UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Departamento de Computação/UFS

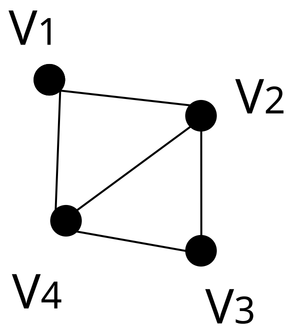
Grafos e Algoritmos Computacionais

Conexidade

Prof. André Britto
Modificado por: Prof. Breno Piva

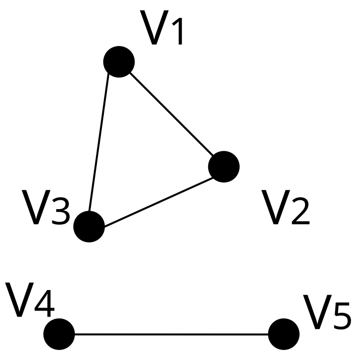
Conexidade

- Dois vértices distintos u e v são ditos conexos se existe um caminho entre u e v.
- Um grafo *G* é **conexo** se para todo par de vértices distintos *u* e *v*, existir um caminho em *G* de *u* a *v*.
- Um grafo *G* é dito **desconexo** se *G* não é **conexo**.



G1

Conexo



G2

Desconexo

Conexidade

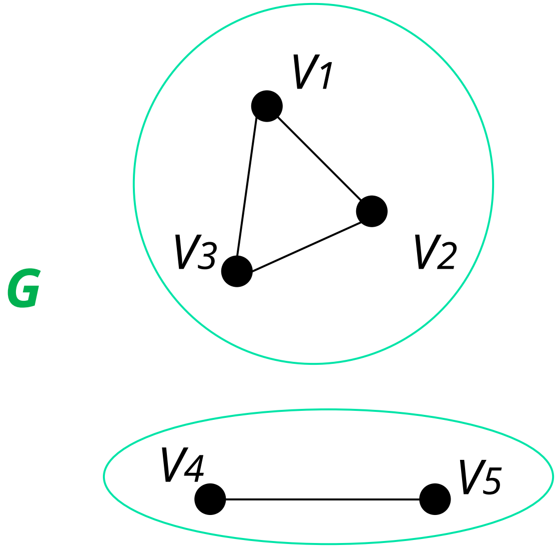
- Um grafo não-dirigido é desconexo se não for conexo. Para caracterizar grafos não-dirigidos desconexos, precisamos introduzir duas definições: dizemos que um conjunto X de vértices é
  - isolado se nenhuma aresta tem uma ponta em X e outra fora de X e,
  - trivial se X for vazio ou contiver todos os vértices do grafo.
- Agora podemos enunciar a caracterização: um grafo não-dirigido é desconexo se e somente se algum conjunto não-trivial de seus vértices é isolado.

- Fonte: https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/aulas/components.html

Conexidade

- Os subgrafos conexos maximais de *G* são chamados de **componentes** de *G*.

Ex.: ***G*** tem dois componentes



Conexidade

- Dado um conjunto *C* de conjuntos, dizemos que um conjunto *m* é **maximal** em *C* se nenhum conjunto em *C* inclui propriamente *m*; analogamente o conjunto *m′* em *X* é **minimal** se nenhum conjunto em *C* é subconjunto próprio de *m′*.

- Dizemos que um conjunto *e* em *C* é **máximo** em *C* se nenhum conjunto em *C* tem cardinalidade maior que *e*; analogamente, um conjunto *e′* é **mínimo** em *C* se nenhum conjunto em *C* tem cardinalidade menor que *e′*.

