



Grafos e Algoritmos Computacionais




Busca em Profundidade em Dígrafos: Introdução

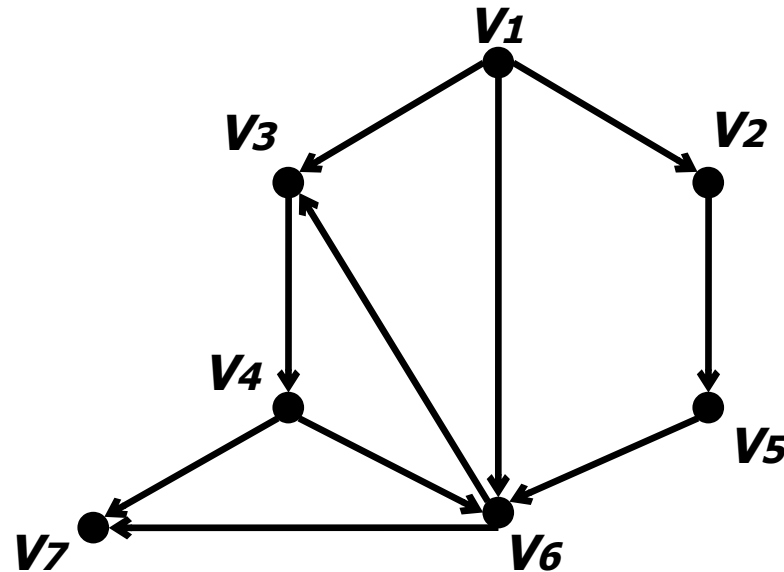
Prof. André Britto

Busca em Profundidade em Dígrafos

```
algoritmo BuscaProfundidadeEmDigrafo( $D, v$ ) {BPD}
{dados: dado um dígrafo  $D$  e um vértice  $v$  p/ raiz da busca}
início
    marque  $v$ ;
    para todas as arestas  $(v, w)$  faça
        {é equivalente a para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça}
            início
                se  $w$  é não marcado então
                    BuscaProfundidadeEmDigrafo( $D, w$ ) ;
            fim
    fim
fim
```

Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:  da árvore  de retorno  de avanço  de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



