



Grafos e Algoritmos Computacionais: Motivação

Aula 1

Prof. André Britto

Terminologia Básica de Grafos

Grafo

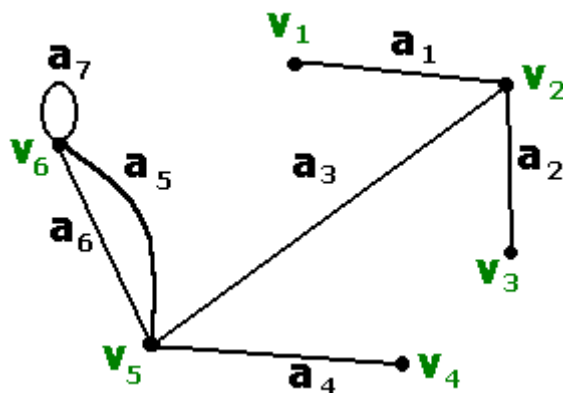
Um **grafo** G consiste num conjunto VG de elementos chamados **vértices**, num conjunto aG de elementos chamados **arestas**, juntamente com uma **função de incidência** ψ_G que associa a cada aresta dois vértices não necessariamente distintos chamados **extremos** da aresta.

Terminologia Básica de Grafos

Representação Geométrica

- vértices → pontos ou círculos
- arestas → linhas
- função de incidência → quais pontos serão ligados pelas linhas

- Exemplo:



Representação geométrica do grafo com função de incidência do exemplo anterior.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Algoritmos em grafos \subset Teoria dos grafos

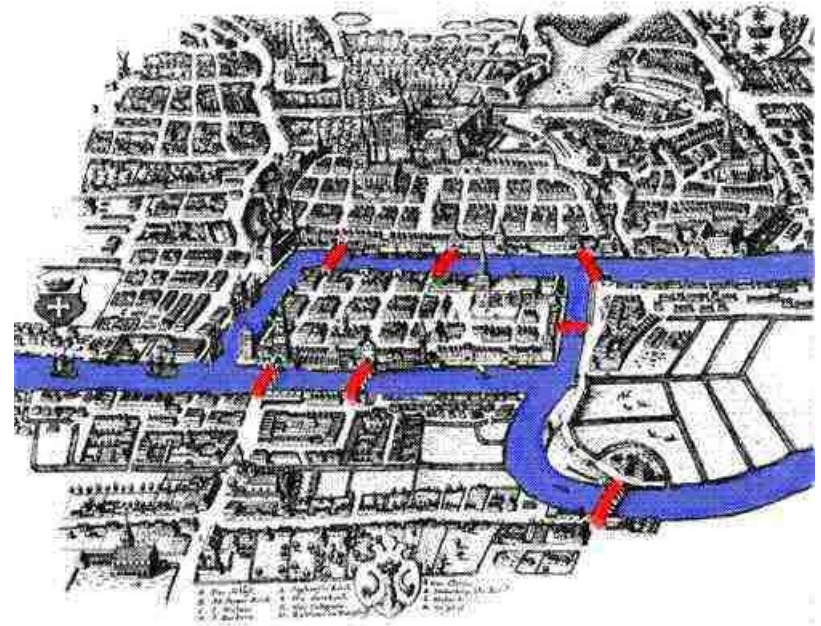
- Meta: Encontrar algoritmos eficientes para resolver problemas em grafos.
- Aplicações: Diversas áreas: matemática, computação, química, engenharia elétrica, engenharia de tráfego, economia, eletrônica, etc...
- Histórico: Marco inicial \rightarrow problema das pontes de Königsberg (resolvido por Euler em 1736).

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Histórico

O problema das pontes de Königsberg

- A cidade de Königsberg está situada no rio Pregel e compreende duas ilhas e as margens do rio. Existem 7 (sete) pontes ligando as partes da cidade.



