Departamento de Computação/UFS

Grafos e Algoritmos Computacionais

Representação de Grafos

Prof. André Britto

Representação de Grafos no Computador

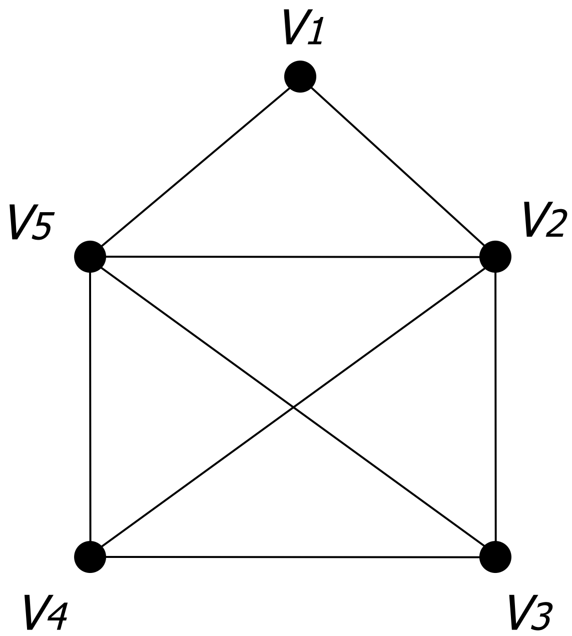
Matriz de Adjacência

- Sejam $n = |VG|$ e $m = |EG|$

- Dado um grafo G a **matriz de adjacência** $A = (a_{ij})$, $i \leq j \leq n$ é uma matriz $n \times n$ tal que:

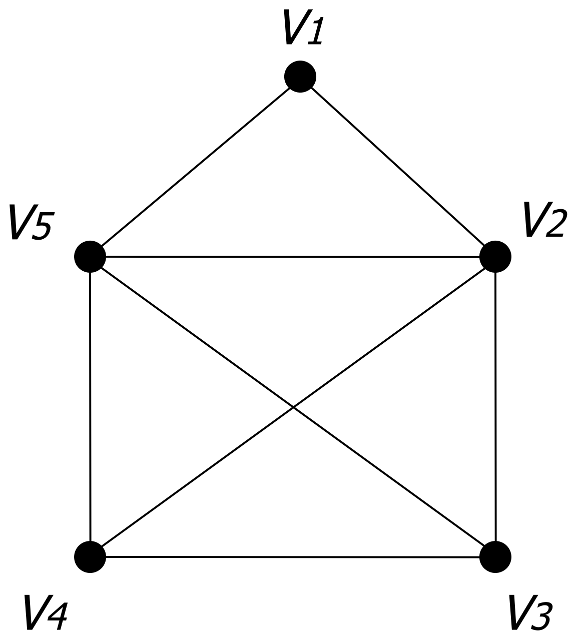
  - $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j) \in aG$
  - $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ caso contrário

Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	0	1	0	0	1
V2	1	0	1	1	1
V3	0	1	0	1	1
V4	0	1	1	0	1
V5	1	1	1	1	0

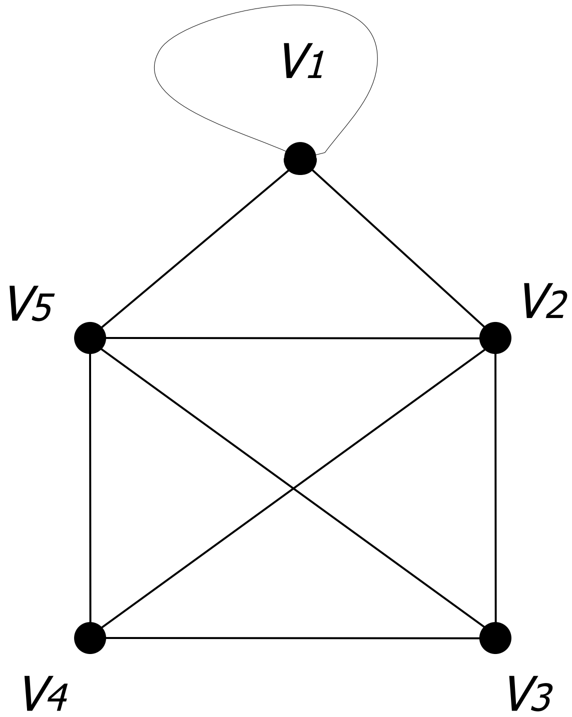
Representação de Grafos no Computador



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	0	0	1
V_2	1	0	1	1	1
V_3	0	1	0	1	1
V_4	0	1	1	0	1
V_5	1	1	1	1	0

- E laços e arestas múltiplas ?

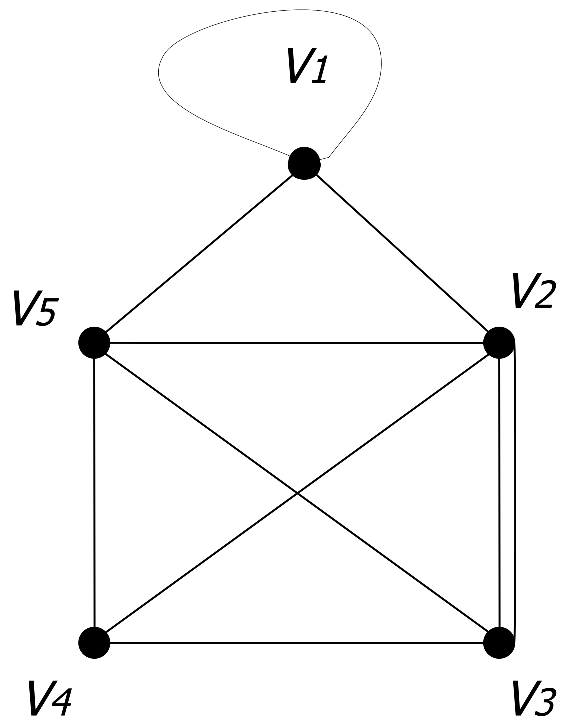
Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	2	1	0	0	1
V2	1	0	1	1	1
V3	0	1	0	1	1
V4	0	1	1	0	1
V5	1	1	1	1	0

- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	2	1	0	0	1
V2	1	0	2	1	1
V3	0	2	0	1	1
V4	0	1	1	0	1
V5	1	1	1	1	0

- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador

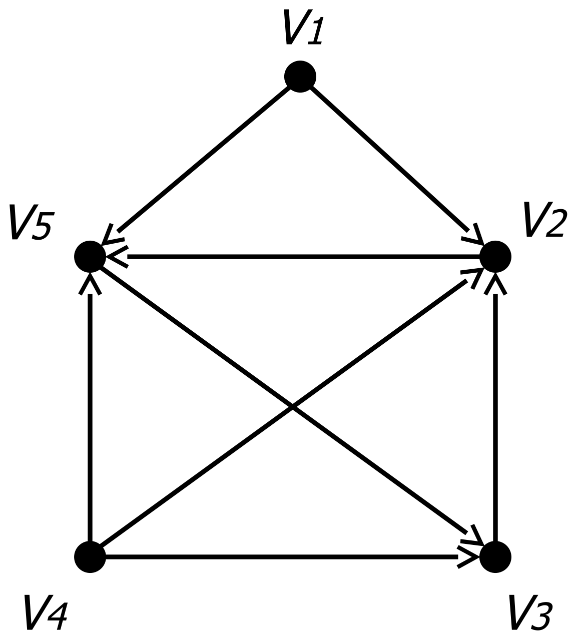
Propriedades

- Simétrica para grafos não orientados
  - Soma do número de valores diferentes de 0 = *2m*
- Consulta existência de uma aresta/arco com um acesso à memória: O(1)
- Ocupa O(n^2) de espaço mesmo para grafos esparsos.

Representação de Grafos no Computador

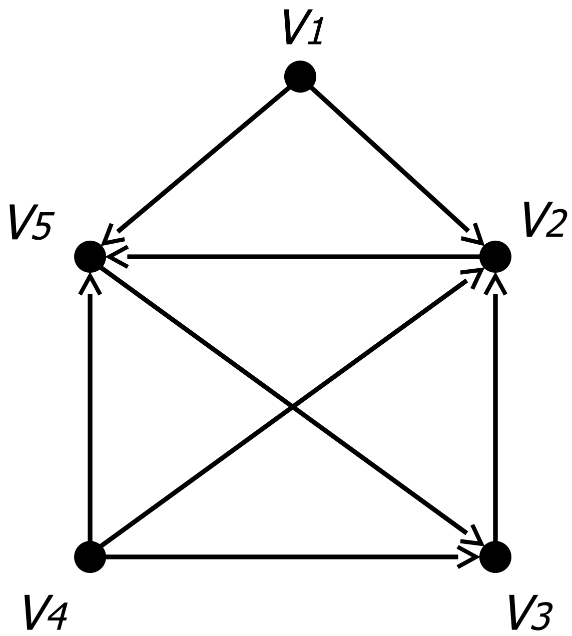
- Para dígrafos:
  - $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow (v_i, v_j)$ divergente de v_i e convergente a v_j
  - $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ caso contrário

Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	0	1	0	0	1
V2	0	0	0	0	1
V3	0	1	0	0	0
V4	0	1	1	0	1
V5	0	0	1	0	0

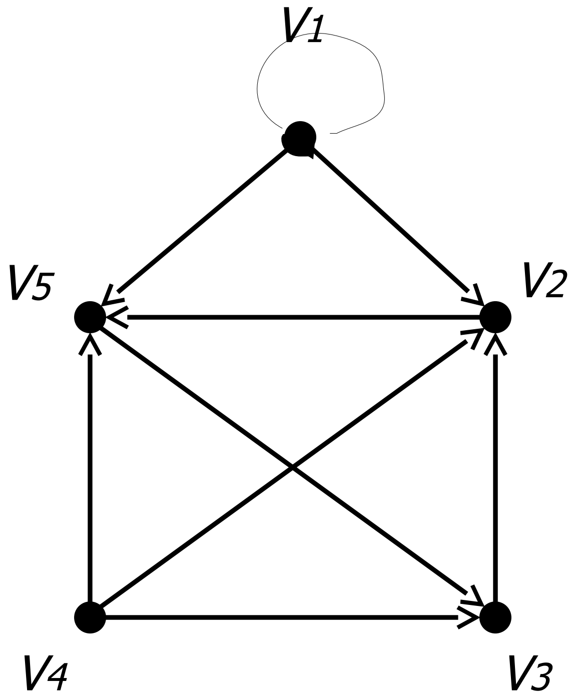
Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	0	1	0	0	1
V2	0	0	0	0	1
V3	0	1	0	0	0
V4	0	1	1	0	1
V5	0	0	1	0	0

- E laços e arestas múltiplas ?

