Grafos e Algoritmos Computacionais: Planaridade

Aula 18

Prof. André Britto

Modificada por Prof. Breno Piva

Planaridade

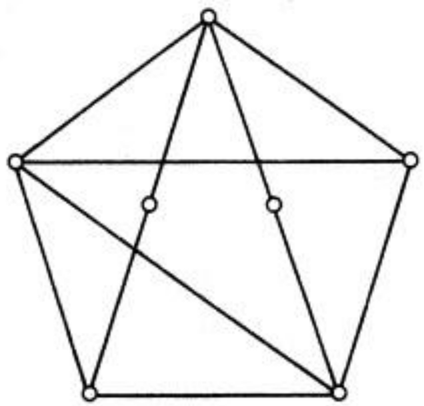
Definição de grafo planar

Dizemos que um grafo *G* é **imersível no plano**, ou **planar**, se ele pode ser desenhado no plano de forma que suas arestas se interceptem apenas em suas extremidades.

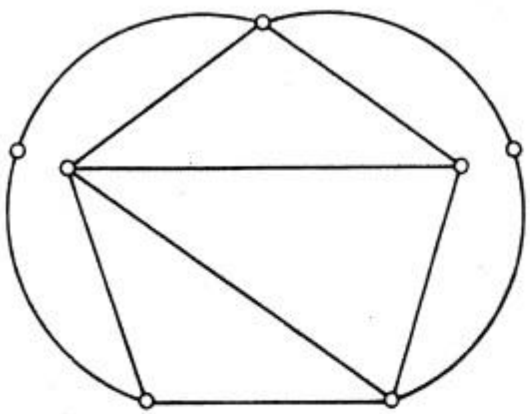
A representação planar *H* do grafo *G* é um grafo isomorfo a *G*.

Planaridade

Exemplo:



G



H

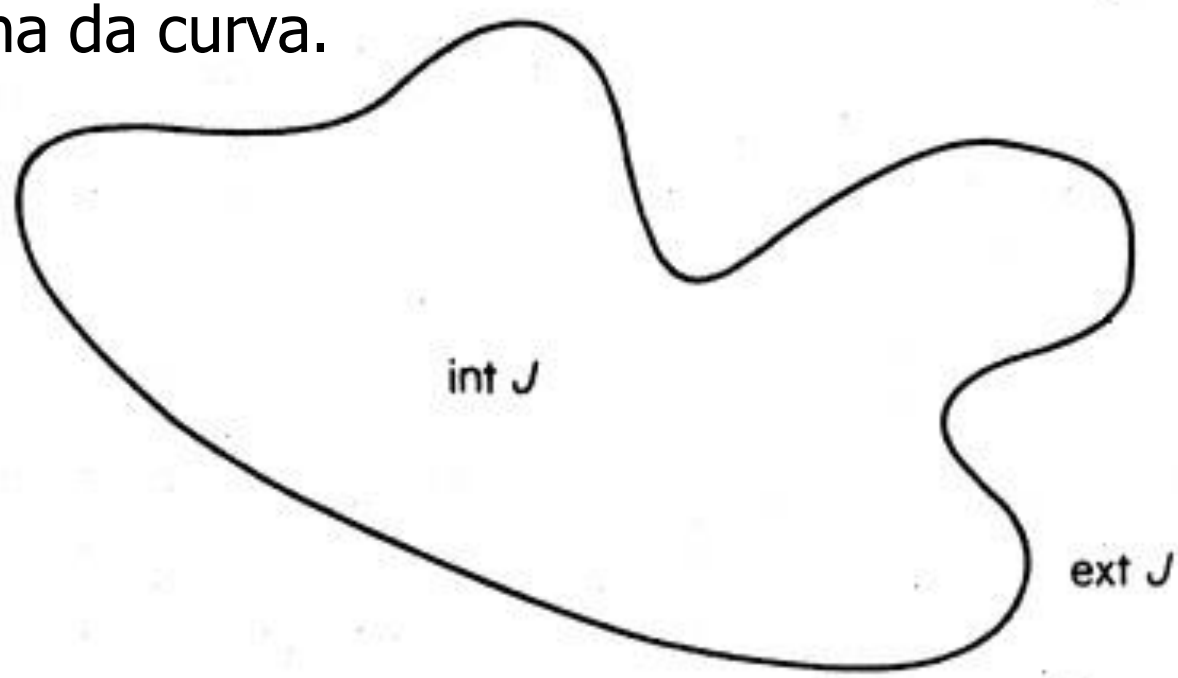
Ao vermos o grafo **G** podemos pensar que ele não é planar, pelo fato de muitas arestas estarem se cruzando, porém a representação **H** deixa evidente que o grafo pode ser desenhado no plano de forma que as arestas se interceptem apenas em suas extremidades, portanto **G** é planar.

Curvas de Jordan

Um aspecto teórico da topologia que será bastante útil para o estudo de planaridade nos grafos serão as curvas de Jordan, uma curva de Jordan é uma curva contínua que não intercepta a si mesma, onde os pontos de origem e término coincidem.

