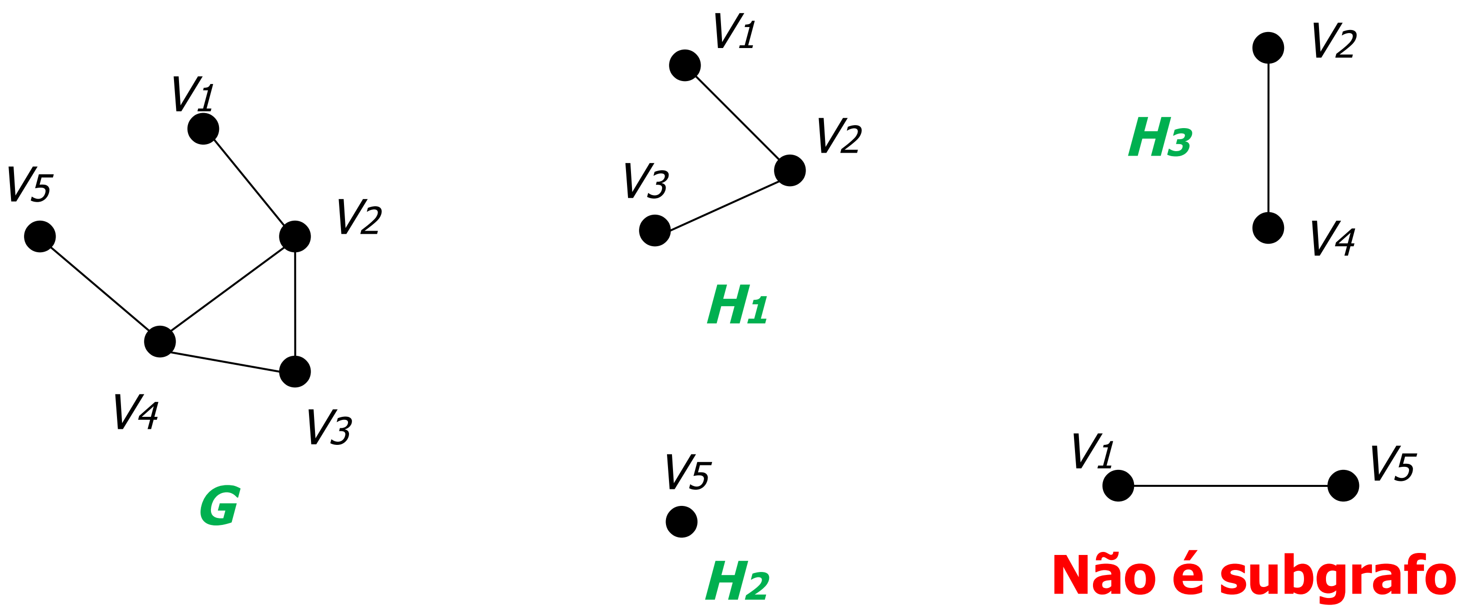
Grafos e Algoritmos Computacionais

Subgrafos e Contração de Vértices e Arestas

Prof. André Britto

Subgrafos

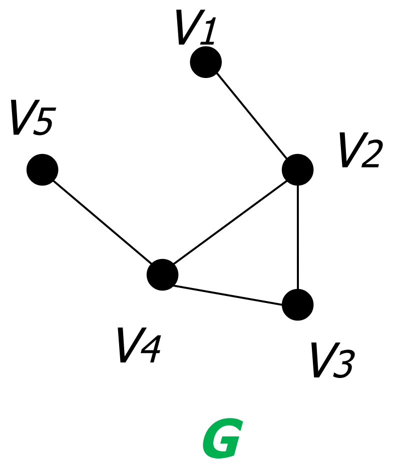
- Sejam H e G dois grafos. Dizemos que H é **subgrafo** de G, se $VH \subseteq VG$ e $EH \subseteq EG$ e para toda aresta de H, seus extremos em H são também seus extremos em G.