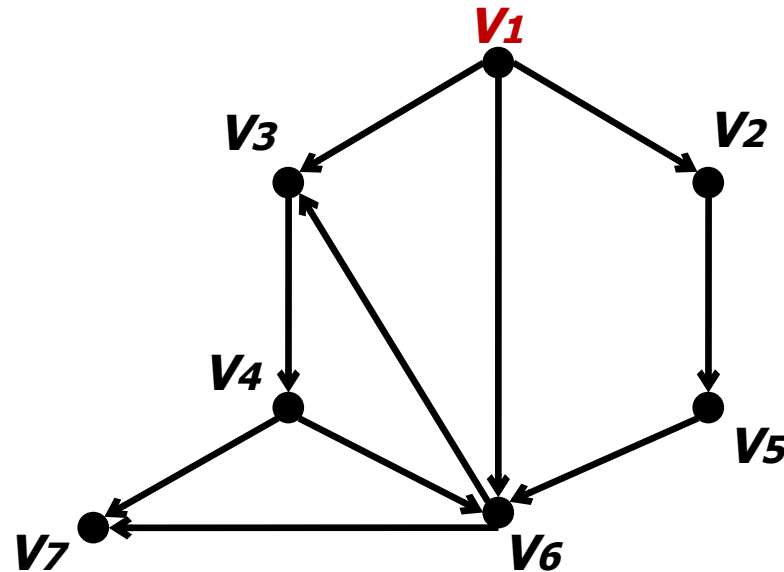
de retorno



de avanço

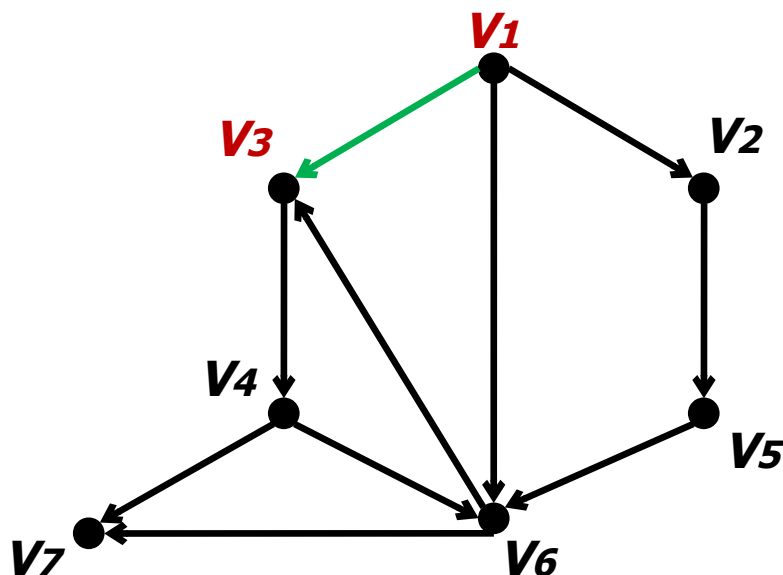


de cruzamento



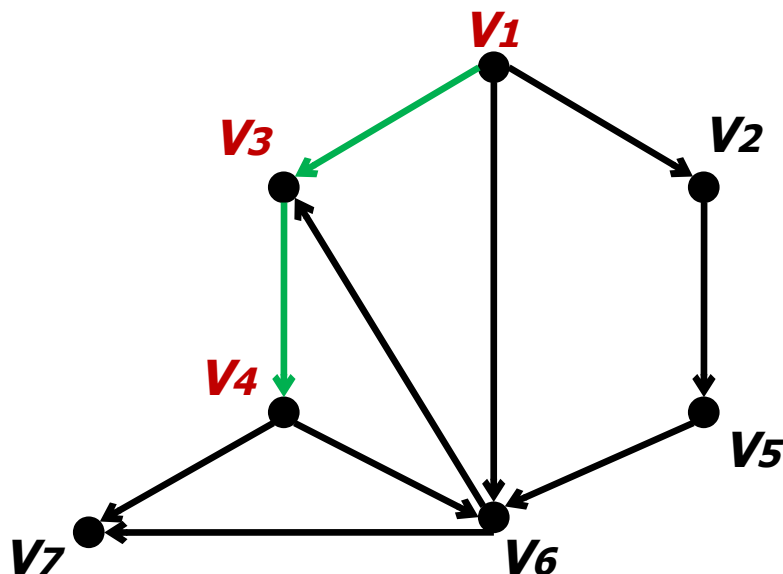
Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:  da árvore  de retorno  de avanço  de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:  da árvore  de retorno  de avanço  de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



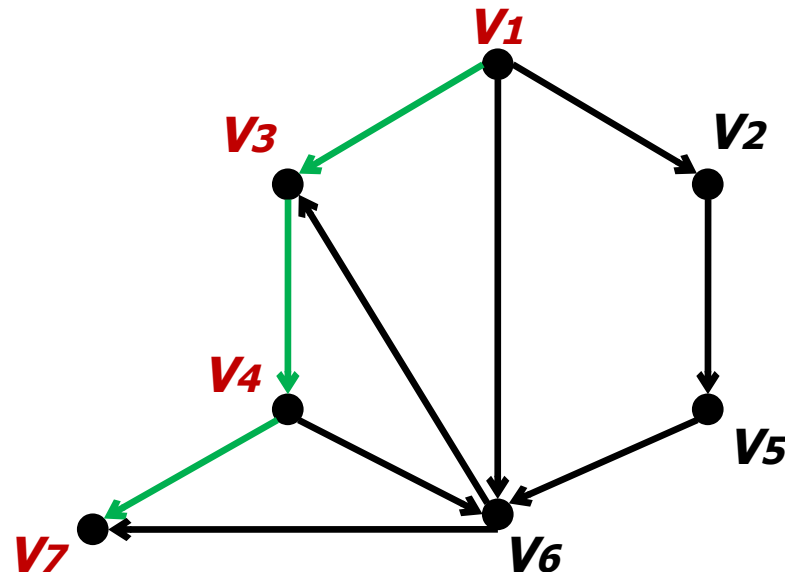
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



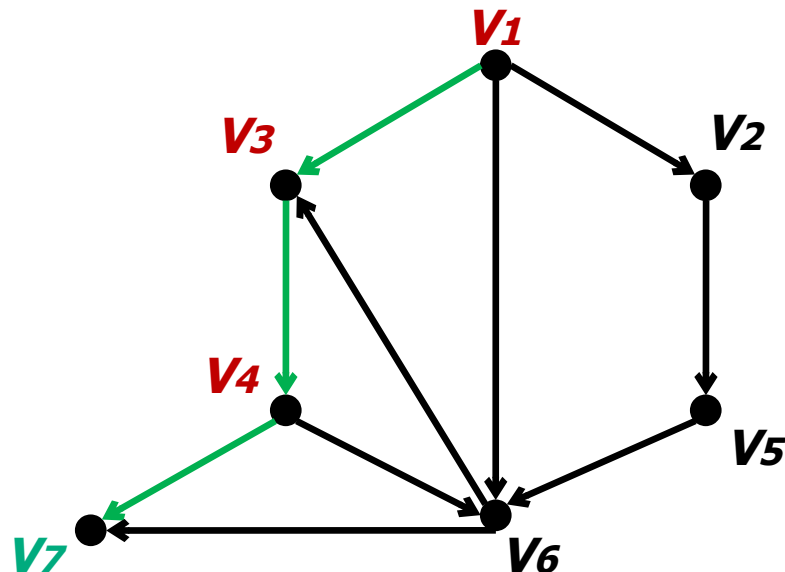
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



