Grafos e Algoritmos Computacionais

Árvores

Prof. André Britto
Modificada por Prof. Breno Piva

Árvores

- Um grafo conexo e acíclico é dito **árvore**.

Teorema: Um grafo G conexo é uma árvore se e somente se $|EG| = |VG| - 1$.

Prova: Decorre imediatamente das proposições A e B (aula de conexidade).

Corolário: Toda árvore não trivial tem pelo menos dois vértices de grau um.

Prova: (Técnica do caminho mais longo)

Árvores

Teorema: As seguintes afirmações sobre um grafo G são equivalentes.

(a) G é uma árvore.

(b) entre quaisquer dois vértices distintos de G existe um único caminho e G não tem laços.

(c) G é acíclico e para qualquer aresta a, $a \notin EG$, $G+a$ contém exatamente um circuito (a liga dois vértices não adjacentes).

(d) G é conexo e G-a é desconexo para qualquer aresta $a \in EG$.

Árvores

Esquema de prova: Desejamos provar que:

$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$

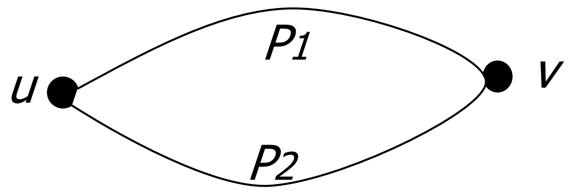
$(a) \Rightarrow (b)$

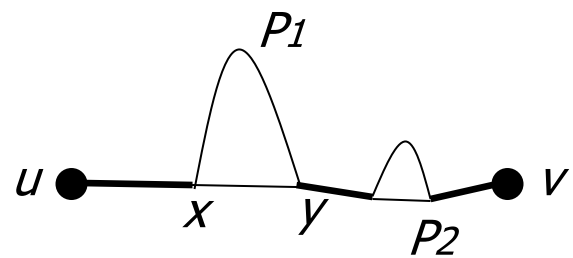
G é árvore $\Rightarrow$ acíclico $\Rightarrow$ **não tem laços**

O restante da prova é por absurdo. Se G não tem nenhum caminho é uma contradição à conexidade. Suponha então que *G* tem dois caminhos.

Árvores

(a) $\Rightarrow$ (b) - continuação





P_1 e P_2 são dois caminhos distintos ligando *u* e *v* em *G*

1) P_1 e P_2 disjuntos $\Rightarrow P_1 \cdot P_2$ é ciclo $\Rightarrow$ **contradição**

2) Seja *x* o primeiro vértice em $(VP_1 \cap VP_2)$ tal que sucessores de *x* em P_1 e P_2 são distintos. Seja *y* o primeiro vértice sucessor de *x* tal que $y \in (VP_1 \cap VP_2)$. *Seja* P' a seção de P_1 de *x* a *y* e seja P'' a seção de P_2 de *x* a *y*. Então $P' . P''^{-1}$ é um ciclo, contradição.

Árvores

(b) $\Rightarrow$ (c)

1) ***G* é acíclico:** Por absurdo $\Rightarrow$

G não é acíclico $\Rightarrow$ Seja *C* um ciclo de *G*. Então ou *C* é um laço ou entre dois vértices quaisquer de *C* existem dois caminhos, **contradição.**

2) ***G+a*, $\forall a \notin E_G$, contém exatamente um circuito**: Sejam *u* e *v* dois vértices não adjacentes em *G*. Por hipótese, em *G* existe um caminho *P* entre *u* e *v*. Então *P.(u,a,v)* é um ciclo em *G*. Suponha agora, por absurdo, que em *G+a*, exista mais de um circuito. Sejam C_1 e C_2 dois desses circuitos em *G+a*. Seja $C^{-} = C_1 - a$ e $C^{--} = C_2 - a$. Então C^{-} e C^{--} são dois caminho entre *u* e *v* em *G*, **contradição.**

Árvores

(c) $\Rightarrow$ (d)

