MODÈLE À SAUT

- **Définition d'un processus de Poisson d'intensité λ et propriétés**
  - $(N_t)_{t\geq 0}$ tel que :
  $$N_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\sigma_i \leq t} \quad \text{où } \sigma_1 < \dots < \sigma_n < \dots \text{ tps de}$$
  - $T_{n+1} - T_n \sim \exp(\lambda)$, $T_1 \sim \exp(\lambda)$ $\quad \forall n$
  - $N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s)) \perp\!\!\!\perp N_s$
  - $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t) \qquad \left(\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right)$

  $\longrightarrow \quad \Pi_t := \underline{N_t - \lambda t \text{ vraie martingale}}$

- **Définition de $\int_0^t \xi_s \, dN_s$**

  Pour ξ_s processus càd lad : $\int_0^t \xi_s \, dN_s := \sum_{i=1}^{+\infty} \xi_{T_i} \mathbb{1}_{T_i \leq t} = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_{T_i}$

  Th $\left[\left(Y_t := \int_0^t \xi_s \, d\Pi_s \right)_{t \geq 0} = \int_0^t \xi_s \, dN_s - \lambda \int_0^t \xi_s \, ds \quad t \geq 0 \text{ martingale ?} \right]$

  Si $\mathbb{E}\left[\int_0^T \xi_s^2 \, ds\right] < +\infty$

  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ vraie martingale de carré intg $\boxed{\mathbb{E}[X_t^2] = \lambda \mathbb{E} \int_0^t \xi_s^2 \, ds}$

- **Modèle à saut (jump-to-ruin)** (Modèle de Merton)
  - (W_t) Brownien $\perp\!\!\!\perp$ (N_t) $PP(\lambda)$ sous $\mathbb{P}$
  - Filtration : $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s, N_s, s \leq t)$
  - Marché : 1 actif sans risque : $S_t^0 = 1$ $(r = 0)$ $\qquad$ sous $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$

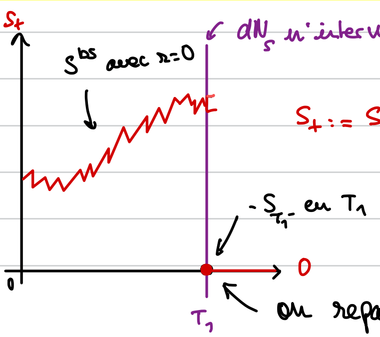
    1 actif risqué : $dS_t = \lambda S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t - S_{t^-} \, dN_t$; $S_0 = s_0$

  $\Leftrightarrow dS_t = \sigma dW_t - S_{t^-} \, d\Pi_t \qquad$ (i.e) $\quad S_t = S_0 + \int_0^t \lambda S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dW_s - \int_0^t S_{s^-} \, dN_s$

  $\int S_{t^-} \, ds = \int S_t \, dt$ car $S_t = S_{t^-}$ p.s

- **Une expression de S_t pour les calculs.**

dN_s n'intervient qu'en σ_1 ! (cf formulation intégrale)



$S_t := S_t^{bs} \mathbb{1}_{t < T_1}$

- $t \leq T_1 : S_t = S_0 \exp\left(\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$
- $T_1 \leq t < T_2 : S_t = S_{T_1} \exp\left(\left(\lambda - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - T_1) + \sigma(W_t - W_{T_1})\right)$, $S_{T_1} = 0$

  $\dots = 0$

Tout ça parce qu'on peut le voir que EDS entre deux temps de saut est juste un modèle de BS ♡

Contrairement au modèle BS, $\mathbb{Q}$ n'est pas unique.

- S est une $\mathbb{Q}$-martingale

(i) S_t $\mathcal{F}_t$-mes car $\{t < T_1\}$ $\mathcal{F}_t$-mes et S_t^{bs} $\mathcal{F}_t$-mes

$\quad$ ↖ t exp d'arrêt

(ii) itg $|S_t| \leq |S_t^{bs}|$ ← itg en tout t

expression de S_t^{bs} $\qquad$ $\mathbb{1}_{N_t=0} = \mathbb{1}_{N_t-N_s=0}\mathbb{1}_{N_s=0}$

(iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t^{bs}\mathbb{1}_{N_t=0} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_s^{bs}\exp\left(\sigma(W_t-W_s)+(\lambda-\frac{\sigma^2}{2})t\right)\mathbb{1}_{N_t-N_s=0} | \mathcal{F}_s\right]\mathbb{1}_{N_s=0}$

$W_t - W_s$ et $N_t - N_s$ $\perp\!\!\!\perp$ $\mathcal{F}_s$ → $= S_s^{bs}\mathbb{1}_{N_s=0}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\sigma(W_t-W_s)-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)\exp(\lambda(t-s))\mathbb{1}_{N_t-N_s=0}\right]$

$W \perp\!\!\!\perp N$ → $= S_s^{bs}\mathbb{1}_{N_s=0}\exp(\lambda(t-s))\,\mathbb{Q}[N_t-N_s=0]\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\sigma(W_t-W_s)-\frac{\sigma^2}{2}(t-s)\right)\right]$