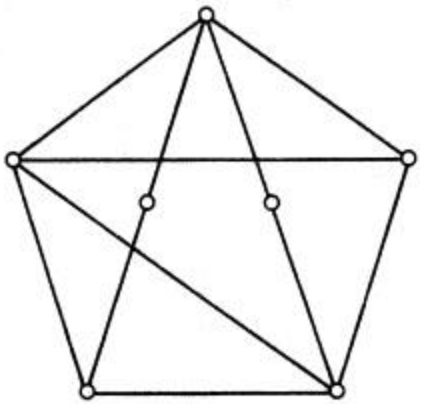
Planaridade

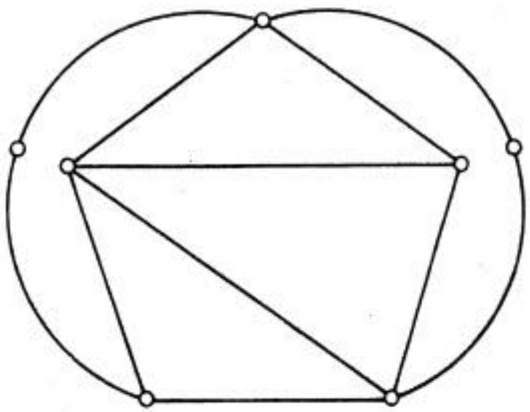
Seja *J* uma curva de Jordan no plano, então podemos dividir o plano em duas regiões Int *J* e Ext *J*, correspondentes respectivamente às regiões interna e externa da curva.



Curvas de Jordan

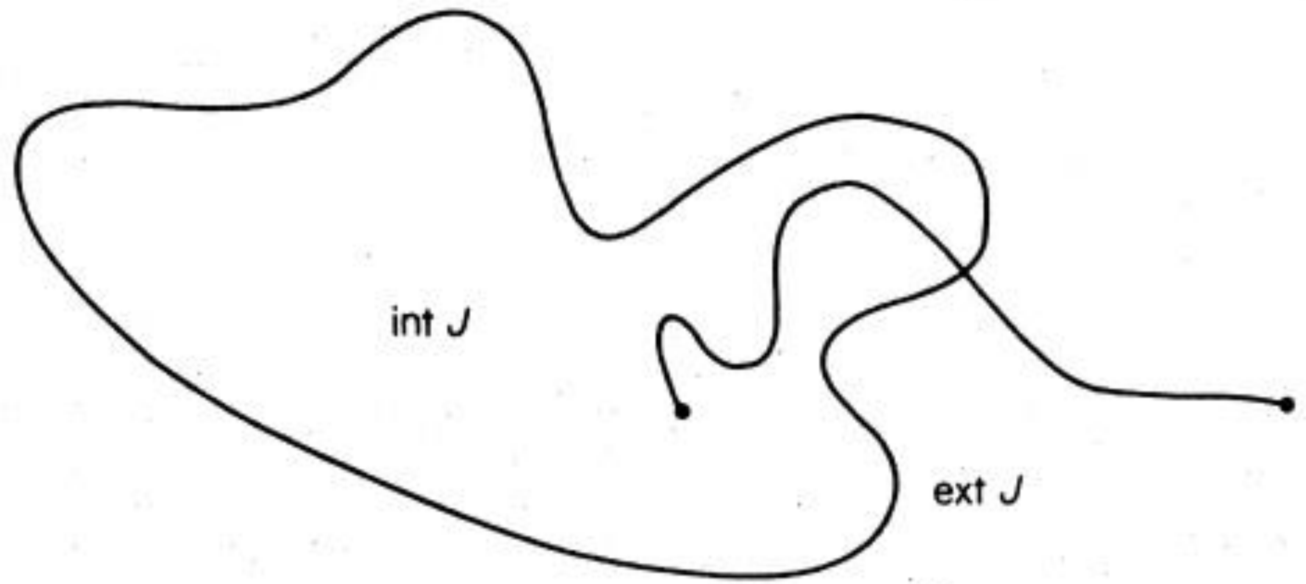
A união de arestas em um ciclo de um grafo planar constitui uma curva de Jordan, e essa é a principal razão para que o estudo dessas curvas seja importante ao analisarmos grafos planares.





Planaridade

O Teorema das curvas de Jordan afirma que qualquer linha que ligue um ponto de Int *J* a um ponto de Ext *J* deve interceptar a curva *J* em algum ponto.



Planaridade

Teorema

O grafo K_5 não é planar.

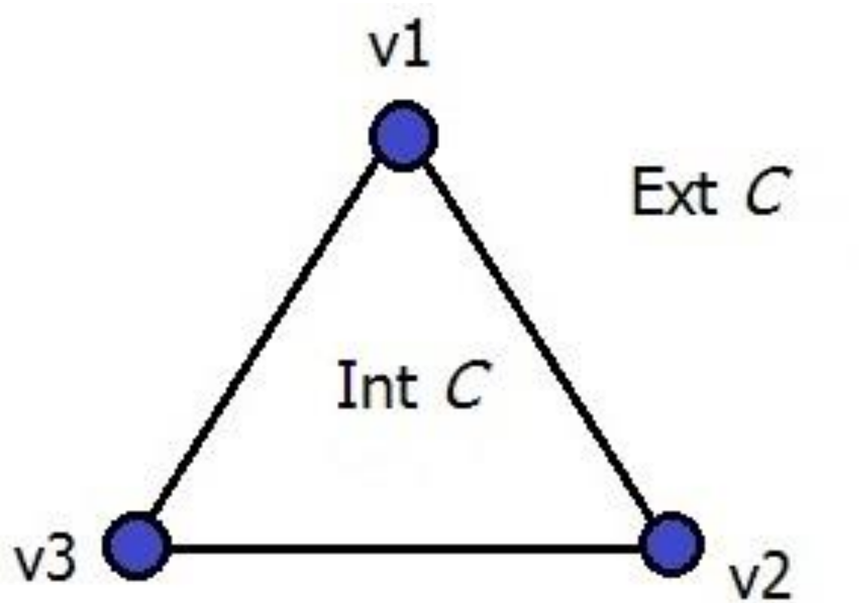
Prova

Por contradição.

