MODELE MULTIDIM

A LES 'MATHEMATIQUES'

- On peut voir une variable $\mathcal{F}_T$-mes et L^2 comme une valeur initiale à laquelle s'ajoute l'intégrale d'un processus progressif selon un brownien n-dimensionnel. Et ce, de manière unique.

Th [Représentation d'Itô multidimensionnel et donc des martingales]

$\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ où $\mathcal{F}_t := \sigma(W_s, s \leq t)$ i.e : $\mathbb{E}[\xi^2] < +\infty$

1) $\exists! \, (c, (\varphi_t)_{t \geq 0})$ où $c \in \mathbb{R}$; φ_t progressif vérifiant $\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt\right) < +\infty$ tel que :

$$\xi = c + \underbrace{\int_0^T \varphi_t \cdot dW_t}_{(\int_0^t \varphi_s dW_s) \text{ vraie martingale}} \quad \mathbb{P}.\text{ps}$$

$(\int_0^t \varphi_s dW_s)$ vraie martingale $\Rightarrow c = \mathbb{E}[\xi]$

2) Soit $(M_t)_{t \in [0,T]}$ martingale telle que $\mathbb{E}[M_t^2] < +\infty, \forall t \in [0,T]$

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^T \varphi_t \cdot dW_t \Rightarrow M_t = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^t \varphi_t \, dW_t$$

↑ de manière unique car $M_t \in L^2$

Utilisation : Je remarque que je peux écrire tout payoff $\xi \in L^2$ de cette manière : $\xi = \pi + \int_0^T \xi_s \, d\tilde{S}$ (comme une valeur de portefeuille actualisée). Je peux donc dire que le marché est complet (toute option est réplicable).

Bien souvent on doit avoir un $d\tilde{S}_t$ sympathique pour appliquer le théorème précédent. Du genre $d\tilde{S}_t = \alpha_t \, dW_t^i$. Pour ça, il faut changer de probabilités en général.

- On peut définir une nouvelle probabilité à partir de $\mathbb{P}$ qui rend le processus $(\tilde{W}_t^i)_{i \in [1,n]} := \left(W_t^i - \langle W^i, \int_0^\cdot \theta_s \cdot dW_s \rangle\right)$; où $\theta_s \in \mathcal{M}_{d,n}(\mathbb{R})$ progressif tel que : $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta_s\|^2 ds\right)\right] < +\infty$; est un brownien.

i.e $dW_t^i = d\tilde{W}_t^i + \sum_j \theta_t^{i,j} dt$

Novikov.

Th [Girsanov multidimensionel]

$\mathbb{Q} \,/\, \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} := L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\theta_s\|^2 ds\right) \quad \forall t \in [0,T]\,,\ \underbrace{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta_s\|^2 ds\right)\right) < +\infty}_{\text{Novikov}}$

↳ i.e : $\forall A \in \mathcal{F}_t\,,\ \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A L_t] \iff \forall Y\ \mathcal{F}_t\text{-mes}\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y L_t]$

(L_t) mgale : $= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A L_T]$ $\qquad = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y L_T]$

Sous $\mathbb{Q}$: $(\tilde{W}_t^i)_{t\in[0,T]}$ tel que dans l'énoncé page précédente est un brownien.

Utilisation | $d\tilde{S}_t = f(dW_t, dt) \rightsquigarrow \alpha_t \cdot d\tilde{W}_t$ permet d'utiliser le th. des représentation des martingales sous certaines conditions.

- Pour qu'un marché soit complet il faut exactement autant d'actifs de références que de browniens. (Faut pouvoir utiliser le Th de représ$^{\text{t}}$)

- Marché multidimensionnel complet modèle des prix de S_j de référence.

$$d\begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^n \end{pmatrix} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_t^1 \\ \vdots \\ \mu_t^n \end{pmatrix}}_{\mu_t} \cdot dt + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \cdots & \sigma_{n,n} \end{pmatrix}}_{\sigma_t} d\begin{pmatrix} B_t^1 \\ \vdots \\ B_t^n \end{pmatrix}\right] .* \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^n \end{pmatrix}$$

Avec σ_t inversible. Posons $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

En effet : $d\tilde{S}_t = \left[(\mu_t - r_t \mathbb{1})dt + \sigma_t \cdot dB_t\right] .* \tilde{S}_t$

$\lambda_t := \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbb{1})$ unique solution pour une densité $\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} := L_t$ vérifie $\frac{dH_t}{H_t} = \lambda_t dt$ et annulant le drift sous $\mathbb{Q}$ (cf suite).

