



---

# **Grafos e Algoritmos Computacionais**

## ***Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra***

**Prof. André Britto**

# Single Source Shortest Path

---

- **Problema:** Dado um grafo  $G$ , com peso nas arestas, ( direcionado ou não) e vértice  $s$  em  $G$ , encontrar o caminho de menor tamanho entre todos os vértices de  $G$  e  $s$ .
- Peso nas arestas :
  - considerar inteiro não negativo.
  - reflete o tamanho (distância) do caminho entre dois vértices, extremos da aresta.

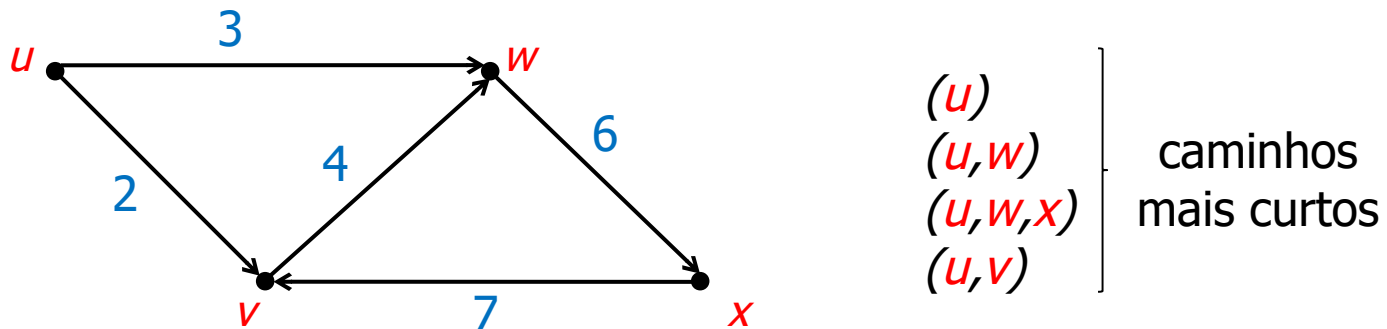
# Single Source Shortest Path

---

Em geral, algoritmos de caminhos mínimos se baseiam na seguinte propriedade: um caminho mínimo entre dois vértices contém outros caminhos mínimos.

# Single Source Shortest Path

- **Simplificação:** vamos na realidade determinar os comprimentos desses caminhos, ao invés do caminho explicitamente.
- **Suposição:** dígrafo com  $u$  como origem



# Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra

---

- **Guloso**
- Passos:
  - Manter um conjunto  $S$  de vértices para os quais já se sabe a menor distância até  $s$ .

# Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra

---

- **Guloso**

- Passos:

- Manter um conjunto  $S$  de vértices para os quais já se sabe a menor distância até  $s$ .
  - Inicialmente que distância sabemos ?

# Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra

---

- **Guloso**

- Passos:

- Manter um conjunto  $S$  de vértices para os quais já se sabe a menor distância até  $s$ .
  - Inicialmente que distância sabemos ? ( $s \in S$ )

# Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra

---

- **Guloso**

- Passos:

- Manter um conjunto  $S$  de vértices para os quais já se sabe a menor distância até  $s$ .
  - Inicialmente que distância sabemos ? ( $s \in S$ )
- a cada passo escolher um vértice  $v \in V \setminus S$ , cuja distância estimada para  $s$  é mínima, para adicionar a  $S$ .



# Single Source Shortest Path: Algoritmo de Dijkstra

---

- **Guloso**

- Passos:

- Manter um conjunto  $S$  de vértices para os quais já se sabe a menor distância até  $s$ .
  - Inicialmente que distância sabemos ? ( $s \in S$ )
- a cada passo escolher um vértice  $v \in V \setminus S$ , cuja distância estimada para  $s$  é mínima, para adicionar a  $S$ .
- Atualizar as estimativas de distâncias dos vértices adjacentes ao vértice  $v$  em relação a  $s$ .

# Single Source Shortest Path

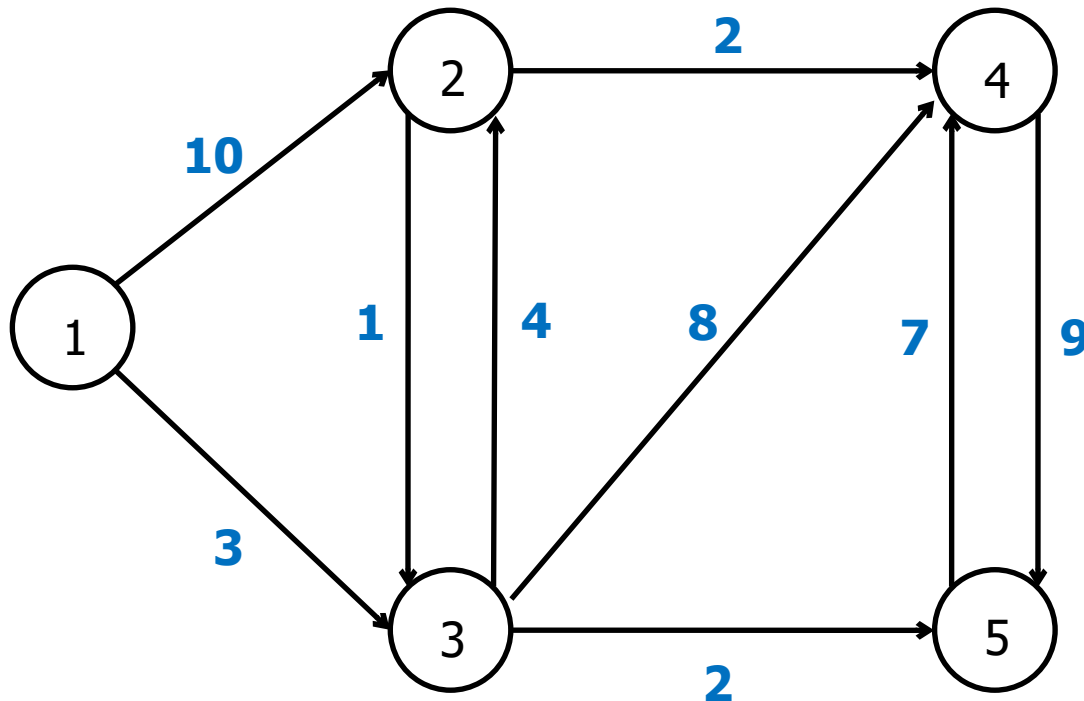
---

## ■ Problema:

- Dado um vértice  $s$ , e todo vértice  $w$ , dentre todos caminhos sendo  $s$  o início determinar:
    - (i) um caminho entre  $s$  e qualquer vértice  $w$
    - (ii) a soma dos pesos entre  $s$  e  $w$  seja mínima.
  - Propriedade  $P \Rightarrow (s,w)$  é um caminho.
- Critério  $\alpha \Rightarrow$  a soma dos pesos entre  $v$  e  $w$  seja mínima.

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



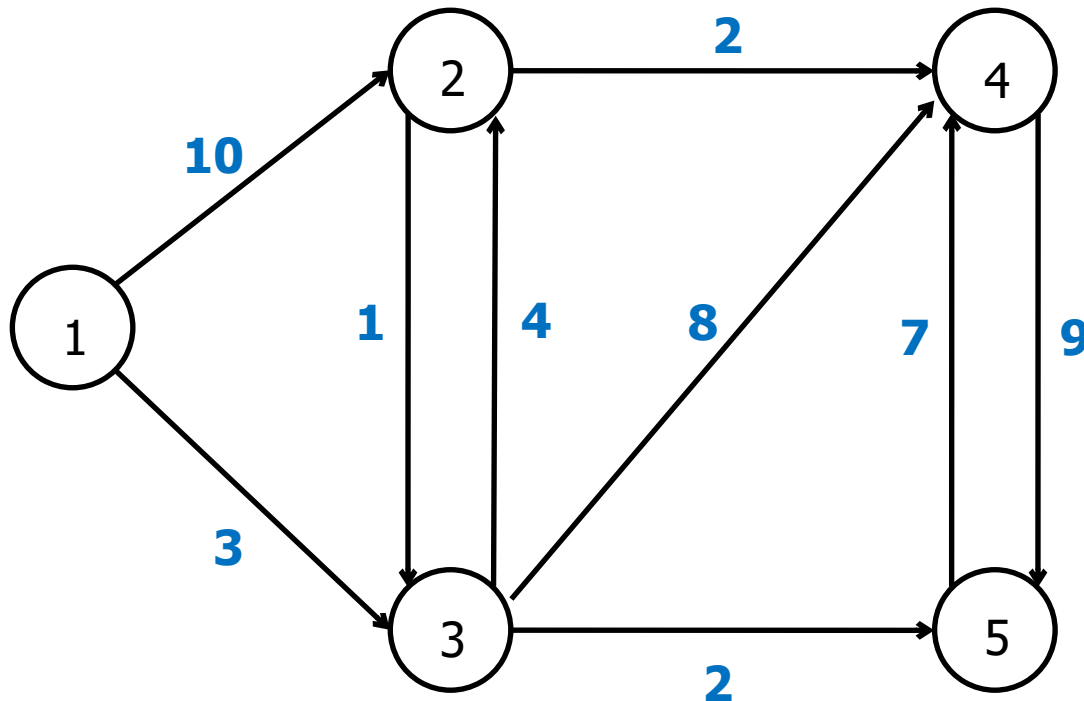
<i>Q</i>
<b>1</b>
<b>2</b>
<b>3</b>
<b>4</b>
<b>5</b>

