można modyfikować wcześniej wyznaczonego wielomianu Lagrange'a. Wzór interpolacyjny Newtona równoważny wielomianowi Lagrange'a usuwa tę niedogodność.

Niech $x_0, x_1, ..., x_n$ będą węzłami interpolacji, w których wielomian interpolacyjny przyjmuje odpowiednio wartości $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$. Można wówczas zdefiniować wyrażenia zwane ilorazami różnicowymi:
Pierwszego rzędu:
$[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$,
$[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$,
...
$[x_{n-1}, x_n] = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$
Drugiego rzędu (analogicznie): ...
K-tego rzędu:
$[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{[x_{i+1},x_{i+2},...,x_{i+k}]-[x_i,x_{i+1},...,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_i}$
dla $k = 1, 2, ...$ $oraz$ $i = 0, 1, 2, ...$
Z ilorazów różnicowych tworzy się tablicę:

x_i	$f(x_i)$	rzędu 1	rzędu 2	rzędu 3	rzędu 4	rzędu 5
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$ $f(x_3)$ $f(x_4)$ $f(x_5)$	$[x_0, x_1]$ $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$ $[x_3, x_4]$ $[x_4, x_5]$	$[x_0, x_1, x_2]$ $[x_1, x_2, x_3]$ $[x_2, x_3, x_4]$ $[x_3, x_4, x_5]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$ $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ $[x_2, x_3, x_4, x_5]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$

Jeśli $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$ są wartościami wielomianu stopnia n, to iloraz różnicowy rzędu $n + 1$ jest tożsamościowo równy zeru to znaczy :

$$[x, x_0, x_1, ..., x_n] \equiv 0$$

Korzystając z powyższego stwierdzenia i definicji ilorazu różnicowego, można napisać:

$$[x, x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{[x_0, x_1, ..., x_n] - [x, x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x} \equiv 0$$

Wynika stąd, że:

$$[x, x_0, x_1, ..., x_{n-1}] = [x_0, x_1, ..., x_n]$$

a więc:

$$\frac{[x_0, x_1, ..., x_{n-1}] - [x, x_0, ..., x_{n-2}]}{x_{n-1} - x} = [x_0, x_1, ..., x_n]$$

czyli:

$$[x, x_0, x_1, ..., x_{n-2}] = [x_0, x_1, ..., x_n](x - x_{n-1}) + [x_0, x_1, ..., x_{n-1}]$$

Korzystając dalej analogicznie z definicji ilorazów różnicowych, otrzymujemy wzór interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi:

$$W_n(x) = f(x_0) + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ...$$

$$... + [x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Należy zwrócić uwagę, iż do wyznaczenia wzoru na wielomian interpolacyjny Newtona wykorzystuje się tylko ilorazy różnicowe zaczynające się od węzła x_0, czyli te które w tabeli znajdują się jako pierwsze w każdej kolumnie. Jednak obliczenie całej tabeli ilorazów jest konieczne i nieuniknione.
Wzór interpolacyjny Newtona ma tę własność, że rozszerzenie zadania interpolacji o dodatkowy węzeł sprowadza się do oblicznia i dołączenia do poprzednio wyznaczonego wielomianu dodatkowego składnika.