Vamos assumir que G seja um grafo planar correspondente a K_5, com os vértices v1, v2, v3, v4 e v5, como G é completo, cada par de vértices está conectado por uma aresta.

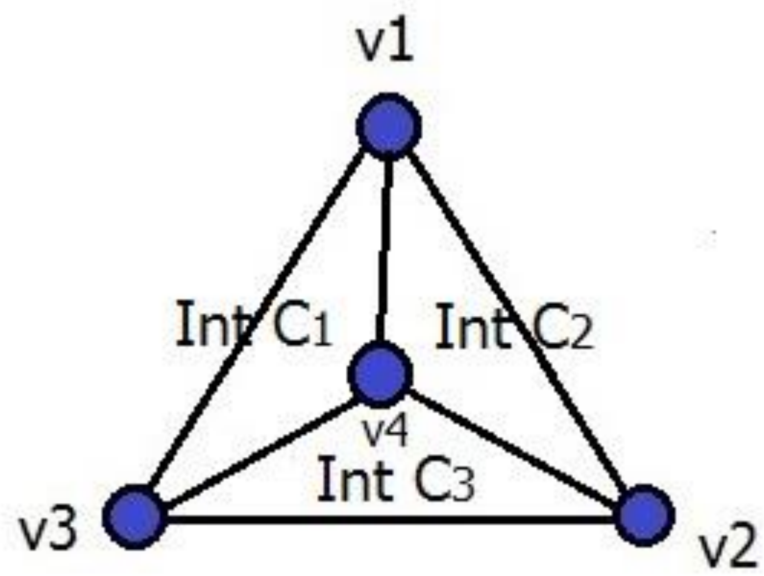
Planaridade

Agora, o ciclo C = v1v2v3v1 é uma curva de Jordan no plano e o vértice v4 precisa estar em uma das regiões Int *C* ou Ext *C*.



Planaridade

Iremos supor que v4 pertence a Int *C* (O caso onde v4 pertence a Ext *C* pode ser tratado de forma semelhante).

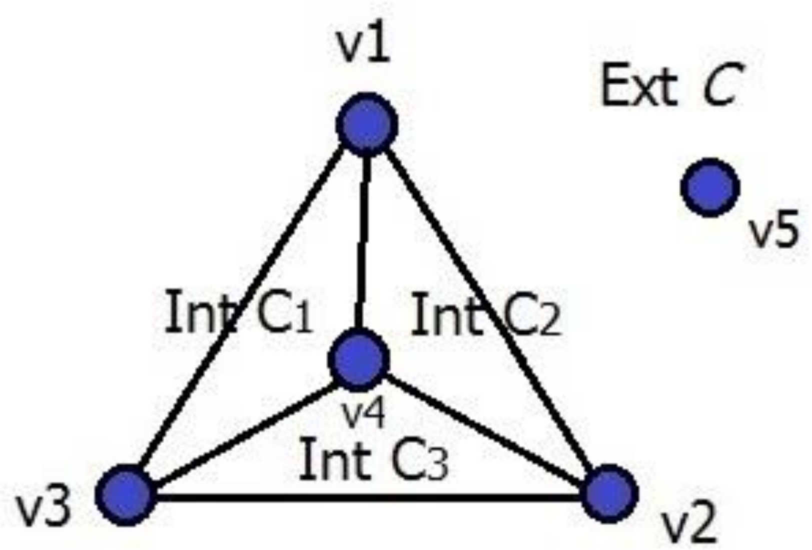


Então as arestas v4v1, v4v2 e v4v3 dividem C em três regiões Int C_1, Int C_2 e Int C_3:

Planaridade

Agora, v5 deve pertencer a uma das seguintes regiões: Ext C, Int C_1, Int C_2 ou Int C_3.

Se v5 pertencer a Ext C então, desde que v4 pertence a Int C, pelo teorema da curva de Jordan a aresta v4v5 deverá interceptar C em algum ponto, mas isso contradiz nossa suposição de que G é um grafo planar.