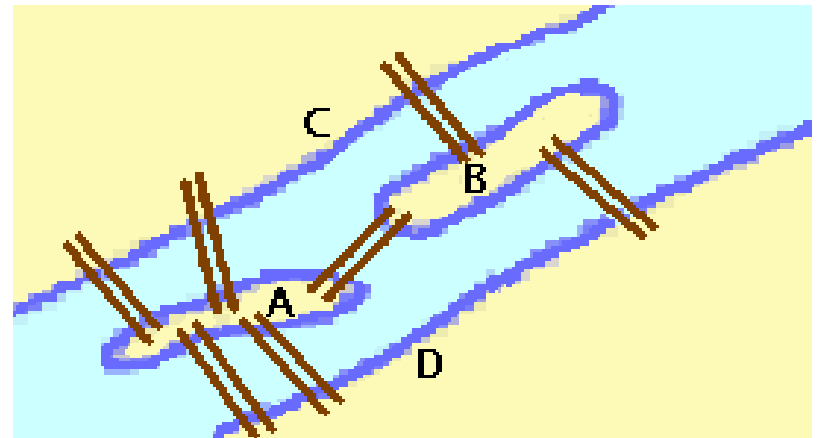
Pontes de Königsberg.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Histórico - O problema das pontes de Königsberg

Pergunta:

- É possível determinar um trajeto que passe por todas as pontes usando-as somente uma vez, e de tal forma que o ponto inicial e final coincidam?



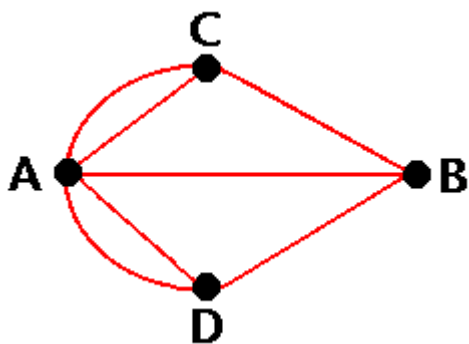
Esquema simplificado das pontes de Königsberg.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Pergunta:

É possível determinar um trajeto que passe por todas as pontes usando-as somente uma vez, e de tal forma que o ponto inicial e final coincidam?

Euler provou que isso não é possível utilizando um grafo.



Representação do problema
através de um grafo.

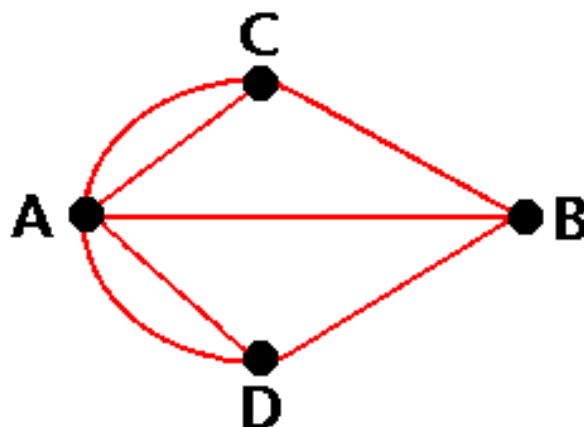
Cada ponte é uma aresta e cada pedaço de terra é um vértice. O objetivo agora seria percorrer todas as arestas do grafo, cada aresta apenas uma vez, começando e terminando no mesmo vértice.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Ideia da prova

Para não haver repetição de arestas seria necessário que tivéssemos o mesmo número de arestas para entrar e para sair. Ou seja, um número total par de arestas em cada vértice. Metade das arestas seria usada para chegar e a outra metade para sair.

O grafo do problema tem todos os vértices com número ímpar de arestas e portanto não é possível realizar o trajeto desejado.



Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

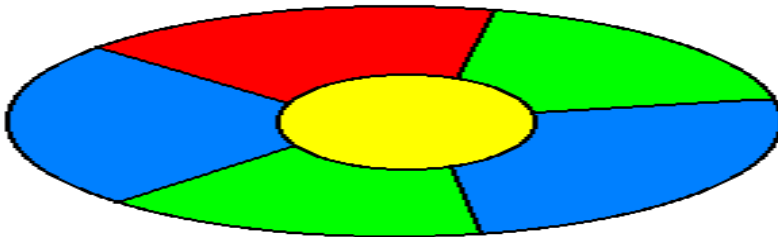
Em meados do século XIX surgem três tópicos de interesse isolados:

- O problema das 4 cores;
- O problema do ciclo Hamiltoniano;
- A teoria das árvores.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Problema das 4 cores

É possível colorir países em um mapa arbitrário plano usando apenas 4 cores distintas, tais que países fronteiriços possuam cores diferentes?



Exemplo de coloração.

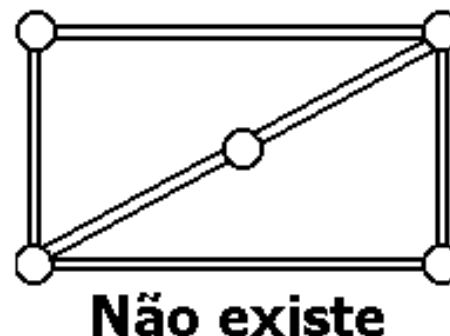
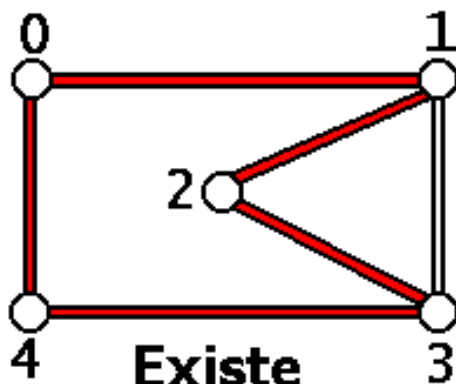
História

- O problema foi formulado em 1850 por De Morgan. Kempe em 1879 lançou a primeira “prova”.
- Mais tarde Heawood em 1890 mostrou que a prova era falha e também que 5 cores são suficientes para resolver o problema.
- O problema das 4 cores foi provado com o uso do computador, por Appel e Haken em 1977.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Problema do ciclo Hamiltoniano

Sejam n cidades. Cada par de cidades pode ser adjacente ou não. Partindo-se de uma cidade qualquer, podemos determinar um trajeto que passe em cada cidade uma vez e retorne ao ponto inicial da partida, e tal que cada par de cidades consecutivas no trajeto seja sempre adjacente?



Grafos com e sem ciclos Hamiltonianos.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Problema do ciclo Hamiltoniano

- Até hoje não foi encontrado um algoritmo eficiente para resolvê-lo. É possível examinar todas as possibilidades de caminhos, mas essa solução é exponencial. Também não são provadas condições necessárias e suficientes de existência da ciclo Hamiltoniano.
- É um dos problemas “NP-completos”.

