But : Exprimer $v(t,x) := \left|\begin{matrix}\inf \\ \sup\end{matrix}\right._{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, Z_t^{\alpha,x})\,dt + g(Z_T^{\alpha,x})\right]$ et trouver α optimal.

1. Identifier la variable d'état : tout ce qui est impliqué dans J
2. Écrire la dynamique :

généralisation au cas multidimensionnel.

$$dZ_t = \begin{pmatrix} b_1(Z_t,\alpha_t) \\ \vdots \\ b_n(Z_t,\alpha_t) \end{pmatrix} . dt + \left(\sigma_{i,j}(Z_t,\alpha_t)\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le d}} dW_t$$

| W_t B-mvt brownien d-dim
| Z_t variable d'état n-dim

↳ Quid si les dynamiques sont données par un tuple $(W^i)_{i\in[1,d]}$ vecteur gaussien de Brownien où $\langle W^i, W^j\rangle = \rho_{i,j}\,dt$ avec $\rho_{i,j} \in [-1,1]$?

On va les décorréler et changer de base dans les dynamiques pour que le problème soit bien formulé → se répercutent sur B et σ bien entendu.

- Cas de $\langle W^1, W^2\rangle_t = \rho\, dt$
  | On garde W^1
  | On pose $W^2 = \rho W^1 + \sqrt{1-\rho^2}\, W'$ avec W' brownien indep de W^1.

3. On a identifié B et σ convenablement, HJB !

On identifie f et g dans $\mathbb{E}\left[\int f dt + g\right]$

(HJB) : $\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \left|\begin{matrix}\inf \\ \sup\end{matrix}\right._{a\in A} \left(H(x, D_x v(t,x), a)\right) \\ v(T,\cdot) = g \end{cases}$ | inf si $v = \inf(\mathbb{E}\_\_)$ | sup si $v = \sup(\mathbb{E}\_\_)$

Hamiltonien : $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times M_n(\mathbb{R}) \times A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, p, M, a) \longmapsto p \cdot b(x,a) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j} M_{i,j} \sum_{k=1}^{d} \sigma_{i,k}(x,a)\sigma_{j,k}(x,a)}_{M :: \sigma\sigma^T(x,a)} + f(x,a)$$

4. Substituer l'expression de l'extremum dans HJB et trouver des équations

On tombe sur des équations qu'on peut reconnaître et dire qu'on peut résoudre

- Riccati : $f'(x) + q_0(x) f(x) + q_1(x) f^2(x) = 0$
- Feynmann-Kac.

$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dB_t \quad \text{sous } \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} \partial_t v + b(t,x) . D_x v + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(t,x) :: D_x^2 v + f(t,x) - r(t,x) v = 0 \\ v(T,x) = g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow v(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(u,X_u)du} f(s,X_s)\,ds + e^{-\int_t^T r(s,X_s)ds} g(X_T)\right]$$

↳ On arrive là en incluant une ansatz ou directement

5. Vérification : 2 théorèmes

Théorème [de vérification]

Soit $w \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ solution de (HJB) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \sup_{a\in A} H(x, D_x w(t,x), D_x^2 w(t,x), a) = 0 \\ w(T,x) = g(x) \end{cases}$$

(H) supposons qu'il existe $\hat{a} : [0,T[\times\mathbb{R}^d \to A$ mesurable tq :

$$\hat{a}(t,x) \in \operatorname{Argmax}_{a\in A} H(x, D_x w(t,x), D_x^2 w(t,x), a)$$

et

vraie (EDS) : $dX_s = b(X_s, \hat{a}(s,X_s))\,ds + \sigma(X_s, \hat{a}(s,X_s))\,dW_s$

admet une unique $\hat{X}_s^{t,x}$ étant donné une condition initiale $X_t = x$

Alors $w = v$ et $\hat{\alpha} := (\hat{\alpha}_s = \hat{a}(s, \hat{X}_s))$ $t \le s \le T$ est un contrôle optimal feedback.