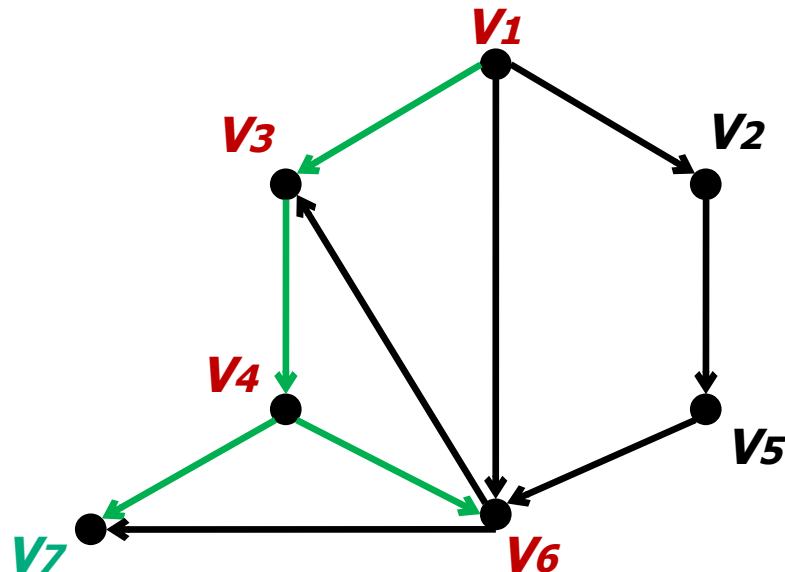
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



