Departamento de Computação/UFS

Grafos e Algoritmos Computacionais

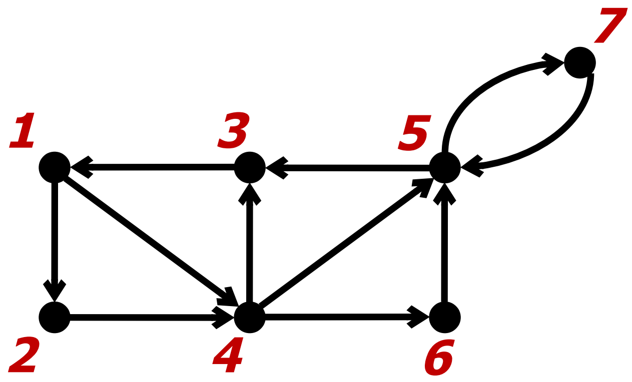
Busca em Dígrafos: Componentes Fortemente Conexos

Prof. André Britto

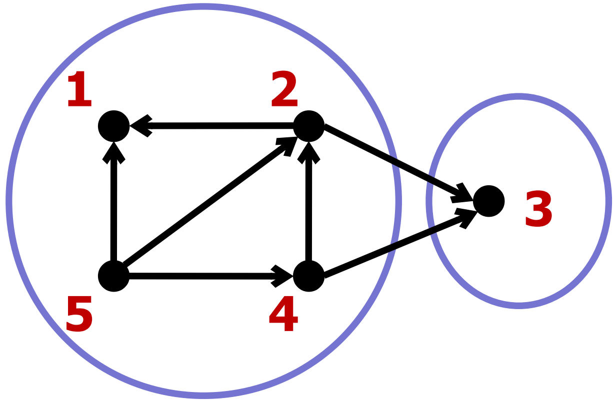
Componentes Fortemente Conexos

- Um dígrafo D é **fortemente conexo** quando para todo par de vértices $v,w \in VD$ existir um caminho em D de v para w e de w para v.

Ex.:



SIM



NÃO
(Não existe, por exemplo, um caminho de 3 para 2)

Componentes Fortemente Conexos

Proposição 1

Os componentes fortemente conexos de *D* particionam a floresta de profundidade *T* em subárvores disjuntas.

- Para avaliar os componentes fortemente conexos preciso localizar as raízes dessa subárvore na floresta *T*. Essas raízes são chamados de **vértices fortes** de *T*.

Componentes Fortemente Conexos

Proposição 2

Dois vértices pertencem ao mesmo componente fortemente conexo **se e só se** existe um circuito orientado contendo ambos os vértices.

Proposição 3

Todo vértice em *D* pertence a exatamente um componente fortemente conexo.