<i>d</i>	<i>v</i>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>2</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>3</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>4</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>5</b>

```
s :=  $\emptyset$ ;  
Q := V;  
d[s] := 0;  
para todos v ∈ V e v ≠ s  
  faça  
    início  
      d[v] :=  $\infty$ ;  
    fim  
  fim  
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



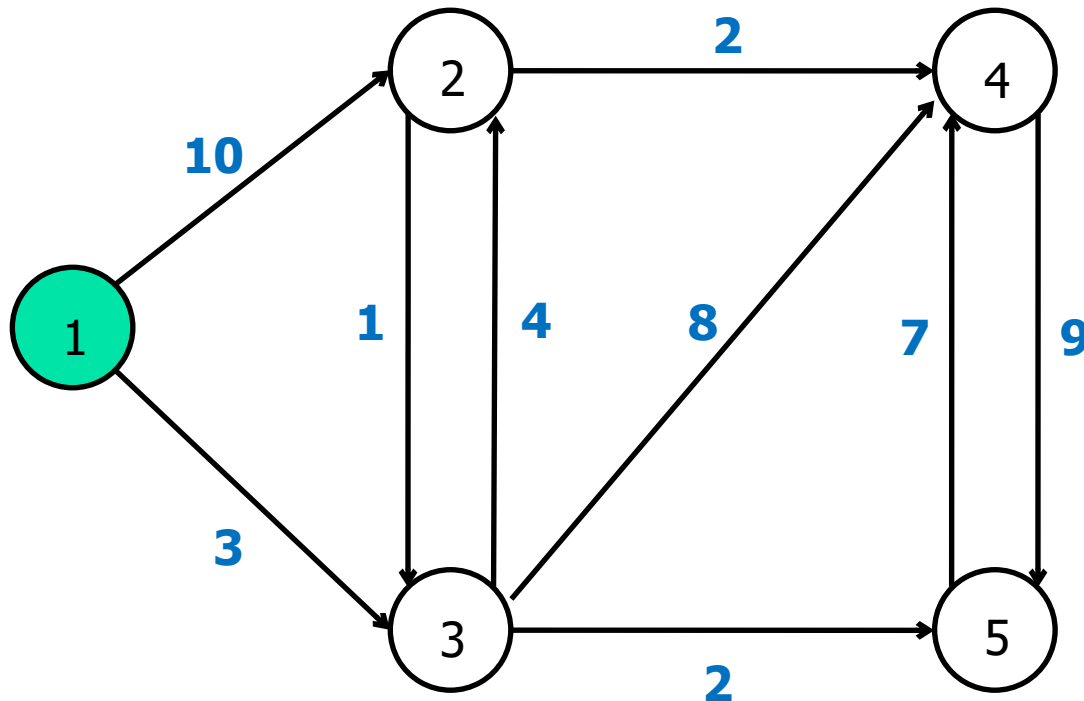
<i>Q</i>
<b>1</b>
<b>2</b>
<b>3</b>
<b>4</b>
<b>5</b>

<i>d</i>	<i>v</i>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>2</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>3</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>4</b>
<b><math>\infty</math></b>	<b>5</b>

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



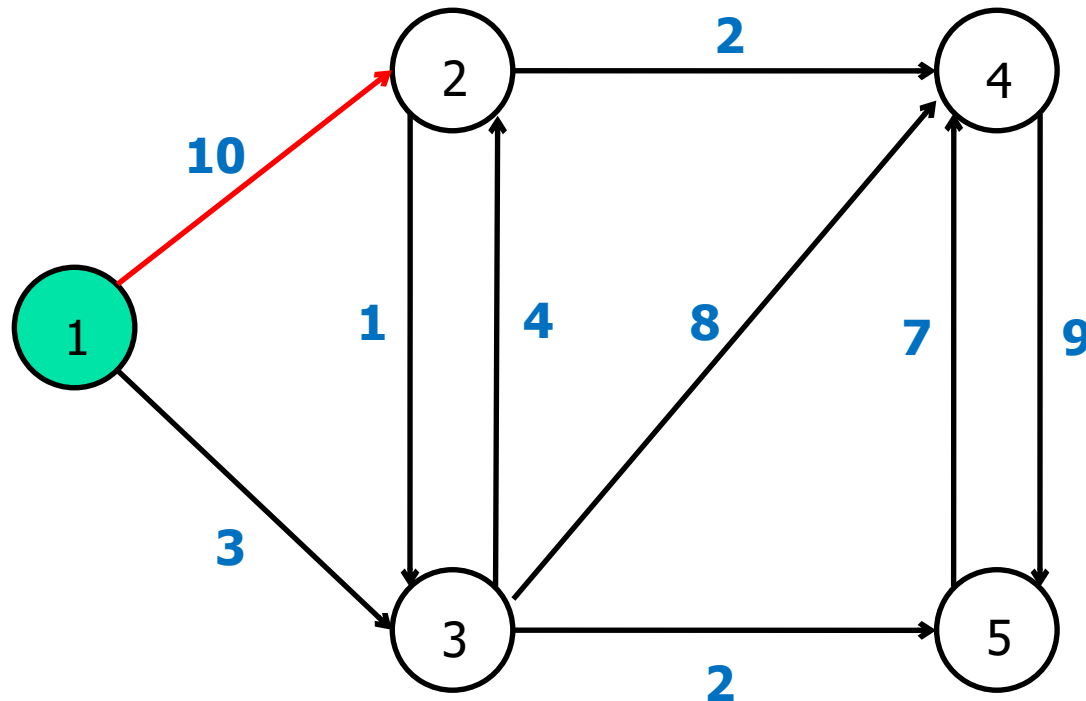
<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
$\infty$	2
$\infty$	3
$\infty$	4
$\infty$	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

## Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 10 + 0$$

<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
$\infty$	2
$\infty$	3
$\infty$	4
$\infty$	5

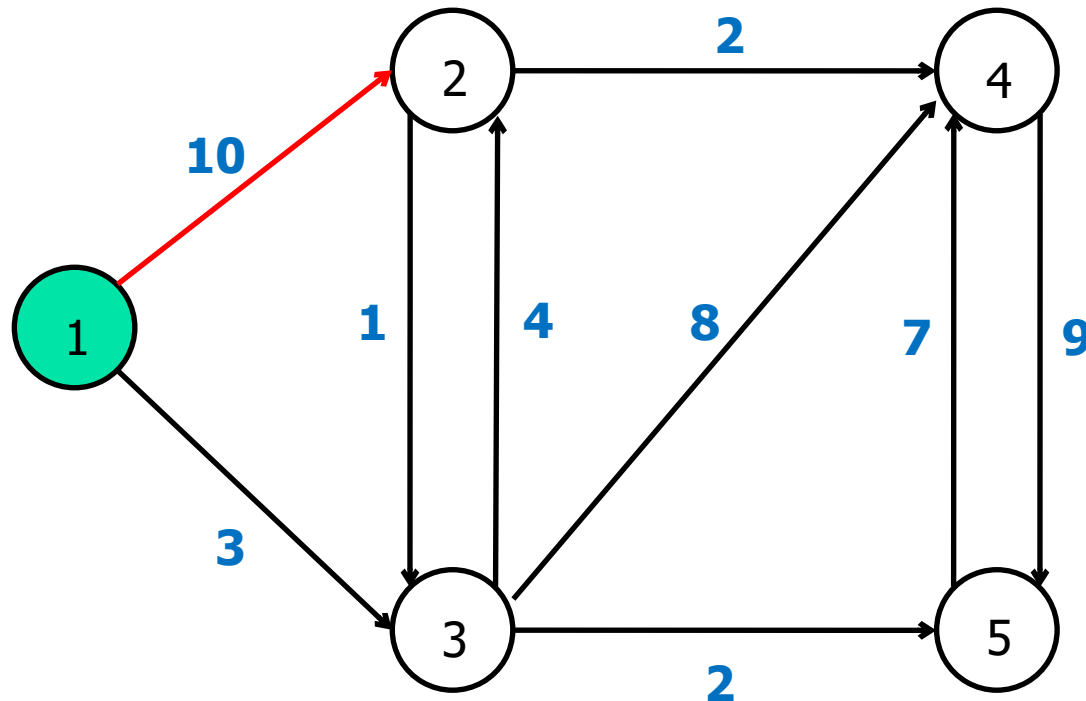
```

enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q) ;
    S := S ∪ {v} ;
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w) ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 10 + 0$$

<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
$\infty$	3
$\infty$	4
$\infty$	5

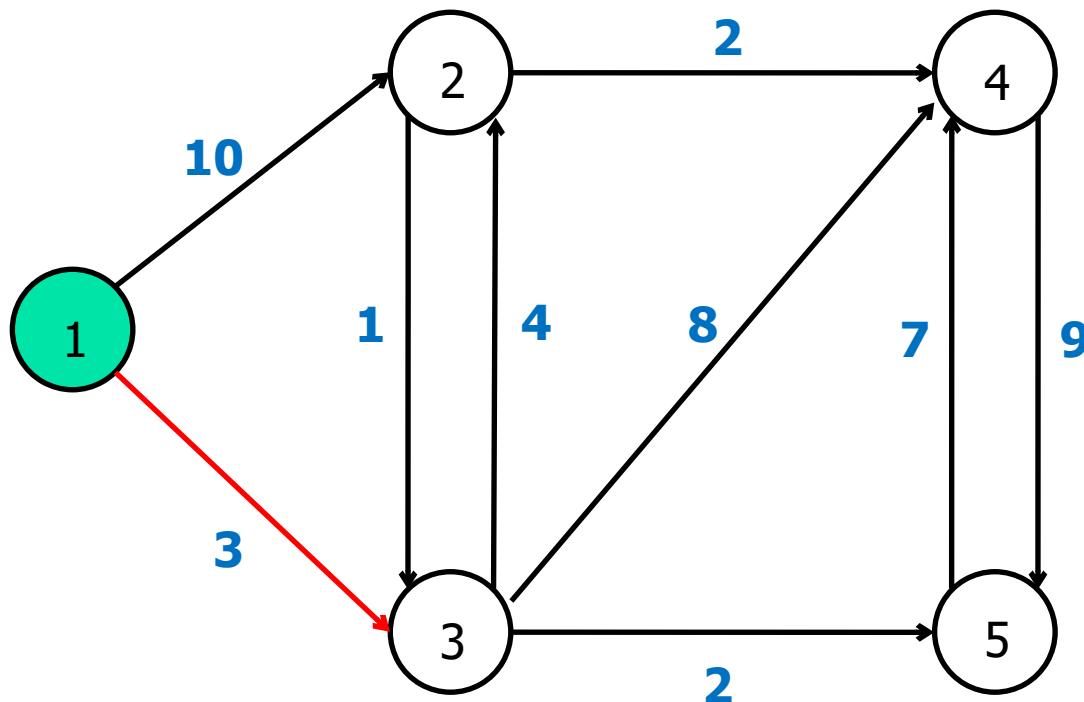
```

enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q) ;
    S := S ∪ {v} ;
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w) ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3+0$$

<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
$\infty$	3
$\infty$	4
$\infty$	5

