MARCHÉ DE BONDS

⚠ Voir fiche multidimensionnel pour les notations (deuxième page surtout)

- Modèle de Heath Jarrow Morton

(H) On se place dans le cas de modèle de marché complet n-dimension sous proba risque neutre.

Les sous jacents de référence sont des bonds de maturités $T_1 < \dots < T_n$ différents.

Bond de maturité T_i : - rapporte un euro en T_i.

- prix en t noté $B(t,T_i)$ vérifiant sous $\mathbb{Q}$:

$$dB(t,T_i) = B(t,T_i) \times [\mu_t^i \, dt + \langle \sigma_t^{T_i}, dW_t \rangle]$$

Où $\sigma_t^{T_i} :=$ i-ème ligne de la matrice σ_t

(H) les σ_t sont déterministes de t.

- **Définition du prix par AOA d'un payoff d'horizon $T < T_1$.**

On se donne h-$\mathcal{F}_T$ / $h \exp(-\int_0^T r_s ds) \in L^2_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}_T)$

$$\pi_t(h) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h \exp(-\int_t^T r_s \, ds) \mid \mathcal{F}_t]$$

- **Définition de probabilité forward neutre associée à la maturité T_i.**

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \overset{\text{def}}{:=} \frac{\tilde{B}(T_i,T_i)}{B(0,T_i)} = \frac{\exp(-\int_0^T r_s ds)}{B(0,T_i)} \quad (B(T_i,T_i) = 1)$$

$\tilde{B}(t,T_i)$ martingale sous $\mathbb{Q}$ et $B(0,T)$ déterministe $\Rightarrow$ $\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\tilde{B}(t,T)}{B(0,T)}$

$d\tilde{B}(t,T_i) = \tilde{B}(t,T_i).\langle \sigma_t^{T_i}, dW_t \rangle \Rightarrow \tilde{B}(t,T_i) = B(0,T_i) \exp\left(\int_0^t \langle \sigma_s^{T_i}, dW_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_s^{T_i}\|^2 ds \right)$

Sous $\mathbb{Q}^T$: W^T / $dW_s^{T_i} := dW_s^t - \sigma_s^{T_i}.ds$ est un brownien.

- **Définition du prix forward dans le numéraire $B(t,T_i)$**

Soit π_t un prix, le prix forward est $\bar{\pi}_t := \frac{\pi_t}{B(t,T_i)}$

ex: Prix forward d'un bond de maturité S dans le numéraire $B(t,T)$ avec $T < S$.

$dB(t,S) = B(t,S)\,[r_t dt + \langle \sigma^S(t), dW_t \rangle]$

$\mathbb{Q}$ définit selon $d\left(\frac{B(t,T)}{B(t,S)}\right)$

$$Z_t = \frac{B(t,S)}{B(t,T)} = \frac{\tilde{B}(t,S)}{\tilde{B}(t,T)} = \exp\left(\int_0^t \langle(\sigma^S(s) - \sigma^T(s))\rangle dW_s^T - \int_0^t \|\sigma_s^T - \sigma_s^S\|^2 ds\right) \cdot \overbrace{\frac{B(0,S)}{B(0,T)}}^{Z_0}$$

↳ martingale exponentielle sous $\mathbb{Q}^T$ (Novikov)

$Z_T = B(t,S)$

. Quand le prix forward dans le numéraire $B(t,T)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}^T$ (cf changement de numéraire)

$$\frac{\pi_t}{B(t,T)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{\pi_T}{B(T,T)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}^T}[\pi_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[h \mid \mathcal{F}_t]$$

reprenons l'exemple :

- prix d'une digitale : $\mathbb{1}_{B(t,S) \geq K}$ maturité T.

On pose
$$\begin{cases} \Sigma_{0,T}^2 := \frac{1}{T}\int_0^T \|\sigma^S(s) - \sigma^T(s)\|^2 ds \\ U := \int_0^T (\sigma^S(s) - \sigma^T(s)) \cdot dW_s^T \cdot \frac{1}{\Sigma_{0,T}\sqrt{T}} \end{cases}$$

Sous W^T, v.a. $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ (intégrale de Wiener)

On a :
$$\begin{aligned} \frac{\pi_0}{B(0,T)} &= \mathbb{Q}^T[B(T,S) \geq K] \\ &= \mathbb{Q}^T[Z_T \geq K] \\ &= \mathbb{Q}^T\left[Z_0 \exp\left(\sqrt{T}\cdot\Sigma_{0,T}\cdot U - \frac{\Sigma_{0,T}^2}{2}\cdot T\right) \geq K\right] \end{aligned}$$

Blabla bla ... $\pi_0 = B(0,T) \cdot \mathcal{N}(d_-)$, $d_-(\Sigma_{0,T}, K, T, Z_0)$