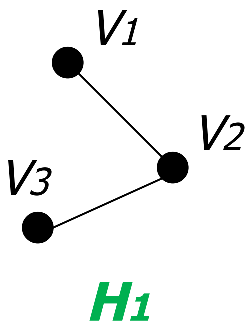


Subgrafos

- Dizemos que H é um **subgrafo próprio** de G ($H \subset G$ e $H \neq G$) se H é um subgrafo de G, mas **distinto** de G.

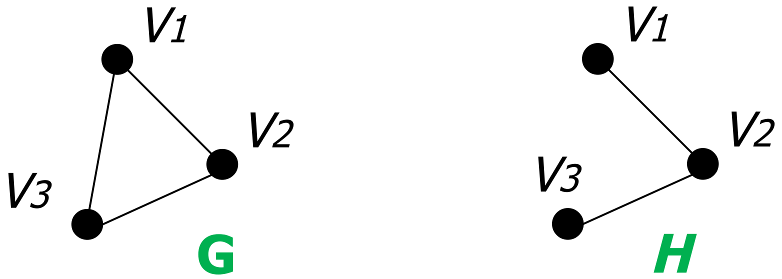
- Ex.: H_1 é subgrafo próprio de G





Subgrafos

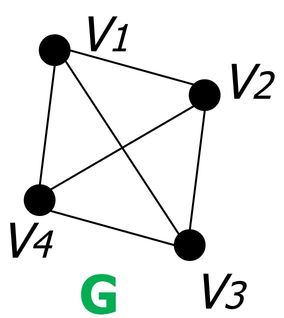
- O **subgrafo gerador** de *G* é o subgrafo *H* $(H \subseteq G)$ tal que $VH = VG$.



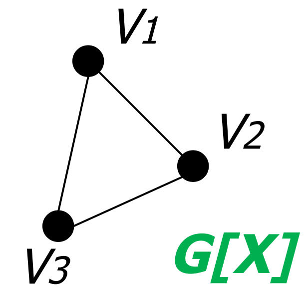
- *Spanning subgraph*

Subgrafos

- Se $X \subseteq VG$, o subgrafo de G **gerado** ou **induzido por *X***, ***G[X]***, é o subgrafo H de G tal que $VH = X$ e EH é o conjunto de arestas de G que tem ambos extremos em X.



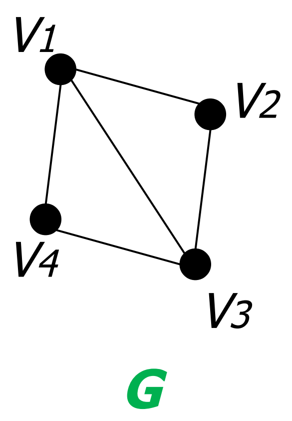
$$X = \{V_1, V_2, V_3\}$$

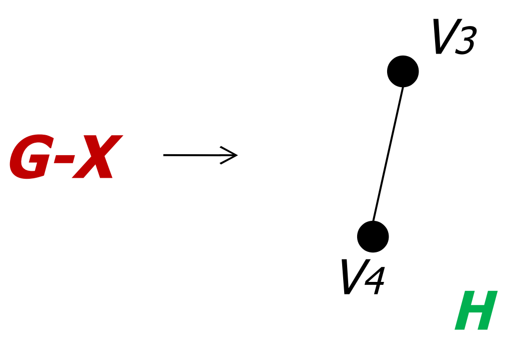


Subgrafos

- ***G-X*** denota o subgrafo **gerado por *VG\X***, ou seja, é o subgrafo de *G* obtido removendo-se todos os vértices de *X* e todas as arestas incidentes ao conjunto *X*. Se $X = \{v\}$, abreviamos $G\text{-}\{v\}$ por ***G-v***.