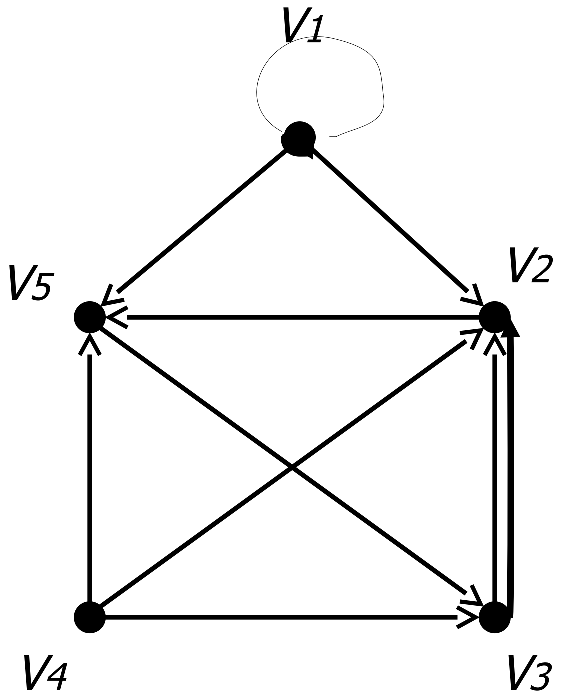
Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	1	1	0	0	1
V2	0	0	0	0	1
V3	0	1	0	0	0
V4	0	1	1	0	1
V5	0	0	1	0	0

- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador



	V1	V2	V3	V4	V5
V1	1	1	0	0	1
V2	0	0	0	0	1
V3	0	2	0	0	0
V4	0	1	1	0	1
V5	0	0	1	0	0

- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador

Propriedades

- Não é simétrica em geral nos dígrafos
  - Soma do número de valores diferentes de 0 = m

Representação de Grafos no Computador

Complexidade

n

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
V_1	0	1	0	0	1
V_2	1	0	1	1	1
V_3	0	1	0	1	1
V_4	0	1	1	0	1
V_5	1	1	1	1	0

n

Representação de Grafos no Computador

Complexidade

$O(n^2)$

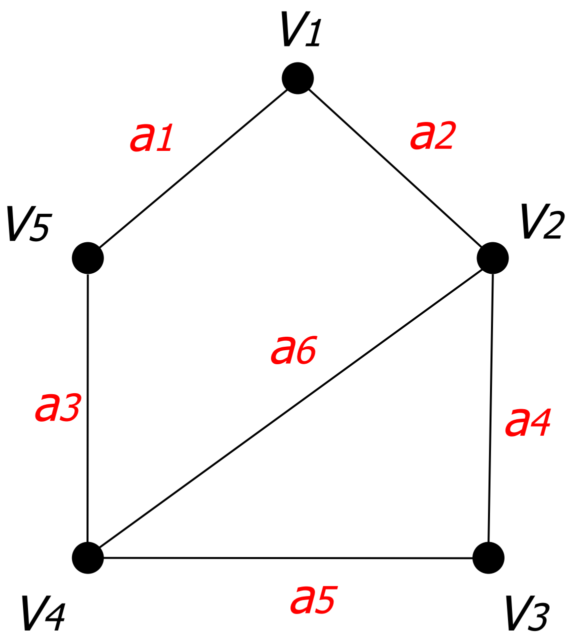
$$
n \left\{ \begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array} \right.
$$

Representação de Grafos no Computador

Matriz de Incidência

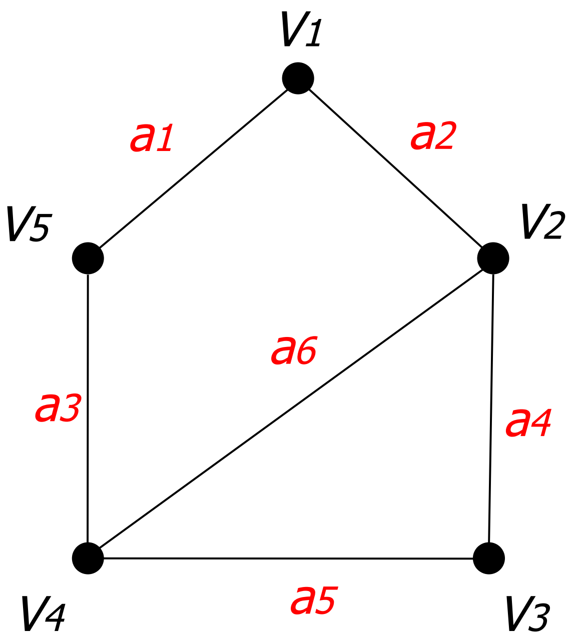
- Dado um grafo G a **matriz de incidência** $B = (b_{ij})$, é uma matriz $n \times m$ onde:
  - $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ aresta a_j incide no vértice v_i
  - $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ caso contrário

Representação de Grafos no Computador



	a1	a2	a3	a4	a5	a6
V1	1	1	0	0	0	0
V2	0	1	0	1	0	1
V3	0	0	0	1	1	0
V4	0	0	1	0	1	1
V5	1	0	1	0	0	0

