Grafos e Algoritmos Computacionais

Aula 3: Terminologia Básica de Grafos

André Britto

Terminologia Básica de Grafos

Grafo

Um **grafo** G consiste num conjunto VG de elementos chamados **vértices**, num conjunto EG de elementos chamados **arestas**, juntamente com uma **função de incidência** ψ_{G} que associa a cada aresta dois vértices não necessariamente distintos chamados **extremos** da aresta.

Terminologia Básica de Grafos

Exemplo:

$$VG = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$$

$$EG = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \}$$

$\psi_G(a_1) = v_1v_2$

$\psi_G(a_2) = v_2v_3$

$\psi_G(a_3) = v_2v_5$

$\psi_G(a_4) = v_4v_5$

$\psi_G(a_5) = v_5v_6$

$\psi_G(a_6) = v_5v_6$

$\psi_G(a_7) = v_6v_6$

Terminologia Básica de Grafos

Representação Geométrica

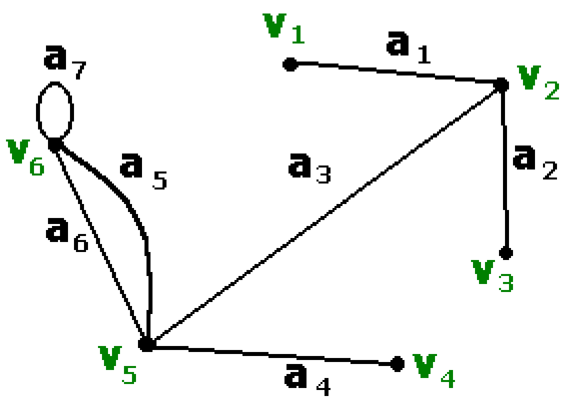
Grafos são nomeados assim pois podem ser representados graficamente e é sua representação gráfica que nos ajuda a entender as suas propriedades.

Terminologia Básica de Grafos

Representação Geométrica

- vértices → pontos ou círculos
- arestas → linhas
- função de incidência → quais pontos serão ligados pelas linhas

- Exemplo:

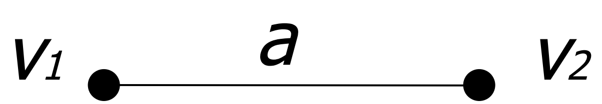


Representação geométrica do grafo com função de incidência do exemplo anterior.

Propriedades de um Grafo

Se v_1 e v_2 são extremos de a, então dizemos que v_1 e v_2 são **adjacentes** ou **vizinhos**. Dizemos também que a **incide** em v_1 (e em v_2), ou que a **liga** os vértices v_1 e v_2.

Notação: $a \equiv (v_1, v_2)$



Propriedades de um Grafo

Arestas adjacentes → arestas com um extremo em comum.

Arestas múltiplas ou paralelas → mesmos extremos.

Laço → extremos idênticos.

Ordem → número de vértices do grafo.

Tamanho → $|VG| + |EG|$

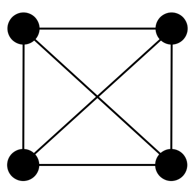
Grau → notação: $g_G(v)$ – número de arestas que incidem em v (laços contam duas vezes).

Propriedades de um Grafo

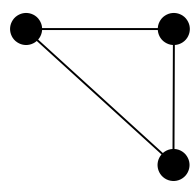
Tipos especiais de grafos

- **Grafo simples** → não contém arestas múltiplas nem laços.
- **Multigrafo** → possui no mínimo duas arestas paralelas.
- **Grafo finito** → E*G* e *VG* ambos finitos.
- **Grafo vazio** → E*G* e *VG* ambos vazios.
- **Grafo trivial** → possui somente um vértice
- **Grafo completo** → simples e cada dois vértices distintos são adjacentes. Notação: Grafo completo de ordem $n \rightarrow K_n$

Ex:



K_4



K_3

Propriedades de um Grafo

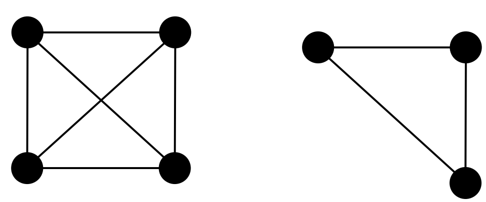
Tipos especiais de grafos

- **Grafo simples** → não contém arestas múltiplas nem laços.