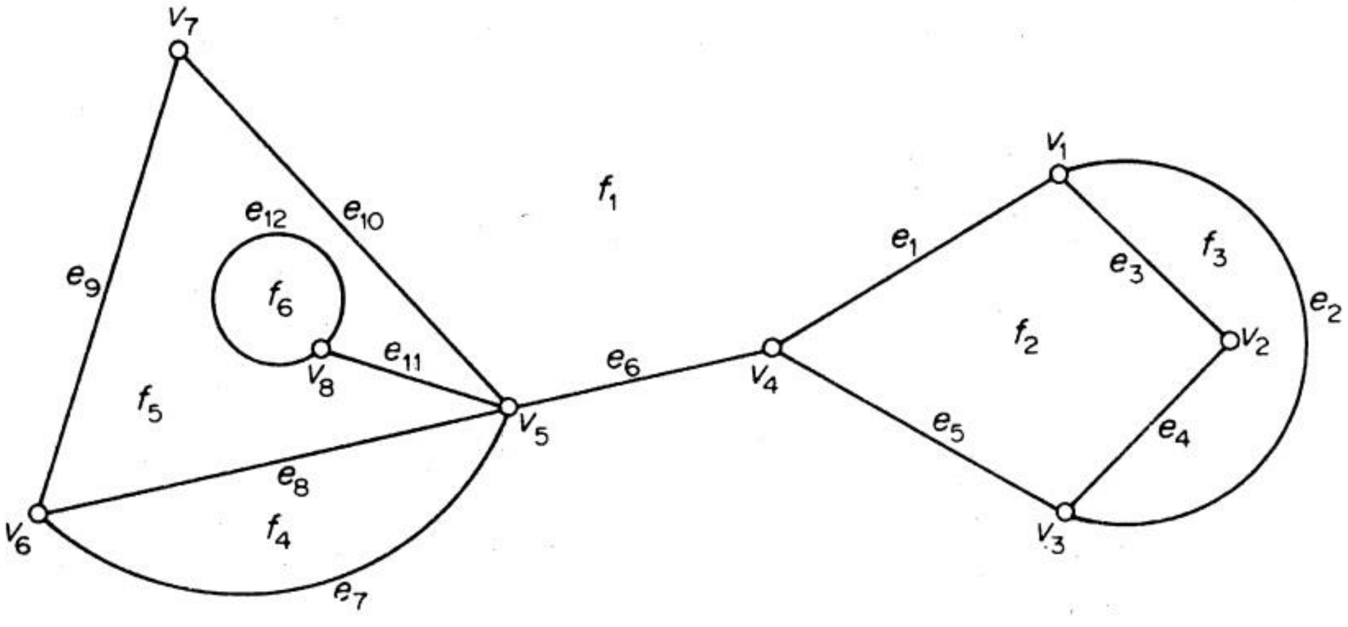
Planaridade

Os casos em que o vértice v5 pertencer a qualquer uma das regiões internas Int C_1, Int C_2 ou Int C_3 podem ser verificados de forma similar, sendo que sempre haverá um vértice impossível de se conectar a v5 sem que a aresta intercepte alguma outra aresta dentre as já dispostas no grafo.

Um argumento semelhante pode ser usado para provar que o Grafo $K_{3,3}$ não é planar, exercício 9.1.1 Bondy & Murthy.

Planaridade

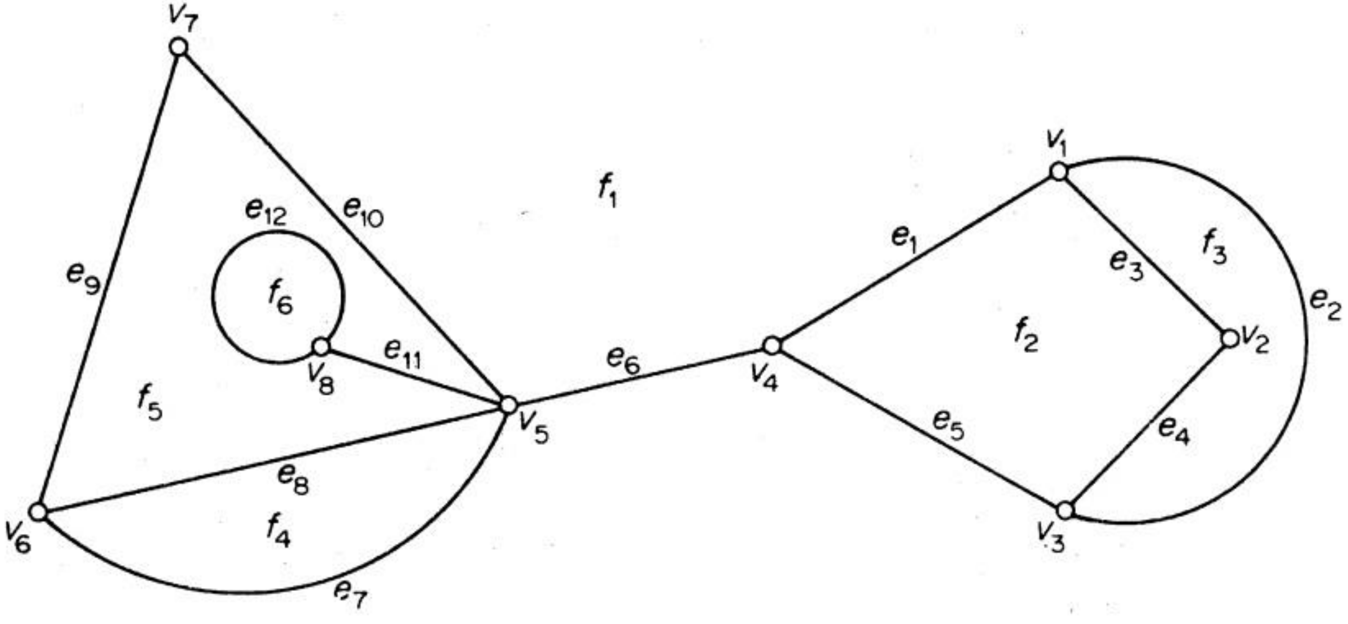
Um grafo planar **G** divide o restante do plano em um número de regiões conexas que são chamadas Faces de **G**. O grafo abaixo possui seis faces **f1, f2, f3, f4, f5,** e **f6**, denotamos como **F(G)** o conjunto de faces de um grafo planar e **Φ(G)** o número de faces de um grafo planar **G**.



