LCTrabalho1Exercicio2

November 1, 2020

1 Trabalho 1

1.1 Lógica Computacional 2020-2021

O propósito deste trabalho é a análise de problemas de alocação usando técnicas de SAT, em lógica proposicional, e IP em lógica linear inteira.

Trabalho realizado por:


```
> 1. Paulo Costa - A87986
> 2. André Araújo - A87987
```


1.1.1 Exercício 2

2. O "pigeon hole principle" (PHP) é um problema clássico da complexidade. Basicamente

    > Existem N pombos e $N-1$ poleiros de pombos. Cada pombo ocupa totalmente um poleiro. Pretende-se alocar cada pombo a um poleiro próprio.

    1. Provar que não existe solução do problema, usando Z3 em
        1. lógica proposional
        2. lógica inteira linear
    2. Analisar a complexidade de cada uma das provas em função de N de forma empírica. Como sugestão pode começar por fazer um "plot" do tempo de execução.

1.1.2 RESPOSTA:

A.

a. Para provar que não e possivel colocar N pombos em $N-1$ poleiros de pombos de forma a que cada pombo ocupe totalmente um poleiro. Para tal, lógica proposional,vamos necessitar de $N \times N-1$ variáveis proposicionais, onde a variável $d_{p,pl}$ determina se o pombo p vai para o poleiro pl. Assim temos que:

- Cada pombo p tem exatamente um poleiro pl
- Cada poleiro pl só tem um pombo p

Ou seja para cada pombo p:

$$\bigvee_{pl=0}^{N-2} d_{p,pl}$$

$$\bigwedge_{i=0}^{N-2} d_{p,i} \rightarrow \bigwedge_{j=i+1}^{N-2} \neg d_{p,j}$$

E para cada poleiro pl:

$$\bigwedge_{i=0}^{N-2} d_{i,pl} \rightarrow \bigwedge_{j=i+1}^{N-2} \neg d_{j,pl}$$

[32]:
```
from z3 import *
def testaPosibilidadeLP(n):
    s=Solver()
    np=n-1 #numero de poleiros
    d={}
    for p in range(n):
        d[p]={}
        for pl in range(np):
            d[p][pl]=Bool("d_"+str(p)+","+str(pl))

    #cada pombo tem um poleiro
    for p in range(n):
        s.add(Or([d[p][pl] for pl in range(np)]))

    #cada pombo so tem um poleiro
    for p in range(n):
        for i in range(np):
            s.add(Implies(d[p][i],And([Not(d[p][j]) for j in range(i+1,np)])))

    #cada poleiro so tem um pombo
    for p in range(n):
        for pl in range(np):
            s.add(Implies(d[p][pl],And([Not(d[i][pl]) for i in range(p+1,n)])))

    if s.check() == sat:
        return "Possivel"
    else:
        return "Impossivel"

testaPosibilidadeLP(4)
```

[32]: 'Impossivel'

b. Para provar que não e possivel colocar N pombos em $N-1$ poleiros de pombos de forma a que cada pombo ocupe totalmente um poleiro. Em lógica inteira linear usamos programação inteira, ou seja, as variaveis inteiras são binarias onde a variavel $d_{p,pl}$ determina se o pombo p vai para o poleiro pl

- Cada pombo$p$ só deve ter um poleiro pl

$$\forall_p \cdot \sum_{pl} d[p][pl] = 1$$

- Cada poleiro pl deve ter no maximo um pombo$p$.