```

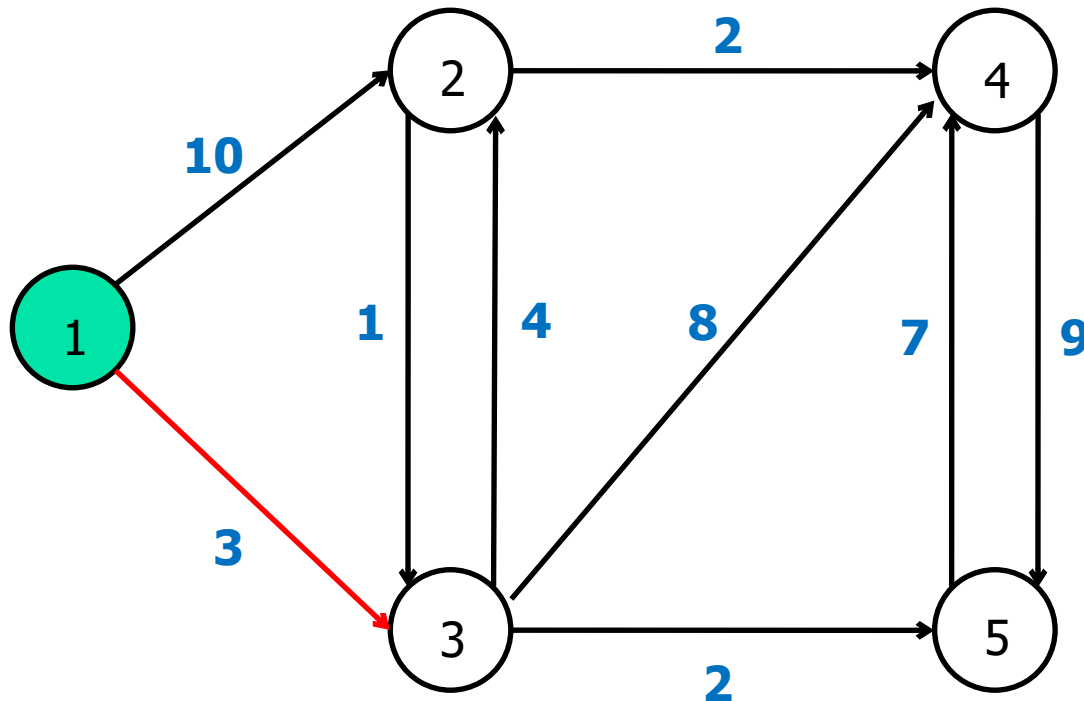
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```



# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3 + 0$$

<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

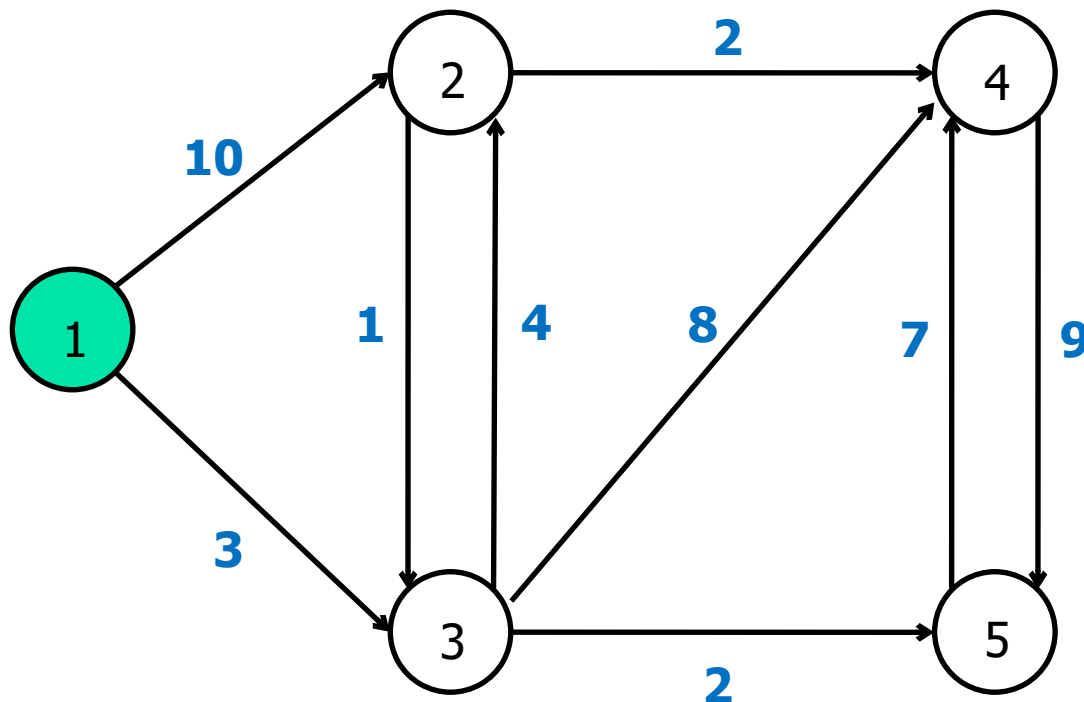
```

enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q) ;
    S := S ∪ {v} ;
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w) ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



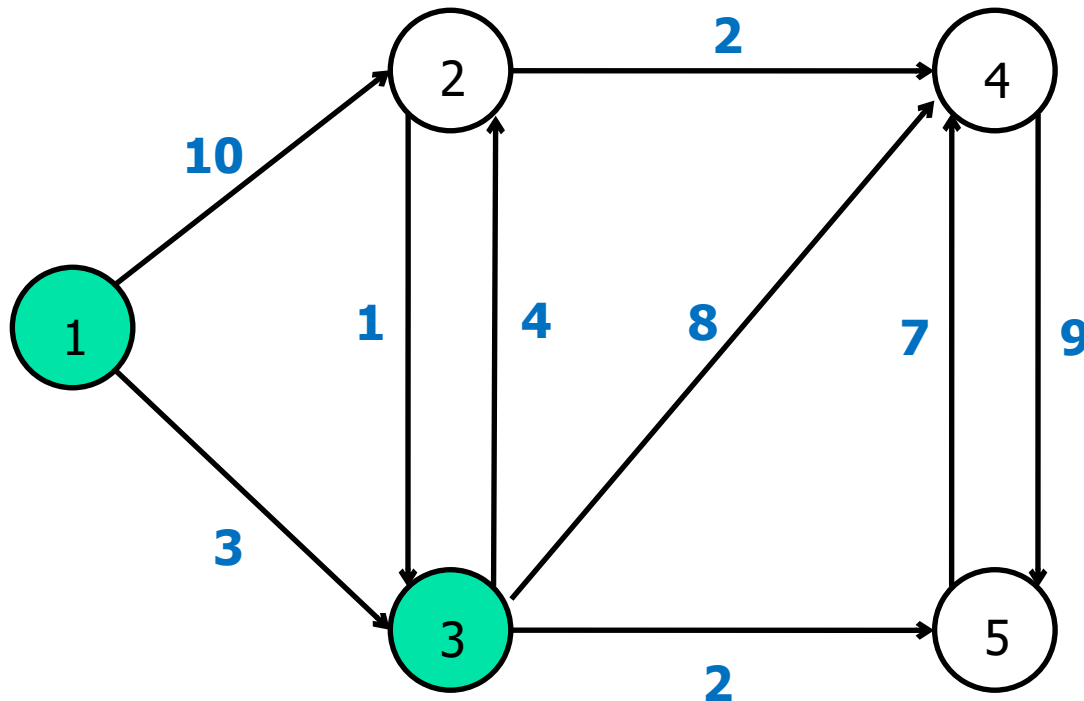
<i>Q</i>
2
3
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
    v := extrairMinimo(Q);
    S := S  $\cup$  {v};
    para todo w  $\in$  Adj(v)
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



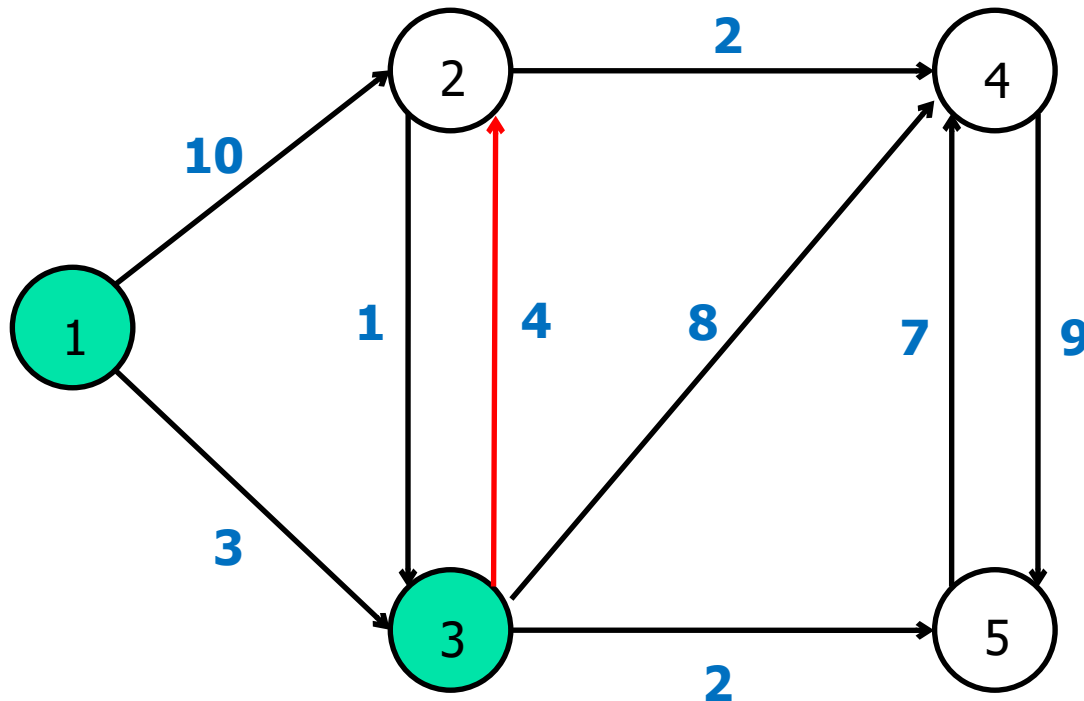
<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$10 > 3+4$$

<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
10	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

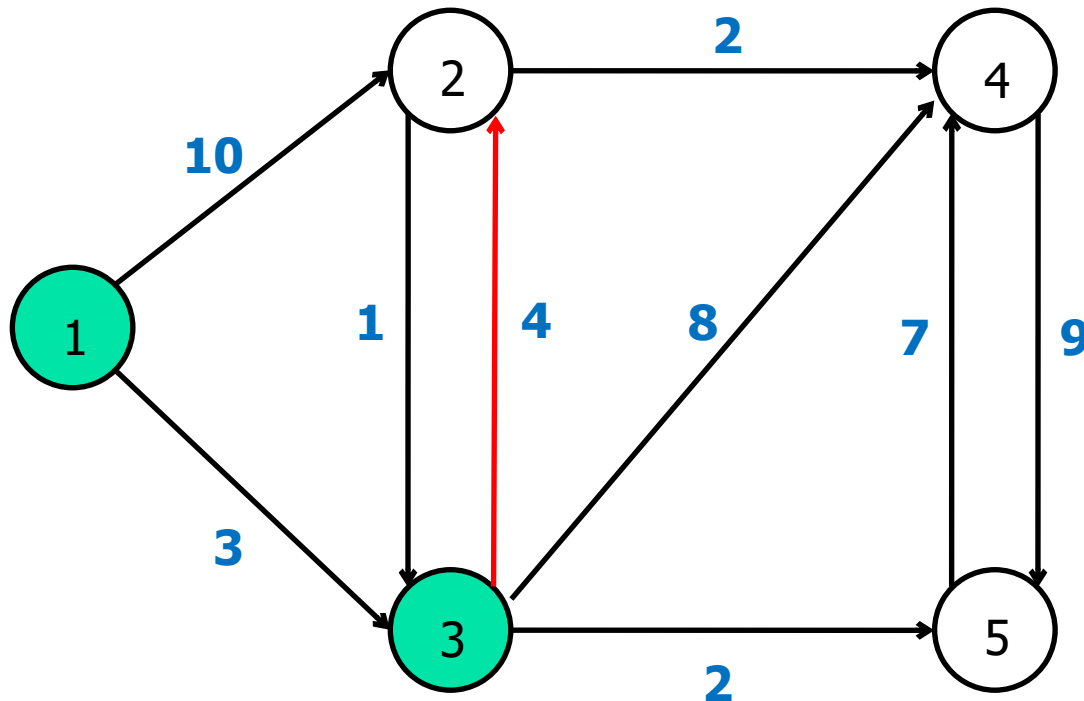
```