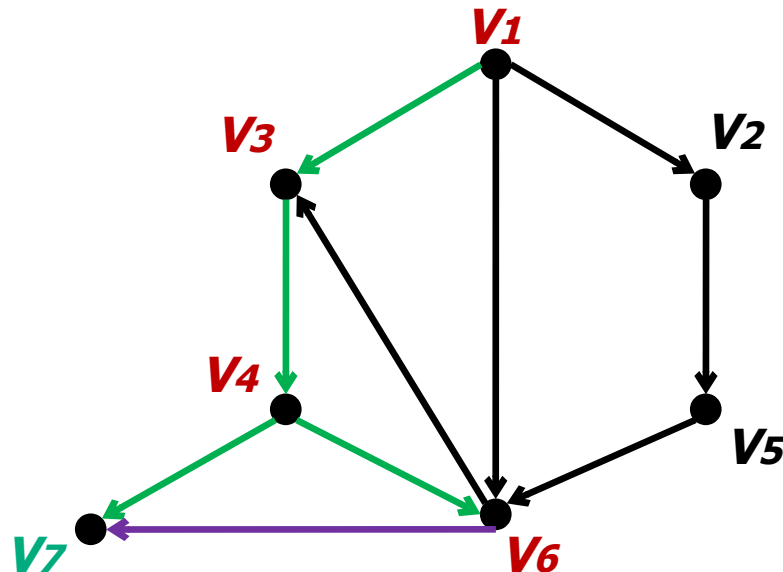
de retorno



de avanço

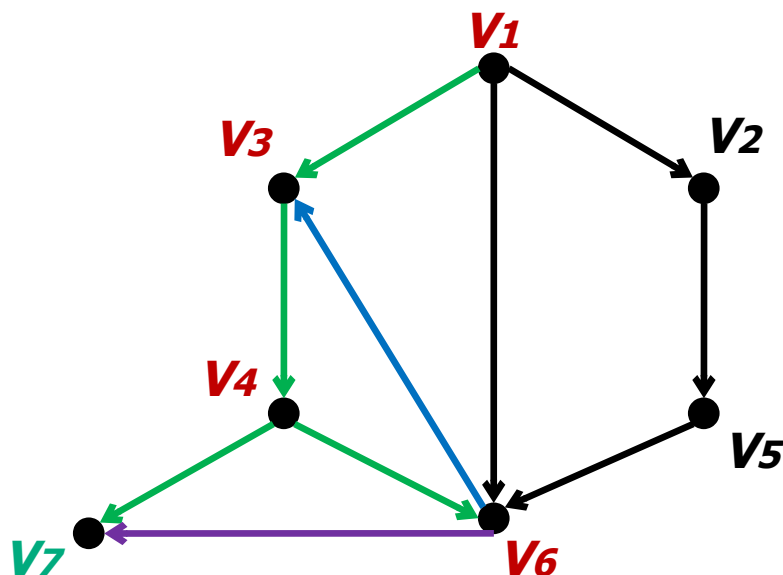


de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



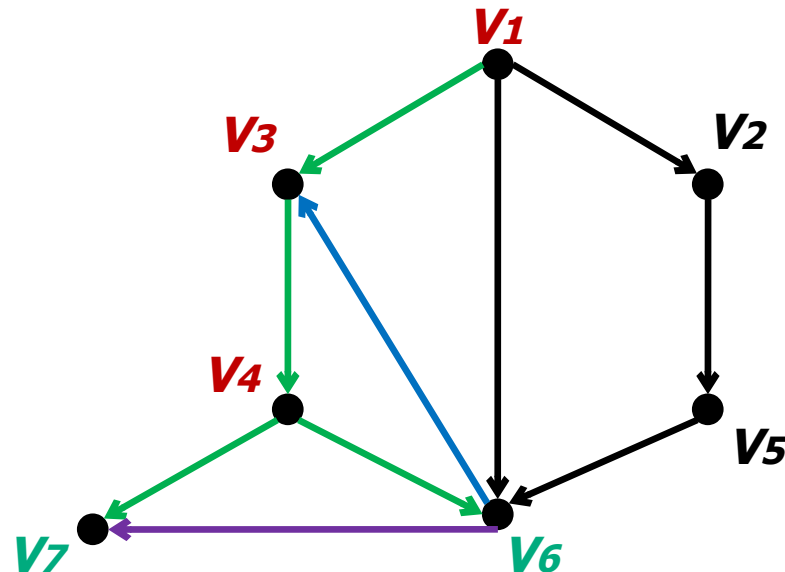
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



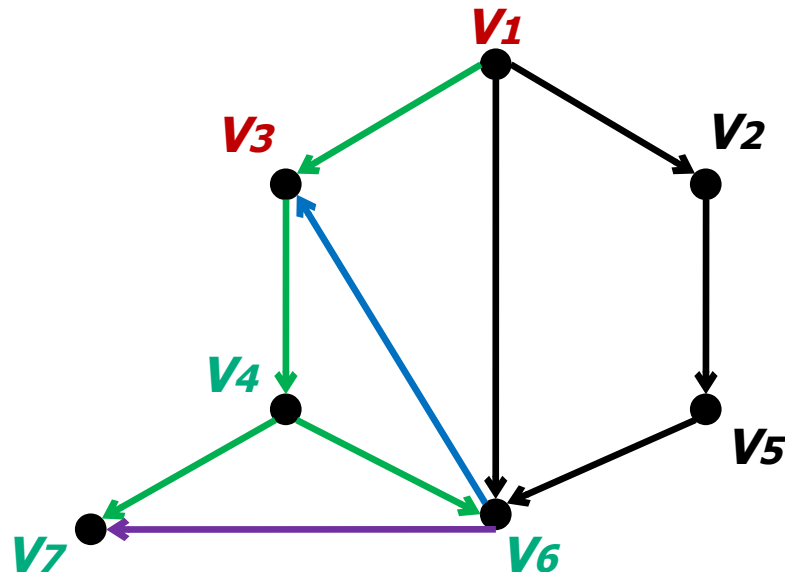
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