$$\forall_p l \cdot \sum_{p} d[p][pl] <= 1$$

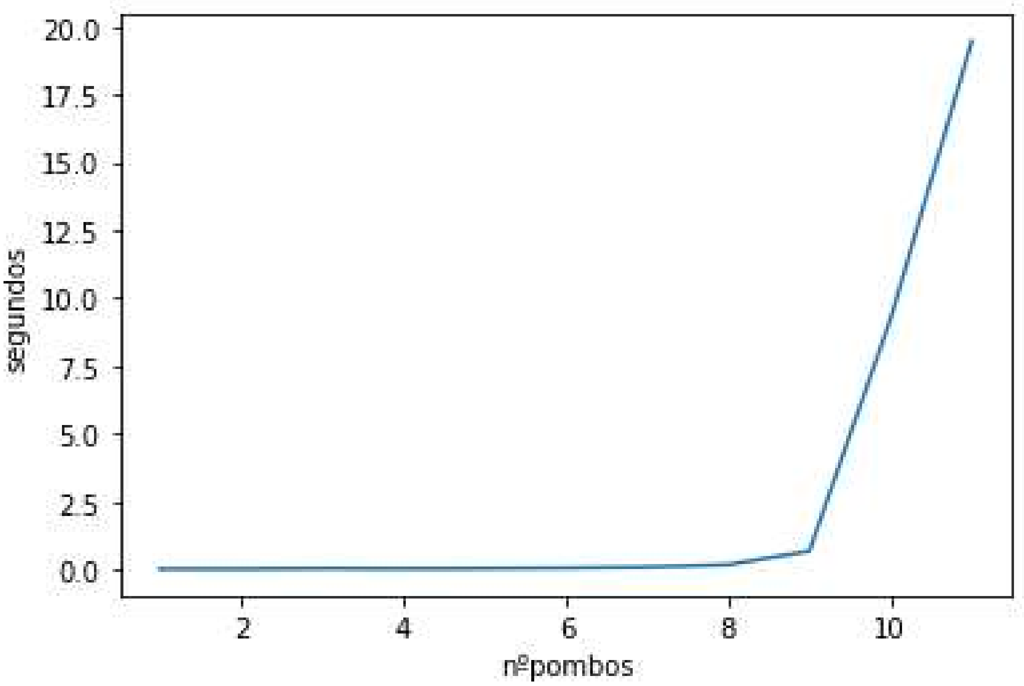
[2]:
```
from z3 import *
def testaPosibilidadeLIL(n):
    s=Solver()
    np=n-1  #numero de poleiros
    d={}

    for p in range(n):
        d[p]={}
        for pl in range(np):
            d[p][pl]=Int("Pombo_"+str(pl)+",Pombal_"+str(pl))
            #os pomboS tem de estar num poleiro valido
            s.add(And(d[p][pl]>=0,d[p][pl]<=1))

    #Cada poleiro deve ter no maximo um pombo

    for pl in range(np):
        s.add(Sum([d[p][pl] for p in range(n)])<=1)

    #cada pombo sÓ deve ter um poleiro

    for p in range(n):
        s.add(Sum([d[p][pl] for pl in range(np)])==1)


    if s.check() == sat:
        return "Possivel"
    else:
        return "Impossivel"

testaPosibilidadeLIL(7)
```

[2]: 'Impossivel'

B.

[33]:
```
from z3 import *
from timeit import timeit
import matplotlib.pyplot as plot
def temposexecucaoLP(n):
```