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$Q$
2
4
5

$d$	$v$
0	1
7	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

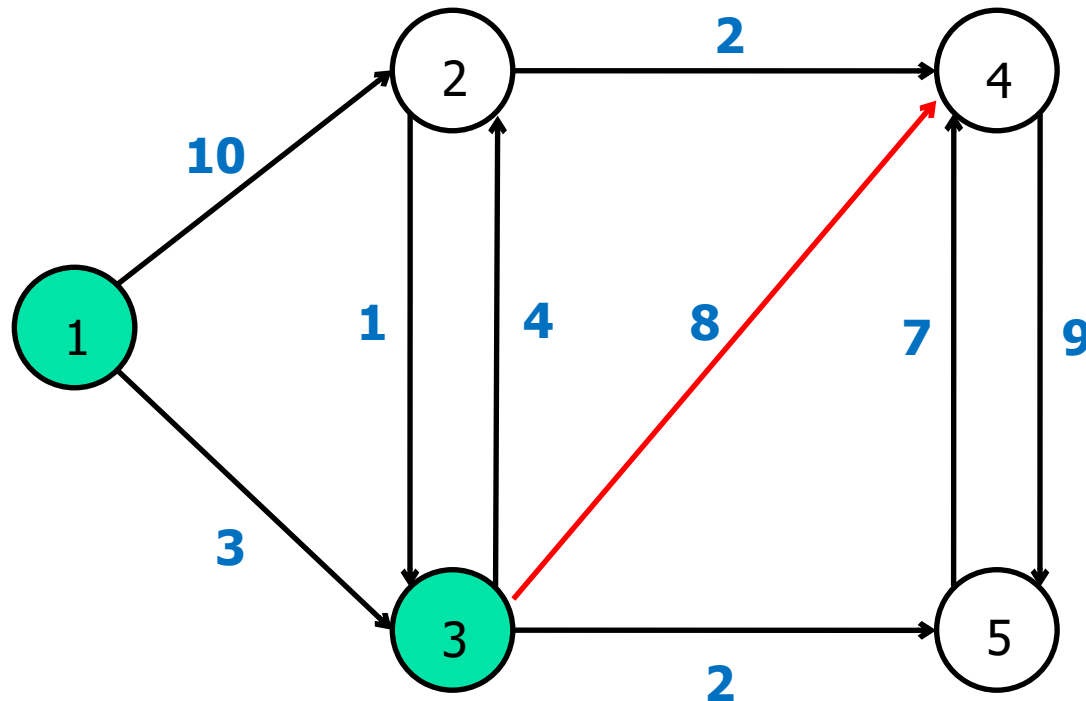
```

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3+8$$

<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
$\infty$	4
$\infty$	5

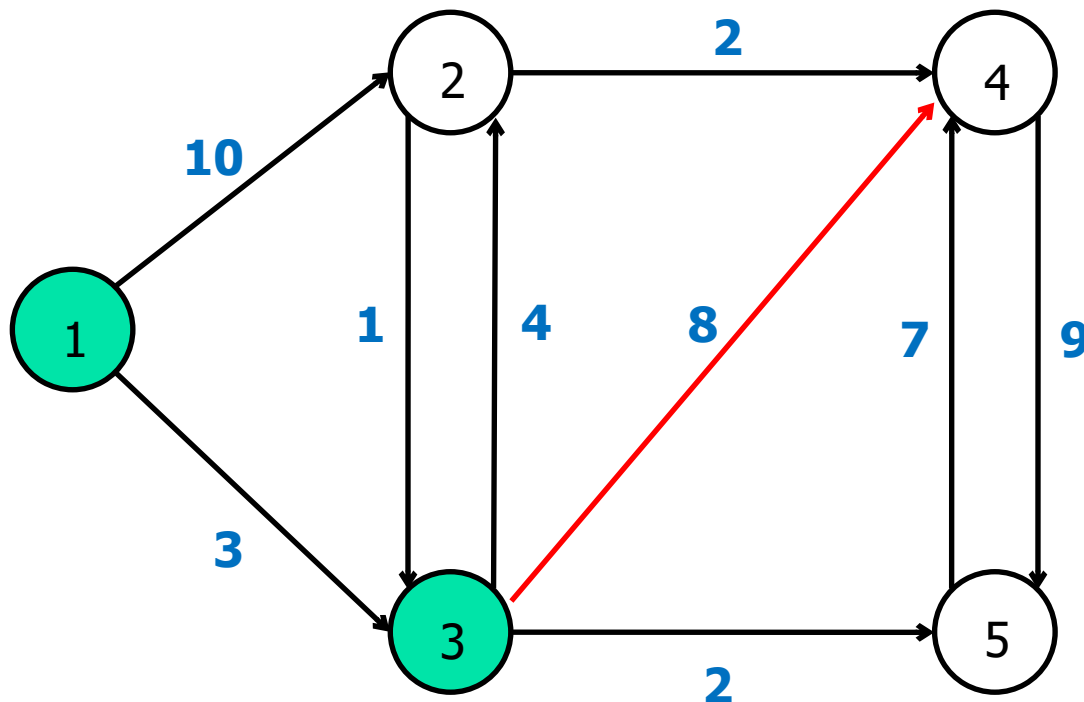
```

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3+8$$

<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
$\infty$	5

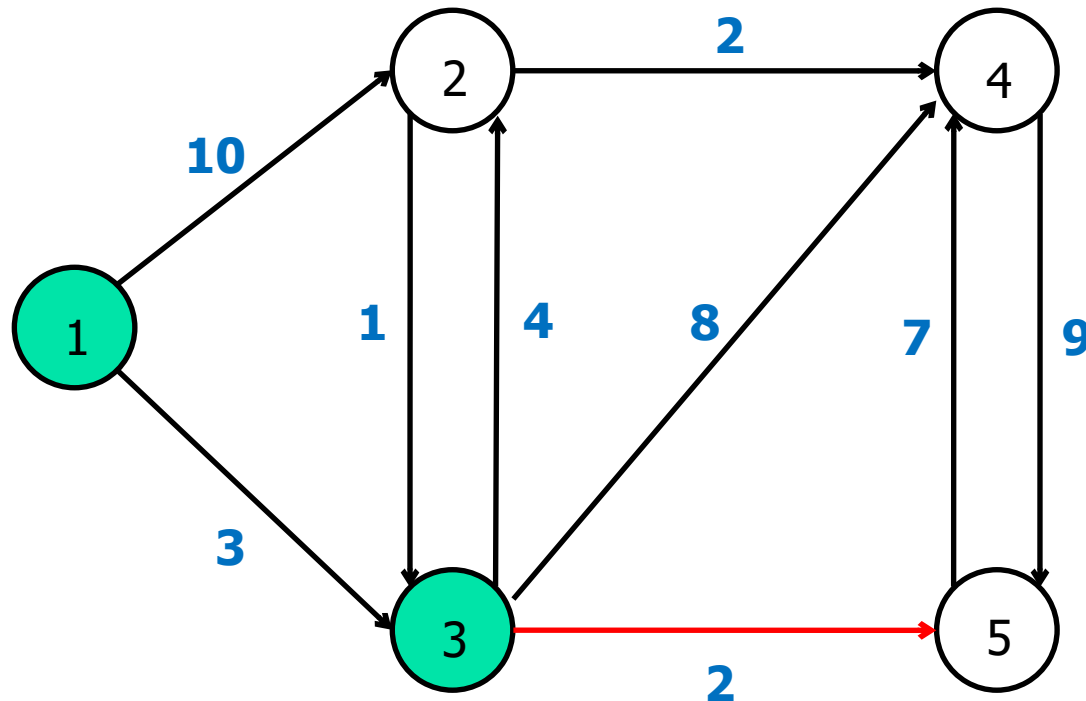
```

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3+2$$

<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
$\infty$	5