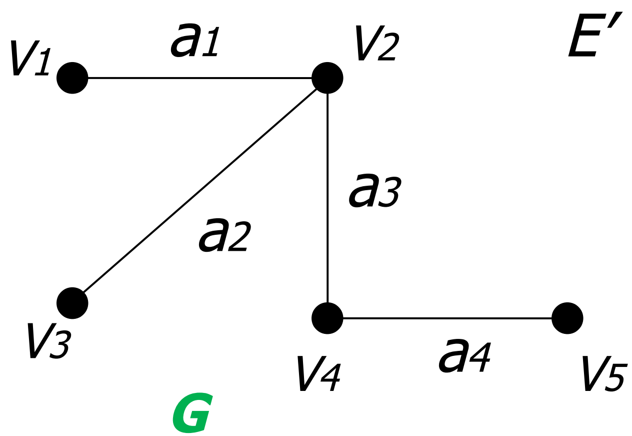
$X = \{V_1, V_2\}$



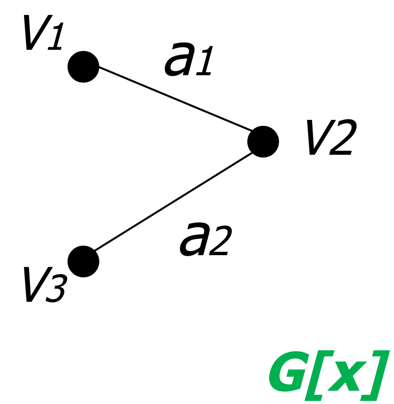


Subgrafos

- Se E' é um conjunto de arestas não vazio de EG, então o subgrafo de G **aresta-induzido** ou **aresta-gerado por E'**, **$G[E']$** é o subgrafo H de G tal que EH = E' e VH é o conjunto dos vértices de G, que são extremos das arestas em E'.



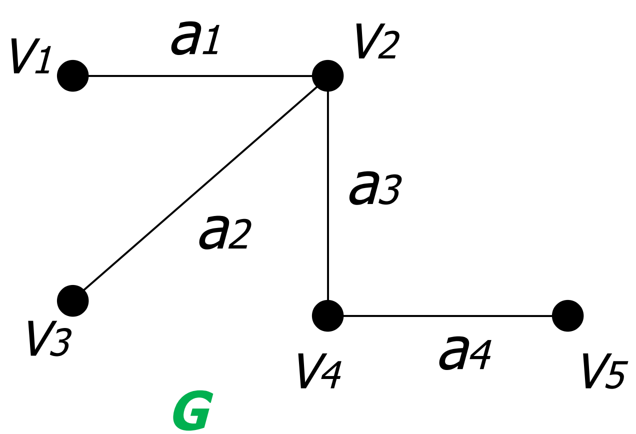
$E' = \{a_1, a_2\}$

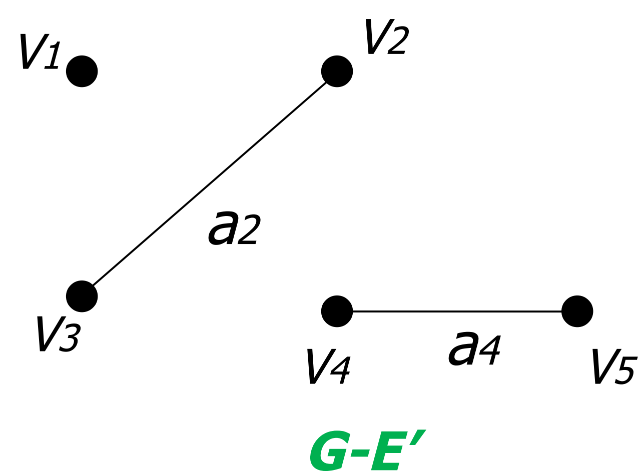


Subgrafos

- ***G-E′*** é o subgrafo de *G* que se obtém removendo-se as arestas de *x*, sem alterar o conjunto de vértices. Se E′=*{a}*, abrevia-se *G-{a}* por ***G-a***.

