TD BLACK SCHOLES – LE RÉSUMÉ

(M) Marché : actif sans risque : $dS_t^0 := r\,dt$ et actif risqué S_t.

- Qu'est-ce que le modèle de Black-Scholes ?
  - Voir que les prix sont à accroissements indépendants
  - Qu'ils ont une volatilité constante et une évolution déterministe

$dS_t \cdot \frac{1}{S_t} = \sigma dW_t + \mu dt$ sous $\mathbb{P}$ proba réelle.

- Existence d'une proba risque neutre ?

On procède par changement de proba. $\lambda :=$

$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} := L_T$ où $L_T := \exp\left(-\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T\right)$. i.e $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T \mathbb{1}_A]$

Avec $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$

très facile de vérifier que c'est une proba !

Cette proba est fort sympathique sur plusieurs points :

① $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(L_t Y), \forall Y \in \mathcal{F}_t$ avec $L_t := \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[L_T]$

PREUVE : $(L_t)_{t\in[0,T]}$ martingale sous $\mathbb{P}$.

(i) L_t $\mathcal{F}_t$-mesurable

(ii) $\mathbb{E}[|L_t|] = 1$ i.e itg.

(ii) $\mathbb{E}[L_t \mid \mathcal{F}_s] = L_s \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{L_t}{L_s} \mid \mathcal{F}_s\right] = L_s \mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)\right)\right] = L_s$

d'où $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_T Y]$

$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[L_T Y]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Y \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[L_T]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[L_t Y]$ ∂.

② Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ une mgale sous $\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ $X_t L_t$ mgale sous $\mathbb{P}$

PREUVE :

(i) X_t - $\mathcal{F}_t$ mes $\Leftrightarrow$ $X_t L_t$ - $\mathcal{F}_t$ mes

(ii) X_t itg $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|X_t|] < +\infty \Leftrightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|X_t L_t|] < +\infty$ $X_t L_t$ $\mathbb{P}$-itg

(iii) $\mathbb{E}_s^{\mathbb{Q}}[X_t] = X_s$ * $\mathbb{1}_A X_t \in \mathcal{F}_t$

$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A X_t L_t]$ ² $\in \mathcal{F}_s$

*↷ $= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A \underbrace{X_s L_s}_{\in \mathcal{F}_s}]$ ∂

$\Leftrightarrow \mathbb{E}_s^{\mathbb{P}}[X_t L_t] = X_s L_s$

③ $\mathbb{Q}$ martingalise les prix actualisés

et $d\tilde{S}_t = \sigma dW_t \iff dS_t = R\,dt + \sigma dW_t$

où $W_t := B_t + \lambda t$ est un Brownien sous $\mathbb{Q}$

PREUVE :

+ Quelques théorèmes sympathiques et impacts.

Théorème [Changement de mesure] (Girsanov)

Hyp $\left|\begin{array}{l} M \text{ Martingale locale} \\ \mathcal{E}(M) \text{ vraie martingale sur } [0,t] \end{array}\right.$ $\quad \mathcal{E}(M) = \exp\left(M - \frac{1}{2}\langle M, M\rangle_t\right)$

$\forall A \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A \mathcal{E}(M)_t\right)$

$\mathbb{Q}$ mesure de proba et $\forall s \in [0,t]$, $A \in \mathcal{F}_s \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_A \mathcal{E}(M)\right)$

α Hyp $(B_s, s\in[0,t])$ un Brownien sous $\mathbb{P}$

$\tilde{B}_s := B_s - \langle B, L\rangle_s$, $s \in [0,t]$ est un brownien sous $\mathbb{Q}$

β Hyp $(M_s, s\in[0,t])$ une martingale locale sous $\mathbb{P}$

$\tilde{M}_s := M_s - \langle M, L\rangle_s$ est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$

de variation quadratique $\langle \tilde{M}, \tilde{M}\rangle = \langle M, M\rangle$.