De même, au temps t : $0 \rightsquigarrow t$, $T \rightsquigarrow T-t$, $\Sigma_{0,T} \rightsquigarrow \Sigma_{t,T}$; $Z_0 \rightsquigarrow Z_t$

$$\pi_t = B(t,T)\,\mathcal{N}(d(Z_t, T-t, K, \Sigma_{t,T}))$$

- Prix du call
$$(B(T,S)-K)_+ = \underbrace{B(T,S)\,\mathbb{1}_{B(T,S)\geq K}}_{\text{prix } \pi_t^1} - \overbrace{K\,\mathbb{1}_{B(T,S)\geq K}}^{\text{prix } \pi_t^{(2)} = B(t,T)\,\mathcal{N}(d^-)}$$

$$\text{①} \quad \pi_0^{①} = \mathbb{E}_{Q^T}\left(B(T,S)\, \mathbb{1}_{B(T,S) \geq K} \right)$$

$$= \mathbb{E}_{Q^T}\left(\frac{B(T,S)}{B(T,T)}\, \mathbb{1}_{\frac{B(T,S)}{B(T,T)} \geq K} \right)$$

$$= \mathbb{E}_{Q^T}\left[Z_T\, \mathbb{1}_{Z_T \geq K} \right]$$ Reconnaît B.S. avec Z.

$$\frac{\pi_0}{B(0,T)} = \underbrace{\frac{B(0,S)}{B(0,T)}}_{Z_0} \mathcal{N}(d^+) - K\,\mathcal{N}(d^-)$$

$$\pi_t = B(t,S)\,\mathcal{N}(d^+) - K\,B(t,T)\,\mathcal{N}(d^-)$$

- EDP vérifiée par $\mathbb{E}_{Q^T}[\phi(B(T,S)) | \mathcal{F}_t] =: u(t, Z_t)$
  - $\mathbb{E}_{Q^T}[\phi(B(T,S)) | \mathcal{F}_t] = u(t, Z_t)$

    $\mathbb{E}_{Q^T}[\phi(B(T,S)) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{Q^T}[\phi(Z_T)]$

    $= \mathbb{E}_{Q}{}^{T}\left[\phi\left(Z_t \exp\left(\int_t^T \sigma^S(s) - \sigma^T(s)\, dW_s - \frac{1}{2}\underbrace{\int_t^T \|-\|^2 ds}_{=: \log C_t}\right)\right) | \mathcal{F}_t\right]$

    Donc $u(t,x) := \mathbb{E}_{Q^T}[\phi(x \exp(Y_t) C_t)]$

    $Y_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_t^T \|-\|^2 ds\right)$

    ↳ On peut appliquer Itô et utiliser le théorème de Feynmann Kăc pour unicité de solution régulière telle que $\partial_z u$ bornée.

- Définition du B-marché
  → Pas d'actifs sans risque dans les portefeuilles

- Définition du Z-marché
  → B-marché dont le numéraire est un zéro coupon

- Stratégie de réplication dans un B-marché (ex à deux bond (T et S) où $B_t^0 = B(t,T)$; $B_t^1 = B(t,S)$)

$$\left.\begin{aligned} V_t^B &:= \zeta_t^0 B_t^0 + \zeta_t^1 B_t^1 \\ V_t^Z &:= \zeta_t^0 Z_t^1 + \zeta_t^1 Z_t^1 \quad \text{ou } Z_t^i = \frac{B_t^i}{B_t^0} \end{aligned}\right\} \quad V_t^Z = \frac{V_t^B}{B_t^0} \; ; \; V_T^Z = V_T^B$$

$$\begin{array}{c|c} \text{B - auto} & \text{Z - auto} \end{array}$$

. autofinancement : $dV_t^B = \zeta_t^0 dB_t^0 + \zeta_t^1 dB_t^1$ | $dV_t^Z = \zeta_t^0 dZ_t^0 + \zeta_t^1 dZ_t^1$

- Une stratégie Z - autofinançante $\Leftrightarrow$ B - autofinançante
  ↳ Écrire toutes les dynamiques dans la base (dW_t, dt) de départ et identifier les égalités.

- Z - marché : marché avec un actif sans risque $(r=0)$ de prix $Z_t^0 = 1$ et un actif risqué $Z_t^1 / dZ_t^1 = Z_t^1(\sigma^S(t) - \sigma^T(t))\,dW_t^T$
  ↳ On sait tout calculer avec de tels produits

LIBOR

. **Le principe** :

- On se donne une unité de référence 1 convenue (convention)
- On note $\mathcal{L}_T$ le taux LIBOR à la date T.

  Par définition : $\mathcal{L}_T$ taux de rendement à la date T pour une unité de temps sur un placement.

  i.e : en T : C $\longrightarrow$ en T+1 : $C(1+\mathcal{L}_T)$

Rq $\underset{T}{B(T,T+1)} \longrightarrow \underset{T+1}{1} \Leftrightarrow B(T,T+1)(1+\mathcal{L}_T) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}_T = \frac{1}{B_T^{T+1}} - 1}$

↳ On a une convention sur le placement pour une unité de temps : on va l'étaler pour éviter ARBITRAGE

- **Taux forward** à la date $t \leq T$ pour la période $[T, T+1]$

Par définition : L_t est l'estimation de L_T vue de t :