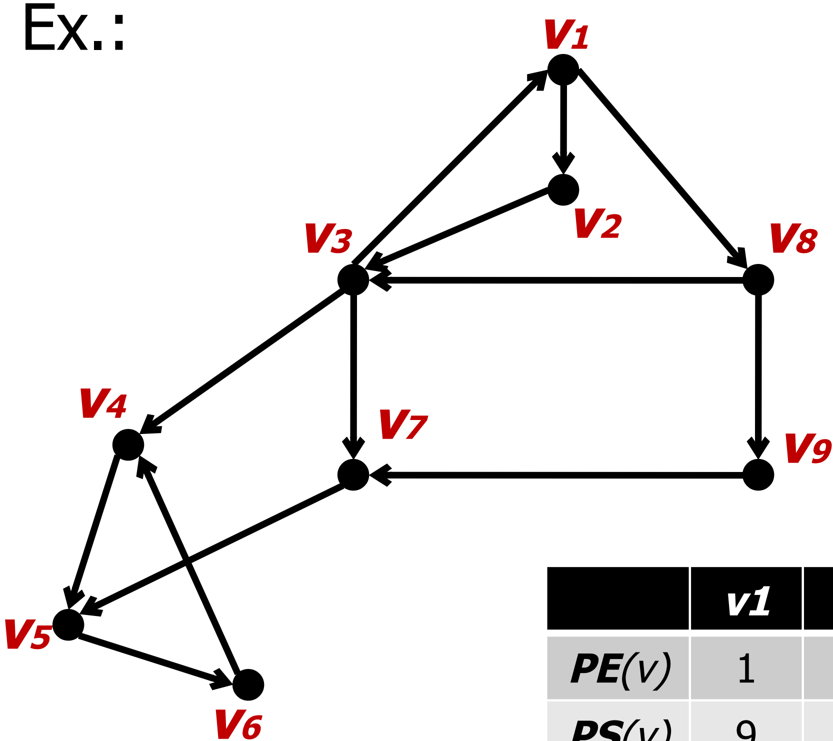
Componentes Fortemente Conexos

- Usaremos a função **High** definida da seguinte forma:

High: $VD \rightarrow \{1,2,...,n\}$ é tal que para cada $v \in VD$ $High(v) = PE(g)$ onde g é o vértice de menor profundidade de entrada localizado no mesmo componente fortemente conexo de v, e que pode ser alcançado a partir de v por uma ou mais arestas da árvore de profundidade e no máximo uma aresta de retorno ou de cruzamento.

Componentes Fortemente Conexos

Ex.:



	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
PE*(v)*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
PS*(v)*	9	6	5	3	2	1	4	8	7

	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9
High	1	1	1	4	4	4	7	3	9

Componentes Fortemente Conexos

Proposição

Um vértice $v \in VD$ é vértice forte **se e só se** $High(v) = PE(v)$.

Prova

Página 100 do Szwarcfiter

Componentes Fortemente Conexos

- Casos que podem ocorrer aresta x High:

(1) *(v,w)* é **aresta da árvore**

- Após a exploração de w conhece-se *High(w)*. Se
- $High(w) < High(v) \Rightarrow High(v) := High(w)$.

(2) *(v,w)* é uma **aresta de retorno**

- *v,w* pertence ao mesmo componente fortemente conexo.
- Se $PE(w) < High(v) \Rightarrow High(v) := PE(w)$

Componentes Fortemente Conexos

(3) *(v,w)* é **aresta da avanço**

- não interfere: ver definição do High

(4) *(v,w)* é uma **aresta de cruzamento**

- *v* pertence ou não ao mesmo componente fortemente conexo que *w* ?
- Faz isso de uma pilha. Se *w* ainda está na pilha então faz parte de um mesmo componente.
- Se sim se $PE(w) < High(v) \Rightarrow High(v) := PE(w)$

Componentes Fortemente Conexos

```
algoritmo ComponentesFortementeConexos(D,v,n)
 procedimento Componente(v);
   início
     PE[v] := num;
     num := num+1;
     insira v na Pilha;
     High[v] := PE[v]; {valor incial do High}
     para todas as arestas (v,w) faça
         Se PE[w] = 0 então {w não é marcado}
           início
             Componente(w);
             High[v] := min(High[v],High[w]);
           fim
```

Componentes Fortemente Conexos

```
    └ Senão {w é marcado}
        Se PE[w] < PE[v] e comp[w] = 0 então
            {aresta de cruzamento ou de retorno}
            High[v] := min(High[v],PE[w]);
  Se High[v] = PE[v] então
    início
      {v é forte}
      compNo:= compNo + 1;
      repita
        {marcação dos vértices do novo componente}
        retire x da Pilha;
        comp[x] := compNo;
      até (x = v);
    fim
fim
```

Componentes Fortemente Conexos

```
início  {p. principal}
  para todo vértice v de G faça
    início
      PE(v) := 0;
      comp[v] := 0;
    fim
  compNo := 0;
  num := 1;
  enquanto existir um vértice v tal que PE[v] = 0 faça
    Componente(v);
fim
```

Referências

- Seções 4.6 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais,* Ed. Campus, 1983.

- Seção 22.5 do Cormen, *Introduction to Algorithms,* MIT Press, 2001.

Adaptado do material da Profa. Leila Silva.

Seção 1.7 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012