```

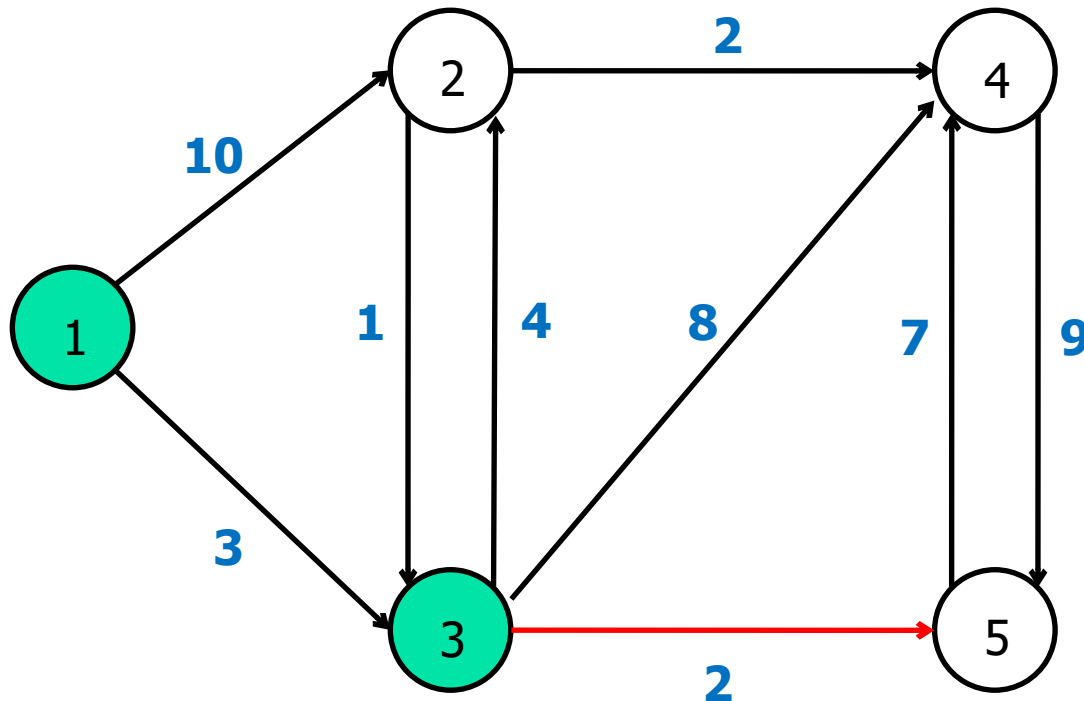
enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q) ;
    S := S ∪ {v} ;
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w) ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```



# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$\infty > 3+2$$

<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

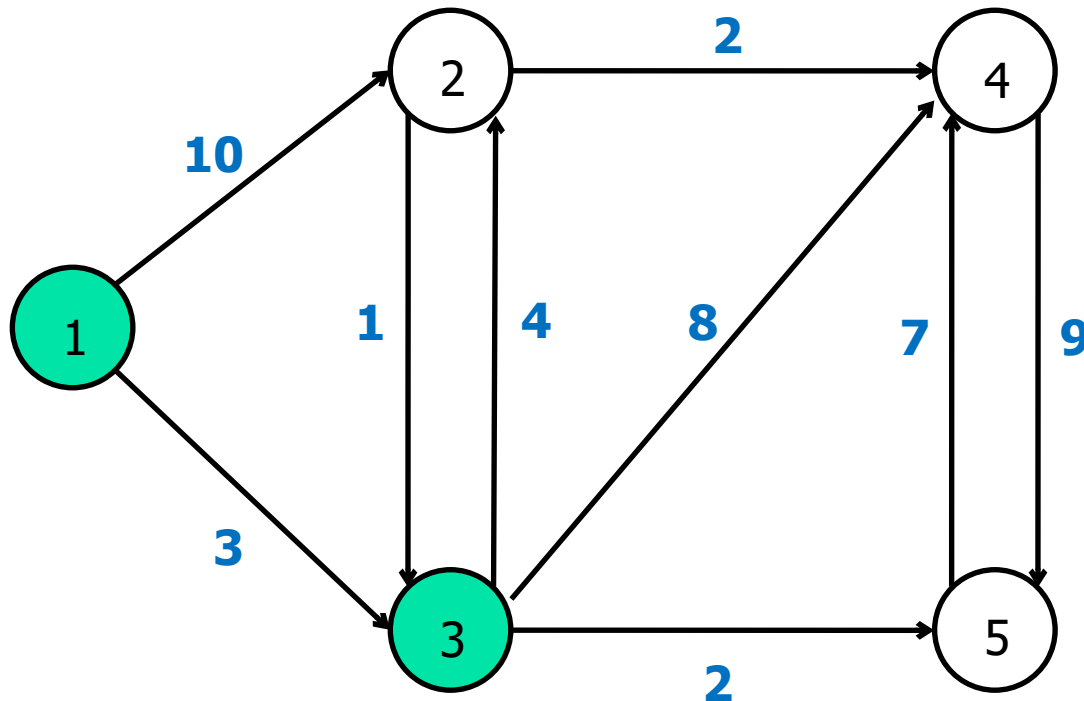
```

enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q) ;
    S := S ∪ {v} ;
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w) ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



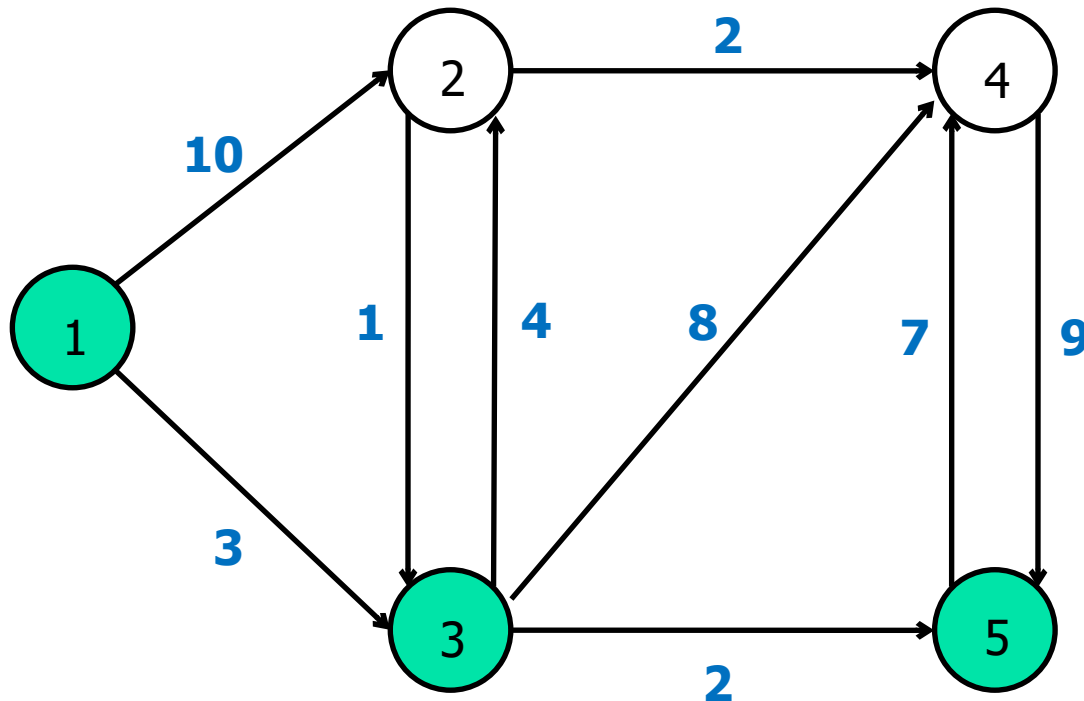
<i>Q</i>
2
4
5

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



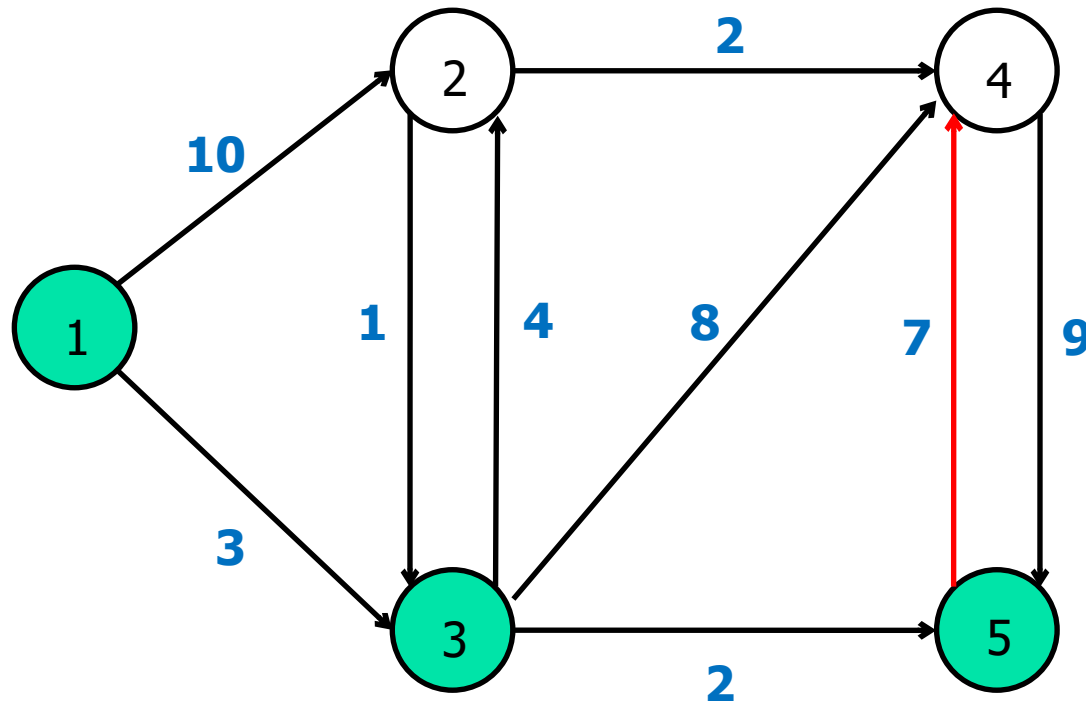
<i>Q</i>
2
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$11 < 7+5$$

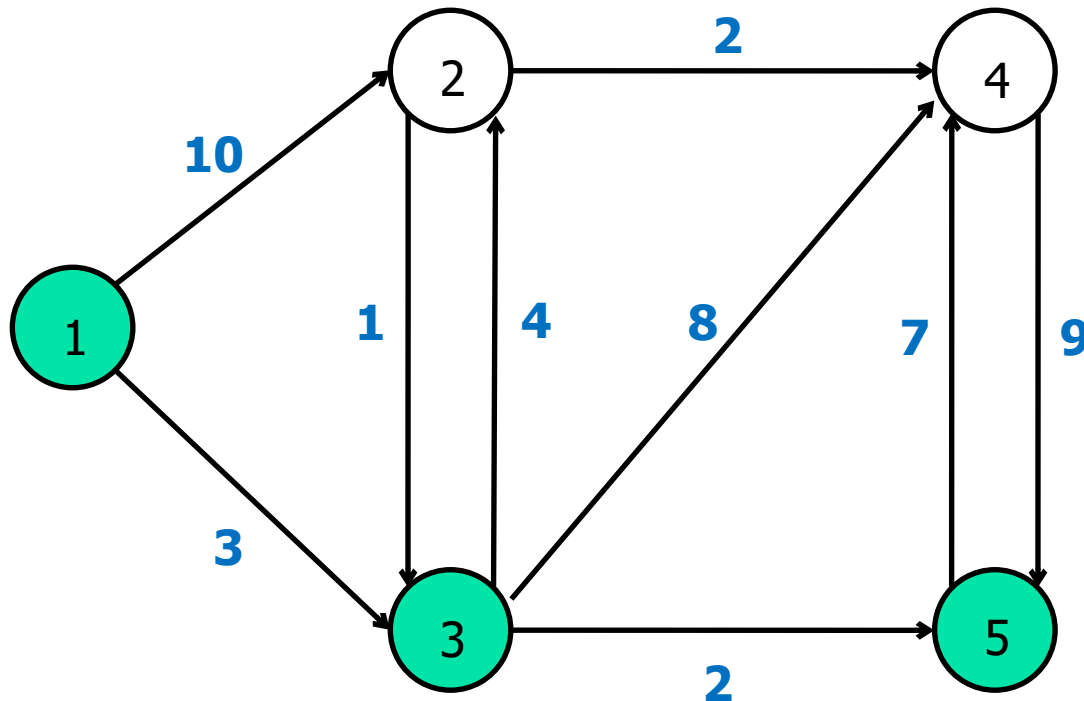
<i>Q</i>
2
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



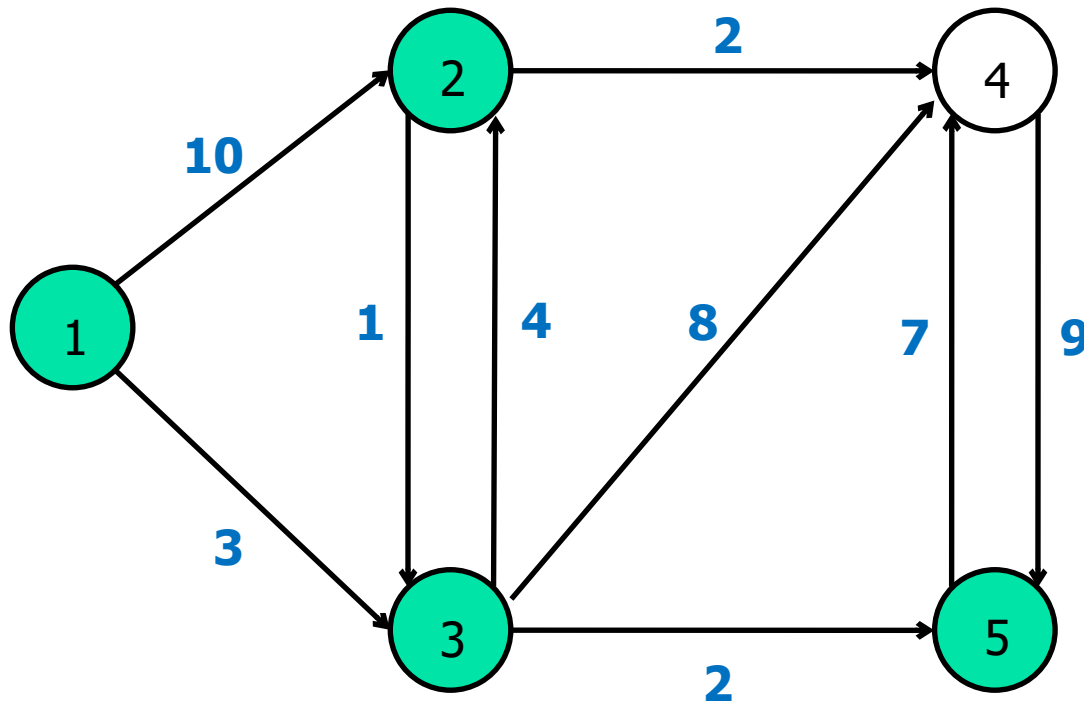
<i>Q</i>
<b>2</b>
<b>4</b>

<i>d</i>	<i>v</i>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b>7</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>3</b>
<b>11</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>5</b>

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



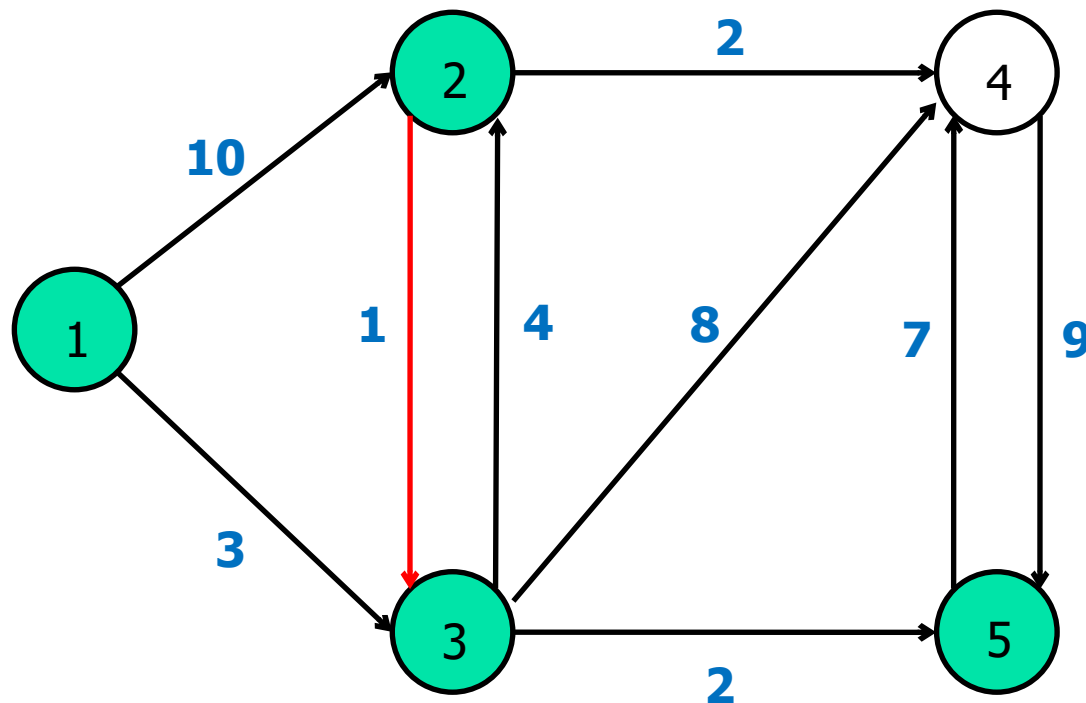
<i>Q</i>
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$3 < 7+1$$

<i>Q</i>
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

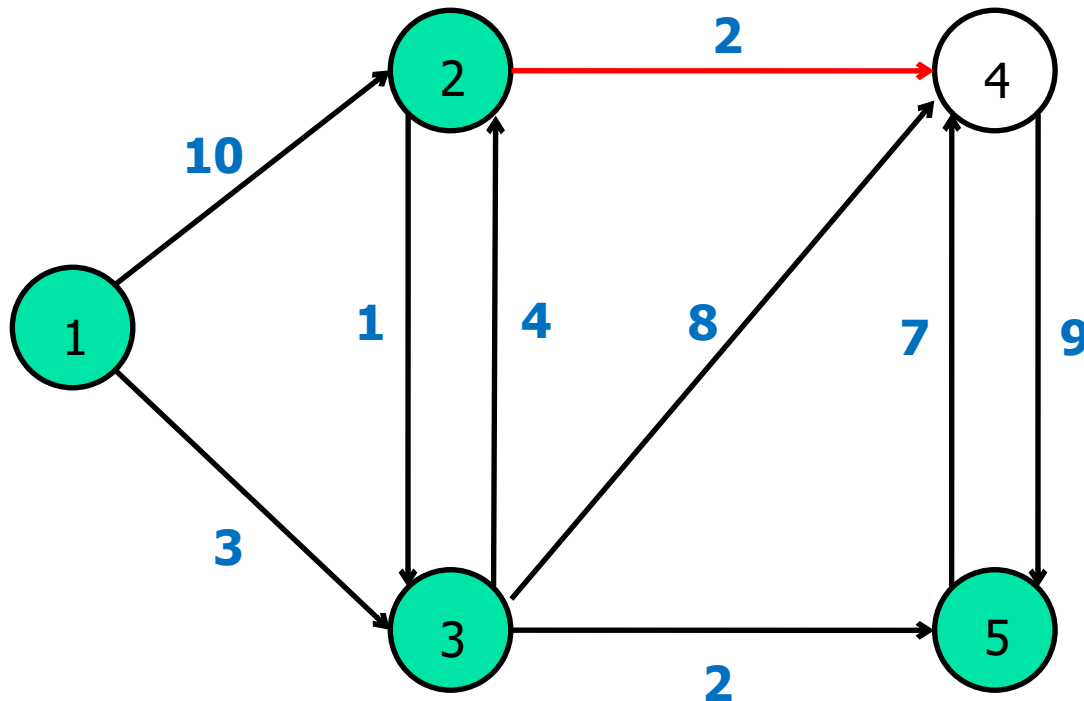
```