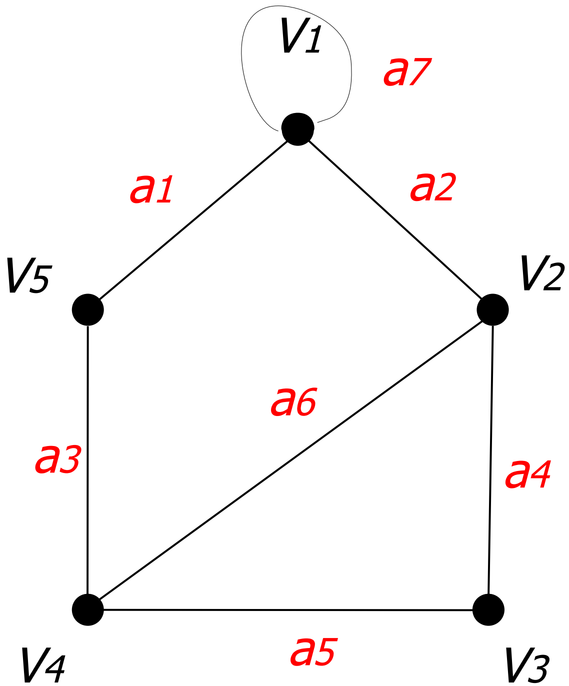
Representação de Grafos no Computador



	a1	a2	a3	a4	a5	a6
V1	1	1	0	0	0	0
V2	0	1	0	1	0	1
V3	0	0	0	1	1	0
V4	0	0	1	0	1	1
V5	1	0	1	0	0	0

- E laços e arestas múltiplas ?

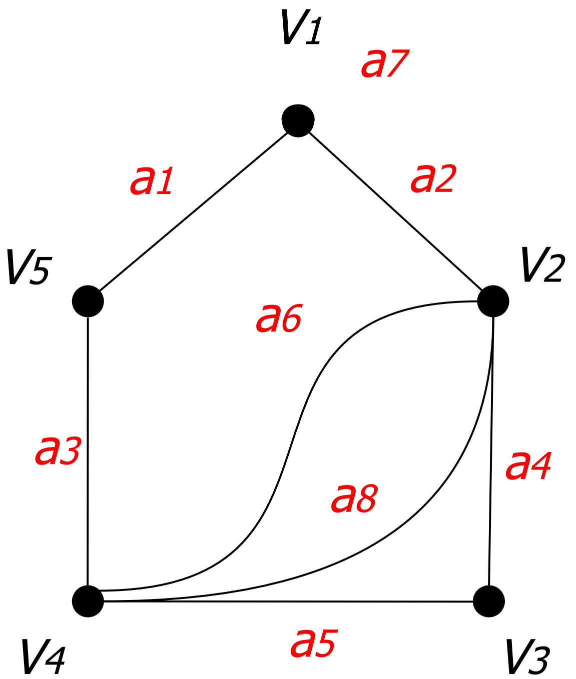
Representação de Grafos no Computador



	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7
V1	1	1	0	0	0	0	2
V2	0	1	0	1	0	1	0
V3	0	0	0	1	1	0	0
V4	0	0	1	0	1	1	0
V5	1	0	1	0	0	0	0

- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador



	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8
V1	1	1	0	0	0	0	2	0
V2	0	1	0	1	0	1	0	1
V3	0	0	0	1	1	0	0	0
V4	0	0	1	0	1	1	0	1
V5	1	0	1	0	0	0	0	0

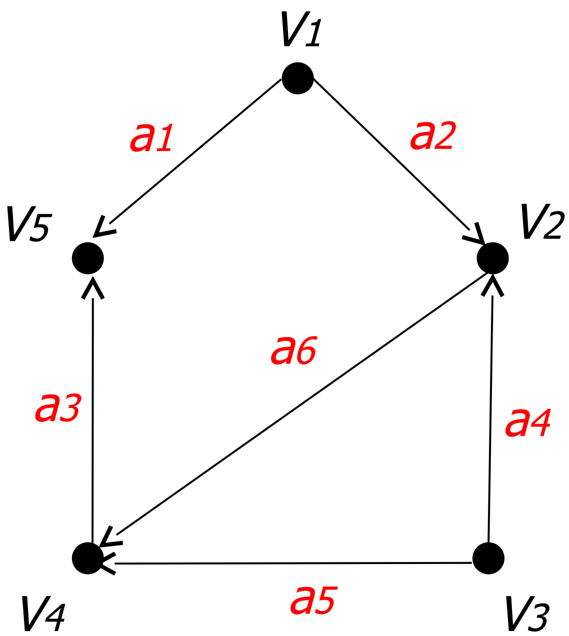
- E laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador

<u>Matriz de Incidência em Dígrafos</u>

- Dado um dígrafo D, sem laços, a **matriz de incidência** $B = (b_{ij})$, é uma matriz $n \times m$ onde:
  - $b_{ij} = 1 \Leftrightarrow$ aresta a_j diverge do vértice v_i
  - $b_{ij} = -1 \Leftrightarrow$ aresta a_j converge no vértice v_i
  - $b_{ij} = 0 \Leftrightarrow$ demais casos

Representação de Grafos no Computador



	a1	a2	a3	a4	a5	a6
V1	1	1	0	0	0	0
V2	0	-1	0	-1	0	1
V3	0	0	0	1	1	0
V4	0	0	1	0	-1	-1
V5	-1	0	-1	0	0	0

Representação de Grafos no Computador

Complexidade

m

n

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	1	0	1
v_3	0	0	0	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1	1
v_5	1	0	1	0	0	0