Critère [$\mathcal{E}(L)$ Martingale] (Novikov)

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\right] < \infty$, pour $t > 0$

$(\mathcal{E}(L)_s, s\in[0,t])$ vraie martingale

- ici on a pris $M := -\lambda B_t$ martingale donc martingale locale

  Car $L_\cdot = \mathcal{E}(M)_\cdot = \exp\left(-\lambda B_\cdot - \frac{1}{2}\langle -\lambda B, -\lambda B\rangle_\cdot\right)$
- Novikov : $\mathbb{E}\left[\exp \frac{\lambda^2}{2} t\right] < +\infty \Rightarrow \mathcal{E}(M)$ vraie martingale
- α dit que $W_t := B_t + \lambda t = B_t - \langle B, -\lambda B\rangle_t$ Brownien sous $\mathbb{Q}$

  $d\tilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - r e^{-rt} S_t\,dt = S_t e^{-rt}\left(\sigma dB_t + \mu\,dt - r\,dt\right) = \tilde{S}_t \,\sigma\, dW_t$

  $\tilde{S}_t$ martingale locale !

De plus $\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t + r dt$ (on connaît la loi sous $\mathbb{Q}$)

+ Résultat pour ce genre d'équadiff stochastique.

$$dX_t = X_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$$

(i) μ_t et σ_t progressifs à valeurs réelles

(ii) $\int_0^t |\mu_s| ds < +\infty$ et $\int_0^t \sigma_s^2 dt < +\infty$ $\mathbb{P}$-ps

preuve ? Itô

Alors la solution est de la forme :

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dB_t + \int_0^t \mu_s dt - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\tilde{S}_t = S_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$ vraie martingale sous $\mathbb{Q}$!

Rappel : formule d'Itô :

$df(t, X_t)$ avec X_t martingale locale ?!

$$df = \partial_x f \, dX_t + \partial_t f \, dt + \frac{1}{2} \partial_x^2 f \, d\langle X, X\rangle_t \quad (b)$$

(4) Un marché dans le modèle de Black Scholes vérifie l'AOA et est complet.

Portefeuille: $V_t = \xi_t S_t + \xi_t^0 S_t^0$ avec (ξ_t, ξ_t^0) progressif vérifiant $\int_0^t \xi_s^2 S_s^2 ds < +\infty$

Autofinancement: $dV_t = \xi_t dS_t + \xi_t^0 dS_t^0 = S_t(\xi_t \sigma dB_t + \xi_t \mu dt) + \xi_t^0 r e^{rt} dt$

$\Leftrightarrow d\tilde{V}_t = d(e^{-rt} V_t) = e^{-rt} dV_t - r V_t e^{-rt} dt$ (Itô produit)

$= \xi_t \tilde{S}_t(\sigma dB_t + \mu dt) + \xi_t^0 r dt - r \tilde{V}_t dt$

Or $\begin{cases} \xi_t^0 = \tilde{V}_t - \xi_t \tilde{S}_t \Rightarrow ↳ = \xi_t \tilde{S}_t(\sigma dB_t + (\mu - r)dt) \\ d\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t(\sigma dB_t + \mu dt) - r e^{-rt} S_t dt \quad \text{(Itô produit)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow d\tilde{V}_t = \xi_t \tilde{S}_t d\tilde{S}_t = \xi_t \sigma dW_t$ sous $\mathbb{Q}$ (on la putain de martingale!!

$\Leftrightarrow \tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \xi_s \tilde{S}_s \sigma dW_s$

(H) $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T (\tilde{S}_t \xi_t)^2 dt\right] < +\infty \Rightarrow (V_t^{\xi, V_0})_{t \in [0,T]}$ vraie martingale

PREUVE AOA :

V_t^{ξ, V_0} martingale $\forall \xi$ progressif et $\forall v_0 \in \mathbb{R}_+$

Supposons $V_0 = 0$ et qu'il existe $(\xi_t)_{t \in [0,T]}$ tel que :

(*) $V_T^{0,\xi} \geq 0$ $\mathbb{P}$-ps et $\mathbb{P}(V_T^{0,\xi} > 0) > 0$ arbitrage

Comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes $\boxed{\mathbb{P}\text{-ps} \Leftrightarrow \mathbb{Q}\text{-ps}}$

Or $(\tilde{V}_t^{\xi,0})_{t \in [0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{E}[V_T^{\xi,0}] = \mathbb{E}[V_0] = 0 \Rightarrow V_T^{\xi,0} = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(V_T^{\xi,0} > 0) = 0$ ↯

Th représentation d'Itô

$\forall h \in L^2_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{F}_T$-mesurable

$\exists ! (\varphi_t)_{t \in [0,T]}$ progressif où $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^T \varphi_t^2 dt]$ est fini tq:

$$h = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h) + \int_0^T \varphi_t dW_t$$

de plus, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^t[h] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(h) + \int_0^t \varphi_s dW_s$

PREUVE Marché complet (Tout payoff de $L^2_{\mathbb{Q}}$ $\mathcal{F}_T$-mes est réplicable)

On cherche une stratégie (ξ^*, V_0) telle que $\tilde{V}_T^{\xi^*,c} = \tilde{h}$!

Or $V_T^{\xi^*,c} = V_0 + \int_0^T \xi^* \tilde{S}_t \sigma dW_t$

Donc on utilise le théorème précédent et on choisit :

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{h}] \text{ et } \xi^*_s = \frac{\varphi}{\sigma \tilde{S}_s} \quad \theta.$$

⑤ Le prix d'une option de payoff $h := f(S_T)$ est solution d'une équation différentielle. (EDP de Black Scholes)

- prix : $\pi_0(h) \overset{=V_0}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{h}] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h]$ d'après la réplication ⊕ haut et l'AOA.
- prix en t : $\tilde{\pi}_t(h) \underset{\substack{\text{AOA}\\\text{réplication}}}{=} \tilde{V}_t^{c,\xi^*} \underset{(\tilde{V}_t) \text{ mgale sous } \mathbb{Q}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{c,\xi^*} | \mathcal{F}_t] \underset{\text{définition}}{=} e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h | \mathcal{F}_t] \Rightarrow \pi_t(h) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h]$
- On veut appliquer Itô donc montrons que $\pi_t(h) = F(t, S_t)$

↳ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(\frac{S_T}{S_t} S_t) | \mathcal{F}_t] = F(t, S_t)$ où $\begin{cases} f(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(x \exp(\sqrt{T-t}\,\sigma Y + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t))] \\ Y \sim \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$

PREUVE : Itô

$$S_t(\sigma dW_t + r dt) \qquad S_t^2\sigma^2 dt$$

$$dF(t,S_t) \overset{\text{Itô}}{=} \partial_t F(t,S_t)\,dt + \partial_x F(t,S_t)\,dS_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(t,S_t)\,d\langle S_\cdot, S_\cdot\rangle_t$$

et $d(e^{-rt}F(t,S_t)) = e^{-rt}(\underline{\ \ I\ \ }) - re^{-rt}F(t,S_t)\,dt$

$$= e^{-rt}\Big[\partial_t F(t,S_t) + rS_t\partial_x F(t,S_t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(t,S_t)S_t^2\sigma^2 - r\,F(t,S_t)\,dt + \partial_x F(t,S_t)S_t\,\sigma\,dW_t\Big]$$

Si on suppose F_x' bornée on a : $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^t F^2(s,S_s)S_s^2\sigma^2\,ds\right] < +\infty$

Si on a $\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t^2] < +\infty$ on retombe sur la martingale recherchée.

Or $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t^2] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_0^2\exp\left(2\sigma W_t + 2\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right] = S_0^2\exp(2\sigma^2 t - \sigma^2 t + 2rt) = S_0^2 e^{(\sigma^2+2r)t}$

$\hookrightarrow \sup_{t\in[0,T]} \leq S_0^2 e^{(\sigma^2+2r)T}$

Donc le drift s'annule car $\tilde{\Pi}_t = \hat{V}_t^{\xi^*,V_0}$ martingale ! $\square$.