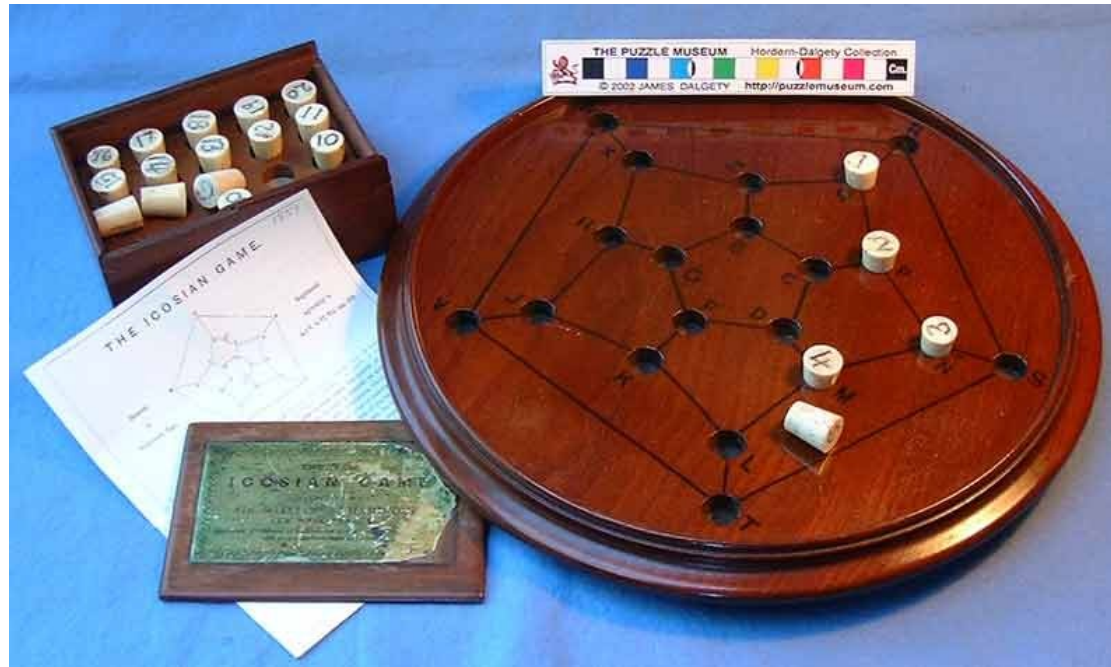
História

- William Hamilton em 1859 inventou um quebra cabeça: “Travel around the world”.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

História

- William Hamilton em 1859 inventou um quebra cabeça: *"Travel around the world"*.

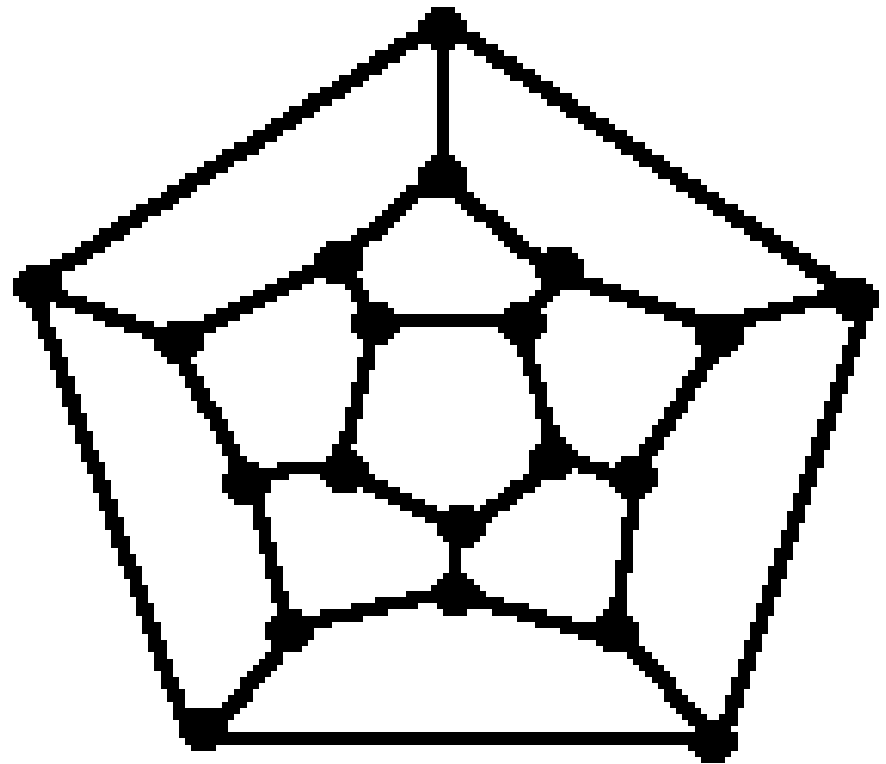


Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Problema do ciclo Hamiltoniano

Para casa:

- Procure o ciclo Hamiltoniano neste quebra-cabeça:



Dodecaedro com 20 vértices representando 20 cidades do mundo.