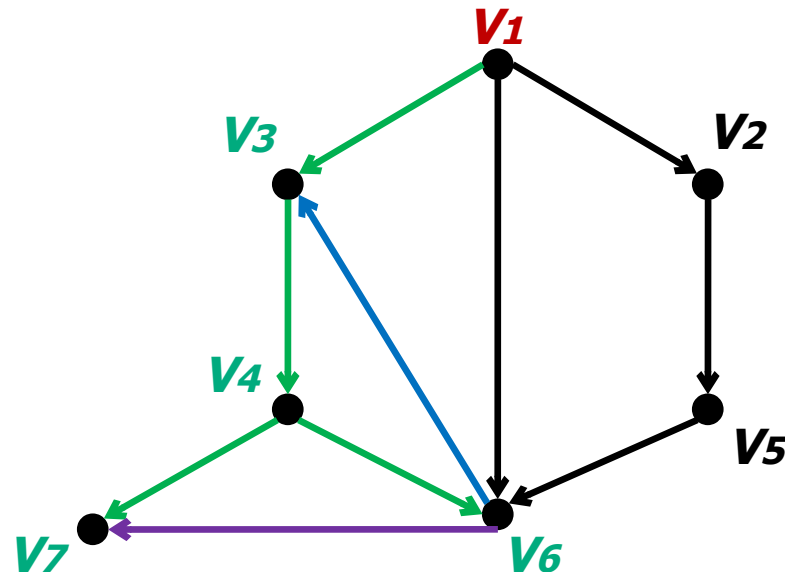
de retorno



de avanço

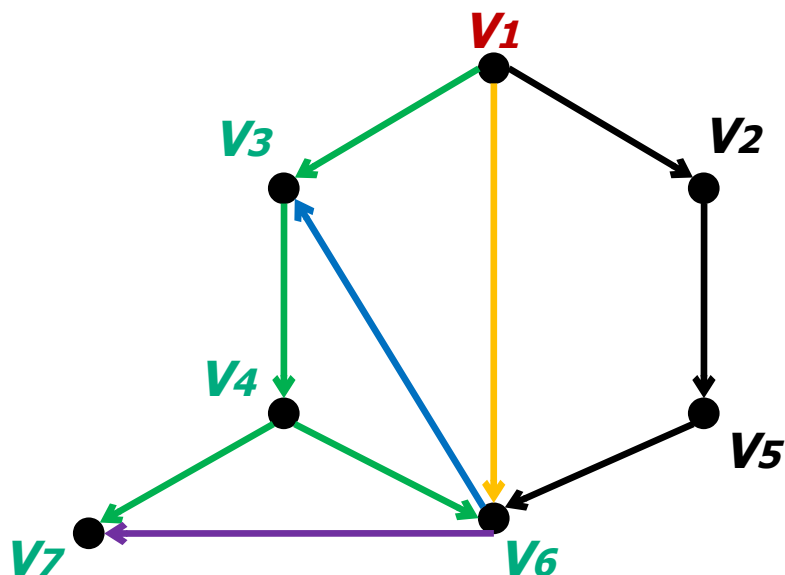


de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



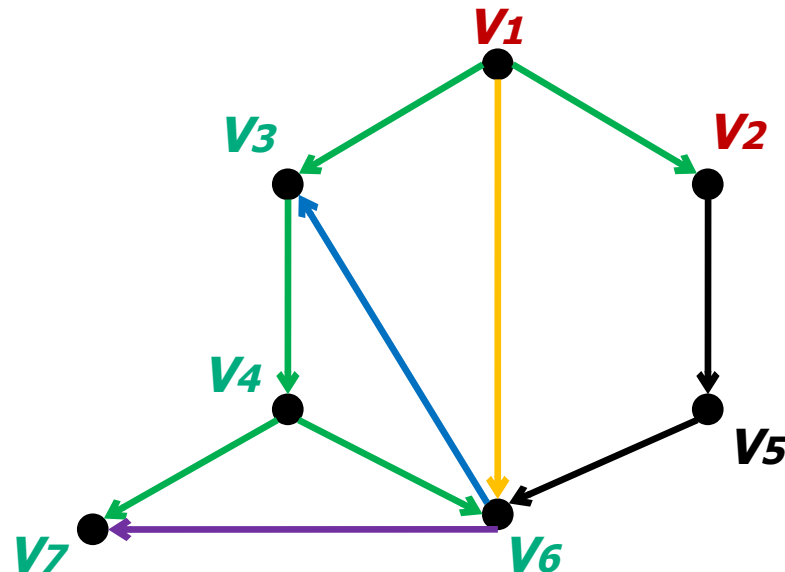
de retorno



de avanço

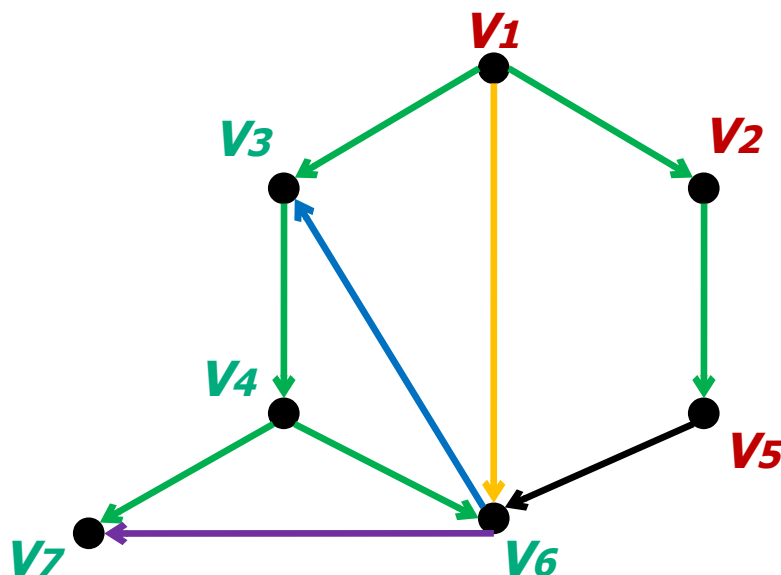


de cruzamento