EDP de Black-Scholes

$$(\text{EDP.BS})\quad \begin{cases} \partial_t F(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\partial_x^2 F(t,x) + rx\,\partial_x F(t,x) - r\,F(t,x) = 0 & \forall (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}_+^* \\ F(T,x) = f(x), \quad \forall x\in\mathbb{R} & \end{cases}$$

$\square$

Unicité de la solution :

Th Feynmann Käc

$u : [0,T]\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$ tq

u_x bornée solution de (EDP.BS)

Alors $u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^t[f(S_T)]e^{-r(T-t)}$, $\forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^+$ où $S_0 := x$

⑥ On a une formule explicite pour la réplication de l'action.

$$\tilde{F}(t,S_t) = F(0,S_0) + \int_0^t \partial_x F(s,S_s)\,\tilde{S}_s\,\sigma\,dW_s$$

$\boxed{\xi_s^* := F_x'(s,S_s)}$ par identification et unicité.

⑦ Sous le modèle de BS, pour un payoff $h := f(S_T)$ alors certaines propriétés vérifiées par f sont aussi vérifiées par le prix :

- croissance selon x
- convexité selon x

APPLICATIONS :

LES FORMULES DE BLACK-SCHOLES POUR PUT ET CALL

① On note $d1 := \frac{\ln(S_0/K)}{\sqrt{\sigma} T} + r\frac{\sqrt{T}}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$ et $d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T}$

$N(t) := F_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

Alors $C(S_0, r, K, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT}\mathcal{N}(d_-)$

$P(S_0, r, K, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(-d_+) + K e^{-rT}\mathcal{N}(-d_-)$

PREUVE :

$C(S_0, r, K, T, \sigma) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)_+] e^{-rT}$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T \mathbb{1}_{K \leq S_T} - K \mathbb{1}_{K\leq S_T}] e^{-rT}$

$S_T \sim S_0 \exp(\sigma\sqrt{T} Y + (r - \frac{\sigma^2}{2})T)$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{K\leq S_T}] - K e^{-rT} \mathbb{P}\Big(\underbrace{\frac{\ln(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}}_{-d_2} \leq Y\Big)$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{K\leq S_T}] - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$ car $(Y \sim -Y)$

Et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{K\leq S_T}) = S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\mathbb{1}_{K\leq S_T})$ où $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{Q}} = \frac{\tilde{S}_T}{S_0} = \mathcal{E}(M)$

où $M := \sigma W_t$

Donc $W'_t = W_t - \sigma t$ est un Brownien sous $\mathbb{P}_*$ (Girsanov ⊕ Novikov)

Or $dS_T = \sigma dW_t + r dt = \sigma dW'_t + (r + \sigma^2) dt$

$S_T = S_0 \exp(\sigma W_T + (r - \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2})T) \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\mathbb{1}_{K\leq S_T}) = \mathbb{P}^*\left(\frac{-\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \geq Y\right)$

$= \mathbb{P}^*(d_2 + \sigma\sqrt{T} \geq Y) = \mathcal{N}(d_1)$

D'où le résultat !

② Calculer le prix en t : même raisonnement mais plutôt que de de diviser par S_0, diviser par S_t. ⚠ du coup $\tilde{S}_0 \to \tilde{S}_t$, $T \to T-t$ etc...

$\pi_t(h) = S_t \mathcal{N}(d_1(S_t, T-t)) - K e^{-R(T-t)} \mathcal{N}(d_2(S_t, T-t))$

. Une formule pour l'allocation pour call

On a vu : $\xi^* = \partial_x F(t, S_t)$

$F(t, S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[f(S_T) \mid \mathcal{F}_t \right] e^{-r(T-t)}$

$f(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(x \exp(\sigma \sqrt{T-t}\, Y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)) - K \right)_+ \right] e^{-r(T-t)}$

$\partial_x F(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp(\sigma\sqrt{T-t}\, Y - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)) \mathbb{1}_{X \geq K} \right] e^{-r(T-t)}$ $\quad \left|\frac{\partial}{\partial x} \cdot\right| \leq \exp(\ldots Y \ldots)$ intg

$\partial_x F(t, S_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\_\_\_\_\_\_\_\_ \mathbb{1}_{S_T \geq K} \right] e^{-r(T-t)}$

on reconnaît pareil sauf

$\partial_x F(t, S_t) = \boxed{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\mathbb{1}_{S_T \geq K} \right]} = \underline{\underline{\mathcal{N}_1(d_1(S_t, T-t))}}$ qu'on fait pas sortir le S_t.