ça me coûterait ça en t

$t \longrightarrow T \longrightarrow T+1$

$B(t,T) \longrightarrow \boxed{1} \longrightarrow (1+L_t)$ ← je prévois ce passage ! entre T et T+1

$\underbrace{(1+L_t)\,B(t,T+1)}_{\text{où m̂ ça}} \longrightarrow (1+L_t)$

donc $(1+L_t)B(t,T+1) = B(t,T)$ (AOA)

$$\boxed{L_t = \frac{B(t,T)}{B(t,T+1)} - 1}$$

Rq : $L_T = \mathcal{L}_T$

$\overset{\text{connu en } t}{\downarrow}$

<u>Pensée</u> : Prévoir d'avoir $(1+L_t)$ en $T+1$ supposant que L_t (prix $B(t,T+1)(1+L_t)$) sera le taux entre T et $T+1$ alors c'est équivalent que prévoir d'obtenir 1 à placer au taux L_t en T. (même prix donné par les BONDS)

- **FRA (Forward Rate Agreement)**
  - $I^1 := [T, T+1]$
  - $K :=$ taux strike dans m̂ convention fixé en $t=0$ (signature)
  - $\mathcal{L}_T$ le fameux

↳ "Tu vas emprunter à taux fixe contre le LIBOR pendant I^1"

<u>Convention</u> prix FRA¹ : prix d'emprunt d'une unité de monnaie (linéarité)

Soit le <u>payoff</u> : $\underbrace{(1+L_T)}_{\text{si t'avais dû emprunter LIBOR}} - \underbrace{(1+K)}_{\text{ce que t'as dû payer au final}}$ pour l'acheteur du contrat

$h = (\mathcal{L}_T - K)$ $\mathcal{F}_T$-mesurable, reçu en $(T+1)$!

$\forall t \leq T$:

$$FRA^1_t = \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[(\underset{\overset{\shortparallel}{L_T}}{\mathcal{L}_T} - K)\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big] \quad \text{sous } \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ risque neutre !} \\ (r_t) \text{ taux sans risque} \end{cases}$$

$$= \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[\Big(\frac{B(T,T)}{B(T,T+1)} - (K+1)\Big)\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[\Big(\frac{B(T,T)}{B(T,T+1)} - 1\Big)\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big]}_{①} - K\,\underbrace{\mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[1.\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big]}_{\overset{\shortparallel}{B(t,T+1)}}$$

$$B(t,T) = \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\int_t^T r_s\,ds\Big)\Big]$$

$$① = \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[\underset{\circ}{L_T}\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big]$$

$(\bar{L}_t) := (L_{t\wedge T})_{t\in[0,T+1]}$ prolonge du processus L_t jusqu'à $T+1$

$$① = \mathbb{E}^t_{\mathbb{Q}}\Big[\bar{L}_{T+1}\exp\Big(-\int_t^{T+1} r_s\,ds\Big)\Big]$$ [prix du payoff $\bar{L}_{T+1}$ sous $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ martingalise $\tilde{B}(t,T)$ car risque neutre donc :

$(L_t) = \Big(\frac{B(t,T)}{B(t,T+1)} - 1\Big)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{Q}^T$ martingale $\Rightarrow$ son prolongement $(\bar{L}_t)$ aussi

$$\textcircled{1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{t}\left[\bar{L}_{T+1} \exp\left(-\int_t^{T+1} r_s\, ds\right)\right], \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{B}(t,T+1)}{B_0} \ \mathbb{Q}\text{-martingale} \\ \text{je sais calculer } \mathbb{E}_{Q^T}^{t}\left[\frac{\bar{L}_{T+1}}{B(T+1,T+1)}\right] = \mathbb{E}_{Q^T}^{t}\left[\bar{L}_{T+1}\right] = \bar{L}_t \end{array} \right.$$

cf "CHGMT de NUM"

$$\hookrightarrow = \mathbb{E}_{Q^{T+1}}^{t}\left[\frac{\bar{L}_{T+1}}{\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{B(T+1,T+1)}}\right] B(t,T+1) = FRA_t^{\wedge}$$

$$= \mathbb{E}_{Q^{T+1}}^{t}\left[\bar{L}_{T+1}\right] B(t,T+1) = \bar{L}_t\, B(t,T+1)$$

$$\boxed{FRA_t^{\wedge} = B(t,T+1)(L_t - K)} \quad \forall t \leq T$$

Rq Ce qui rend le contrat à valeur nulle c'est choisir $K = L_t$ prédiction de ce que sera $\mathcal{L}_T$ vu de t.

- **LES SWAPS**
  - Suite de Libor sur $I^i := [T+(i-1), T+i]$ avec strike fixé K.
  - $i \in [\![1, m]\!]$ avec m à determiner

Prix : $\sum_{i=1}^{m} FRA_t^i$ (même raisonnement sauf que y a pas i estimateurs L_t^i des $(\mathcal{L}_{T+i})$ qui entrent en jeux).

Prix : $SWAP_t^{T,m}(K) = \sum_{i=1}^{m} B(t,T+i)(L_t^i - K)$

$\hookrightarrow$ Taux swap FORWARD : $K /\ SWAP_t^{T,m}(K) = 0$.