1) ***G* é conexo:** Por absurdo $\Rightarrow$

- *G* não é conexo $\Rightarrow$ G_1 e G_2 componentes conexos de *G*. Acrescente *a* ligando G_1 a G_2. Então, $G+a$ não contém circuito, **contradição.**

2) ***G-a* é desconexo** $\forall$***a*** $\in$ ***EG***: Por absurdo $\Rightarrow$

- $a=(u,v)$
- $G-a$ conexo $\Rightarrow$ caminho *P* de *u* a *v* $\Rightarrow$ $P \bullet (u,v)$ é ciclo

Contradição à aciclicidade

Árvores

(d) $\Rightarrow$ (a)

Para provar que é árvore $\begin{cases} \text{conexo} \\ \text{acíclico} \end{cases}$

Por absurdo $\Rightarrow$

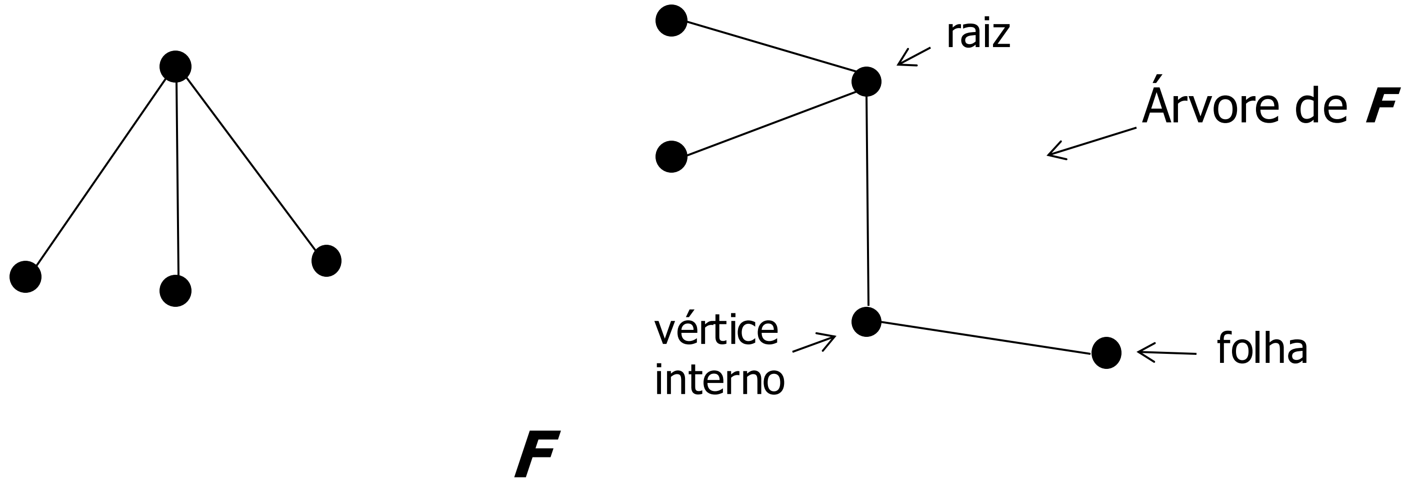
- Ciclo C em G, $a \in C$, C-a é conexo $\Rightarrow$ G-a é conexo $\Rightarrow$ **contradição**

Árvores

- Se T é uma árvore, um vértice em T tal que $g_T(v) = 1$ é dito **folha**. Os demais são denominados **vértices internos** T.