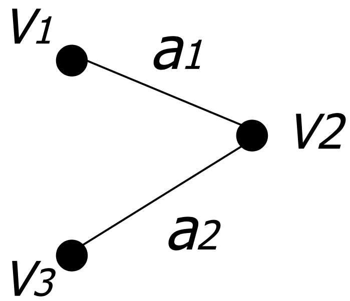
$E' = \{a_1, a_3\}$



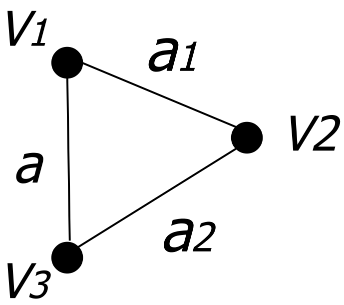


Subgrafos

- Analogamente, o grafo obtido a partir de *G* pela adição de um conjunto de arestas *x*, é denotado por ***G + E'***. Se E'=*{a}*, abrevia-se *G+{a}* por ***G+a***.



G



G+ a

Subgrafos

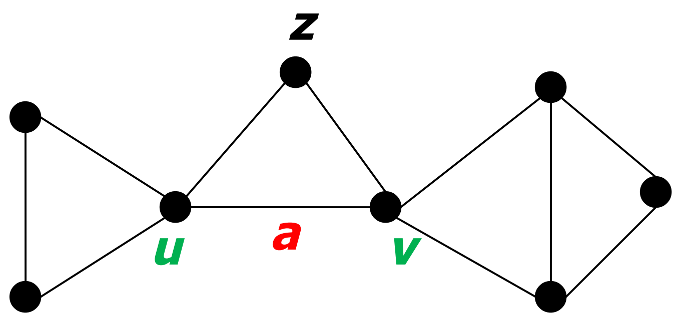
- Dois grafos G e H são **disjuntos** *se* $VG \cap VH = \varnothing$ e são **aresta-disjuntos** se $EG \cap EH = \varnothing$.

- A **união** de G e H, ambos disjuntos, $\boldsymbol{G \cup H}$, é tal que:

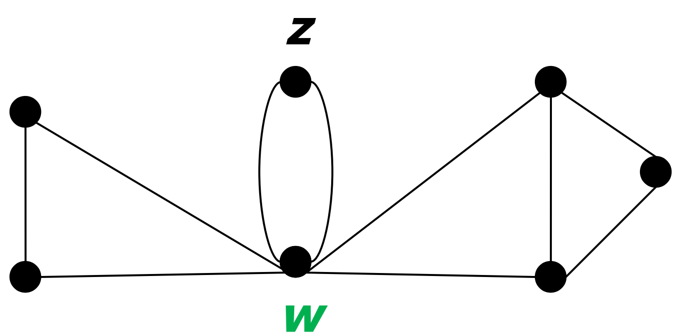
  - $\boldsymbol{V(G \cup H)} = VG \cup VH$
  - $\boldsymbol{E(G \cup H)} = EG \cup EH$

- A **interseção** é definida de forma análoga mas neste caso G e H precisam ter pelo menos um vértice em comum.