$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} := \frac{\tilde{S}_T}{\tilde{S}_t}$ ♡

. Options exotiques, options américaines

Exercice 1. $\xi := \phi\left(\int_0^T S_s \, ds \right)$; $X_t := \ln S_t$; $Y_t := \int_0^t S_s \, ds$

1) Dynamique de X_t sous $\mathbb{Q}$

On a d'après le modèle de BS sous $\mathbb{Q}$:

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + r\,dt)$$

D'après Itô : $dX_t = \frac{1}{S_t} \cdot dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2\, dt = \sigma dW_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})dt$

2) $\pi_t(\xi) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\xi \mid \mathcal{F}_t \right] e^{-r(T-t)}$ prix de l'option au temps t

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T S_s \, ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \exp(X_s) ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp(X_t) \int_0^T \exp(X_s - X_t) ds \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(Y_t + \exp(X_t) \int_t^T \exp(X_s - X_t)\, ds\right)\right]$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$F(t, x, y) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\phi\left(y + \exp(x) \int_t^T \exp\left(\sigma\sqrt{s-t}\, Z + (r - \frac{\sigma^2}{2})(s-t)\right) ds\right)\right]$$

3. F de classe $C^{1,2}$

On sait que le prix actualisé est une martingale (thm de repré $\mathrm{d}t^{\circ}$)

$$d(e^{-rt}F(t,X_t,Y_t)) = e^{-rt}dF(t,X_t,Y_t) - r e^{-rt}F(t,X_t,Y_t)\,dt$$

$$dF(t,S_t,Y_t) = \partial_t F(t,X_t,Y_t)\,dt + \partial_x F(t,X_t,Y_t)\left(\sigma dW_t + (r-\tfrac{\sigma^2}{2})dt\right)$$

$dY_t = S_t dt$

$$+ \partial_y F(t,X_t,Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(t,X_t,Y_t)\sigma^2 dt + \frac{1}{2}\partial_y^2 F(t,X_t,Y_t)\underbrace{\cancel{d\langle Y,Y\rangle_t}}_{=0}$$

variatio° finie

$$+ \partial_x\partial_y F(t,X_t,Y_t)\overset{=0}{\cancel{d\langle X,Y\rangle_t}}$$ m̄ raisons.

Donc mgale $\Rightarrow$ drift nul :

$$\begin{cases} \partial_t F(t,x,y) + \partial_x F(t,x,y)(r-\frac{\sigma^2}{2}) + \exp(x)\partial_y F(t,x,y) + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(t,x,y)\sigma^2 - rF(t,x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \\ F(T,x,y) = \phi(y) \end{cases}$$

4. $$d\tilde{F} = F(0,\ln S_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial_x F(s,X_s,Y_s)}{\tilde{S}_s}\tilde{S}_s\sigma\,dW_s$$

$$\boxed{\xi^* := \frac{\partial_x F(t,X_t,Y_t)}{\tilde{S}_t}}$$

<u>Exercice 2</u> (Barrier Option and PDE)

$$\xi := \mathbb{1}_{\{\theta = T, S_T < H\}}(S_T - K)_+ \qquad \text{où } \theta = \inf\{t\geq 0 ; S_t \geq H\}\wedge T$$

Ça veut dire que si S_t dépasse un certain montant alors on peut pas demander de le vendre pour K et c'est perdu. Donc le prix sera a priori moindre puisque on peut se faire au ⊕ H−K alors que $S_T - K$ offre de meilleures possibilités.

À Faire :
- volatilité implicite
- volatilité locale (Faire le p02A feuille 5 → reporter modèle à ...
- avec dividendes
- Dupire

- Volatilité implicite