Conexidade

Exemplo:

$C = \{ \{2\} , \{2,4\} , \{2,5\} , \{2,4,6\} \}$

Maximais $\{2,5\}$ $\{2,4,6\}$

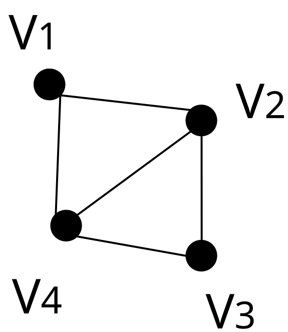
Máximo $\{2,4,6\}$

Minimal $\{2\}$

Mínimo $\{2\}$

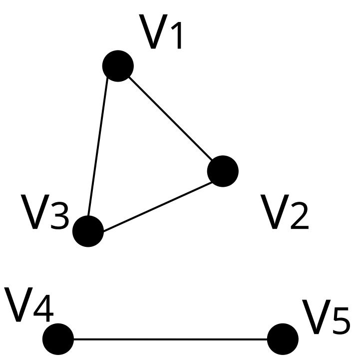
Conexidade

- Se G é conexo ele possui somente um componente maximal



G1

Conexo



G2

Desconexo

Conexidade

- Qual o menor número de arestas que um grafo com *n* vértices deve ter para ser conexo?

Proposição

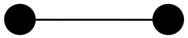
Se G é conexo e G tem n vértices, então $|EG| \geq n\text{-}1$.

Conexidade

Prova

Por indução em *n*.

Bases: $n = 1$ 

$n = 2$ 

Hipótese Indutiva.: Suponha que a asserção seja válida para grafos com menos que *n* vértices.

Conexidade

Prova(Continuação)

Seja G um grafo com n vértices. Seja v um vértice qualquer de G. Seja $G' := G\text{-}v$ e sejam $G'_1, G'_2, \ldots, G'_k$ os componentes de G'. Suponhamos que cada G'_i, $1 \leq i \leq k$, tenha n_i vértices. Pela H.I., $|EG'_i| \geq n_i - 1$. Assim:

$$|EG| = |EG'| + g_G(v) - (n^o \text{ laços incidentes em } v) \geq \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + k$$

Portanto, $|EG| \geq \sum_{i=1}^{k} n_i$,ou seja ,

$$|EG| \geq n - 1 \ \square$$

Conexidade

Pergunta:

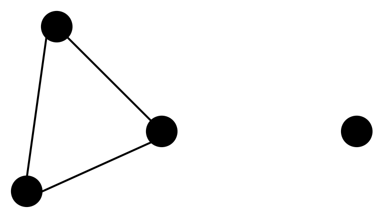
Provou-se a necessidade de pelo menos *n*-1 arestas para o grafo ser conexo. A condição também é suficiente, ou seja, todo grafo com *n* vértices e *n*-1 arestas é conexo?

Conexidade

Pergunta:

Provou-se a necessidade de pelo menos *n-1* arestas para o grafo ser conexo. A condição também é suficiente, ou seja, todo grafo com *n* vértices e *n-1* arestas é conexo?

Não



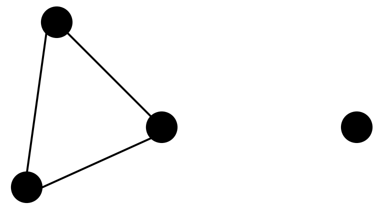
Contra-exemplo

- Existem grafos conexos com *n* vértices e *n-1* arestas?

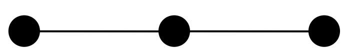
Conexidade

<u>Pergunta:</u>

Provou-se a necessidade de pelo menos *n-1* arestas para o grafo ser conexo. A condição também é suficiente, ou seja, todo grafo com *n* vértices e *n-1* arestas é conexo?

Não  Contra-exemplo

- Existem grafos conexos com *n* vértices e *n-1* arestas?

Sim. Por exemplo,  **grafos caminho**

Conexidade

Proposição A

Se G é conexo com n vértices e $n-1$ arestas, então G não contém circuitos.

Lema 1

Se G é conexo com n $(n>1)$ vértices e $n-1$ arestas, então G tem pelo menos um vértice de grau um.

Conexidade

Circuito é uma trilha fechada

Se G é conexo com n vértices e n-1 arestas, então G não contém circuitos.

Lema 1

Se G é conexo com n $(n>1)$ vértices e n-1 arestas, então G tem pelo menos um vértice de grau um.