- **Floresta** $\Rightarrow$ Conjunto de árvores

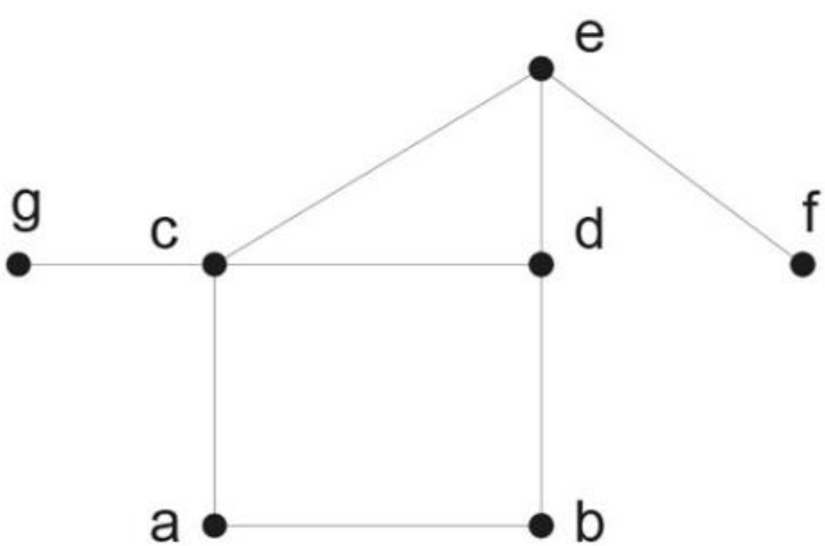
Ex.:



Excentricidade

- *Denomina-se excentricidade de um vértice v $\in$ V ao valor máximo da distância entre v e w para todo w $\in$ V.*
- *O centro de G é o subconjunto dos vértices de excentricidade mínima.*
- *O centro de um grafo pode possuir no mínimo um e no máximo n vértices.*
- *O centro de uma árvore pode possuir não mais que 2 vértices.*

Excentricidade



vértice	excentricidade
a	3
b	3
c	2
d	2
e	2
f	3
g	3

Excentricidade

Lema: Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices. Seja T' a árvore obtida de T pela exclusão de todas as suas folhas. Então T e T' possuem o mesmo centro.

Prova: Observe inicialmente que se um vértice f de T é uma folha então f não pertence ao centro de T. Isto porque o vértice g adjacente a f possui necessariamente excentricidade uma unidade menor que a de f. Seja agora um vértice interior v de T. O vértice w, cuja distância a v é máxima, é necessariamente uma folha. Logo a exclusão de todas as folhas de T faz decrescer de uma unidade a excentricidade de cada um de seus vértices interiores.

Excentricidade

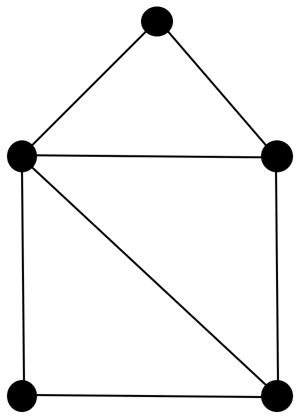
Teorema: O centro de uma árvore T possui um ou dois vértices.

Prova: Se T possui até dois vértices o teorema é trivial. Caso contrário, aplicar repetidamente o lema anterior.

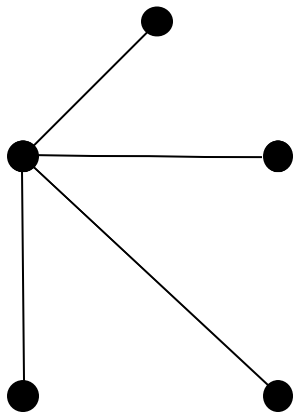
Árvores

- Uma **árvore geradora** num grafo *G* é um subgrafo gerador *H* de *G* que é uma árvore.

Ex.:



G



Uma árvore geradora para ***G***

Árvores

Corolário

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

□

Árvores

Corolário

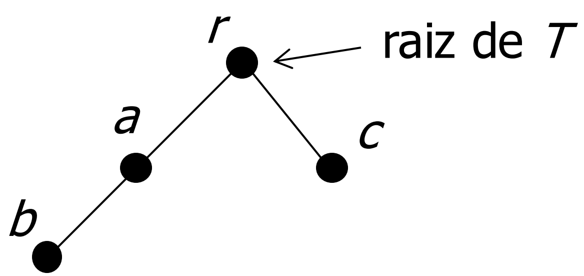
Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Prova