$= S_s^{bs}\mathbb{1}_{N_s=0}\cdot\exp(\lambda(t-s)).\exp(-\lambda(t-s))\cdot 1 = S_s$

- $\mathbb{Q}$ prix d'une option européenne au payoff $h := (S_T-K)_+$ sous j_2

$$\Pi_0(h) := \overset{1 \text{ car } r=0}{\exp(-rT)}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)_+]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)\mathbb{1}_{S_T^{bs}>K}\mathbb{1}_{N_T=0}]$$

$W_T \perp\!\!\!\perp N_T$ $\qquad = e^{+\lambda T}S_0\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\tilde{S}_T^{bs}}{S_0}\mathbb{1}_{S_T^{bs}>K}\mathbb{1}_{N_T=0}\right] - K\,\mathbb{Q}[N_T=0]\,\mathbb{Q}[S_T>K]$

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\lambda T}\tilde{S}_T^{bs}}{e^{-\lambda 0}S_0^{bs}} := \exp\left(\sigma W_T - \frac{\sigma^2}{2}T\right) = \mathcal{E}(\sigma W_T) \Rightarrow \text{sous } \tilde{\mathbb{Q}} : W_t' := W_t - \sigma t$$

$$S_T^{bs} = S_0\exp\left(\sigma W_T' + \left(\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) > K$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] \geq W_T' \longrightarrow \Pi_0(h) = S_0\,\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-\lambda T}\mathcal{N}(d_-)$$

- $\mathbb{Q}$ prix de l'option de payoff $\phi(S_T)$ à T via EDP

∘ $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ / $|\phi(x)| \leq C(1+|x|)$, $\forall x$

Alors, $\mathbb{E}[\phi(S_T) | \mathcal{F}_s] = u(s, S_s)$

$\boxed{\text{PREUVE}}$: $S_t = S_t^{BS}\mathbb{1}_{t<T_1}$

- Sur $\{T_1 \leq s\}$, $\quad S_s = 0 \Rightarrow S_T = 0$ (i.e)
- Sur $\{T_1 > s\}$, $\quad S_T = S_s\frac{S_T^{bs}}{S_s^{bs}}\mathbb{1}_{T<T_1} = F(s, S_s)$

où $F(s,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(x\exp\left(\sigma\sqrt{T-s}\,Y + (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})(T-s)\right)\mathbb{1}_{N_T-N_s=0}\right)\right]$

$$\rightarrow u(s,x) = \begin{cases} \phi(0) \text{ si } \underline{\underline{x=0}} \\ \mathbb{E}[\phi(x\exp(-)\mathbb{1}_{N_T-N_s})] \; \underline{\underline{x>0}} \end{cases}$$

convient.

Soit $\mathbb{E}[\phi(S_T) | \mathcal{F}_s] = \phi(0)\mathbb{1}_{s \geq T_1} + F(s, S_s)\mathbb{1}_{s<T_1}$

- Une équation différentielle vérifiée par u / $u(t,S_t) := \mathbb{E}^{Q}[\phi(S_T) | \mathcal{F}_t] e^{-rt}$ $(r=0)$

. Ce que l'on sait c'est que u continue sur $[0,T]$ et strictement avant T_1

u vérifie : $\partial_t u(t,x) + \lambda x \partial_x u(t,x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \partial_x^2 u(t,x) = 0 = A^{BS} u + \partial_t u$

Cependant la condition terminale en T_1 vérifie quelque chose : $u(T_1^-, S_{T_1^-}) \overset{\text{continuité}}{=} u(T_1, S_{T_1^-})$

Or $u(T_1, \underbrace{S_{T_1}}_{=0}) = u(T_1, 0)$ et $\underline{u(t,0) = cte}$ car $S_t = 0 \Leftrightarrow t \geq T_1$ puisque S_t d exp > 0

On pose $\delta_u(t,S) = u(t,0) - u(t,S_t)$ (nul en chaque saut)

D'où : $u(T_1, S_{T_1}) = u(T_1, S_{T_1^-}) + \delta_u(T_1, S_{T_1^-})$ continuité en T_1 de u

$= u(T_1, S_{T_1^-}) + \delta_u(T_1, S_{T_1^-}) \Delta N_{T_1}$ $\Delta N_{T_1} = 1$ nouveau

$= u(T_1, S_{T_1^-}) + \int_0^{T_1} \delta_u(s, S_{s^-}) \, dN_s$ définition de $\int dN$. membre dans du

Soit $u(t,S_t) = u(0,S_0) + \int_0^t \partial_t u(s,S_s) + A^{BS}(u)(s,S_s) \, ds + \int_0^t \delta u(s, S_{s^-}) \, dN_s$

Bonne nouvelle... pour $t > T_1$, $u(t,S_T) = u(T_1, S_{T_1})$. Or chacune des intégrales ont des intégrandes nulles strictement après T_1 (BS pour $(\partial_t + A)(u)$ et $\delta u = 0$ après T_1).

