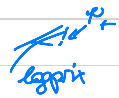
HESTON (Modèle à volatilité stochastique)

• Les hypothèses

- intérêts instantanés constants ($r_t = cte = r$)
- $\begin{cases} dS_t = S_t[\mu_t dt + \sqrt{v_t}\, dW_t] \\ dv_t = \lambda(\theta - v_t)dt + \gamma\sqrt{v_t}\, dW_t^v \end{cases}$ où $\langle dW_t, dW_t^v\rangle = \rho\, dt$ (actif risqué) (variance de l'actif)
- $\mu_t := r + \alpha v_t$



interprétation

μ_t : tendance linéaire instantanée du logprix

θ : variance à l'infini (volatilité moyenne)

λ : vitesse de retour à la moyenne de la vol

γ : 'volatilité de la volatilité' dans les gdes lignes.

TRÈS PROBABLEMENT, L'ALÉA DU PRIX INFLUE L'ALÉA DE SA VOL D'OÙ ρ corrélation!

• On veut un Brownien beaucoup plus sympa :

Rappel : $W_t^v = \alpha W_t + \beta W_t^T$ ($\langle W, W\rangle = t$ par Lévy)

$/\langle W_t^T, W_t\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \rho$

$\langle W^v, W^v\rangle = t \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\rho^2}$

$W_t^T := (W_t^v - \rho W_t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$ est indep de W_t.

Ainsi, selon le brownien 2D $\begin{pmatrix} W \\ W^T \end{pmatrix}$ on a la dynamique :

$$dS_t = S_t[\mu_t\, dt + \sqrt{v_t}\, dW_t]$$
$$dv_t = \lambda(\theta - v_t)dt + \sqrt{v_t}\,[\gamma\rho\, dW_t + \gamma\sqrt{1-\rho^2}\, dW_t^T]$$

• Marché incomplet

On sait que la présence d'un Brownien 2D et un unique actif risqué fait que le marché est incomplet : introduire $C_0 \,/\, \frac{\partial C_0}{\partial v} \neq 0$.

• Une solution forte pour v_t existe ssi $\frac{2\lambda\theta}{\gamma} > 1$

• Une proba risque neutre ($(\tilde S_t)$ martingale)

$\sigma_t := \sqrt{v_t} \longrightarrow \lambda_t := \frac{\mu_t - r_t}{\sqrt{v_t}}$ et $\tilde W_t = W_t + \int_0^t \lambda_s \, ds$ Brownien

Sous $\mathbb{Q}$ | $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} := \exp\left(-\int_0^t \lambda_s \, dW_s - \int_0^t (\mu_t - r_t) v^{-\frac{3}{2}} \, ds\right)$

(H) $\mu_t = r + \alpha v_t + \beta v_t^{-1} \Rightarrow \boxed{\lambda_s = \alpha\sqrt{v_s} + \beta v_s^{-\frac{3}{2}}}$

↳ $\begin{cases} dS_t = (r\,dt + \sqrt{v_t}\, d\tilde W_t) S_t \\ d\tilde S_t = \tilde S_t \sqrt{v_t}\, d\tilde W_t \end{cases}$

et $dv_t = \lambda(\theta - v_t)dt + \gamma\sqrt{v_t}\,\rho\, d\tilde W_t - (\alpha v_t - \beta v_t^{-1})\rho\gamma\, dt + \sqrt{1-\rho^2}\,\gamma\sqrt{v_t}\, dW_t^T$

$dv_t = (\lambda(\theta - v_t) - \alpha\rho\gamma v_t)\,dt + \beta v_t^{-1}\rho\gamma\, dt + \rho\gamma\sqrt{v_t}\, d\tilde W_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\gamma\sqrt{v_t}\, dW_t^T$

$= \boxed{\zeta(\psi - v_t) + \gamma\sqrt{v_t}\,\rho\, d\tilde W_t - \gamma\rho\beta v_t^{-1}\, dt + \sqrt{1-\rho^2}\,\gamma\sqrt{v_t}\, dW_t^T}$

$\zeta := \lambda + \alpha\rho\gamma$ et $\psi := \frac{\lambda\theta}{\lambda + \alpha\rho\gamma}$

Sous $\mathbb{Q}$ on est encore dans un modèle de Heston mais où $\tilde S_t$ est une martingale et où se rajoute un paramètre $\underline{\underline{\beta}}$!

Modèle affine : $\boxed{\beta = 0}$ et donc $\mu_t := r + \alpha v_t$ (d'où le nom)
↳ par convention dans le modèle de Heston

• LE MODÈLE DE HESTON RÉFÉRENCE

Tout est par convention exprimé sous $\mathbb{Q}$ risque neutre pour l'unicité des paramètres :

↳ $\begin{cases} dS_t = (x\,dt + \sqrt{v_t}\, d\tilde W_t) S_t \\ dv_t = \zeta(\theta - v_t)dt + \eta\sqrt{v_t}\, dB_t \end{cases}$

i.e quand on demande les paramètres, on donne leur valeur sous $\mathbb{Q}$ risque-neutre !

x : taux d'intérêt ; θ moyenne de vol inv. ; η : vol de vol
μ : vitesse de retour à la moyenne θ.