Representação de Grafos no Computador

Complexidade

m

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	0	1	0	1	0	1
v_3	0	0	0	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1	1
v_5	1	0	1	0	0	0

n

$O(nm)$

Representação de Grafos no Computador

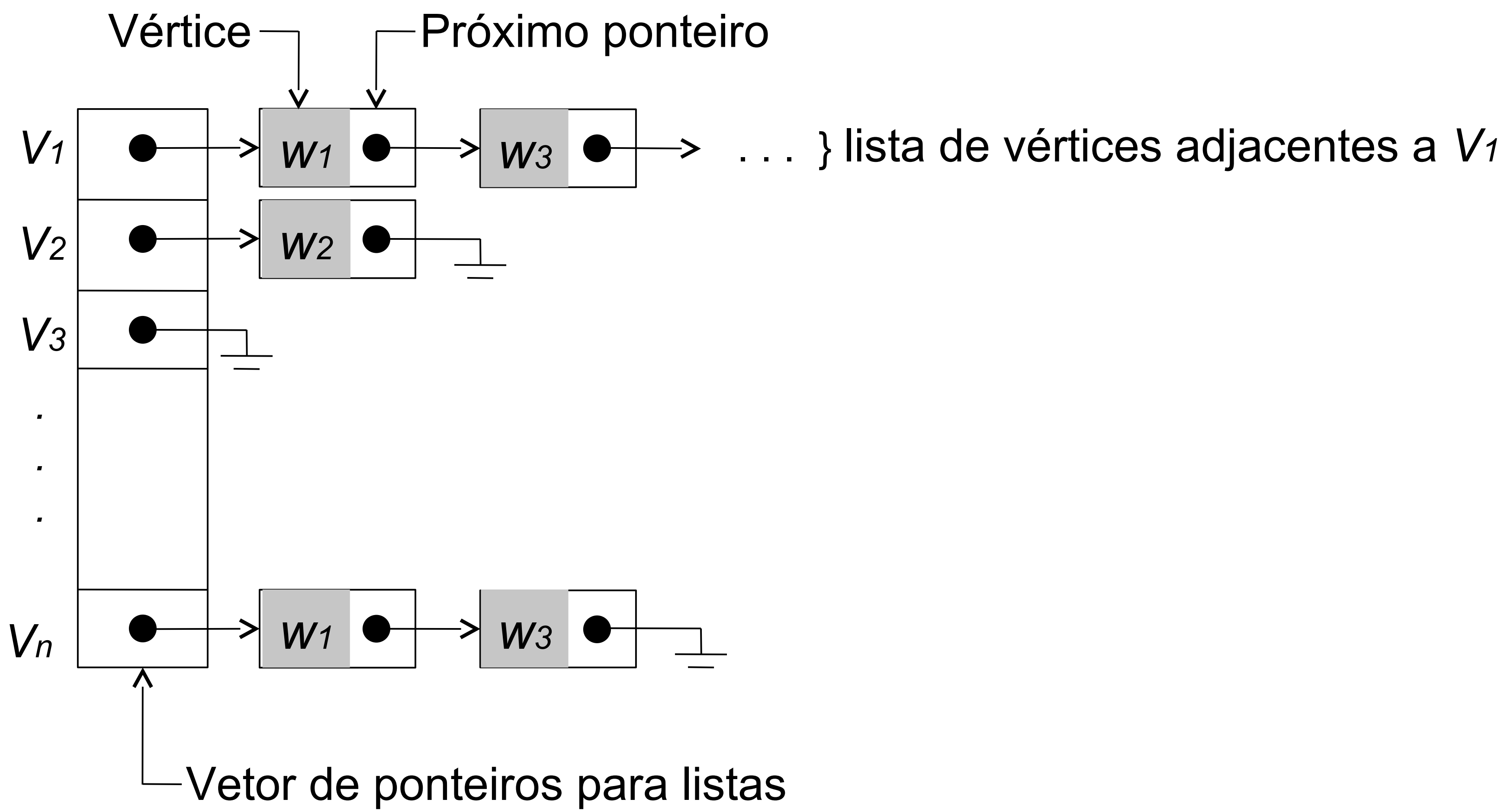
Estrutura de Adjacência

- Seja G um grafo. A **estrutura de adjacência** (EA) de G é um conjunto de n listas $EA(v)$, $\forall v \in VG$.

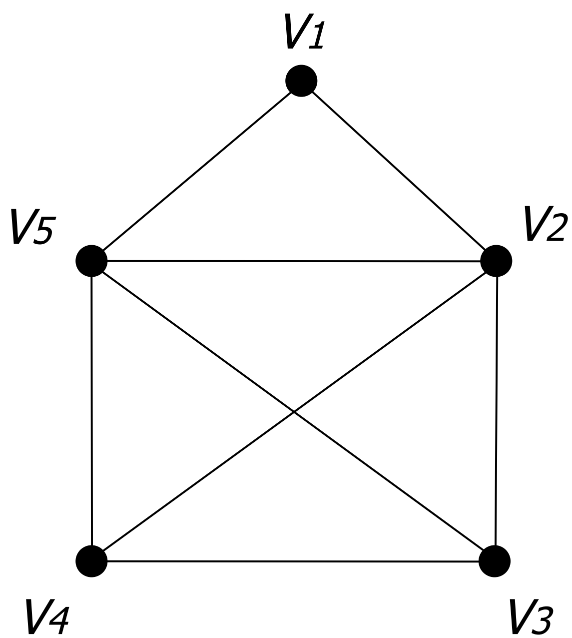
- Cada lista $EA(v)$ é denominada **lista de adjacências** do vértice v e contém os vértices w adjacentes a v em G. Ou seja:

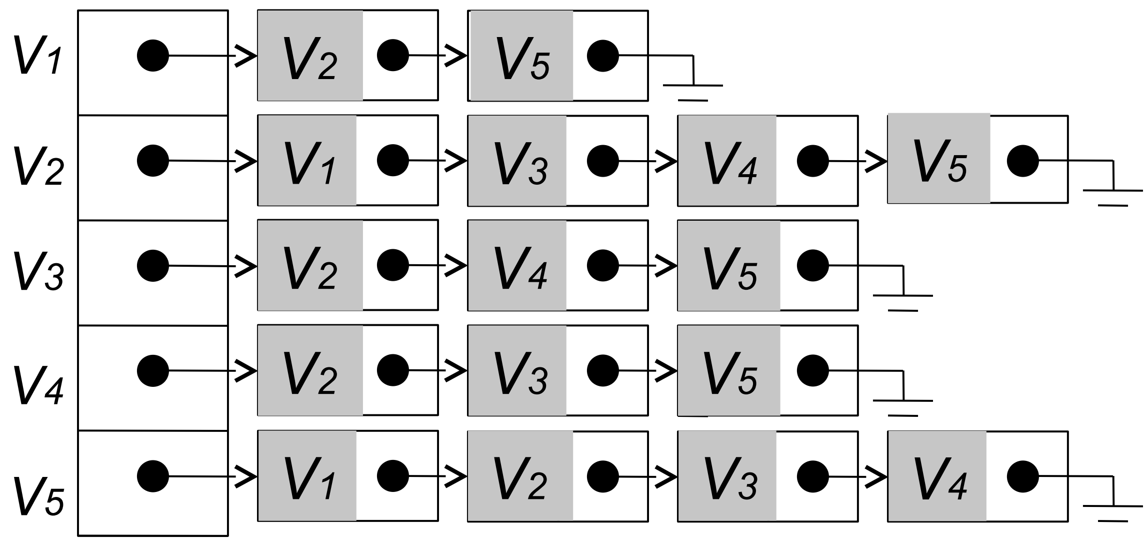
  - $EA(v) = Adj(v) = \{ w \mid (v,w) \in EG \}$

Representação de Grafos no Computador



Representação de Grafos no Computador

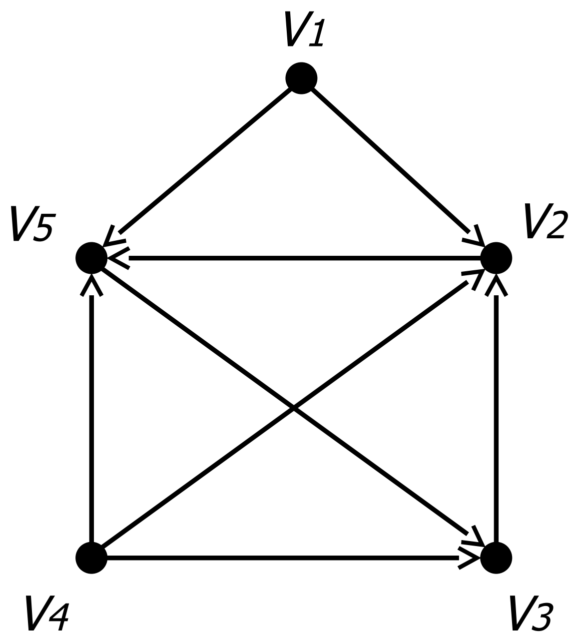


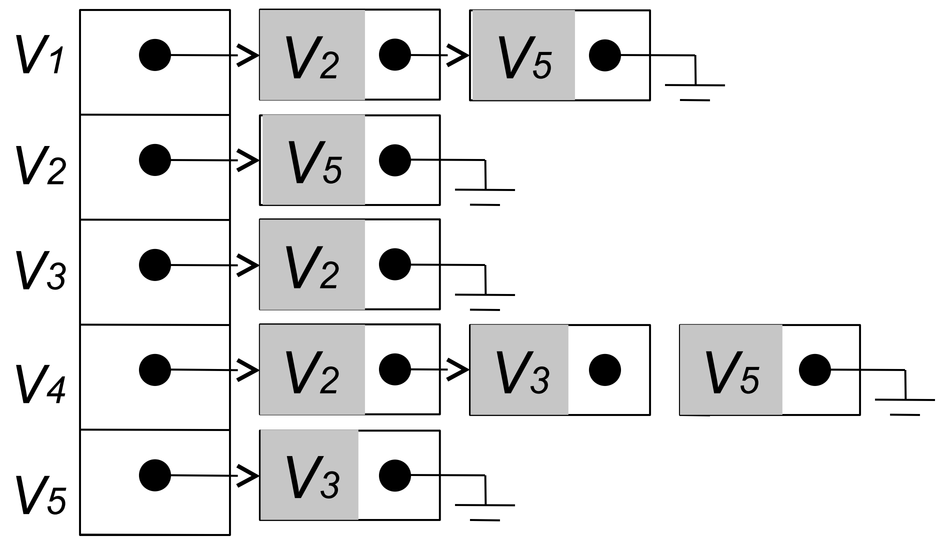


- Total de *n* listas com *2m* elementos ao todo.
- Laços e arestas múltiplas ?