Conexidade

Prova da Proposição A

Por indução em n. O caso base é trivial, pois um grafo com 1 vértice e 0 arestas não contém circuitos. Suponha então que a proposição vale para um grafo com conexo com n-1 vértices e n-2 arestas (hipótese de indução). No caso geral, seja G um grafo conexo com n vértices e n-1 arestas. Pelo Lema 1, existe um vértice v em G, tal que $g(v)=1$. Seja $G':=G-v$. A remoção de um vértice de grau um não desconecta o grafo, logo, G' é conexo e tem n-1 vértices e n-2 arestas. Por hipótese de indução, G' não contém circuitos. A adição de um vértice de grau um não forma circuito, portanto G também não contém circuitos. □

Conexidade

Proposição B

Se G é conexo com n vértices e G não contém circuitos então $|EG| = n\text{-}1$.

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, *m*.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com $< m$ arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G':=G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EG_i| = n_i - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1 = |VG| - 1. \qquad \square$$

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, *m*.

Base: $m=0, n = 1$ e $m=1, n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < *m* arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G':=G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EGi| = |VGi| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

São conexos, não tem circuito e |EG| = m = n-1

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, m.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < m arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G':=G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EGi| = |VGi| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

A remoção de arestas não interfere nos vértices do grafo.

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, m.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < m arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G' := G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EG_i| = |VG_i| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

Um circuito é uma passeio fechado sem repetição de arestas e se uma aresta pertence a circuito ela pertence a um ciclo. O caminho P entre u e v, concatenado com a aresta a iria gerar um circuito, porém não existem circuitos em G.

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, *m*.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < *m* arestas.

Seja *G* um grafo conexo com *n* vértices e *m* arestas e *G* não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de *G* e seja $G':=G-a$. Em *G'* não existe um caminho *P* de *u* a *v* pois senão haveria em *G* um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo *u* e *v* pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão *G* teria), por H.I., $|EG_i| = |VG_i| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

Já discutimos que a desconexão de um grafo gera k componentes e não é possível um circuito existir nos componentes G1 e G2 e não existir em G. G1 e G2 são subconjuntos de G.

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, m.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < m arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G':=G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EGi| = |VGi| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

O número de arestas de G é igual ao número de arestas de cada componente mais a aresta a.

Conexidade

Prova

Por indução no número de arestas do grafo, m.

Base: $m=0$, $n = 1$ e $m=1$, $n = 2$

H.I: A proposição vale para um grafo com < m arestas.

Seja G um grafo conexo com n vértices e m arestas e G não contém circuitos. Seja $a=(u,v)$ uma aresta de G e seja $G':=G-a$. Em G' não existe um caminho P de u a v pois senão haveria em G um circuito $P.(u,a,v)$, contrariando a hipótese. Logo u e v pertencem a componentes distintos, digamos G_1 e G_2. Como G_i $(i=1,2)$ é conexo (por definição de componente) e não contém circuitos (senão G teria), por H.I., $|EGi| = |VGi| - 1$, para $i=1,2$. Logo,

$$|EG| = |EG_1| + |EG_2| + 1 = |VG_1| - 1 + |VG_2| - 1 + 1 = |VG| - 1. \quad \square$$

Por H.I.