Contração de Arestas

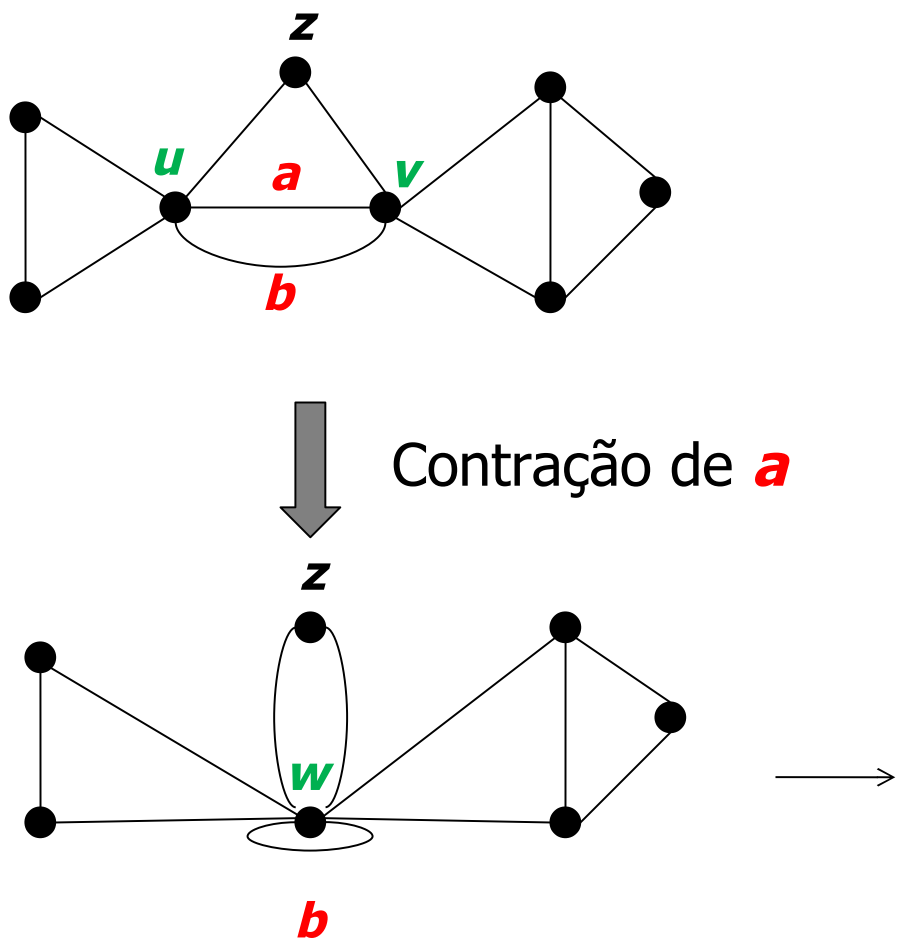


Contração de *a*



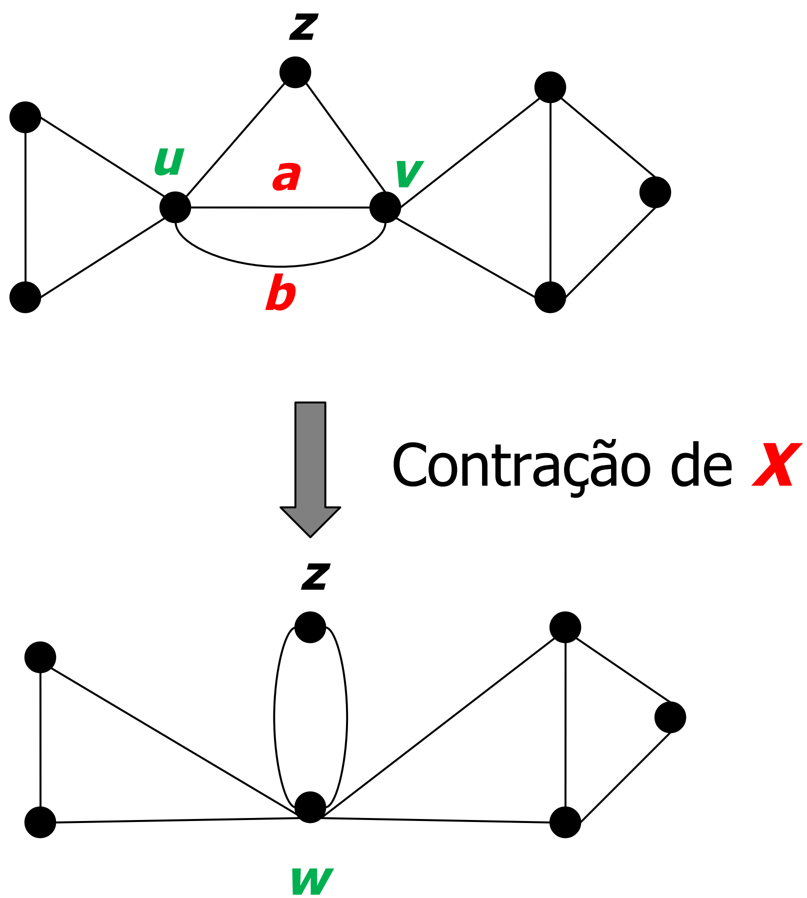
u e *v* colidiram formando *w*

Contração de Arestas



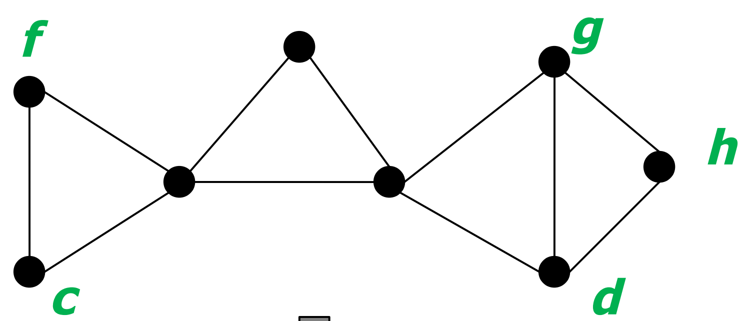
u e *v* colidiram formando *w*

Contração de Vértices



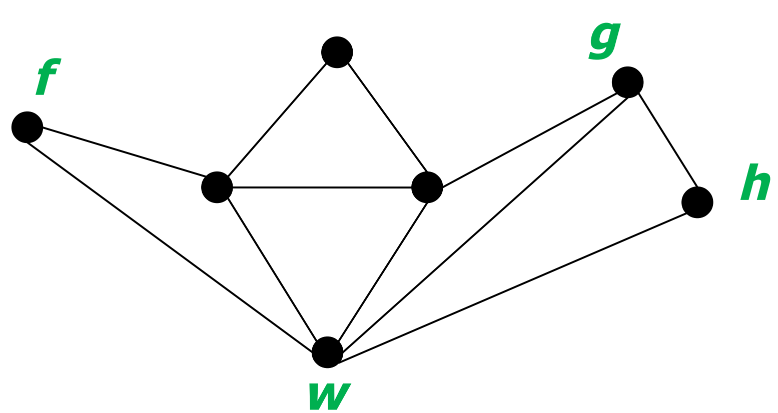
$X=\{u, v\}$

Contração de Vértices

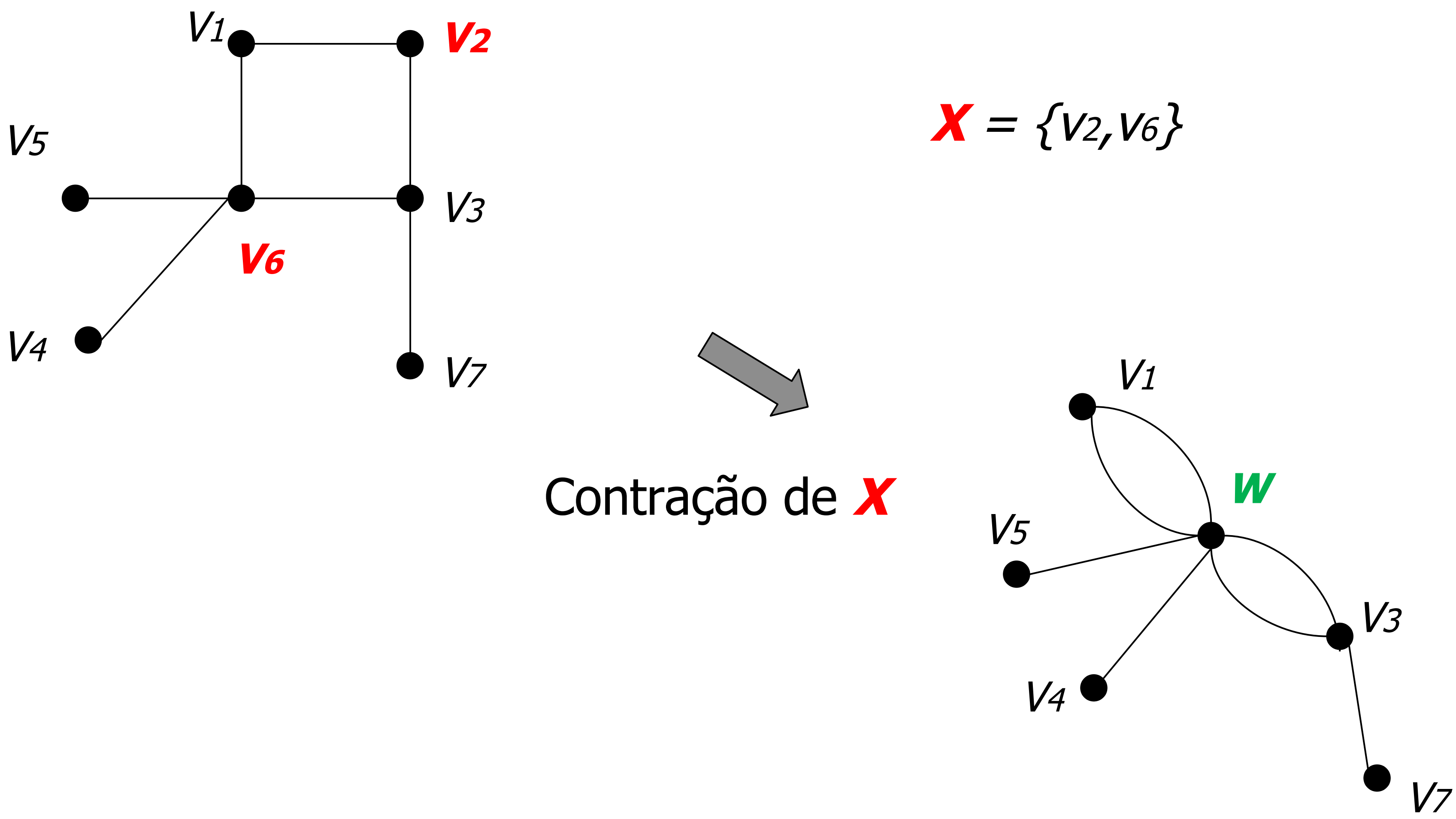


