Langages formels - TD1 (suite) - Opérations rationnelles

Opérations rationnelles : ce sont les opérations d'union, de produit et d'itération.

Produit. Soient X, Y deux ensembles de mots, le produit (concaténation) de X et Y, noté XY ou $X.Y$, est l'ensemble : $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$.

Exemple : $\{ab, aba, b\}\{ab, b\} = \{abab, abb, abaab, bab, bb\}$.

Puissance. Soit X un ensemble, la puissance $k$ème de X est définie par :

$$\begin{cases} X^0 = \{\varepsilon\}, \text{ et} \\ X^k = X^{k-1}X = XX^{k-1} \text{ quand } k \geq 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $X^k = \overbrace{X...X}^{k \text{ fois}} = \{x_1 \ldots x_k \mid x_i \in X, 1 \leq i \leq k\}$ (Convention usuelle : $x_1 \ldots x_0 = \varepsilon$.)

Exemple : $\{a, ba, ab\}^2 = \{aa, aba, aab, baa, bab, baab, abba, abab\}$

Étoile (itération). Soit X un ensemble de mots, l'*étoile* de X, notée X^* est l'ensemble

$$X^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i = \{x_1 \ldots x_n \mid n \geq 0, x_i \in X\} = \{x_1 \ldots x_n \mid n \geq 1, x_i \in X\} \cup \{\varepsilon\}$$

Itération restreinte. $X^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} X^i = \{x_1 \ldots x_n \mid n \geq 1, x_i \in X\}$

Quelques propriétés. (X, Y, Z, T sont des langages)

1. si $X \subseteq T$ et $Y \subseteq Z$ alors $XY \subseteq TZ$
2. $X(Y \cup Z) = XY \cup XZ$
3. $(X \cup Y)Z = XZ \cup YZ$
4. $X(Y \cap Z) \subseteq XY \cap XZ$
5. $(X \cap Y)Z \subseteq XZ \cap YZ$
6. $\emptyset X = X\emptyset = \emptyset$
7. $X\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}X = X$

Quelques propriétés. (X, Y, Z, T sont des langages)

1. pour i entier, $X^i \subseteq X^*$
2. $\varepsilon \in X^*$, $X \subseteq X^*$
3. $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
4. si $X \subseteq Y$ alors $X^* \subseteq Y^*$
5. $(X \cup \{\varepsilon\})^* = X^*$
6. $(X^*)^* = X^*$
7. $X^*X^* = X^*$
8. $(X \cup Y)^* = ((X \cup \{\varepsilon\})(Y \cup \{\varepsilon\}))^* = (X^*Y^*)^*$
9. $X^* = X^+ \cup \{\varepsilon\}$
10. $X^+ = XX^* = X^*X$

Exercice 1.1 Soit $X = \{a, b, ab\}$, $Y = \{a, ba\}$ et $Z = \{aa\}$. Que valent les ensembles $X \times Y$, $X.Y$, XY, X^0, X^1, X^2, X^3, X^* ?

Exercice 1.2 Donnez une définition par extension ou par compréhension de chacun des langages suivants :

1. $\{\varepsilon\}.\{a\}$
2. $\emptyset.\{a\}$
3. $\{a\}\emptyset^* \cup \{\varepsilon\}$
4. $(\{a\}\emptyset)^* \cup \{\varepsilon\}$
5. $((\{a\} \cap \{b\})^*\{c\}) \cap ((\{a\} \cup \{b\})^*\{c\})$
6. $(((\{a\}^*\{a\}^*)^*)^*\{a\}^*)^*$

Exercice 1.3 Dans cet exercice, X et Y désignent des ensembles de mots.

Pour chacune des assertions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, prouvez-la. Si elle est fausse, donnez un contre-exemple.

1. $(X^* \subseteq Y^*) \Rightarrow (X \subseteq Y)$
2. $X^+ = X^* \setminus \{\varepsilon\}$
3. *(Optionnel)* $(X^i = X^{i+1}) \Rightarrow (X^* = \bigcup_{j=0}^{i} X^j)$

Exercice 1.4 *(Optionnel)* Démontrez au moins une des propriétés ci-dessus.

Exercice 1.5 Soit A un alphabet et a une lettre de cet alphabet. Donnez (et expliquez votre réponse) une expression régulière de :

1. L'ensemble des mots sur A.
2. L'ensemble des mots sur A commençant par la lettre a.
3. L'ensemble des mots sur A de longueur au moins 2.
4. L'ensemble des mots sur A de longueur impaire.
5. L'ensemble des mots sur A contenant un mot u ou un mot v comme facteur.
6. L'ensemble des mots sur A de longueur égale à 3 modulo 5.
7. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a.
8. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ne contenant pas bb.

Exercice 1.6 Simplifiez les expressions rationnelles suivantes (construites sur l'alphabet $A = \{a, b\}$). Justifiez vos réponses.

1. $a^*a + a$
2. $(b^*a^*)^*$
3. $(a^*b^*a^*b^*)^*$
4. $A^*a + A^*b$
5. $(bb^*)^*$

Exercice 1.7 Un identifiant de variable est classiquement un souligné ou une lettre suivie d'un nombre quelconque de lettres, soulignés ou chiffres.

1. Donnez une expression rationnelle de l'ensemble des identifiants possibles.
2. Même chose en excluant le mot "if" (mot réservé).

Exercice 1.8 Pour chacun des mots ε, *aba*, et *baabababab* dites s'ils appartiennent à

— $a(b + a)^*$

— $(b(aab + ab)^*)^*$.

Évidemment, justifiez votre réponse.