CHANGEMENT DE NUMÉRAIRE

⚠ Le changement n'aura plus aucun secret à la sortie...

- **Changement de numéraire : LA MÉTHODE** (chgt en numéraire B)

$$\left.\frac{d\tilde{Q}}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_T} = \nu_T \quad \text{avec} \quad \nu_T = \frac{B_t}{B_0}\beta_t \quad \text{où } B_t \text{ choisit tel que } \beta_t B_t \text{ martingale}$$

→ Rappel : (X_t) $\tilde{Q}$ martingale $\Leftrightarrow$ $(X_t \nu_t)$ Q martingale

(Th) Autofinancement dans le nouveau numéraire équivalent à l'autofinancement. (V'_t exprimé en nouveau numéraire). (Se vérifie, calculatoire)

Conséquence : dans le nouveau numéraire, la condition auto :

$$\begin{cases} V'_t := \dfrac{V_t}{B_t} \; ; \; d(V'_t \beta_t B_0) = d\left(\dfrac{V_t}{B_t}\beta_t B_0\right) = \xi_t \left(\dfrac{V_t}{B_t}\beta_t B_0\right) d\left(\dfrac{S_t}{B_t}\beta B_0\right) = \xi_t (V'_t \beta_t B_0)\, d(S'_t \beta_t B_0) \\ S'_t := \dfrac{S_t}{B_t} \end{cases}$$

$\frac{V_t}{B_t}$: valeur dans le numéraire de départ ; β_t : actualisé ; B_0 : converti en numéraire en $t=0$

Rq : $(\check{S}_t)$ Q-mgale $\Leftrightarrow$ $\frac{S_t}{B_t}\nu_t$ Q-martingale $\Leftrightarrow$ $\frac{S_t}{B_t}$ $\tilde{Q}$-mgale

Donc :

1) Un porte-feuille autofinancé $V_t^{\pi,\xi}$ vérifie $(\beta_t V_t)$ Q martingale donc le portefeuille $V_t'^{\frac{\pi}{B_0},\xi} := \frac{V_t^{\pi,\xi}}{B_t}$ actualisé $\left(\beta_t \frac{V_t^{\pi,\xi}}{B_t} B_0\right)$ $\tilde{Q}$ mgale → m̂ stratégie mène au m̂ résultats.

2) Représentation des martingales : le prix du portefeuille réplicatif n'est autre que $\frac{\pi_t}{B_t}$. De plus ce prix est aussi une martingale sous Q. Vraiment, écrit la repr des martingales dans chaque devise et c'est fini...

Preuve : payoff

$$\frac{\pi_T}{B_T} = \frac{h}{B_T} \Rightarrow \frac{\pi_t}{B_t} = \mathbb{E}^{t}_{\tilde{Q}}\left[\frac{h}{B_T}\right]$$

i.e : $\pi_t = B_t \, \mathbb{E}^{t}_{\tilde{Q}}\left[B_T^{-1} h\right]$ → Je peux m'épargner de nouveaux calculs !

1) $(\tilde{B}_t)$ $\mathbb{Q}$ martingale

SITUATION : 2) Je sais que calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{h}{B_T}\right)$ sous certaines conditions me serait favorable.

Du style
$$\frac{h}{B_T} = L_T \text{ où } (L_t) \text{ Mgale (sous } \tilde{\mathbb{Q}} / \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = \frac{B_t \beta_t}{B_0}$$
$$\frac{h}{B_T} = \text{forme de payoff connu via dynamiques}$$

exemple (Calcul d'un terme prix du call $(S_T-K)^+$)

On a $\mathbb{E}^{+}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{1}_{S_T > K}]\exp(-r(T-t))$

Moi je sais faire une digitale $\frac{S_T \mathbb{1}_{S_T>K}}{S_T}$! change de numéraire

Bah $\pi_t := S_t \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}[\mathbb{1}_{S_T>K}]$ avec $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} := \frac{S_t \beta_t}{S_0}$ en S_t ($\frac{\tilde{S}_t}{S_0}$ Mgale)

Ne reste plus qu'à exprimer la dynamique de S_t sous $\tilde{\mathbb{Q}}$ pour expliciter les paramètres de la digitale