- **Expression de la densité**

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s \cdot dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds\right)$$

(H) $\|\sigma_s^{-1}\| < M \Rightarrow L_t$ martingale sous $\mathbb{P}$ (Novikov)

→ Girsanov : $W_t := B_t + \int_0^t \lambda_t \cdot ds$ brownien sous $\mathbb{Q} \,/\, \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} := L_t$.

↳ écrire la dynamique sous $\mathbb{Q}$ donne : $d\tilde{S}_t = \sigma_t \cdot dW_t .* \tilde{S}_t$; $dS_t = r_t \mathbb{1}.dt + \langle \sigma_t, dW_t\rangle$

$\boxed{B}$ Le concept pour $\boxed{n=2}$ $\qquad dS^0_t = r_t S^0_t\, dt$

$$dS^1_t = S^1_t\left[\mu^1_t\, dt + \sigma^1_t\, dB^1_t\right]\ ;\ dS^2_t = S^2_t\left[\mu^2_t\, dt + \sigma^2_t\, dB^1_t + \delta_t\, dB^2_t\right]$$

- Dynamique de deux sous-jacents risqués actualisés

$$d\begin{pmatrix}\tilde S^1_t\\ \tilde S^2_t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde S^1_t\,(\mu^1_t - r)\\ \tilde S^2_t\,(\mu^2_t - r)\end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix}\sigma^1_t \tilde S^1_t & 0\\ \sigma^2_t \tilde S^2_t & \delta_t \tilde S^2_t\end{pmatrix} d\begin{pmatrix}B^1_t\\ B^2_t\end{pmatrix}$$

$$\sigma_t := \begin{pmatrix}\sigma^1_t & 0\\ \sigma^2_t & \delta_t\end{pmatrix}\ ;\ \mu_t := \begin{pmatrix}\mu^1_t\\ \mu^2_t\end{pmatrix}\ ;\ r_t \mathbb{1} = \begin{pmatrix}r_t\\ r_t\end{pmatrix}$$

- Probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$

On veut que $\forall t$, $\quad d\begin{pmatrix}B^1_t\\ B^2_t\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}W^1_t\\ W^2_t\end{pmatrix} + \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbb{1})\, dt$

Pour cela on note $\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ la densité sous $\mathcal{F}_t$ de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$:

$$H_t := \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} := \exp\left(-\int_0^t \sigma_s^{-1}(\mu_s - r_s\mathbb{1})\, d\begin{pmatrix}B^1_t\\ B^2_t\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma_s^{-1}(\mu_s - r_s\mathbb{1})\|^2 ds\right)$$

- Une expression plus explicite de la densité

On résout : $\lambda_t := \begin{pmatrix}\lambda^1_t\\ \lambda^2_t\end{pmatrix} := \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbb{1})$

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \sigma_2 & \delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda^1\\ \lambda^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu^1 - r\\ \mu^2 - r\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\lambda^1 := \dfrac{\mu^1 - r}{\sigma_1}\\[2mm] \lambda^2 := \dfrac{\mu^2 - r}{\delta} - \dfrac{\sigma_2(\mu_2 - r)}{\delta}\end{cases}$$

- On reconnaît précisément que H_t est une exponentielle stochastique.

$$\begin{cases}dH_t \cdot \dfrac{1}{H_t} = -H_t(\lambda_t \cdot dB_t)\\ H_0 = 1\end{cases}$$

Puis on a Girsanov multidimensionnel qui assure que (W_t) brownien sous $\mathbb{Q}$. On l'a construire pour annuler le drift dans la dynamique $d\tilde S_t$.