Planaridade

Um grafo planar **G** divide o restante do plano em um número de regiões conexas que são chamadas Faces de **G**. O grafo abaixo possui seis faces **f1, f2, f3, f4, f5,** e **f6**, denotamos como **F(G)** o conjunto de faces de um grafo planar e **Φ(G)** o número de faces de um grafo planar **G**.

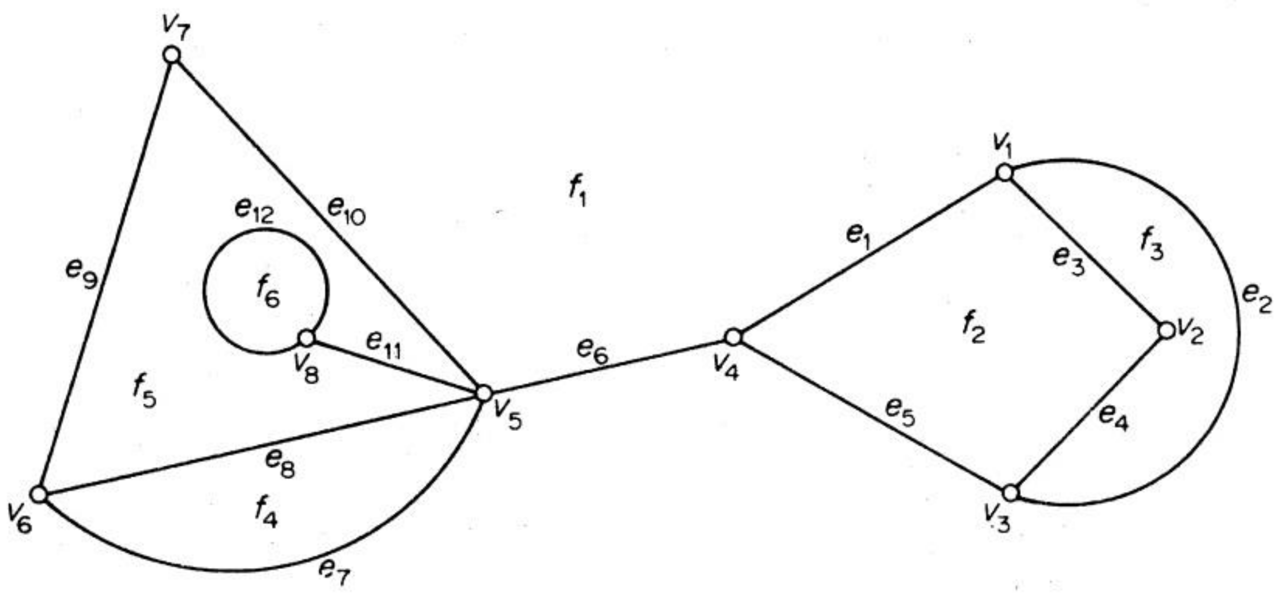
Cada plano tem exatamente uma face sem limites, chamada de face exterior.



Planaridade

Dizemos que uma face ***f*** é incidente em vértices ou arestas caso estes vértices ou arestas estejam em contato com a face.

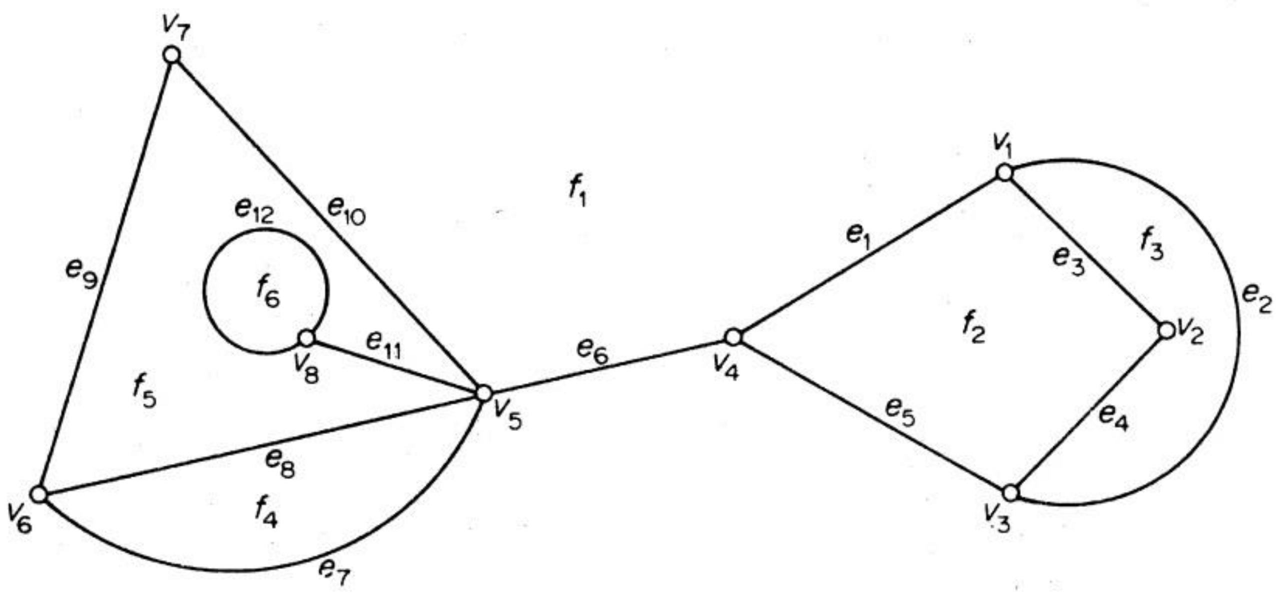
Dizemos que uma aresta ***e*** separa as faces que são incidentes nessa aresta.



