Grafos e Algoritmos Computacionais

Passeios, Caminhos e Trilhas

Prof. André Britto
modificada por:
Prof. Breno Piva

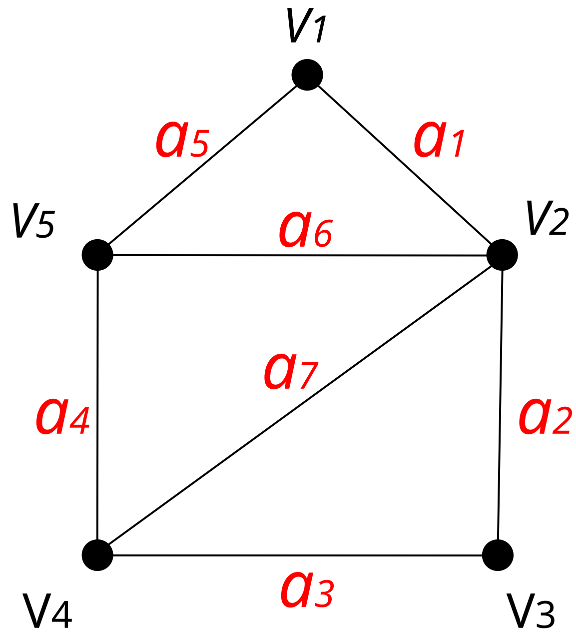
Passeios, Trilhas e Caminhos

- Um **passeio** em um grafo é uma sequência finita não vazia $P{:=}(v_0, a_1, v_1, \ldots, a_i, v_i, a_{i+1}, \ldots, v_k)$ cujos são alternadamente vértices e arestas tal que, para todo i, $1 \leq i \leq k$, os extremos de a_i são v_{i-1} e v_i.

  - **Origem** – v_0.
  - **Término** (Destino) – v_k.
  - **Vértices internos do passeio** – v_i, $1 \leq i < k$.
  - **Comprimento do Passeio** - k (número de arestas do passeio).
  - P **passa** pelos vértices de VP e pelas arestas de EP.
  - **Trilha (ou cadeia)** – passeio sem arestas repetidas.
  - **Caminho** – passeio sem vértices repetidos.

Passeios, Trilhas e Caminhos

Exemplo



- ***P*** = $(v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4, a_7, v_2, a_6, v_5, a_6, v_2)$
- ***T*** = $(v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4, a_7, v_2, a_6, v_5)$
- ***C*** = $(v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4)$

Passeios, Trilhas e Caminhos

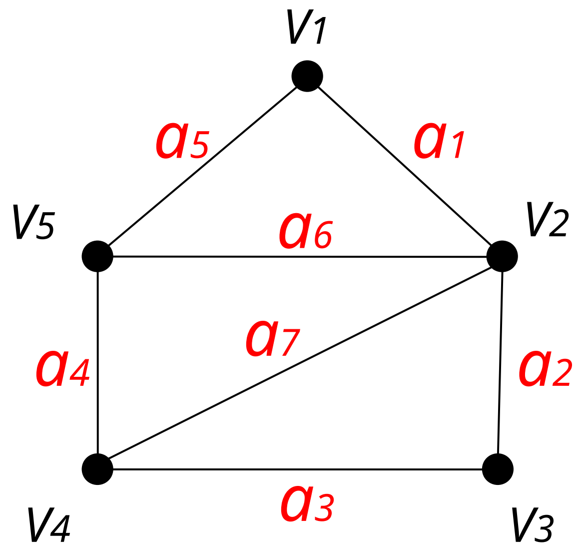
- Uma **seção** de *P* é um passeio que é uma subsequência de termos consecutivos de *P*.

- Se $P = (u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k)$ e $Q = (v_0, b_1, v_1, \ldots, b_j, v_j)$ são passeios com $u_k = v_0$, então a **concatenação** de *P* e *Q*, denotada por ***PQ*** é o passeio $(u_0, a_1, u_1, \ldots, a_k, u_k = v_0, b_1, v_1, \ldots, b_j, v_j)$.

- **Reverso** de *P*, P^{-1} P^{-1} = $(u_K, a_K, \ldots, u_1, a_1, u_0)$

Passeios, Trilhas e Caminhos

Exemplo



- $P = (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3)$
- $Q = (v_3, a_3, v_4, a_4, v_5)$
- **SP** $= (v_1, a_1, v_2)$
- **PQ** $= (v_1, a_1, v_2, a_2, v_3, a_3, v_4, a_4, v_5)$
- $P^{-1} = (v_3, a_2, v_2, a_1, v_1)$

Passeios, Trilhas e Caminhos

Proposição

Se em um grafo G existe um passeio de u para v, então em G existe um caminho de u para v.

