Primeira Prova - COMP0410 - 2021.2

1. Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).
   a. Uma fórmula de comprimento par tem uma quantidade ímpar de negações.

      Verdadeiro. Todo conectivo binário ($\land$, $\lor$, $\to$ ou $\leftrightarrow$) é circundado por dois símbolos proposicionais ou de verdade. Então uma fórmula com S símbolos tem S-1 conectivos binários, um entre cada dois símbolos. A negação pode ocorrer precedendo qualquer símbolo ou conectivo, então uma fórmula com S símbolos e N negações tem comprimento N + 2S - 1. Como 2S - 1 é ímpar, o comprimento só é par se N é ímpar.

   b. $((A \to \neg C) \land (A \to C)) \Rightarrow \neg A$

      Verdadeiro. Uma coisa só pode implicar em duas afirmações opostas se ela é falsa. A resolução de {¬A, ¬C} e {¬A, C} resulta em {¬A}.

A	C	S_1: $A \to \neg C$	S_2: $A \to C$	S_3: $S_1 \land S_2$	$S_3 \to \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1

   c. O número de subfórmulas é sempre menor que o comprimento de uma fórmula.

      Falso. O número de subformulas distintas é menor ou igual ao comprimento da fórmula. Como exemplo trivial, considere uma fórmula atômica, o comprimento é igual ao número de subformulas.

d. $(A \land B) \Rightarrow (A \leftrightarrow B)$

Verdadeiro. Se A e B são verdade, $(A \leftrightarrow B)$ é verdade.

A	B	$A \land B$	$A \leftrightarrow B$	$(A \land B) \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

e. $(A \leftrightarrow B) \Rightarrow (A \land B)$

Falso. $(A \leftrightarrow B)$ pode ser verdade com A e B falsos.

A	B	$A \land B$	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \land B)$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

2. Considere as seguinte fórmulas:

   $H = S \leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$

   $G = (\neg T \land P) \rightarrow \neg S$

   Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

   a. O comprimento de H é o dobro do comprimento de G.

      Falso. O comprimento de F é 11 e o de G é 7.

b. $H \Rightarrow G$

Verdadeiro. Se H é verdade, S é verdadeiro se, e somente, se T e P são ambos verdadeiros ou ambos falsos. Se T e P têm interpretações distintas, S é falso, portanto G é verdadeiro.

S	T	P	X_1: $T \land P$	X_2: $\neg T \land \neg P$	X_3: $X_1 \lor X_2$	H: $S \leftrightarrow X_3$	X_4: $\neg T \land P$	G: $X_4 \rightarrow \neg S$	$H \rightarrow G$
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1

c. Se H é tautologia, $S \Leftrightarrow (T \leftrightarrow P)$

Verdadeiro. Se H é tautologia, temos que $S \Leftrightarrow (T \land P) \lor (\neg T \land \neg P)$. Mas também sabemos que $(T \leftrightarrow P) \Leftrightarrow (T \land P) \lor (\neg T \land \neg P)$. Por transitividade, se F é tautologia, $S \Leftrightarrow (T \leftrightarrow P)$. Na verdade basta considerar H verdadeiro, eu escrevi tautologia só pra facilitar o raciocínio. Veja na tabela que, nas linhas em que H é verdade, S e $(T \leftrightarrow P)$ são equivalentes.

S	T	P	H	X_1: $T \leftrightarrow P$	$S \leftrightarrow X_1$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

d. S é sub fórmula de H e G.

Verdadeiro. Apenas para constar:

Subfórmulas de F:

1. $S \leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$
2. S
3. $(T \land P) \lor (\neg T \land \neg P)$
4. $(T \land P)$
5. $(\neg T \land \neg P)$
6. $\neg T$
7. $\neg P$
8. T
9. P.

Subfórmulas de G:

1. $(\neg T \land P) \rightarrow \neg S$
2. $(\neg T \land P)$
3. $\neg S$
4. $\neg T$
5. P
6. S
7. T

e. $(H \land G) \Leftrightarrow H$

Verdadeiro. Para duas fórmulas quaisquer, se $H \Rightarrow G$, então $(H \land G) \Leftrightarrow H$. Como já vimos que a implicação é válida no item (b), a equivalência é válida.

S	T	P	H	G	X_1: $H \land G$	$X_1 \leftrightarrow H$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1

1	1	1	1	1	1	1

3. Considere a fórmula

   H = (T ∧ P) ∨ (¬T ∧ ¬P)

   Marque como (V) todas as fórmulas que são equivalentes a H e como (F) as que não são equivalentes.

   Tabela verdade de H

T	P	X_1: T∧P	X_2: ¬T∧¬P	H: $X_1 \vee X_2$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

   a. (T ∨ P) ∧ (¬T ∨ ¬P)

      Falso. Se T e P são ambos falsos ou ambos verdadeiros, esta fórmula é falsa. Na verdade ela é equivalente a ¬F.