Muito da teoria de grafos está relacionada com o estudo de grafos simples

K_n

Ex:



K_4 K_3

Propriedades de um Grafo

É comum confundir-se um grafo com sua representação geométrica.

Será que podemos ter duas representações geométricas para o mesmo grafo?

Propriedades de um Grafo

Será que podemos ter duas representações geométricas para o mesmo grafo?

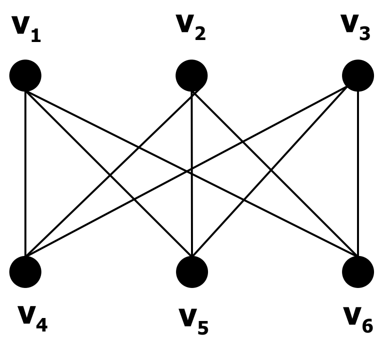
Ou seja...

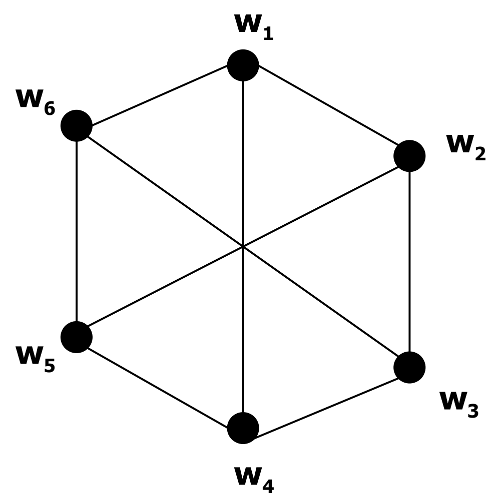
Dados dois grafos G_1 e G_2, com $|VG_1| = |VG_2|$, existe uma função unívoca $f: VG_1 \rightarrow VG_2$, tal que $(v,w) \in EG_1$ se e somente se $(f(v), f(w)) \in EG_2$, para todo $v,w \in VG_1$?

Se sim, os grafos são ditos **isomorfos** entre si.

Propriedades de um Grafo

Grafos Isomorfos





Mapeamento da função *f*:

F(v_1) → W_1

F(v_2) → W_5

F(v_3) → W_3

F(v_4) → W_2

F(v_5) → W_4

F(v_6) → W_6

v_1 é adjacente a v_4, v_5, v_6

w_1 é adjacente a w_2, w_4, w_6

v_2 é adjacente a v_4, v_5, v_6

w_5 é adjacente a w_2, w_4, w_6

...

Propriedades de um Grafo

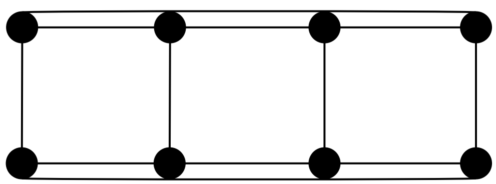
Grafos isomorfos

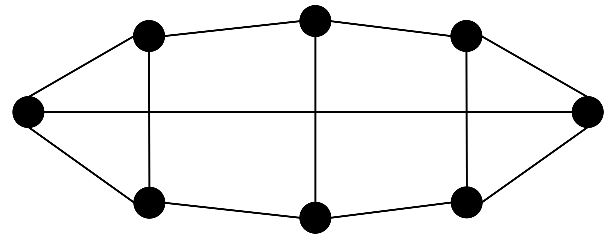
Condições necessárias mas não suficientes para isomorfismo

- Mesmo número de vértices
- Mesmo número de arestas
- Mesmos número de componentes
- Mesmo número de vértices com o mesmo grau

Propriedades de um Grafo

Grafos Isomorfos





G1 e *G2* não são isomorfos.

Isomorfismo de subgrafos → NP-Completo

Propriedades de um Grafo

Tipos especiais de grafos

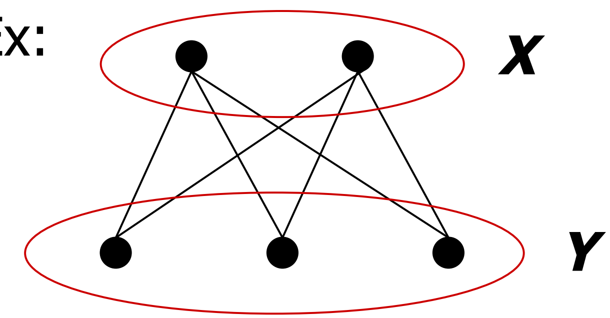
Grafo *k*-regular → $g(v) = k$ para todo $v \in VG$

Grafo regular → se é grafo *k*-regular para algum *k*.

