# Langages formels - TD1 - Mots, ensembles

**Exercice 1.1** Que vaut $|u|$, $|u|_a$ pour les mots $u$ et lettres $a$ suivants ?

1. $u = 0110101$, $a = 0$ ;
2. $u = 0110101$, $a = 1$ ;
3. $u = 0110101$, $a = 2$.

**Exercice 1.2** Quels sont les mots de longueur inférieure ou égale à 2 sur l'alphabet $\{a, b\}$ ?

**Exercice 1.3** Quel est le nombre de préfixes d'un mot $u$ en fonction de la longueur de ce mot ? Idem pour suffixe ?

**Exercice 1.4** Quel est le nombre minimal de facteurs d'un mot $u$ en fonction de sa longueur ?

**Exercice 1.5** Quel est le nombre maximal de facteurs d'un mot $u$ en fonction de sa longueur ?

**Exercice 1.6** Quels sont les mots de l'ensemble $\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| \leq 2\}$ ?

**Exercice 1.7** Existe-t-il une différence entre les ensembles suivants ? Si oui, laquelle ou lesquelles ?

1. $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
2. $\{a^n b^n\}$ pour l'entier $n \geq 0$

**Exercice 1.8** Les notations suivantes désignent-elles des ensembles ? des ensembles égaux ?

1. $\varepsilon$ ;
2. $\emptyset$ ;
3. $\{\varepsilon\}$ ;
4. $\{\emptyset\}$.

**Exercice 1.9** Quels sont les cardinaux des ensembles suivants ?

1. $\{a, c, d\}$,
2. $\{\{a, b, a\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, a, a, a\}\}$
3. $\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

**Exercice 1.10**
Soit $X = \{a, b, ab\}$, $Y = \{a, ba\}$ et $Z = \{aa\}$.
Que valent les ensembles $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $X \cap Z$ ?

**Exercice 1.11** En utilisant les définitions et la propriété 1.1, démontrez au moins une ces formules ci-dessous.

**Propriété 1.1** $X \subseteq Y$ *et* $Y \subseteq X \Leftrightarrow X = Y$

*Quelques formules* ($X$, $Y$ et $Z$ sont trois ensembles)

— $\begin{cases} X \cup \emptyset = X, \\ X \cap \emptyset = \emptyset, \\ X \setminus \emptyset = X, \\ \emptyset \setminus X = \emptyset. \end{cases}$

— $\begin{cases} X \cup X = X, \\ X \cap X = X, \\ X \setminus X = \emptyset. \end{cases}$

— (commutativité) $\begin{cases} X \cup Y = Y \cup X, \\ X \cap Y = Y \cap X. \end{cases}$

— (associativité) $\begin{cases} X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z, \\ X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z. \end{cases}$

— (distributivité) $\begin{cases} X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z), \\ X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z). \end{cases}$

— Lois de de Morgan :
$\begin{cases} X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z), \\ X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z). \end{cases}$