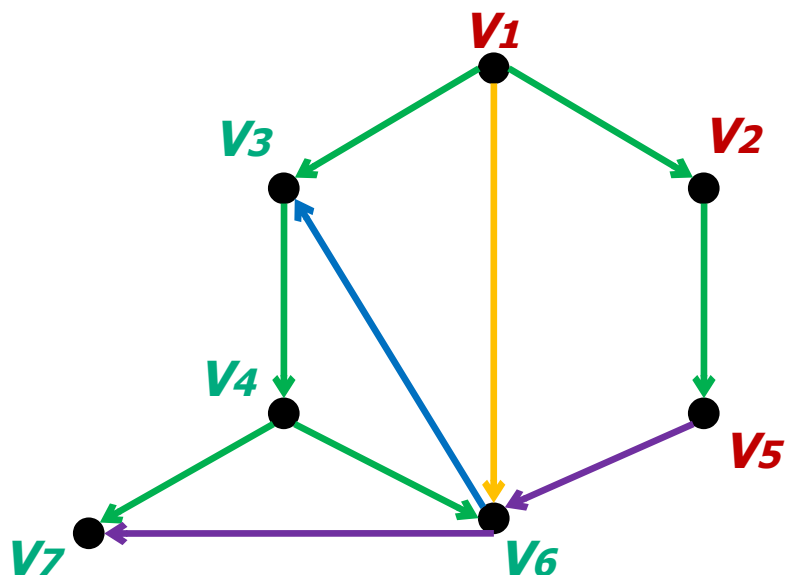
Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



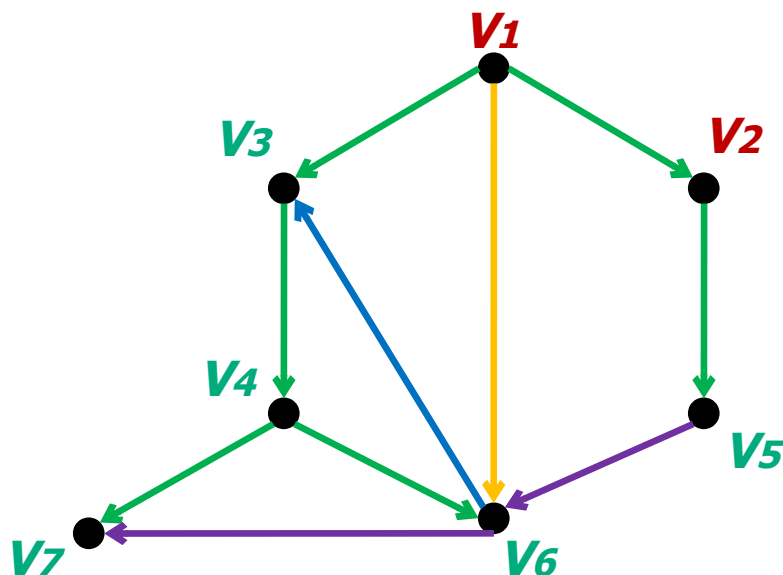
Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



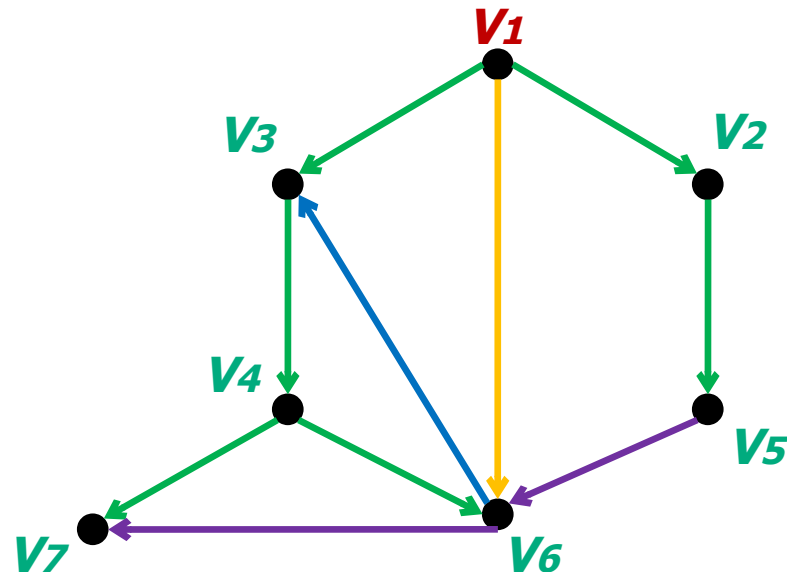
de retorno



de avanço



de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.:



da árvore



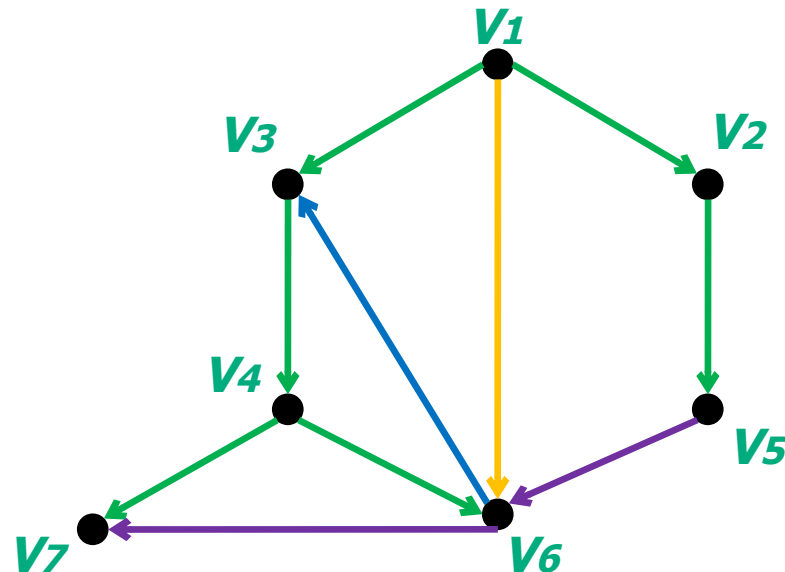
de retorno



de avanço



de cruzamento

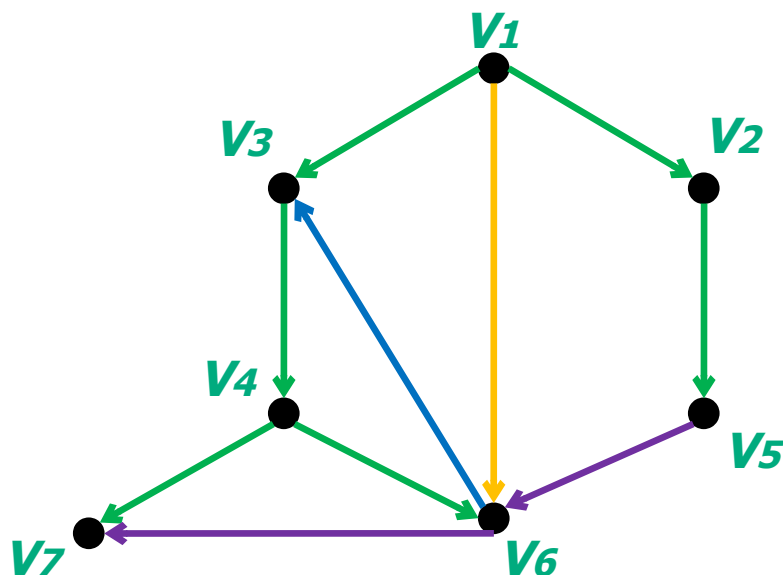


Busca em Profundidade em Dígrafos

- **Algoritmo** → semelhante ao de grafo não orientado.
- Gera 4 tipos de aresta:
 - (1) **Aresta da árvore** → (v, w) onde w é marcado através de $BPD(D, v)$.
 - (2) **Aresta de retorno** → (v, w) , w é alcançado antes de v na BPD e w é ancestral de v na A.P.
 - (3) **Aresta de avanço** → (v, w) onde v é alcançado na BPD antes de w e w já está marcado na visita de (v, w)
 - (4) **Aresta de Cruzamento** → (v, w) onde w é alcançado antes de v na BPD e w não é ancestral de v na A.P.

Busca em Profundidade em Dígrafos

Ex.: ■ da árvore ■ de retorno ■ de avanço ■ de cruzamento



Busca em Profundidade em Dígrafos

```
algoritmo BuscaProfundidadeEmDigrafo( $D, v$ ) {BPD}
{dados: dado um dígrafo  $D$  e um vértice  $v$  p/ raiz da busca}
início
  marque  $v$ ;
  para todas as arestas  $(v, w)$  faça
    {é equivalente a para todo  $w \in \text{Adj}(v)$  faça}
      início
        se  $w$  é não marcado então
          BuscaProfundidadeEmDigrafo( $G, w$ );
      fim
  fim
fim
```


Busca em Profundidade em Dígrafos

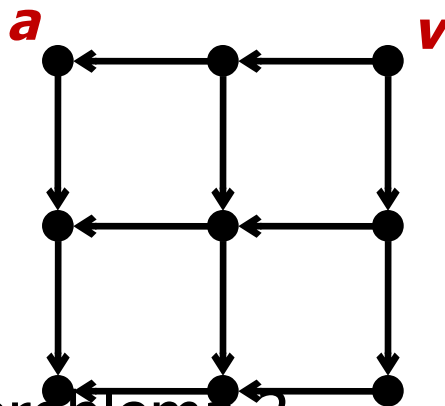
- **Complexidade ?**

Busca em Profundidade em Dígrafos

- **Complexidade ? $O(n+m)$**

Busca em Profundidade em Dígrafos

- **Complexidade ? $O(n+m)$**
- No grafo abaixo busca a partir de a não alcança todos os vértices; a partir de v sim (v é raiz do dígrafo).



- Como resolver o problema ?