Representação de Grafos no Computador

- Exemplo com Dígrafo

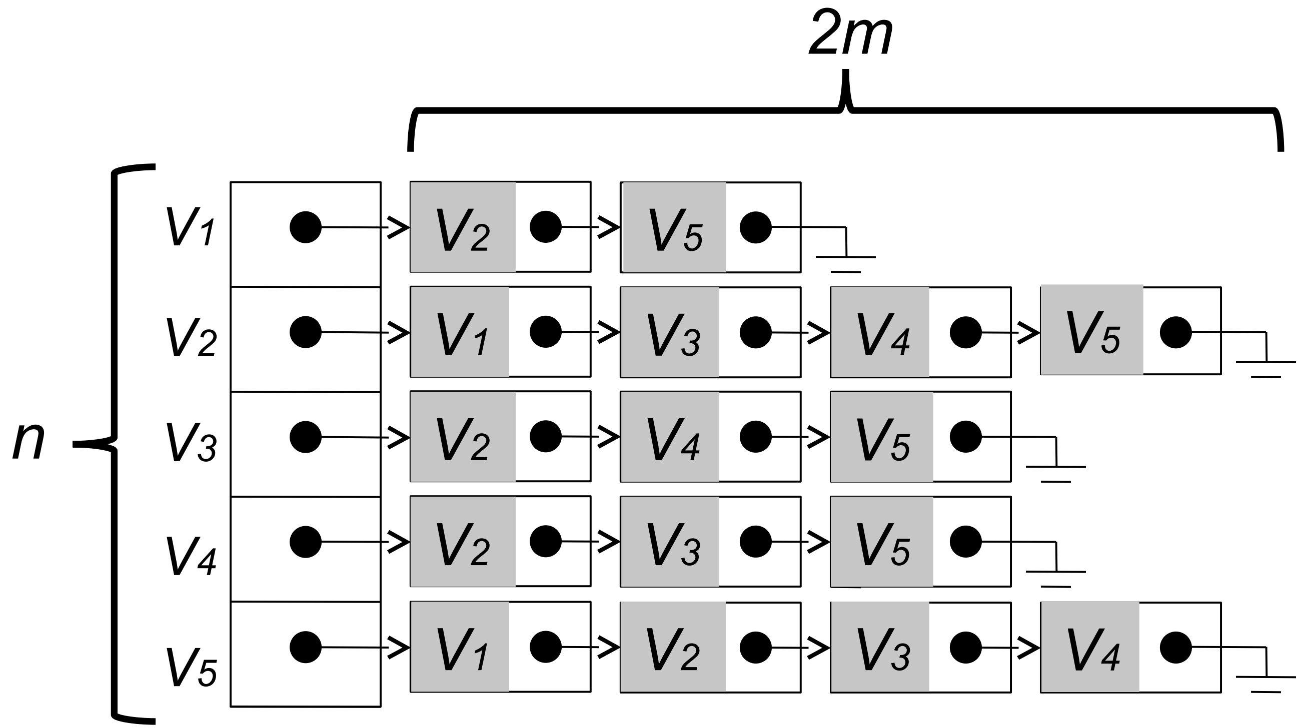




- Total de elementos nas *n* listas com *m* elementos ao todo.

Representação de Grafos no Computador

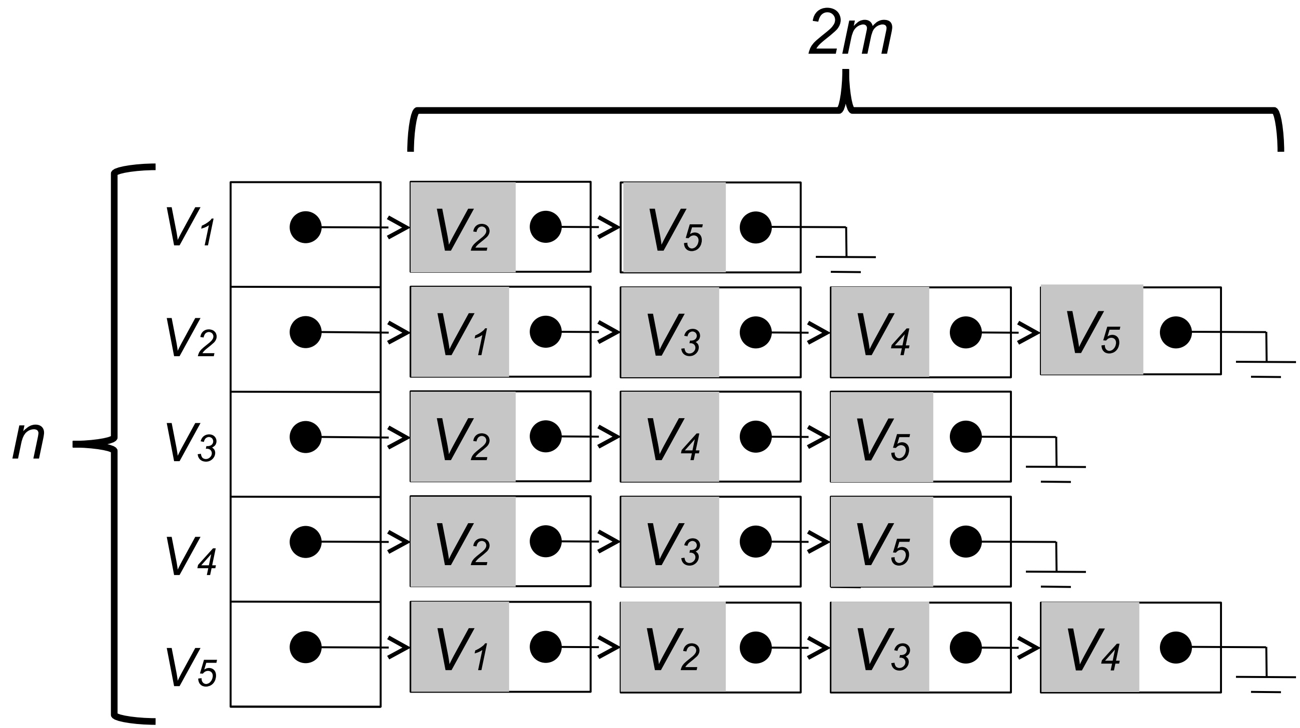
Complexidade



Representação de Grafos no Computador

Complexidade

O(n+m)