Donc $u(t,S_t) = u(0,S_0) + \int_0^t \partial_t u(s,S_s) + A^{BS}(s,S_s) + \lambda \delta u(s,S_{s^-}) \, ds$
$+ \int_0^t \delta u(s,S_{s^-}) \, dM_t$ $\quad S_{s^-} = S$ p.s (Lebesgue)

$\mathbb{E}_Q^t[\phi(S_T)]$ mgale $\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t u(t,S) + \lambda S \partial_x u(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \partial_x^2 u(t,S) + \lambda \delta_u(t,S) \\ u(T,S) = \phi(S) \end{cases}$ (EDP jr)

- Couverture du modèle à saut

Call : $\delta_u(t,S) = u(0,S) - u(t,S) = 0 - u(t,S)$

① Il n'existe pas de réplication pour un call

<u>Proposition :</u> $\int_0^T \varphi_s \, dW_s = \int_0^T \psi_s \, dM_s$ alors $\varphi_s = \psi_s = 0$ p.s

On sait que : $u(t,S_t) = u(0,S_0) + \int_0^t \partial_x u(s,S_s) \sigma S_s \, dW_s - \int_0^t u(t, S_{t^-}) \, dM_t$

Réplication : $\exists \pi, (\xi_s)$ / $\tilde{V}_T^{\pi,\xi} = (S_T - K)_+ = \pi + \int_0^T \xi_s \, d\tilde{S}_s$ (ici $r = 0$: $\tilde{S} = S$, $\tilde{V} = V$)

Martingale sous $\mathbb{Q}$: $V_t^{\pi,\xi} = u(t,S_t) \leftrightarrow \pi + \int_0^t \sigma S_s \xi_s ds - \int_0^t \xi_s S_{s-} dM_t = u(t,S_t)$

La proposition précédente permet d'identifier :

$\pi = u(0,S_0)$; $\partial_x u(s,S_s)\sigma S_s = S_s \xi_s \sigma$; $u(s,S_{s-}) = \xi_s S_{s-}$ $\quad (u(s,S_s) = \xi_s S_s)$

D'où : $\frac{\partial_x u}{u}(s,S_s) = \frac{1}{S_s}$

Donc $\ln(u(T,x)) = \ln(x) + \beta$ i.e $(x-K)^+$ linéaire en x $\lightning$ contradiction

② Donc on préfère regarder $\min_{(\pi,\xi)\in\mathbb{R}\times S} \mathbb{E}[(V_T^{\pi,\xi} - h)^2]$ pour définir le prix qui s'éloigne le moins d'une réplication.

α) $\hat{\pi}$ de $(\hat{\pi},\hat{\xi})$ vaut $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h]$:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[Z]^2 + 2\mathbb{E}(Z)\cancel{\mathbb{E}[Z-\mathbb{E}[Z]]} + \mathbb{E}[(Z-\mathbb{E}[Z])]^2$$

Soit $\mathbb{E}|V_T^{\pi,\xi} - h| = (\pi - \mathbb{E}[h])^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^T \xi_t dS_s - (h - \mathbb{E}[h])\right)^2$

↑ pas de π en jeu Δ.

③ Trouver la stratégie associée à la plus petite perte quadratique sous $\mathbb{Q}$ risk-free (pas super intéressant)

$C_t = u(t,S_t)$

On note $p_t^{\xi} = V_t^{C_0,\xi} - C_t$

$$= C_0 + \int_0^t \xi_s \sigma S_s dW_s - \int_0^t \xi_s S_s dM_t - u(t,S_t)$$

$$\underset{0}{=} \int_0^t \underbrace{(\xi_s - \partial_x u(s,S_s))S_s\sigma}_{\alpha_s} dW_s + \int_0^t \underbrace{(\xi_s S_s + \delta u(s,S_s))}_{\beta_s} dM_s$$

$$\mathrm{Var}[p_T^{C_0,\xi}] = \mathbb{E}[(p_T^{C_0,\xi})^2] = \mathrm{Var}\left(\int dW_s\right) + \mathrm{Var}\left(\int dM_s\right) \text{ car } W \perp\!\!\!\perp M_s$$

$$= \int_0^T \mathbb{E}(\alpha_s^2) ds + \lambda \int_0^T \mathbb{E}(\beta_s^2) ds$$

minimiser $\alpha_s^2 + \lambda\beta_s^2 \rightarrow \xi_s^2 S_s^2(\sigma^2+\lambda) - 2\xi_s(S_s^2\sigma^2\partial_x u(s,S_s) - \lambda S_s \delta u(s,S_s))$

$+ \partial_x u(s,S_s)^2 S_s^2\sigma^2 + \lambda \delta u(s,S_s)^2$

min en : $\xi_s := \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\lambda}\partial_x u(s,S_s) + \frac{1}{\sigma^2+\lambda}\frac{\delta u(s,S_s)}{S_{s-}}$ $\quad \mathcal{F}_s$ - mes $\quad$:) $\quad$ TOP!