Ex: K_4 é *3*-regular, portanto é regular.

Grafo bipartido → *VG* pode ser biparticionado em dois conjuntos *X* e *Y* ($X \cup Y = VG$, $X \cap Y = \emptyset$) tais que cada aresta tem um extremo em *X* e outro em *Y*.

Ex:



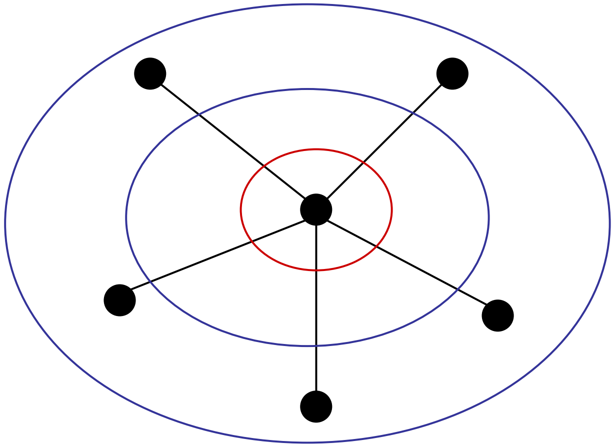
$K_{2,3}$

Propriedades de um Grafo

Tipos especiais de grafos

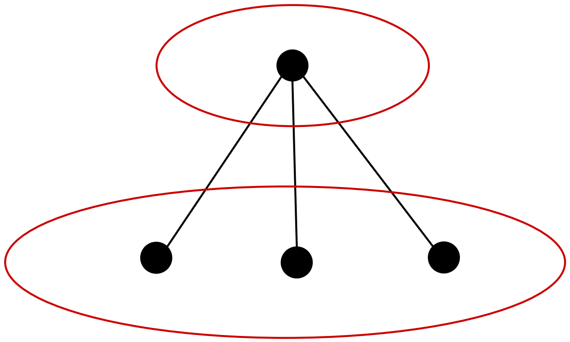
Dizemos assim que *(X,Y)* é uma **bipartição** de G.

Notação bipartido completo: $K_{m,n}$



$\boldsymbol{K_{1,5}}$

estrela



$\boldsymbol{K_{1,3}}$

garra

Propriedades de um Grafo

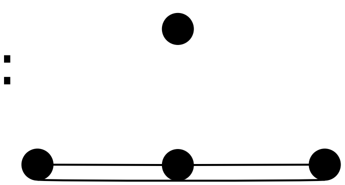
Tipos especiais de grafos

Complemento de $G \rightarrow$ Notação: $\overline{G}$

$$V\overline{G} = VG$$

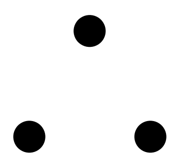
vértices adjacentes em G não o são em $\overline{G}$

complemento da garra:



$\overline{K_{1,3}}$

complemento do K_3:



$\overline{K_3}$

Propriedades de um Grafo

Proposição

A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo, ou seja,

$$\sum_{v \in VG} g(v) = 2\,|aG|$$

Propriedades de um Grafo

Corolário

Num grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Propriedades de um Grafo

Corolário

Num grafo, o número de vértices de grau ímpar é sempre par.

Ideia da prova:

$$2\,|aG| = \sum_{v \in VG} g(v) = \sum_{\substack{v \in VG \\ g(v) \text{ é par}}} g(v) + \sum_{\substack{v \in VG \\ g(v) \text{ é ímpar}}} g(v)$$