Planaridade

Dizemos que uma face ***f*** é incidente em vértices ou arestas caso estes vértices ou arestas estejam em contato com a face.

Dizemos que uma aresta ***e*** separa as faces que são incidentes nessa aresta. Se apenas uma face é incidente em uma aresta ***e***, dizemos que e é uma aresta de corte, no caso abaixo $\boldsymbol{e_6}$ é uma aresta de corte:



Planaridade

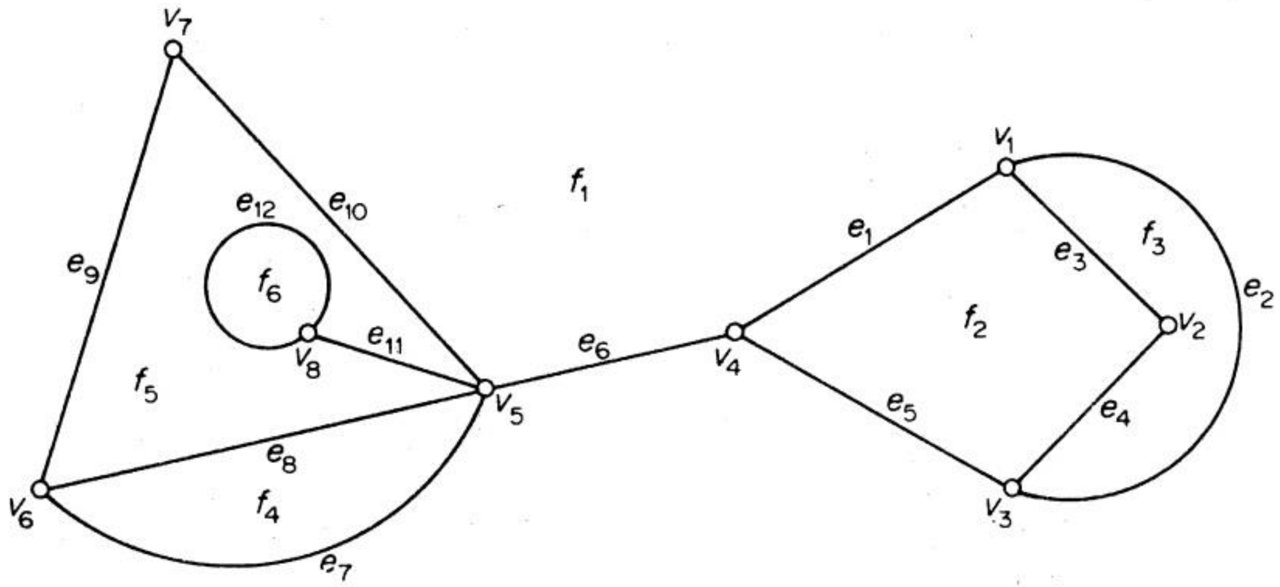
O grau de uma face $d_G(f)$ corresponde ao número de arestas incidentes nessa face, onde **arestas de corte contam 2 vezes**.

$d_G(f2) = 4$

$d_G(f3) = 3$

$d_G(f5) = ?$

$d_G(f1) = ?$



Planaridade

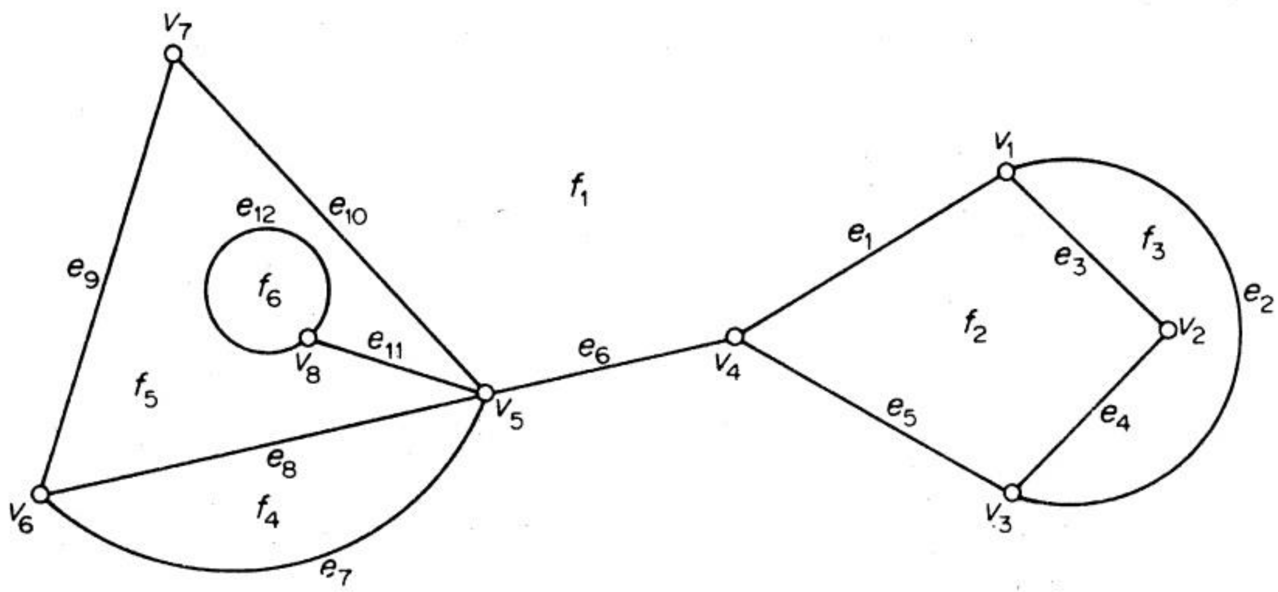
O grau de uma face ***$d_G(f)$*** corresponde ao número de arestas incidentes nessa face, onde **arestas de corte contam 2 vezes**.