- Sous $\mathbb{Q}$ le marché est complet

Stratégie autofinancée: $d\tilde V^{\pi,\xi}_t = \pi + \begin{pmatrix}\xi^1_s\\ \xi^2_s\end{pmatrix} d\begin{pmatrix}\tilde S^1_t\\ \tilde S^2_t\end{pmatrix} = \pi + \int_0^t \xi^1_s \sigma^1_t \tilde S^1_s + \xi^2_s \sigma^2_s \tilde S^2_s\, dB^1 + \int_0^t \xi^2 \delta_s \tilde S^2_s\, dB^2_s$

Th de représentation d'Itô ⊕ $\left(\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]\right)_{t\geq 0}$ martingale L^2 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{unicité}}$

- Expression de la réplication

Représentation : $V_t^{\pi,\delta^*} = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t \begin{pmatrix} \varphi_s^1 \\ \varphi_s^2 \end{pmatrix} . dB_s$

$$\begin{cases} \varphi_s^1 = \delta_s^{*1} \sigma_s^1 \tilde{S}_s^1 + \delta_s^{*2} \sigma_s^2 \tilde{S}_s^2 \\ \varphi_s^2 = \delta_s^{*2} \delta_s \tilde{S}_s^2 \end{cases} \mapsto \begin{array}{l} \delta_t^{*1} = \left(\varphi_t^1 - \dfrac{\varphi_t^2 \sigma_t^2}{\delta_t}\right) \dfrac{1}{\tilde{S}_s^1 \sigma_t^1} \\ \delta_t^{*2} = \dfrac{\varphi_t^2}{\tilde{S}_t^2 \delta_t} \end{array}$$

- $\mathbb{Q}$ est en fait l'unique probabilité risque neutre

Supposons qu'il existe une autre probabilité risque neutre $\mathbb{R} \sim \mathbb{P}$.

On note : $L_T = \dfrac{d\mathbb{R}}{d\mathbb{P}}$ et $L_t := \mathbb{E}\left[\dfrac{d\mathbb{R}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right]$ donc $(L_t)_{t\in[0,T]}$ martingale

- On suppose $\mathbb{E}[L_T^2] < +\infty$

$$L_t = 1 + \int_0^t \varphi_s^* dB_s \quad , 0 \leq t \leq T \quad \text{(th de représentation mgales)}$$

- $L_t > 0$ et continue $\Rightarrow \psi_s^* = -\dfrac{\varphi_s^*}{L_s}$ d'où $\dfrac{dL_t}{L_t} = -\psi_s^* dB_s$

↳ Martingale exponentielle, écrire dynamique avec Girsanov pour que $\tilde{S}$ mgale, unicité de φ_s^* impose l'unicité de ψ_s^* qui doit valoir λ_s pour que $\tilde{S}$ mgale. On a donc L_t nécessairement le $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ vu précédemment.

- Que se passe-t-il si l'on peut seulement placer dans l'actif 1.

1) Le marché n'est pas complet dès que $\delta^* \neq 0 \Leftrightarrow \varphi_t^2 \neq 0$ or un payoff $\xi = 1 + \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dB_t^2$ n'est pas réplicable.

2) Les probabilités risques neutres : uniquement les probabilités telles que $\tilde{S}_1$ est une martingale. $\lambda^1 := \dfrac{\mu_1 - r}{\sigma^1}$ et λ^2 quelconque fonction continue progressive.

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} := \exp\left(-\int_0^t \lambda_s . dB_t^\wedge + \frac{1}{2}\int_0^t \|\lambda_s\|^2 ds\right)$$

3) Si on a un payoff $\mathcal{F}_T^{W^2}$ mesurable et $L^2(\mathcal{F}_T^{W^2})$ on peut raisonner avec le théorème de représentation dimension 1.

↳ immédiat avec l'unicité.

4) Coefficients constants et $\xi \in L^2_R(\mathcal{F}_T)$, $(\zeta_t^1 \tilde{S}_t^1) \in H^2_R(0,T)$, $\forall R$ risque neutre et ξ réplicable.

Alors $\mathbb{E}_R[\xi]$ indépendant de R

↳ $\mathbb{E}_R \xi \overset{\text{réplicabilité}}{=} \pi + \mathbb{E}_R \int_0^t \sigma_s \zeta_s \tilde{S}_s \, dW_t^1 = \pi$ puisque dW_t^1 m pour tout R car A_t^1 imposé !