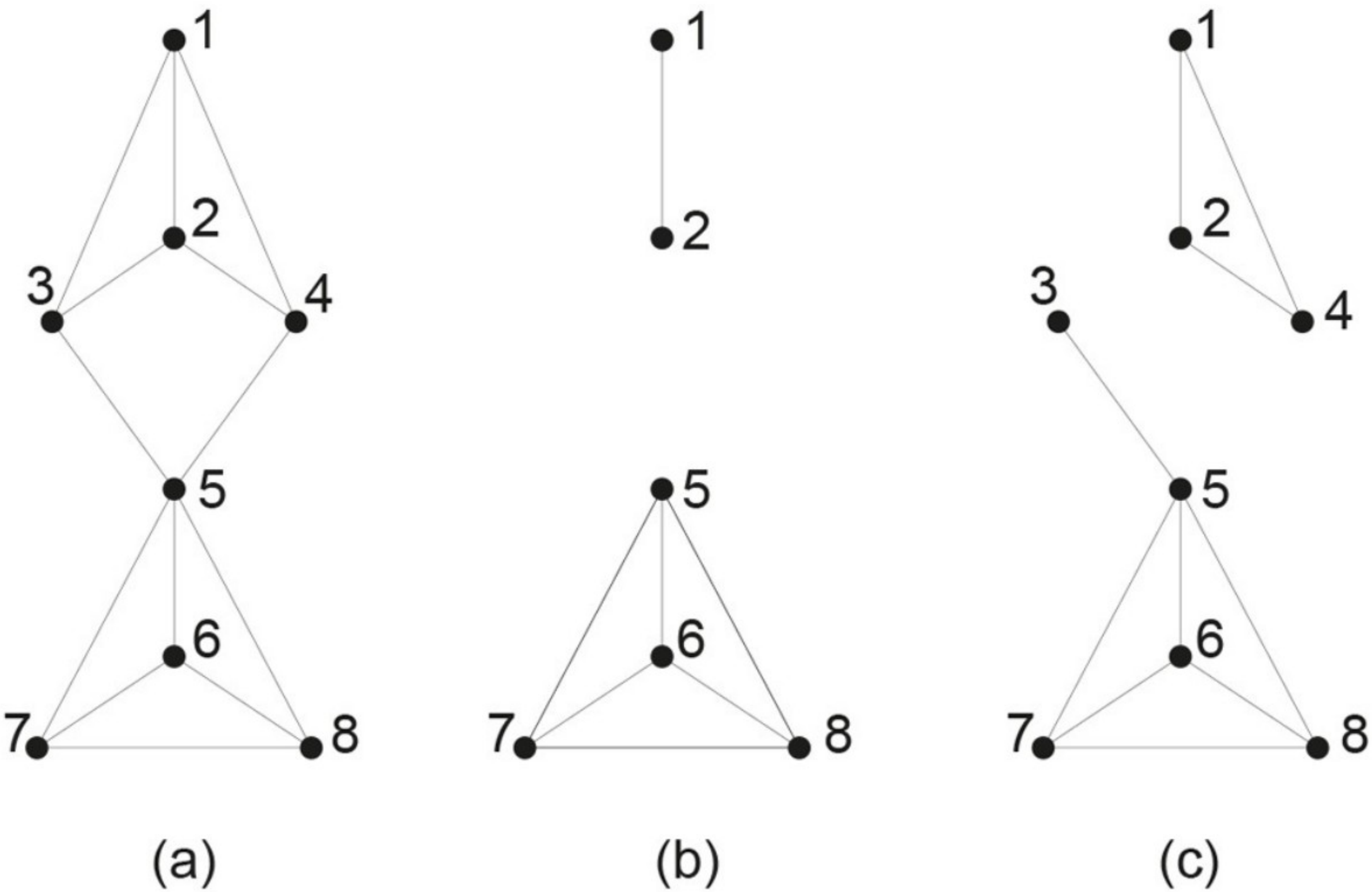
Conexidade - Cortes

- Seja G(V, E) um grafo conexo. Um **corte de vértices** de G é um subconjunto minimal de vértices $V' \subseteq V$ cuja remoção de G o desconecta ou o transforma no grafo trivial.
- Um **corte de arestas** de G é um subconjunto minimal de arestas $E' \subseteq E$, cuja remoção de G o desconecta.

Conexidade - Cortes

- Chamamos de **conectividade de vértices** de G à cardinalidade do menor corte de vértices (corte mínimo).
- E de **conectividade de arestas** à cardinalidade do menor corte de arestas.