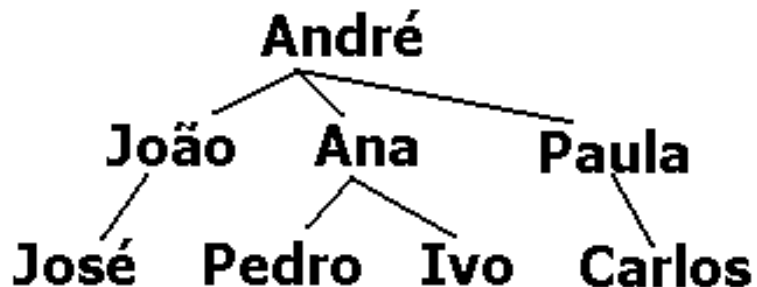
Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Teoria das árvores

- Kirchhoff – 1847 (circuitos elétricos).
- Cayley – aplicou esta teoria para a química orgânica.

Exemplos:

- Árvore de família;

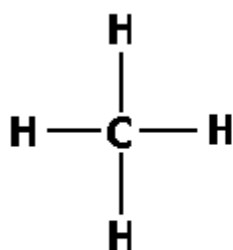


Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

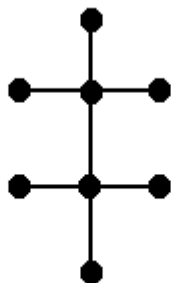
Teoria das árvores

Exemplos

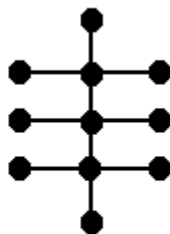
- Árvores das moléculas;
- Modelagem de circuitos elétricos.



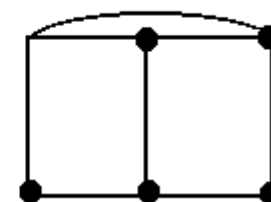
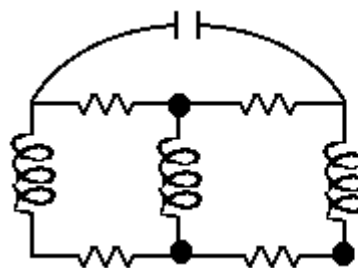
Metano



Etano



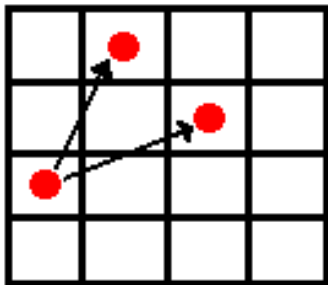
Propano



Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Aplicações na Computação

- **Inteligência Artificial**
 - Problemas de busca
 - Estratégia de jogos
 - Representação de conhecimento

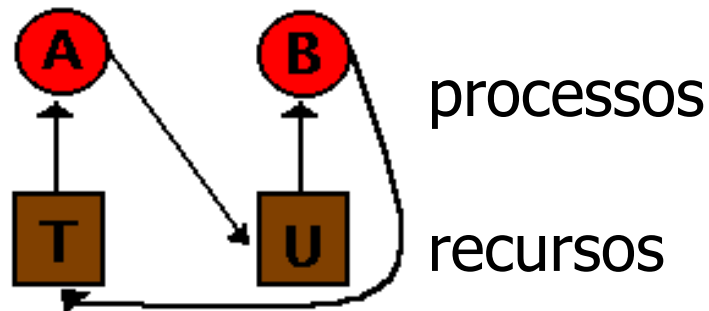


Estratégia de jogo.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Aplicações na Computação

- **Sistemas Operacionais**
 - *Deadlock*



Exemplo de *deadlock*.