$d_G(f2) = 4$

$d_G(f3) = 3$

$d_G(f5) = 6$

$d_G(f1) = 8$



Planaridade

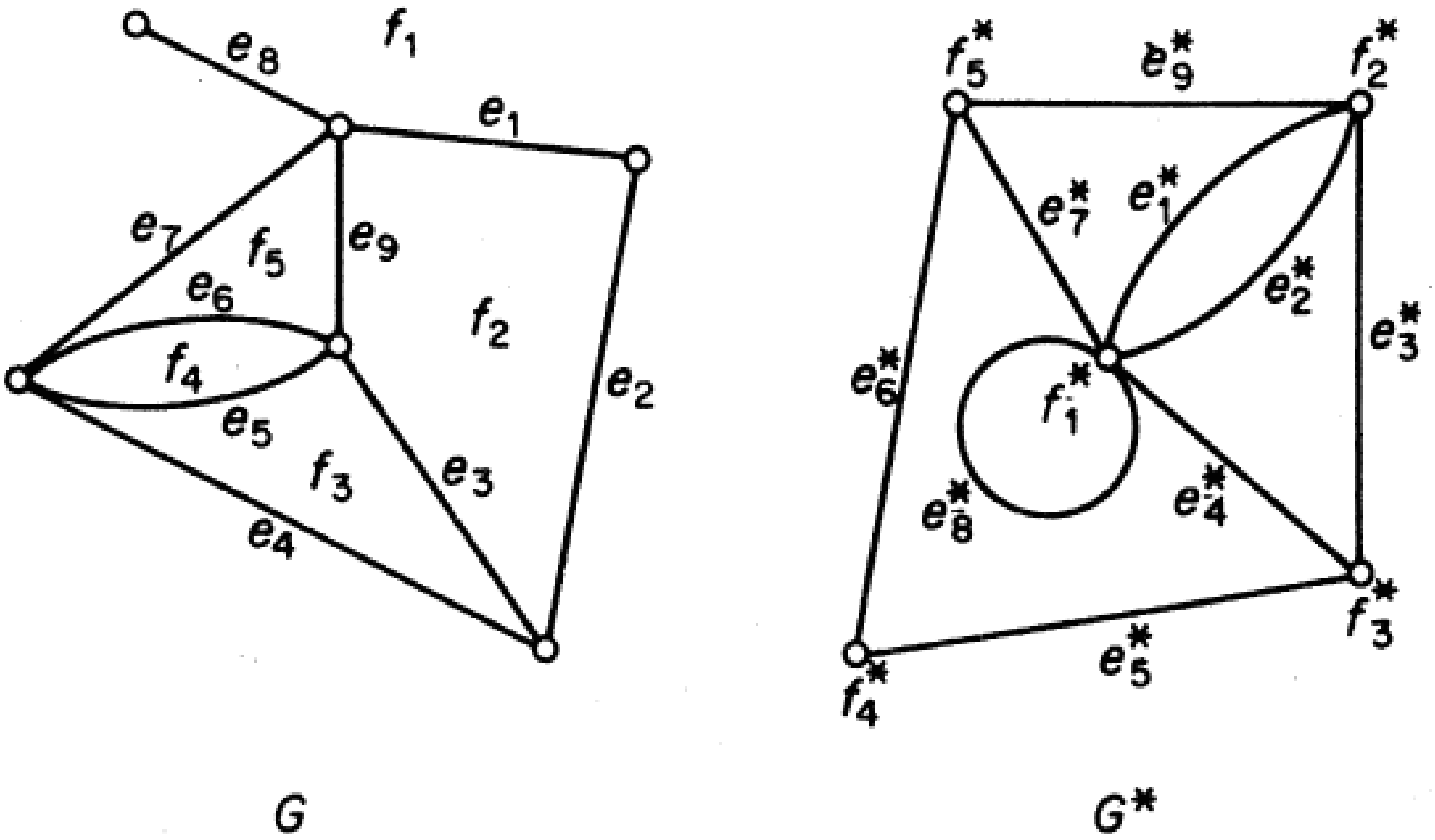
Dado um grafo planar **G**, podemos definir o Grafo **G*** da seguinte forma:

Cada face ***f*** de **G** corresponde a um vértice ***f**** de **G***

Dois vértices ***f**** e ***g**** são ligados por uma aresta ***e**** em **G*** se e somente se suas faces correspondentes ***f*** e ***g*** forem separadas por uma aresta em **G**

A esse grafo **G*** damos o nome de grafo dual.

