MODÈLE / STRUCTURE AFFINE (TAUX)

Taux

Modèle : $dr_t = \nu(t, r_t)\,dt + \sigma(t, r_t)\,dW_t$ $\quad r_t$ taux sans risque

- **Marché arbitré de zéro coupons cf fiche "BONDS"**

1) Expression de $B(t,T)$

Pour le prix de $B(t,T)$ on a le payoff 1 en T i.e. :

↳ $B(t,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$ où Q proba risque neutre

2) $B(t,T) = F^T(t, r_t)$ car r_t markovien (seul r_t donne une indication de la trajectoire après t, le passé pas...)

3) F^T est $\mathcal{C}^{1,2}$ ⇒ On applique Itô à $\tilde{F}$

$\partial_r F^T$ bornée ⇒ $d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} F^T(t, r_t)\right) = \cancel{\;\;}\,dt$ + termes qui permettent d'assurer que le prix actualisé = martingale

↳ $F^T(t, r_t) = \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right) \mathbb{E}_Q^t\left[\underbrace{F^T(T, r_T)}_{=1} \exp\left(-\int_0^T r_s\,ds\right)\right]$

$= B(t,T)$ ☐.

$B(t,T)$ solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nu(t,r)\,\partial_r u(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\,\partial_r^2 u(t,r) - r\,u(t,r) = 0 \\ u(T, r) = 1 \end{cases}$$

Taux structure affine : $\begin{cases} \nu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma^2(t,r) = \gamma(t)r + \delta(t) \end{cases}$

- $F^T(t,r) := \exp\left(A^T(t) - r\,C^T(t)\right)$ où C^T sol de Riccati

A^T primitive de $f(C^T)$

PREUVE : INJECTE LA SOL DANS L'EDP

(*) On a un polynome en r nul $\Leftrightarrow$ chacun des terme nul.

$$(1) \begin{cases} \dfrac{\partial C^T}{\partial t} - \dfrac{\gamma(t)}{2} C^{T^2}(t) + \alpha(t) C^T(t) = -1 \\ C^T(T) = 0 \quad \text{pour que } B(t,T) = 0 \end{cases}$$ EDO de riccati!

$$(2) \begin{cases} \dfrac{\partial A^T}{\partial t} = \beta(t) C^T(t) - \dfrac{\delta(t)}{2} C^T(t) \\ A^T(T) = 0 \end{cases}$$ unique primitive qui s'annule en T.

(*) (1) + (2) $\Leftrightarrow$ F^T sol de EDP $\Rightarrow$ $F^T = B(t,T)$

Calculer $\partial_t F^T$, $\partial_r F^T$ et $\partial_r^2 F$ en $f(C^T, A^T)$ ça peut servir

ça sert ici...

Application : CIR

- Sommes nous dans le cadre HJM ?

↳ $d\tilde{B}(t,T) = -C^T(t)\tilde{B}(t,T)\sigma(t,r_t)\,dW_t$

soit $\tilde{\sigma} := -C^T(t)\sigma(t,r_t)$ fonction déterministe de t continue sur (t,T) ? $\Rightarrow$ oui!