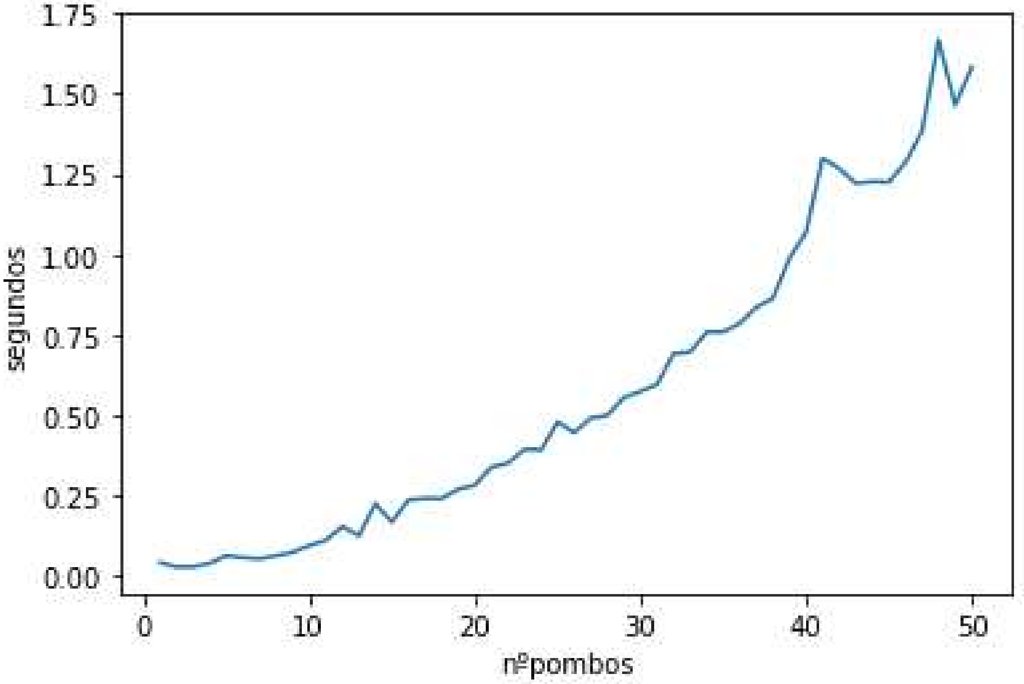
```
    tempos=[]                    #lista com os tempos de execução
    for i in range(1,n+1):
        tempo=timeit(setup="from __main__ import testaPosibilidadeLP",\
                  stmt="testaPosibilidadeLP("+str(i)+")",number=1)
        tempos.append(tempo)
    return tempos

n=11
tempos= temposexecucaoLP(n)
x=range(1,n+1)
plot.plot(x,tempos)
plot.ylabel("segundos")
plot.xlabel("nºpombos")
plot.show()
```



Na solução utilizando a lógica proposional a complexidade é n^3, pois temos como complexidade do pior caso $2(n^3) + 2(n^2)$,logo $O(testaPosibilidadeLP(N)) = N^3$.

[3]:
```
from z3 import *
from timeit import timeit
import matplotlib.pyplot as plot
def temposexecucaoLIL(n):
    tempos=[] #lista com os tempos de execoçao
    for i in range(1,n+1):
        tempo=timeit(setup="from __main__ import testaPosibilidadeLIL",\
```

```
                    stmt="testaPosibilidadeLIL("+str(i)+")",number=1)
        tempos.append(tempo)
    return tempos
n=50
tempos= temposexecucaoLIL(n)
x=range(1,n+1)
plot.plot(x,tempos)
plot.ylabel("segundos")
plot.xlabel("nºpombos")
plot.show()
```



Na solução utilizando a lógica inteira linear a complexidade é n^2, pois temos como complexidade do pior caso $3(n^2)$,logo $O(testaPosibilidadeLIL(N)) = N^2$

1.1.3 Conclusão:

Neste exercício, achamos que conseguimos obter uma solução do problema que consegue de facto cumprir os objetivos pretendidos.
Mais uma vez, achamos que o mais "complicado" poderá ter sido, o processo para adoptar os requisitos necessário a ter no código em fórmulas proposicionais, apartir daqui torna-se muito mais fácil criar esta solução.
Depois na segunda parte do exercício, conseguimos obter a conclusão de que a função testaPosibilidadeLIL é mais eficiente do que a da alínea anterior (testaPosibilidadeLP), conseguimos verificar isto pelas complexidades de cada um nos seus piores casos. Enquanto que na solução utilizando lógica inteira linear, o pior caso é $3(n^2)$, utilizando a

lógica proposicional, o pior caso já se demonstra como sendo $2(n^3) + 2(n^2)$.
Achamos que o exercício foi concluído com bastante sucesso e que, sobretudo, conseguimos adotar uma solução que cumpre todos os requisitos do problema!