Planaridade



Planaridade

Teorema:

Se G é uma grafo planar, então

$$\sum d_g(f_i) = 2m$$

Prova: direto do grafo dual

Planaridade

Existe uma fórmula simples que relaciona o número de vértices, arestas e faces em um grafo planar conexo, chamada Fórmula de Euler:

Teorema:

Se G for um grafo planar conexo então:

$$n - m + \Phi = 2$$

Prova:

Por indução em Φ, número de faces de G, se $\Phi = 1$, então cada aresta de G é uma aresta de corte, portanto, sendo G conexo, é uma árvore. Neste caso $m = n - 1$, o que está de acordo com o teorema.

Planaridade

Agora suponha que isso é verdade para todo grafo planar conexo com menos de Φ faces, e seja G um grafo planar conexo com $\Phi \geq 2$ faces, escolha uma aresta e de G que não seja uma aresta de corte, então G – e é um grafo planar conexo com Φ - 1 faces, desde que as duas faces de G separadas pela aresta e se combinam para formar uma única face de G – e, pela hipótese de indução:

$$n(G-e) - m(G-e) + \Phi(G-e) = 2$$

Planaridade

Utilizando as relações:

$$n(G-e) = n(G)$$
$$m(G-e) = m(G)-1$$
$$\Phi(G-e) = \Phi(G)-1$$

Obtemos:

$$n(G) - m(G) + \Phi(G) = 2$$

O teorema segue o princípio da indução

Planaridade

Corolário:

Toda representação planar de um grafo planar conexo tem o mesmo número de faces.

Planaridade

Corolário?:

Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$, então $m \leq 3n-6$.

Prova:

Como visto anteriormente, $\Sigma\, d_G(f_i) = 2m$. Como cada face é composta por pelo menos 3 arestas, isso implica que $d_G(f_i) \geq 3$ para todo i. Logo, $2m \geq 3\Phi \Rightarrow 2m/3 \geq \Phi$. A partir da fórmula de Euler temos que $\Phi = 2 - n + m \Rightarrow 2m/3 \geq 2 - n + m \Rightarrow m \leq 3n - 6$.

Planaridade

Embora o corolário anterior estabeleça uma condição necessária para planaridade, ela não é suficiente, ou seja, existem grafos que satisfazem a condição e são não planares. Um exemplo é o grafo K3,3, o qual possui $\varepsilon = 9$, satisfazendo a condição $\varepsilon \leq 3(6) - 6$, mas não possui representação planar. Se K3,3 fosse planar, ele satisfaria a fórmula de Euler e teria $f = 2 + m - n$ regiões, ou seja, 5 regiões. Entretanto, não existe ciclo em K3,3 com menos de 4 arestas. Assim, cada região é definida por, no mínimo, 4 arestas. Uma vez que o somatório do número de arestas em cada região é igual a 2ε, teríamos $\Phi \leq 2\varepsilon/4$, ou seja, $\Phi \leq 18/4$. Esse resultado é uma contradição com o resultado anterior obtido com a fórmula de Euler. Portanto, K3,3 é não planar.

Esse resultado fica mais bonito se utilizarmos uma rgumentação como a que foi utilizada no último Corolário.

Planaridade

Esse resultado fica mais bonito (e simples) se utilizarmos uma argumentação como a que foi utilizada no último Corolário. Como ficaria a prova neste caso?

Planaridade

Estratégias de prova:

- A união de arestas em um ciclo de um grafo planar constitui uma curva de Jordan
- Se temos um número mínimo x de arestas por face, podemos assumir que: $x\Phi \leq \boldsymbol{2m}$ (usar a argumentação usada na prova do corolário)
- Checamos a planaridade pela fórmula de Euler e os corolários mostrados anteriormente.

Planaridade

Corolário:

Se G é um grafo planar simples então $\delta \leq 5$

Planaridade

Corolário:

K_5 não é planar

$K_{3,3}$ não é planar

Teorema de Kuratowski:

Um grafo é planar se, e somente se, não contém nenhuma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$

Exercícios recomendados

1 - É possível construir um grafo bipartido planar com no mínimo cinco vértices de grau 3?

2 - Em um grafo G com n vértices e m arestas, demonstre que: se todos os vértices de G possuem um grau maior
ou igual a seis, então $m \geq 3n$. Se G é um grafo planar, então pelo menos um vértice de G deve possuir um
grau menor ou igual a cinco

3 - Prove ou dê um contraexemplo: Todo grafo 4-regular planar possui um k3

Referências

Capítulo 9 do Livro de Bondy J. A. e Murty U. S. R., Graph Theory with Applications, Elsevier, 1976.

Adaptado do material da Profa. Leila Silva.

Seção 1.4 do Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012

Seção 2.5 do Teoria Computacional de Grafos 1ª Ed. Jayme Luiz Szwarcfiter. Elsevier, 2018.