Considerações iniciais sobre grafos e suas aplicações

Aplicações na Computação

Arquitetura de Computadores

- Co-design → particionamento.
- Síntese de circuitos → escalonamento de operações em unidades funcionais.

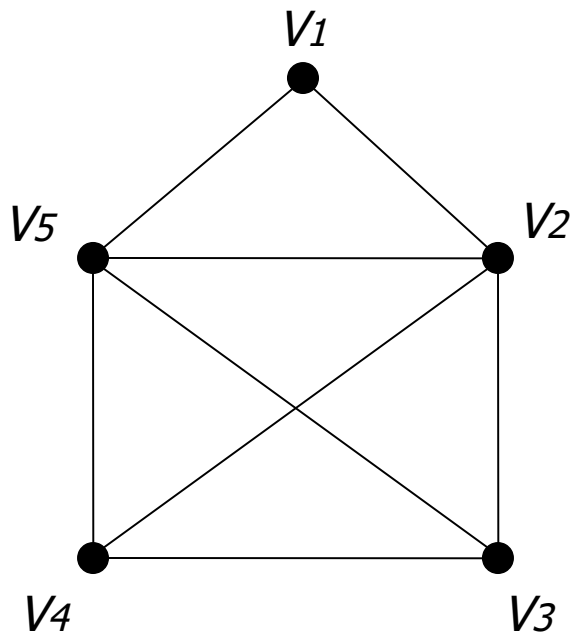
Redes

- Pontos críticos em redes.



Representação de um ponto crítico.

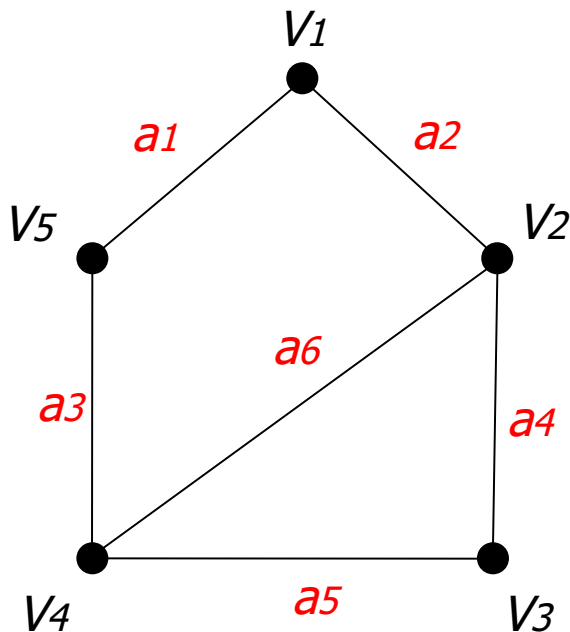
Representação de Grafos no Computador



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	0	0	1
V_2	1	0	1	1	1
V_3	0	1	0	1	1
V_4	0	1	1	0	1
V_5	1	1	1	1	0