Seja H o subgrafo gerador conexo minimal. Então $H-a$ é desconexo para todo $a \in EH$. Pelo teorema anterior, H é árvore. ($d \Rightarrow a$) $\square$

Árvores

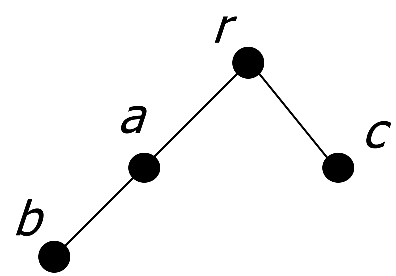
- Uma árvore T é denominada **enraizada** quando algum vértice $v \in VG$ é escolhido especial. Este vértice é denominado **raiz** da árvore T.



- Seja v um vértice pertencente ao caminho da raiz r a w, $\{r,w\} \in VT$, então dizemos que v é **ancestral** de w ou que w é **descendente** de v.

  Ex.: a é ancestral de b e c descendente de r

Árvores



- **pai** $\Rightarrow$ (*a* pai de *b*) $(a,b) \in aT$
- **filho** $\Rightarrow$ (*b* filho de *a*)
- **nível** $\Rightarrow$ comprimento do caminho entre raiz e vértice

  Ex.: $nivel(r) = 0$, $nivel(a) = 1$, $nivel(b) = 2$.

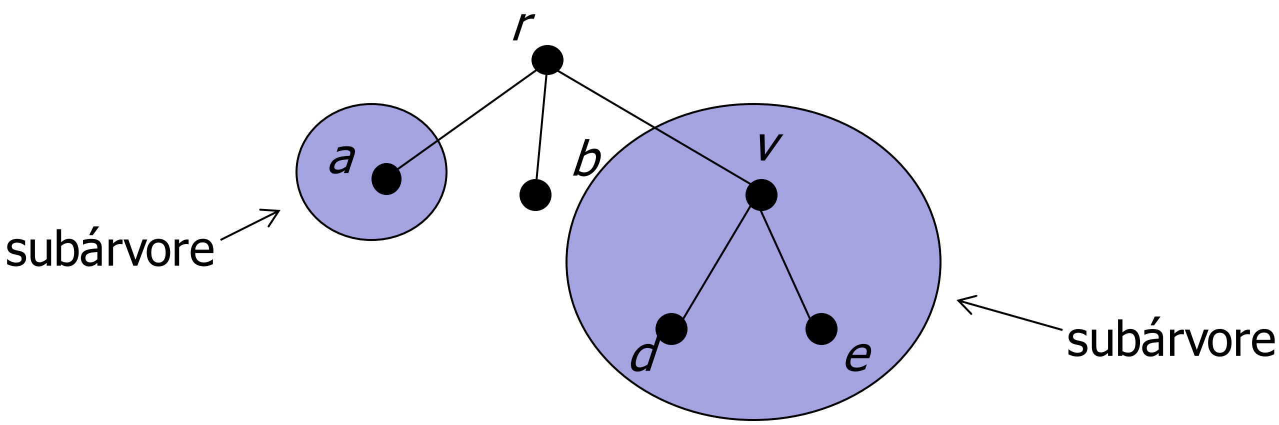
  - Se *w* é filho de *v*, $nivel(w) = nivel(v) + 1$
- **altura** $\Rightarrow$ valor máximo de $nivel(v)\ \forall\ v \in VT$

  Ex.: $altura(T) = 2$

Árvores

- Seja T uma árvore enraizada. Uma **subárvore** T_v de T é uma árvore enraizada cuja raiz é v e definida pelo subgrafo gerado em T por v e pelos descendentes de v.

Ex.:



Exercícios Recomendados

- Bondy e Murty:
  - 1.6.4, 1.6.6, 1.6.10
  - 2.1.2, 2.1.4, 2.1.6.

Referências

- Seções 2.3 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais,* Ed. Campus, 1983.

- Adaptado do material da Profa. Leila Silva

- Capítulo 2 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.