Passeios, Trilhas e Caminhos

Prova

Seja P o passeio mais curto de u para v, $P = (u, a_1, u_1,...,a_k, u_k = v)$. Se P é um caminho então não há o que provar. Suponha, por absurdo, que P não seja um caminho de u para v. Então existem i e j tais que $i < j$ e $u_i = u_j$, ou seja, existe uma repetição de vértices em P. Neste caso construa $Q = (u, a_1, u_1,..., u_i, a_{j+1}, u_{j+1},..., u_k)$. Ora, Q é um passeio em G de comprimento menor que P, contradição. □

Passeios, Trilhas e Caminhos

Proposição

Mostre que se G é simples e $g(v) \geq k$, $\forall\, v \in VG$, então G tem um caminho de tamanho k.

Passeios, Trilhas e Caminhos

Prova

Suponha por absurdo que G não tem um caminho de tamanho k. Seja $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_j)$ o caminho mais longo em G. Sem perda de generalidade suponha que $|P| = k-1$. Mas, todo vértice $v \in VG$ é tal que $g(v) \geq k$. Assim, como v_0 é no máximo adjacente a $k-1$ vértices de P, pois G é simples, então existe um vértice $w \in VG \backslash VP$ que também é adjacente a v_0. Logo, o caminho (w, v_0) $\bullet P$ é um caminho mais longo em G, de tamanho k, contradição. □

Circuitos e Ciclos

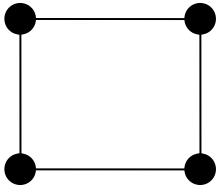
- Um passeio é **fechado** se tem comprimento diferente de zero e sua origem e término coincidem.

- Uma **trilha é fechada**, se é um passeio fechado.

Circuitos e Ciclos

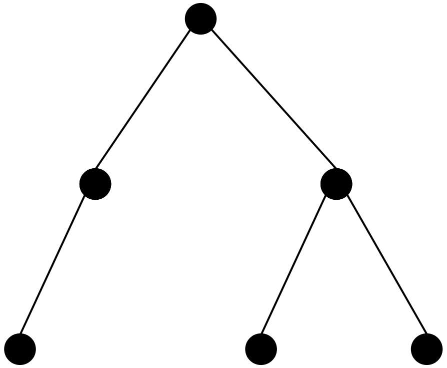
- Um caminho fechado é chamado de **ciclo**.

Ex.:



- Um ciclo com três vértices é chamado de triângulo.
- **Grafo acíclico** não contém ciclos

Ex.: Árvore



Circuitos e Ciclos

Proposição

Se G é um grafo não vazio, tal que $g(v) \geq 2$ para todo $v \in VG$, então G contém um ciclo.

Circuitos e Ciclos

Prova

Se G tem laços e arestas múltiplas a prova é imediata.

Suponha então que G é um grafo simples. Seja P um caminho mais longo em G. Sejam u e v origem e término, respectivamente, deste caminho. Não existe em $VG \backslash VP$ nenhum vértice adjacente a u pois senão P não seria um dos caminhos mais longos.

Como $g(v) \geq 2$, existem pelo menos 2 vértices adjacentes a u em VP. Seja x o último vértice em P adjacente a u. Seja P' a seção de P de u a x. Neste caso $P' \bullet (u,x)$ é um ciclo em G. □

Circuitos e Ciclos

Proposição

Mostre que se uma aresta pertence a uma trilha fechada de *G*, então pertence a um ciclo de *G*.

Circuitos e Ciclos

Prova

Seja T uma trilha fechada em G que contém $\alpha=(u,v)$. Assim T-α é uma trilha aberta em G. Claramente T-α é um passeio em G, levando u a v. Por proposição anterior, existe em G um caminho P de u a v. Portanto $P \bullet (u,v)$ é um ciclo em G. □

Circuitos e Ciclos

Proposição

Um grafo é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos possuem comprimento par.

Circuitos e Ciclos

Prova

Prova Seja $v_1,\ldots,v_k,v_1$ um ciclo de comprimento k do grafo bipartido *G* e seja $v_1 \in V_1$. Logo, $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$, $v_4 \in V_2$, e assim por diante. Como $(v_k,v_1) \in VE$ implica $v_k \in V_2$. Portanto k é par, o que mostra a necessidade. A prova da suficiência consiste em exibir os subconjuntos V_1, V_2 que biparticionam o conjunto de vértices do grafo *G*, no qual todos os ciclos possuem comprimento par. Selecione arbitrariamente um vértice $v_1 \in V$. Defina V_1 como contendo v_1 e todos os vértices que se encontram à distância par de v_1. Defina $V_2 = V - V_1$. Suponha que exista uma aresta (a,b) entre dois vértices a, b $\in V_1$. Então os caminhos mais curtos entre v_1 e a, e entre v_1 e b unidos com a aresta (a, b) formam um ciclo de comprimento ímpar, uma contradição. As demais possibilidades são tratadas de forma análoga. □

Circuitos e Ciclos

- Um caminho ou ciclo é chamado **hamiltoniano** se contém cada um dos vértices do grafo exatamente uma vez.