Matriz de adjacência

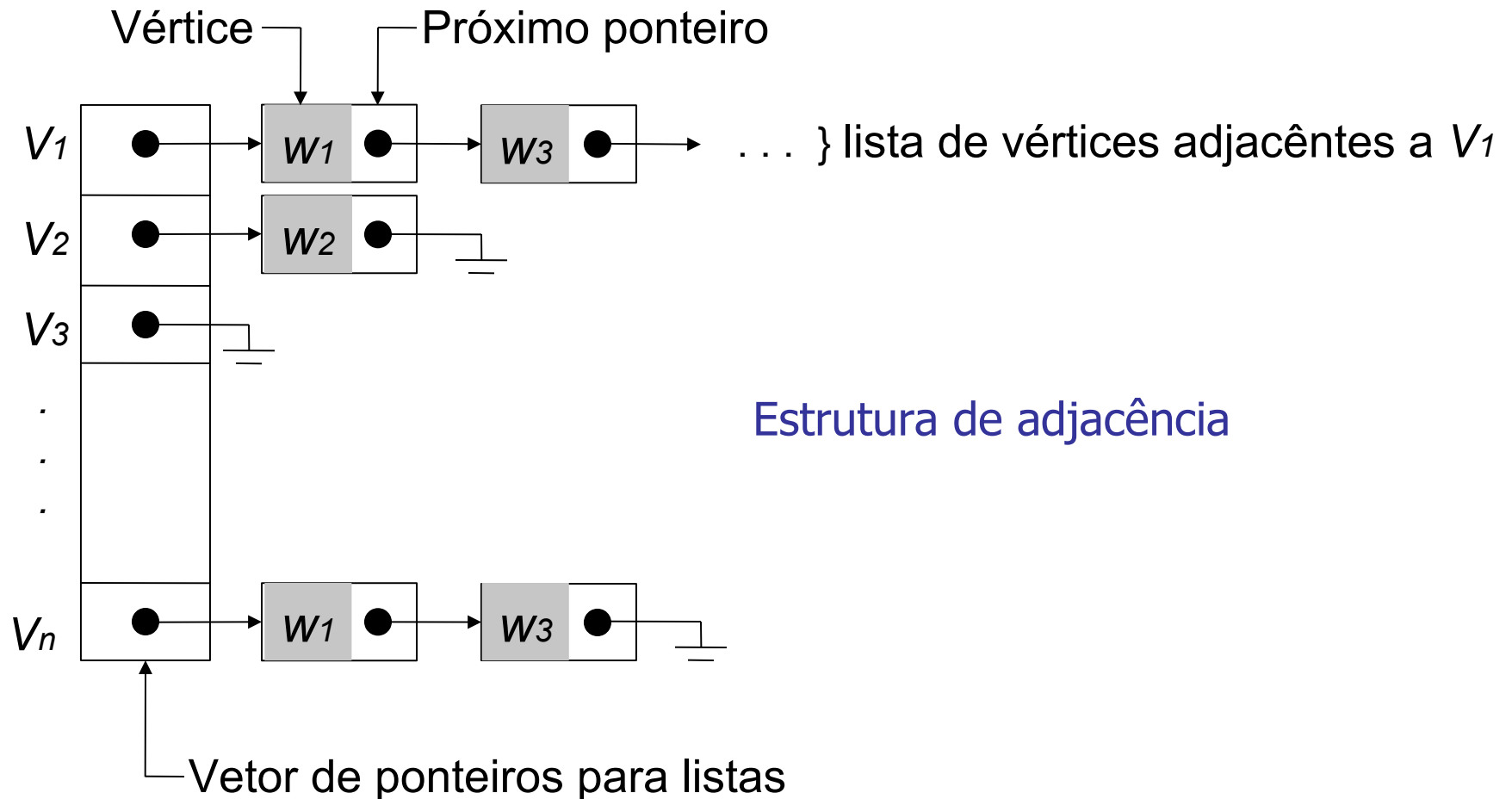
Representação de Grafos no Computador



	<i>a1</i>	<i>a2</i>	<i>a3</i>	<i>a4</i>	<i>a5</i>	<i>a6</i>
<i>V1</i>	1	1	0	0	0	0
<i>V2</i>	0	1	0	1	0	1
<i>V3</i>	0	0	0	1	1	0
<i>V4</i>	0	0	1	0	1	1
<i>V5</i>	1	0	1	0	0	0

Matriz de incidência

Representação de Grafos no Computador



Conceitos que é necessário revisar

- Estruturas de dados
- Técnicas de provas de teoremas
- Complexidade de algoritmo

Leitura para próxima aula

- Capítulo 1 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976. (até a seção 1.5)
- Capítulo 1 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012.
- Seções 2.1, 2.2 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Ed. Campus, 1983.