| ---par--- | | ---par--- | $\rightarrow$ | ---par--- |

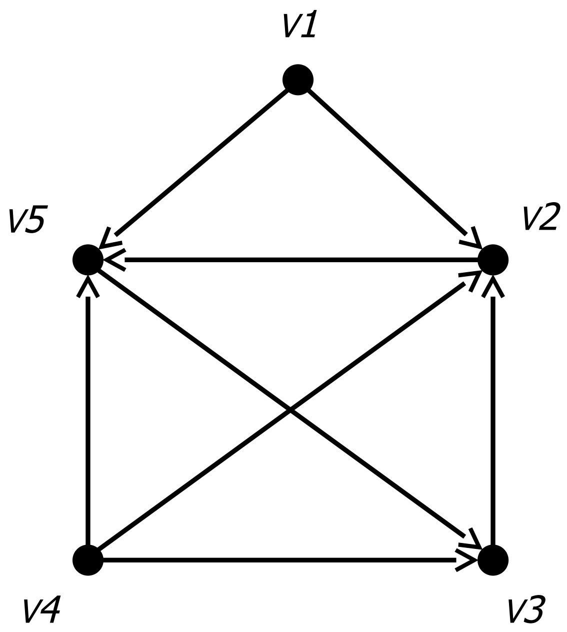
Dígrafo ou Grafo Orientado

Um **dígrafo** *D* consiste num conjunto não vazio de vértices *VD*, de arestas E*D* e de uma **função de incidência** ψ_D que associa a cada aresta de *D* um par ordenado de vértices de *D*, estes não necessariamente distintos. Se uma aresta *a* liga o vértice *u* ao vértice *v* dizemos que *u* é **vértice origem** de *a* e v é **vértice destino** de *a*.

OBS: $(v,u) \not\equiv (u,v)$

Terminologia Básica de Grafos

- Grau de saída de v – quantidade de arestas que divergem (saem) do vértice v. Notação: $g_s(v)$.
- Grau de entrada de v – quantidade de arestas que entram no vértice v. Notação: $g_e(v)$.
- Ex: $g_s(v_1)= 2; g_e(v_1)=0$.
- As definições para grafos valem para dígrafos, adaptando-as consistentemente para considerar a orientação.



Exercícios Recomendados

- Bondy e Murty (edição de 1976)
  - 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4, 1.2.7

1 - Quantos vértices e arestas tem os grafos abaixo? Justifique.

a. K_n

b. $K_{m,n}$ (grafo bipartido completo)

2. Determine o numero de vértices para os seguintes grafos:

a. G tem 9 arestas e todos os vértices tem grau 3.

b. G simples e regular com 15 arestas.

c. G tem 10 arestas com 2 vértices de grau 4 e todos os outros de grau 3

3. Se G possui vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, a sequência $(d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n))$ é denominada sequência de graus de G. Existe um grafo simples com cinco vértices com as seguintes sequencias? Se existir, desenhe um possível grafo.

a. 3, 3, 3, 3, 2

b. 1, 2, 3, 4, 5

c. 1, 2, 3, 4, 4

d. 3, 4, 3, 4, 3

e. 0, 1, 2, 2, 3

f. 1, 1, 1, 1, 1

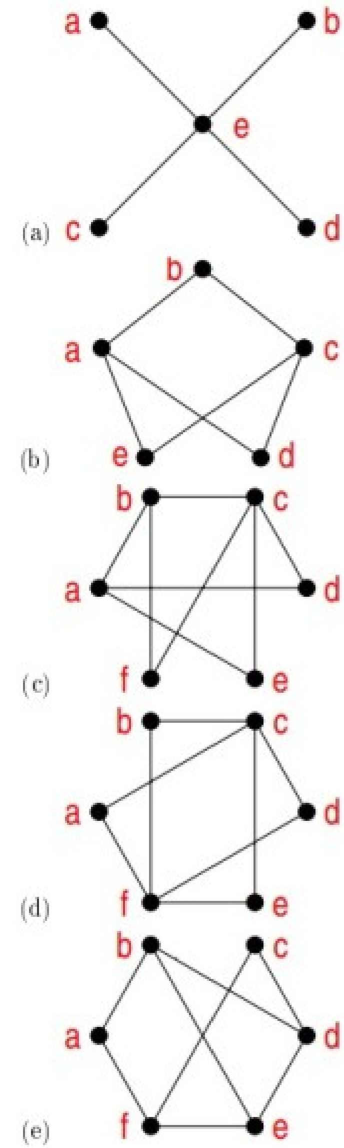
Exercícios Recomendados

4. Um grafo com 10 vértices de graus 1,1,2,2,2,3,4,4,4 e 6 pode existir? Justifique.

5. Se o grafo simples G tem v vértices e m arestas, quantas arestas tem o complemento de G?

6. Quantos vértices tem um grafo regular de grau 4 com 10 arestas?

7. Determine se cada um dos grafos abaixo é bipartido e informe a definição da bipartição



Referências

- Seções 2.1, 2.2 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais,* Ed. Campus, 1983.
- Capítulo 1 do Bondy J. A. e Murty U. S. R., *Graph Theory with Applications,* Elsevier, 1976.
- Material de aula do Prof. Antonio Alfredo Ferreira Loureiro
- Adaptado do material de aula da Profa. Leila Silva