[Vérification probabiliste] (Autre critère de vérification mais équivalent)

$w : [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonction mesurable telle que

(i) $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, le processus $S_t^\alpha = w(t, x_t) + \int_0^t f(s,x_s)\,ds$ surmartingale

(ii) $\exists \hat{\alpha} \in \mathcal{A}$ tq $(S_t^{\hat{\alpha}})_t$ est une martingale ← qui doit être regulière

(iii) $w(T,\cdot) = g$ ← on doit avoir à la fin g

Alors $w(0,X_0) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} J(\alpha) = J(\hat{\alpha})$

Même problème mais solution de viscosité (v n'est pas supposée $\mathcal{C}^{2,1}$)

1. Conditions de finitude de l'Hamitonien incluse dans HJB.

$\mathcal{H} := \sup_a H(x,p,M,a)$; $\mathrm{dom}(\mathcal{H}) := \{(x,p,M) \,/\, |\mathcal{H}(x,p,M)| < +\infty\}$ caractérisée par $\boxed{G \geq 0}$

(HJB) : $\begin{cases} \min\left[-\dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{H}(x, D_x v, D_x^2 v),\ G(x, D_x v, D_x^2 v)\right] \\ \\ v(T^-, x) = \hat{g}(x) \end{cases}$

où $\hat{g}(x)$ G-enveloppe de g $\Leftrightarrow$ plus petite fonction majorant g telle que $G(x, D_x\hat{g}, D_x^2\hat{g}) \geq 0$

Quelques résultats utiles

- TCVD $\exists Y \geq 0$ itg / $\forall i \in \mathbb{R}$, $|X_i| \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[\lim X_i] = \lim \mathbb{E}[X_i]$
- PERMUTATION DÉRIVATION $|\partial_x f_x| \leq h$, h itg $\Rightarrow \mathbb{E}[\partial_x f(x,X)] = \partial_x \mathbb{E}[f(x,X)]$
- $g(X_T) \leq \hat{g}(X_T)$. puis Itô.
- Quand on perd de vue les variables dans l'équation : Feynman-Kac !

But : trouver le bon moment où faut arrêter le processus : exprimer v / $x \in \mathbb{R}^d$, $v(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta t} f(X_t^x)\,dt + e^{-\beta t} g(X_\tau)\right]$ et τ^* atteignant le sup.

1. Écrire l'inéquation variationnelle

$\min(\beta v - \mathcal{L}v - f\,;\ v - g) = 0$ $(*)$

où $\mathcal{L}v := b(x) \cdot D_x v + \frac{1}{2}\sigma\sigma^T(x) : D_x^2 v$

Rq : on s'arrête dès qu'on touche $\mathcal{S} = \{x \,/\, g(x) = v(x)\} = \mathcal{C}^c$

Prop ② : $\mathcal{S} = \emptyset \Leftrightarrow \tau \overset{p.s}{=} +\infty$

Prop ③ : g continue sur O et $\mathcal{S} \subset O \Rightarrow \mathcal{S} \subset \{x \in O,\ b(x).\partial_x g - \mathcal{L}g(x) - f(x) = 0\} := E_g$

Prop ④ : g est C^1 et v C^1 $\Rightarrow \mathcal{S}$ fermé $\Rightarrow$ inf atteint

2. Unicité de la solution Prop ⑤ : g C^2 ; $\mathcal{S} \subset E_g$ avec E_g un intervalle, par unicité $v = g$ sur E_g soit $\boxed{\mathcal{S} = E_g}$

Théorème [vérification]

(H) w C^2 sur $\mathbb{R}^d$ solution de $\begin{cases} \min(\beta w - \mathcal{L}w - f,\ w - g) = 0 \\ \text{sur } \mathbb{R}^d \end{cases}$

unicité !

Alors $w = v$ la fonction valeur du problème d'arrêt

Et τ^* temps de sortie de $\mathcal{C}$: $\tau^* := \inf\{t \,/\, X_t \in \mathcal{S}\} = \inf(t \,/\, g(X_t^x) = v(X_t^x))$

est un temps d'arrêt optimal, i.e : $v(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\beta t} f(X_t^x)\,dt + e^{-\beta\tau^*} g(X_{\tau^*}^x)\right]$

τ arrêt explicité

w C^2 remplacé par
- C^2 sur $\mathcal{S}$
- C sur $\mathcal{C} = \mathcal{S}^c := \{x \,/\, v(x) > g(x)\}$

et smooth-fit.

2. Condition de smooth-fit : l'entrée dans $\mathcal{S}$ impose, $\forall b \in \mathcal{S}$, ! $\lim_{x \to b} v(x) = g(b)$

3. Utiliser les conditions aux bords déduites pour que dans la région de continuation on ait bien un unique solution