$X = \{c, d\}$

Contração de X



Contração de Vértices



$X = \{v_2, v_6\}$

Contração de X

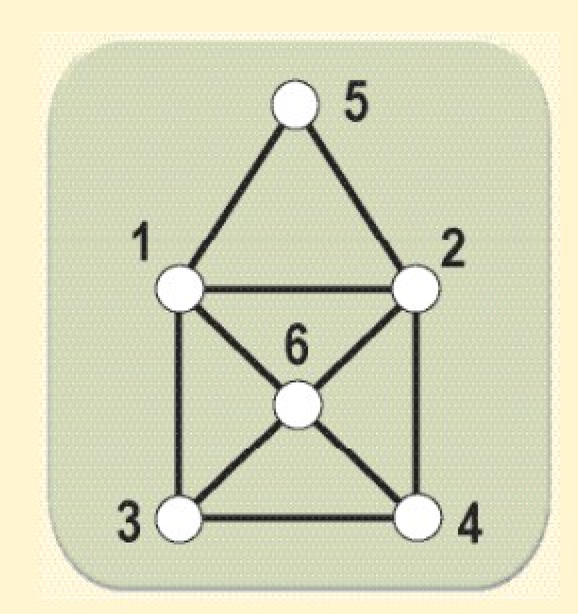
Referências

- Capítulo 1.4 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.
- Seções 1.3 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012
- Adaptado do material de aula da Profa. Leila Silva

Exercícios recomendados

- Bondy e Murty: 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3.

1 - Para o grafo G = (N,M) da figura abaixo, dê um exemplo de um subgrafo próprio que não seja induzido nem por vértices nem por arestas



Exercícios recomendados

2 - Demonstre ou forneça um contraexemplo para a afirmação: um subgrafo de um grafo bipartido é sempre bipartido.

3 - Demonstre que o complemento de um grafo bipartido não é necessariamente bipartido