Representação de Grafos no Computador

Propriedades

- Ocupa menos memória: O(m);
- No entanto, a complexidade da operação de determinar uma adjacência é limitada por O (n)

Representação de Grafos no Computador

Técnica de Adjacência

- Seja G um grafo e $P(v)$ uma propriedade definida de modo apropriado para todo $v \in VG$. A **técnica de adjacência** consiste em examinar $Adj(v)$, $\forall v \in VG$ e verificar se um vértice $w \in Adj(v)$ satisfaz $P(v)$.

- Exemplo Simples : Dado um grafo G e um vértice $v \in VG$, determinar quantos vértices adjacentes a v tem grau $g(v)$, tal que $g(v) \geq 3$.

Exercícios recomendados

- Representação
- Bondy e Murty: 1.3.1,1.3.2.
- Cormen: 22-1.1, 22-1.3 e 22-1.4.

- Conceitos básicos

Bondy e Murty: 1.5.1, 1.5.3, 1.5.4, 1.5.5

Exercícios recomendados

1 Suponha uma festa em que cada participante torce ou pelo Sergipe ou pelo Confiança e apesar da rivalidade dos times, a convivência é harmônica e muitos são amigos. Suponha ainda que, na festa, cada participante é amigo de precisamente k ($k \geq 1$) outros participantes, todos eles torcedores do time rival ao seu. Sobre esta questão pede-se:

(a) Modele a situação descrita como um grafo. O que representam os vértices e arestas do grafo? O grafo é orientado?

(b) Quais propriedades o grafo do item (a) possui? Justifique sua resposta.

(c) Desenhe um exemplo de uma representação geométrica possível para este grafo, para um grafo de ordem 8 e tamanho 16.

(d) Dê a matriz de adjacência, a matriz de incidência e a estrutura de adjacência para o grafo exemplo da letra (c).

(e) Mostre que, nesta festa, a quantidade de torcedores de cada time é a mesma. Mas para resolver o problema faça:

(e.1) Enuncie a asserção que deseja provar usando a linguagem de Teoria dos Grafos.

(e.2) Prove a asserção estabelecida por você no item (e.1)

Exercícios recomendados

2. Mostre que se G é simples e H é completo com a mesma ordem n de G, então $|aG| \leq |aH| = \binom{n}{2}$

3. Em um grupo de nove pessoas, cada uma pode ser amiga de exatamente cinco outras pessoas? Justifique.

4. Se o grafo simples G tem v vértices e m arestas, quantas arestas tem o complemento de G.

Exercícios recomendados

5. Dê exemplos de:

a. Uma situação problema do mundo real que: (1) pode ser modelada na forma de um grafo sem orientação e (2) que necessariamente precisa ser modelada por um dígrafo.

b. Um grafo G que tem as seguintes propriedades: (1) cada vértice é adjacente a dois vértices e (2) cada aresta é adjacente a duas arestas. Qual o nome deste grafo?

c. Dois grafos de ordem 4 que sejam isomorfos, explicitando as duas representações geométricas distintas e o mapeamento que garante o isomorfismo.

d. Um grafo simples de tamanho 15.

Exercícios recomendados

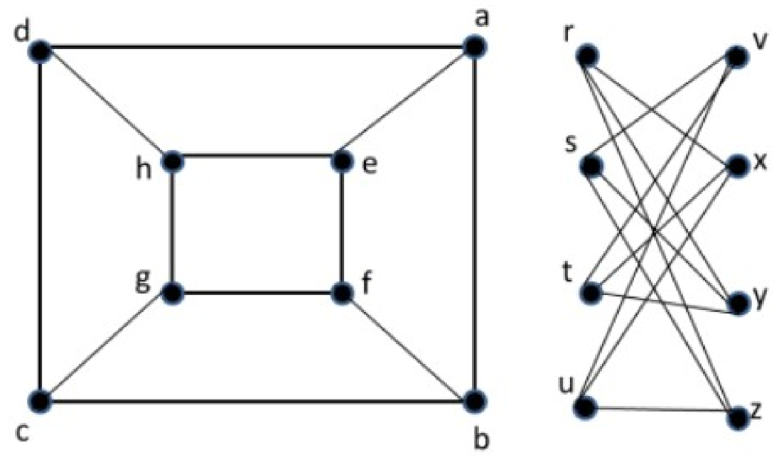
6. Dê exemplos de:

a. (1.0) Um grafo 1-regular de ordem 6 e seu complemento.

b. (1.0) Um grafo G que tem as seguintes propriedades: (1) é simples; (2) é bipartido completo, tem tamanho maior que 12 e (3) não é regular.

c. (1.0) Mostre que os grafos abaixo são isomorfos.

d. (1.0) Qual a matriz de adjacência e incidência para o grafo da esquerda abaixo.



Referências

- Seções 2.9 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais,* Ed. Campus, 1983.

- Seção 22.1 do Cormen, *Introduction to Algorithms,* MIT Press, 2001.

- Adaptado do material de aula da Profa. Leila Silva