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$11 > 7+2$$

<i>Q</i>
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
11	4
5	5

```

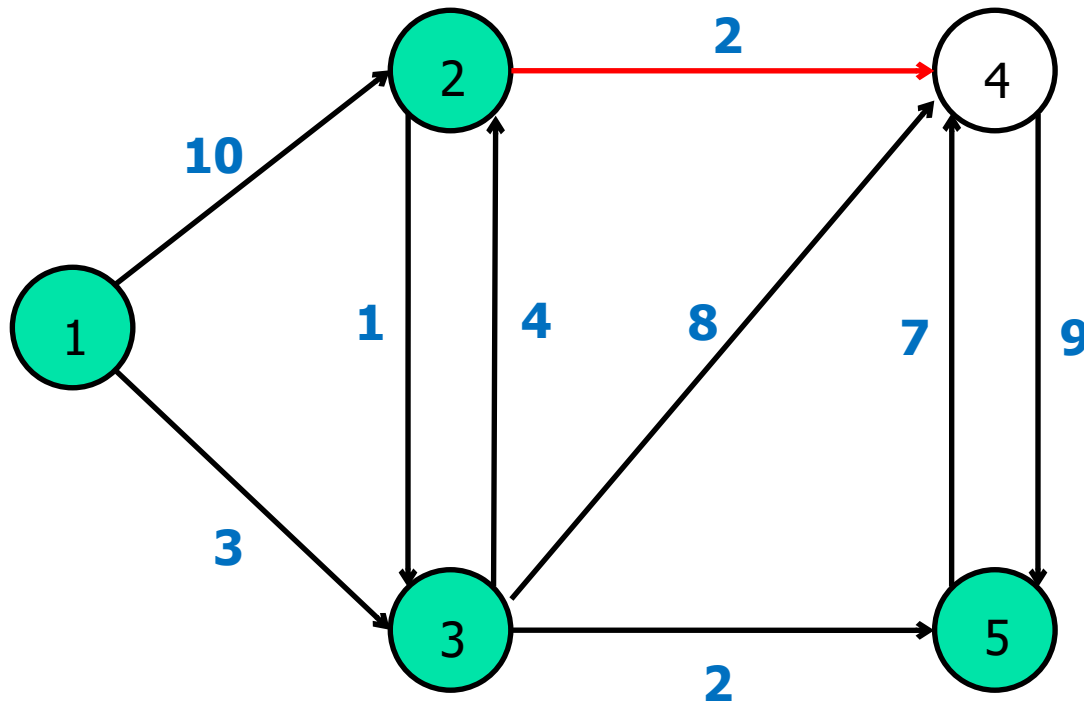
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
  fim

```



# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$11 > 7+2$$

<i>Q</i>
4

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
9	4
5	5

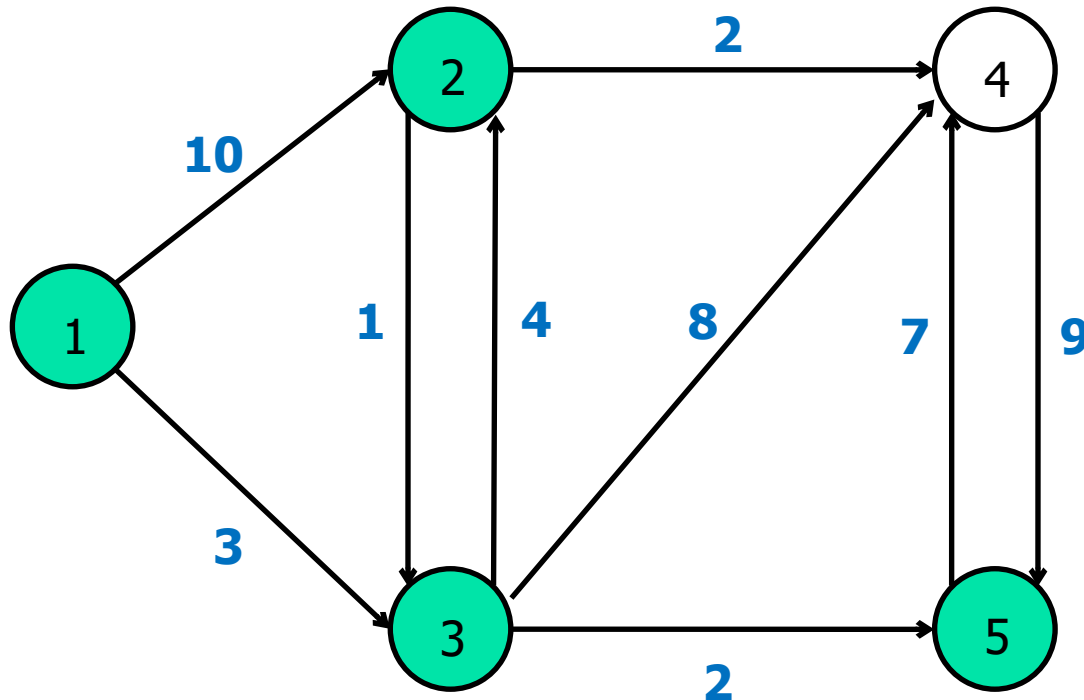
```

enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q);
    S := S ∪ {v};
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w);
        fim
      fim
    fim
  fim

```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



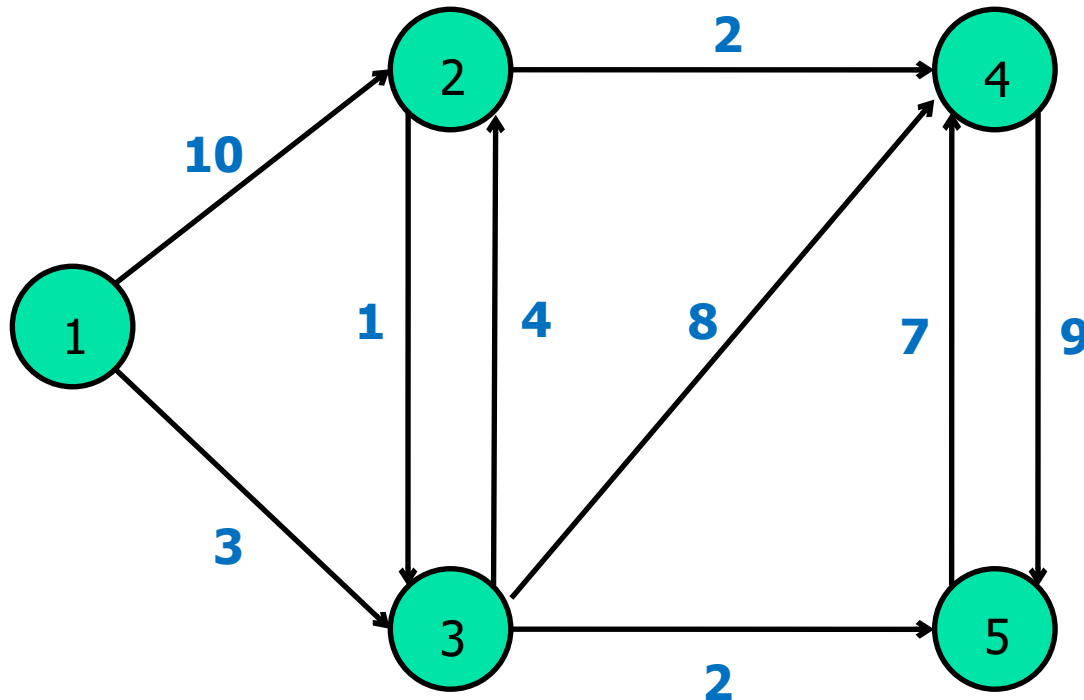
<i>Q</i>
<b>4</b>

<i>d</i>	<i>v</i>
<b>0</b>	<b>1</b>
<b>7</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>3</b>
<b>9</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>5</b>

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
    faça
        início
            Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
                 $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



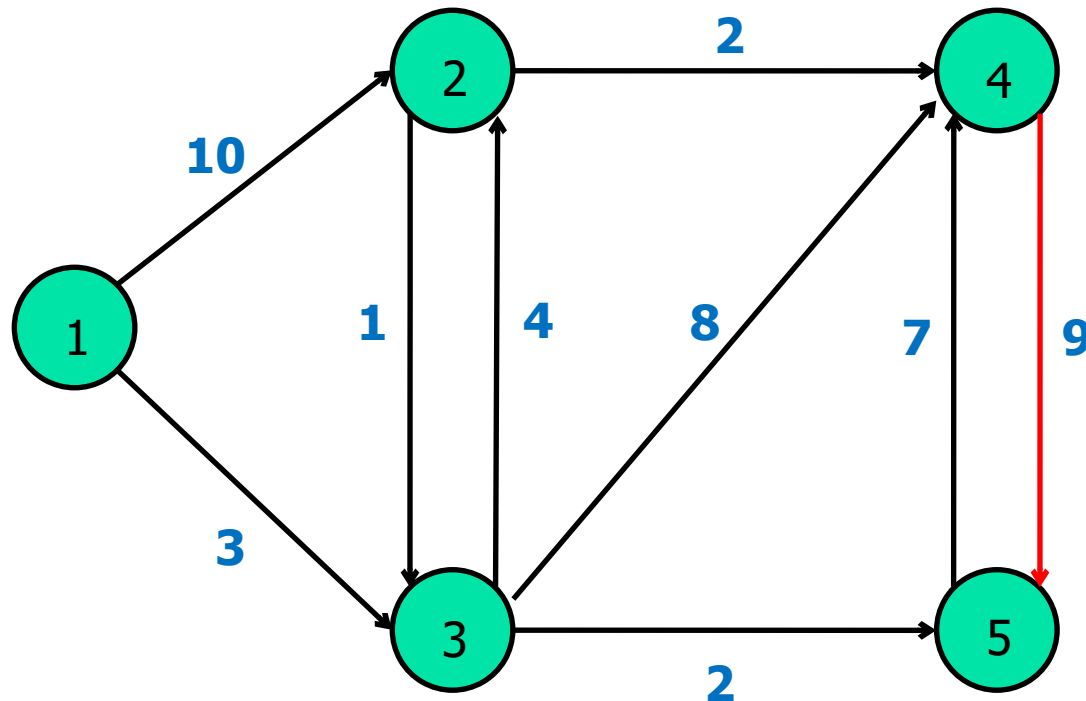
<i>Q</i>

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
9	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