- Um caminho ou ciclo é chamado de **euleriano**, se contém cada uma das arestas do grafo exatamente uma vez.

- Se um grafo *G* contém um ciclo euleriano ou hamiltoniano, ele é chamado de **grafo euleriano** ou **grafo hamiltoniano**, respectivamente.

Ciclos Hamiltonianos

- Um grafo hamiltoniano é aquele que possui ciclo hamiltoniano, isto é, um ciclo que contém cada vértice do grafo exatamente uma vez.

- Não é conhecida uma caracterização satisfatória, em termos de condições necessárias e suficientes para a existência de tal ciclo.

- Não se conhece algoritmo eficiente para resolver o problema de reconhecer grafos hamiltonianos.

Ciclos Hamiltonianos

Proposição

Seja $G(V, E)$ um grafo com pelo menos 3 vértices e tal que $g(v) \geq n/2$, para todo vértice $v \in V$. Então G é hamiltoniano.

Maximalidade e Minimalidade

- Seja S um conjunto e $S' \subseteq S$ e seja P uma propriedade.
- S' é **maximal** em relação a P quando a satisfaz e não existe $S'' \supset S'$ que também satisfaz P.
- Analogamente, S' é **minimal** se satisfaz P e não existe $S'' \subset S'$ que também satisfaz P.
- Note que maximal $\neq$ máximo e minimal $\neq$ mínimo.

Ciclos Hamiltonianos

Proposição

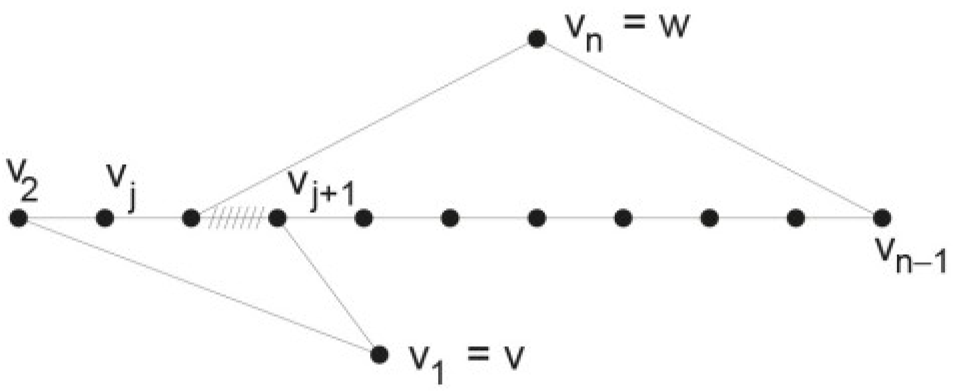
Seja $G(V, E)$ um grafo com pelo menos 3 vértices e tal que $g(v) \geq n/2$, para todo vértice $v \in V$. Então G é hamiltoniano.

Ciclos Hamiltonianos

Prova

Suponha o teorema falso. Então existe um grafo *G* maximal não hamiltoniano que satisfaz às condições da hipótese. Como n ≥ 3, *G* não é completo. Existem portanto v, $w \in V$ não adjacentes. Como *G* é maximal, *G* + (v, w) é hamiltoniano. Por isso e porque *G* é não hamiltoniano, todo ciclo hamiltoniano de *G* + (v, w) contém a aresta (v, w). Então *G* possui um caminho hamiltoniano $v_1,v_2,...,v_n$ entre $v_1 = v$ e $v_n = w$. Porque g(v), g(w) ≥ n/2, existem necessariamente vértices v_j e v_{j+1}, para algum $1 \leq j < n$, tais que (v, v_{j+1}), $(w, v_j) \in E$. Retirando do ciclo a aresta (v_j, v_{j+1}) e acrescentando (v,v_{j+1}) e (w,v_j), transforma o caminho em ciclo hamiltoniano. Isto contradiz G ser não hamiltoniano. □

Ciclos Hamiltonianos



Exercícios recomendados

- Bondy e Murty: 1.6.1, 1.6.3, 1.7.1, 1.7.2, 1.7.3.

1 - Se a distância d(u, v) entre dois vértices u e v que podem ser conectados por um caminho em um grafo for definida como o comprimento do caminho mais curto que os conecta, então prove que a função de distância satisfaz a desigualdade do triângulo : d (u, v) + d (v, w) $\geq$ d (u, w).

Referências

- Seção 1.6 1 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.
- Seção 1.2 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012
- Adaptado do material de aula da Profa. Leila Silva