Busca em Profundidade em Dígrafos

```
algoritmo BuscaCompletaEmDigrafo( $D, v$ ) ;  
  Início  
    BPD( $D, v$ )  
    para  $s \in VD$  faça  
      se  $s$  é não marcado então BPD( $D, s$ ) ;  
  fim
```

Busca em Profundidade em Dígrafos

```
algoritmo BuscaCompletaEmDigrafo( $D, v$ ) ;  
  início  
    para  $s \in VD$  faça  
      se  $s$  é não marcado então BPD( $D, v$ ) ;  
  fim
```

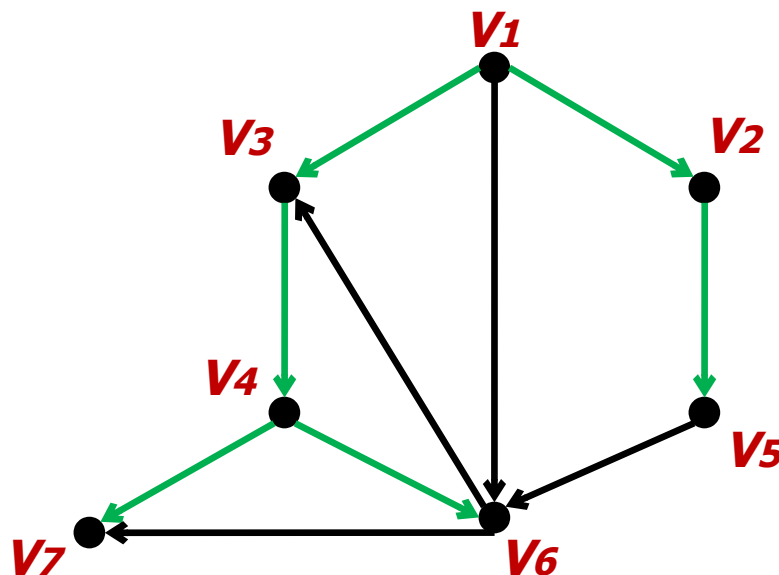


Floresta de Profundidade

- T_1 construída antes de $T_2 \rightarrow$ arestas saindo de T_2 à T_1 são de cruzamento.

Busca em Profundidade em Dígrafos

- Seja aT o conjunto das arestas de árvore em D . Prova-se analogamente ao caso não orientado que $G[aT]$ é uma árvore geradora de D , denominada **árvore de profundidade** de D .



Busca em Profundidade em Dígrafos

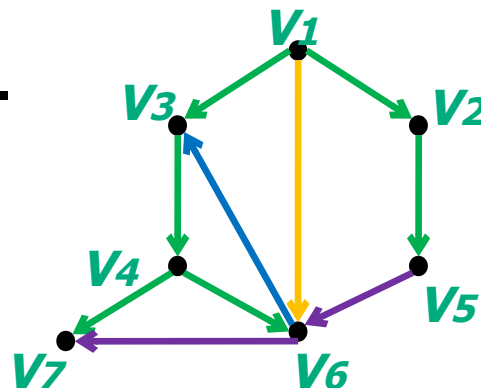
Teorema

Seja D um dígrafo de raiz s e T uma árvore de profundidade de raiz s obtida a partir da BPD em D . Então toda **aresta de árvore** (v,w) é tal que v é pai de w em T ; toda **aresta de avanço** (v,w) é tal que v é ancestral mas não pai de w em T ; toda **aresta de retorno** (v,w) é tal que v é descendente de w em T ; toda **aresta de cruzamento** (v,w) é tal que v não é ancestral nem descendente de w em T .

Busca em Profundidade em Dígrafos

- Profundidade de entrada (PE).
- Profundidade de saída (PS).

Ex.:



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
$PE(v)$	1	6	2	3	7	5	4
$PS(v)$	7	6	4	3	5	2	1

- Profundidades podem servir para classificar arestas.

Busca em Profundidade em Dígrafos

Lema

Seja D um dígrafo de raiz s e $(v, w) \in aD$ uma aresta de D . Seja BPD uma busca em profundidade de raiz s , em D . Então:

- (i) (v, w) é uma aresta da árvore ou de avanço se e somente se $PE(v) < PE(w)$;
- (ii) (v, w) é aresta de retorno se e somente se $PE(v) > PE(w)$ e $PS(v) < PS(w)$;
- (iii) (v, w) é aresta de cruzamento se e somente se $PE(v) > PE(w)$ e $PS(v) > PS(w)$.

Aplicação de Busca em Profundidade em Dígrafos

- Aplicação
 - Determinação da aciclicidade de D .

Proposição

Seja D um dígrafo e seja T a A.P. de D . Então D contém um ciclo direcionado, se e somente se D contém uma aresta de retorno (em relação a T).

Referências

- Seção 4.5 do Szwarcfiter, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Ed. Campus, 1983.

Adaptado do material da Profa. Leila Silva.

Seção 4.1 do *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Goldbarg, E. e Goldbarg M. Elsevier, 2012