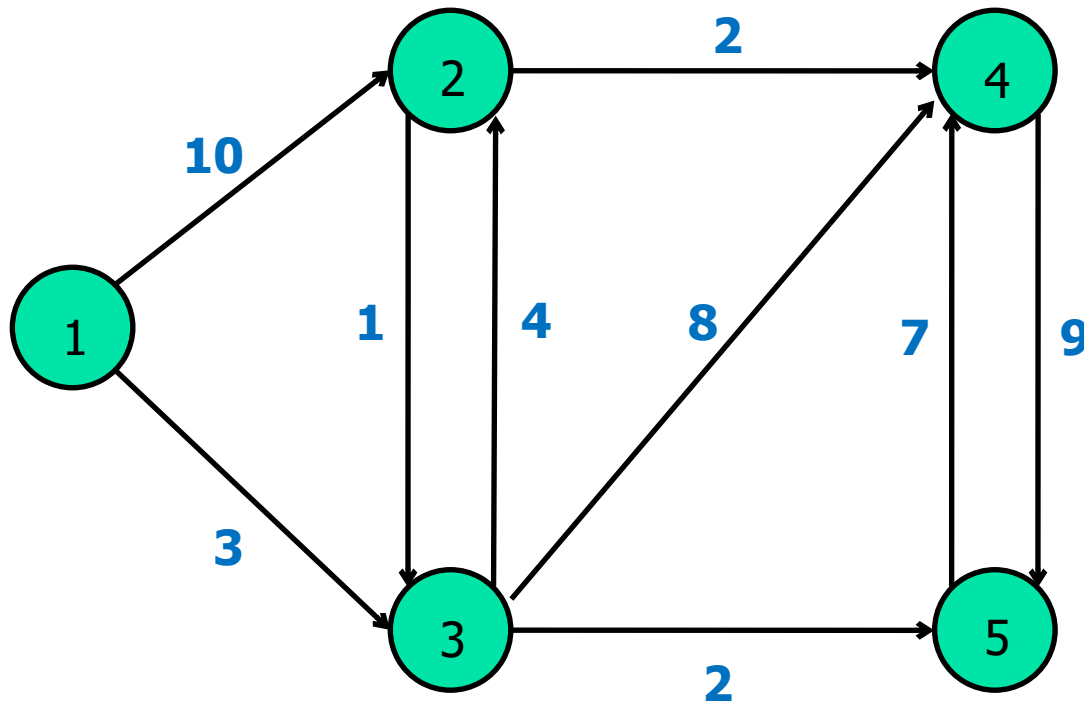
<i>Q</i>

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
9	4
5	5

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$ 
      faça
        início
          Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$ 
            então
               $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
        fim
      fim
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra : Exemplo

- Exemplo (origem no vértice 1)



$$5 < 9+9$$

<i>Q</i>

<i>d</i>	<i>v</i>
0	1
7	2
3	3
9	4
5	5

```
enquanto Q ≠ ∅ faça
  início
    v := extrairMinimo(Q);
    S := S ∪ {v};
    para todo w ∈ Adj(v)
      faça
        início
          Se d[w] > d[v] + peso(v,w)
            então
              d[w] := d[v] + peso(v,w);
        fim
      fim
    fim
fim
```

# Algoritmo de Dijkstra

---

**algoritmo** dijkstra( $G, V, s$ )

{**dados**: um grafo  $G$ , onde  $V$  é seu conjunto de vértices, um vértice  $s$  como origem,  $d[v]$  denota distância estimada de um vértice  $v$  ao vértice origem  $s$ }

**Procedimento** inicialização( $G, V, s$ )

**início**

$S := \emptyset;$

$Q := V;$

$d[s] := 0;$

**para** para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  **faça**

**início**

$d[v] := \infty;$

**fim**

**fim**

# Algoritmo de Dijkstra

---

**algoritmo** dijkstra( $G, V, s$ )

{**dados**: um grafo  $G$ , onde  $V$  é seu conjunto de vértices, um vértice  $s$  como origem,  $d[v]$  denota distância estimada de um vértice  $v$  ao vértice origem  $s$ }

**Procedimento** inicialização( $G, V, s$ )

**início**

$S := \emptyset;$

$Q := V;$      $\leftarrow$  *Fila de prioridade com chave  $d[v]$*

$d[s] := 0;$

**para** para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  **faça**

**início**

$d[v] := \infty;$

**fim**

**fim**

# Algoritmo de Dijkstra

---

início

inicialização( $G, V, s$ );

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça

início

$v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;

$S := S \cup \{v\}$ ;

para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça

início

Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v, w)$  então

$d[w] := d[v] + \text{peso}(v, w)$ ;

fim

fim

fim



# Algoritmo de Dijkstra

início

inicialização( $G, V, s$ );

enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça

início

$v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;

$S := S \cup \{v\}$ ;

para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça

início

Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v, w)$  então

$d[w] := d[v] + \text{peso}(v, w)$ ;

fim

fim

fim

O processo de **relaxar** uma aresta  $(v, w)$  consiste em testar se podemos melhorar o caminho mínimo até  $w$  que encontramos até agora passando por  $v$  e, em caso positivo, atualizar  $d[w]$ . Uma etapa de relaxamento pode diminuir o valor da estimativa do caminho mínimo  $d[w]$  e atualizar o atributo predecessor de  $w$ .



**Relaxamento**

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- A complexidade do algoritmo depende diretamente de que estrutura de dados será utilizada para realizar as funções de inserção, mudança de chave, extrair mínimo da fila de prioridade.

```
Procedimento inicialização( $G, V, s$ )
início
     $S := \emptyset$ ;
     $Q := V$ ;
     $d[s] := 0$ ;
    para para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  faça
        início
             $d[v] := \infty$ ;
        fim
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

---

- Complexidade

```
Procedimento inicialização( $G, V, s$ )  
início  
     $S := \emptyset;$        $\rightarrow O(1)$   
     $Q := V;$   
     $d[s] := 0;$   
    para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  faça  
        início  
             $d[v] := \infty;$   
        fim  
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade

```
Procedimento inicialização( $G, V, s$ )
início
     $S = \emptyset;$        $\rightarrow O(1)$ 
     $Q = V;$           $\rightarrow O(|V|)$ 
     $d[s] = 0;$ 
    para para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  faça
        início
             $d[v] = \infty;$ 
        fim
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade

```
Procedimento inicialização( $G, V, s$ )  
início  
     $S = \emptyset;$        $\rightarrow O(1)$   
     $Q = V;$          $\rightarrow O(|V|)$   
     $d[s] = 0;$        $\rightarrow O(1)$   
    para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  faça  
        início  
             $d[v] = \infty;$   
        fim  
    fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade

**Procedimento** inicialização( $G, V, s$ )

**início**

$S = \emptyset;$        $\rightarrow O(1)$

$Q = V;$        $\rightarrow O(|V|)$

$d[s] = 0;$   $\rightarrow O(1)$

**para** para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  **faça**

**início**

$d[v] = \infty;$

**fim**

**fim**

}  $O(|V|)$

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade  $O(|V|)$

**Procedimento** inicialização( $G, V, s$ )

**início**

$S := \emptyset;$        $\rightarrow O(1)$

$Q := V;$        $\rightarrow O(|V|)$

$d[s] := 0;$   $\rightarrow O(1)$

**para** para todos  $v \in V$  e  $v \neq s$  **faça**

**início**

$d[v] := \infty;$

**fim**

**fim**

$O(|V|)$

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade  $O(|V|)$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q)$ ;
     $S := S \cup \{v\}$ ;
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w)$ ;
      fim
    fim
  fim
```



# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade  $O(|V|)$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q); \rightarrow O(|V| |\text{Extrair Mínimo}|)$ 
     $S := S \cup \{v\};$ 
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w);$ 
      fim
    fim
  fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade  $O(|V|)$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q); \rightarrow O(|V| |\text{Extrair Mínimo}|)$ 
     $S := S \cup \{v\}; \rightarrow O(|V|)$ 
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w);$ 
      fim
    fim
  fim
```

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade  $O(|V|)$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q); \rightarrow O(|V| |\text{Extrair Mínimo}|)$ 
     $S := S \cup \{v\}; \rightarrow O(|V|)$ 
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v,w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v,w);$ 
      fim
    fim
  fim
```

}  $O(|E| |\text{Mudança de Chave}|)$

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Complexidade

$$O(|V|) + O(|V| \text{ Extrair Mínimo}) + O(|E| \text{ Mudança de Chave})$$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q); \rightarrow O(|V| \text{ Extrair Mínimo})$ 
     $S := S \cup \{v\}; \rightarrow O(|V|)$ 
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v, w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v, w);$ 
      fim
    fim
  fim
```

$O(|E| \text{ Mudança de Chave})$

# Algoritmo de Dijkstra: Complexidade

- Ex.: Utilizando um Heap

$$O(|V|) + O(|V| \log |V|) + O(|E| \log |V|) = O((|V| + |E|) \log |V|)$$

```
enquanto  $Q \neq \emptyset$  faça
  início
     $v := \text{extrairMinimo}(Q); \rightarrow O(|V| |\text{Extrair Mínimo}|)$ 
     $S := S \cup \{v\}; \rightarrow O(|V|)$ 
    para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça
      início
        Se  $d[w] > d[v] + \text{peso}(v, w)$  então
           $d[w] := d[v] + \text{peso}(v, w);$ 
      fim
    fim
  fim
```

$\left. \begin{array}{l} \text{Se } d[w] > d[v] + \text{peso}(v, w) \text{ então} \\ d[w] := d[v] + \text{peso}(v, w); \end{array} \right\} O(|E| |\text{Mudança de Chave}|)$

# Single Source Shortest Path

---

- E se todos os pesos forem 1 ? Existe uma estratégia melhor ?

# Single Source Shortest Path

---

- E se todos os pesos forem 1 ? Existe uma estratégia melhor ?
  - Sim! Trocar a Fila de Prioridade por uma **Fila**.
  - Que algoritmo é este e qual sua complexidade ?

# Single Source Shortest Path

---

- E se todos os pesos forem 1 ? Existe uma estratégia melhor ?
  - Sim! Trocar a Fila de Prioridade por uma **Fila**.
  - Que algoritmo é este e qual sua complexidade ?
    - Busca em largura.
    - Complexidade  $O(|V|+|E|)$



# Referências

---

- Seção 24.3 do Cormen, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2001.

Adaptado do material da Profa. Leila Silva.

Seção 3.3 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012