Conexidade - Cortes



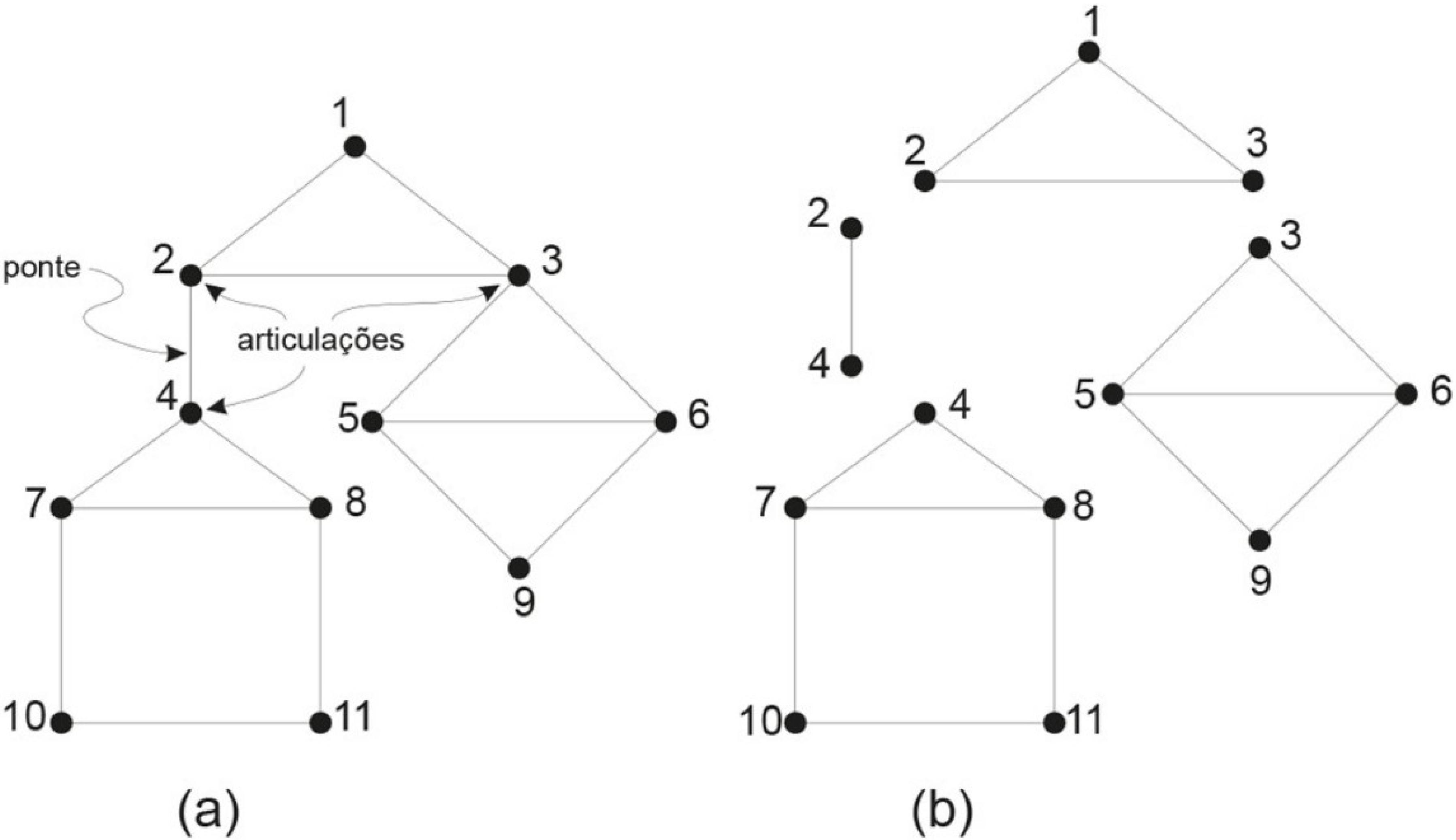
Conexidade

- Dizemos que um grafo é **k-conexo em vértices** se sua conectividade de vértices é maior ou igual a k.
- Analogamente, ele é **k-conexo em arestas** se sua conectividade de arestas é maior ou igual a k.
- Assim, um grafo G é **2-conexo** (em vértices), também chamado de **biconexo** se o menor corte de G possui, pelo menos, dois vértices.
- Ou seja, um grafo é biconexo se removendo um único vértice qualquer v em G, o grafo permanece conexo.

Conexidade

- Um vértice v que quando removido desconecta o grafo é chamado de **articulação**.
- Uma aresta e que quando removida desconecta o grafo é chamada de **ponte**.
- Portanto, um grafo é biconexo em vértices (arestas) se e somente se não possui articulações (pontes).
- São denominadas componentes biconexas de G os subgrafos de G que são biconexos maximais ou isomorfos ao K_2.
- As componentes biconexas são também chamadas de blocos.

Conexidade



Exercícios Recomendados

- Bondy e Murty:
  - 1.6.4, 1.6.6, 1.6.10

Referências

- Capítulo 1 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.
- Seção 2.4 do Teoria Computacional de Grafos 1ª Ed. Jayme Luiz Szwarcfiter. Elsevier, 2018.