T	P	X_1: T∨P	X_2: ¬T∨¬P	X_3: $X_1 \wedge X_2$	F	X_3↔F
0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

   b. (T ∨ ¬P) ∧ (¬T ∨ P)

      Verdadeiro. Aplicando a distributividade chegamos nesta expressão.

T	P	X_1: T∨¬P	X_2: ¬T∨P	X_3: $X_1 \wedge X_2$	F	X_3↔F
0	0	1	1	1	1	1

0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

c. $(P \rightarrow T) \land (T \rightarrow P)$

Verdadeiro. Do item (b) chegamos aqui substituindo as disjunções pelas implicações equivalentes.

T	P	X_1: $P \rightarrow T$	X_2: $T \rightarrow P$	X_3: $X_1 \land X_2$	F	$X_3 \leftrightarrow F$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

d. $(P \leftrightarrow T)$

Verdadeiro. Pela própria definição do conectivo. Esta é uma das regras dos tableaux, também.

T	P	X_1: $P \leftrightarrow T$	F	$X_1 \leftrightarrow F$
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

e. $(\neg T \rightarrow \neg P) \land (\neg P \rightarrow \neg T)$

Verdadeiro. Do item (d), apenas substitua as implicações pelo contrapositivo $((P \rightarrow T) \Leftrightarrow (\neg T \rightarrow \neg P))$.

T	P	X_1: $\neg P \rightarrow \neg T$	X_2: $\neg T \rightarrow \neg P$	X_3: $X_1 \land X_2$	F	$X_3 \leftrightarrow F$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1

1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

4. Considere o seguinte conjunto de fórmulas:

   $P = (\neg A \lor B)$

   $Q = (B \land \neg C)$

   $R = (C \rightarrow D)$

   $S = (\neg D \lor E)$

   $T = (A \land \neg E)$

   Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

   a. O conjunto é insastisfatível.

      Falso. Lembre que um conjunto é satisfeito se a conjunção é satisfeita. Existe uma forma de satisfazer este conjunto, que veremos na letra (b).

   b. Se o conjunto é satisfatível, D é falso.

      Verdadeiro. Perceba que as fórmulas Q e T determinam as interpretações de A, B, C e E. Se desejamos satisfazer todas as fórmulas, precisamos ter $I[A] = I[B] = 1$ e $I[C] = I[E] = 0$ para satisfazer Q e T. Com B verdadeiro, a fórmula P é satisfeita e com C falso a fórmula R é satisfeita. Só falta agora satisfazer a fórmula S. Como sabemos que E é falso, a única possibilidade que nos resta é que $I[\neg D] = 1$, ou seja, $I[D] = 0$.

      Poderíamos verificar rapidamente por resolução, das cláusulas $\{\neg E\}$, que vem da fórmula T, e $\{\neg D, E\}$, que é a fórmula S, o resultado é $\{\neg D\}$. Ou seja, D precisa ser falso para satisfazer estas duas cláusulas.

   c. $(R \land S) \Rightarrow (C \rightarrow E)$

      Verdadeiro. É a propriedade de transitividade da implicação. Podemos fazer rapidamente por resolução. $R = \{\neg C, D\}$ e $S = \{\neg D, E\}$, a resolução de R e S nos dá $\{\neg C, E\}$, que é equivalente a $(C \rightarrow E)$.

   d. O conjunto é uma tautologia.

      Falso. Só uma das 32 interpretações possíveis satisfaz o conjunto.

5. Considere que β é um conjunto qualquer de fórmulas. Marque as opções como verdadeiras (V) ou falsas (F).
    a. Se β é tautologia, todo subconjunto de β é tautologia.

       Verdadeiro. Falar de conjunto é o mesmo que falar de conjunções. Se uma conjunção é tautologia, todos os seus operandos são tautologia, porque basta um deles ser falso para que o resultado seja falso.

    b. Se β é insatisfatível, todo subconjunto de β é insatisfatível.

       Falso. Para um conjunto ser insatisfatível, basta que algum subconjunto seja insatisfatível. Como um contra-exemplo simples, considere A e ¬A, não conseguimos satisfazê-las simultaneamente, mas independentemente sim.

    c. Se β é satisfatível, todo subconjunto de β é satisfatível.

       Verdadeiro. Se algum subconjunto for insatisfatível, o conjunto como um todo é insatisfatível. Logo, se o conjunto é satisfatível, não há subconjunto insatisfatível, ou seja, todo subconjunto é satisfatível.

    d. Se β é tautologia, todo subconjunto de β é satisfatível.

       Verdadeiro. Consequência da letra (a), se todo subconjunto é tautologia, todo subconjunto é satisfatível.

6. Considere a seguinte fórmula:

H = (¬A ∨ ¬B ∨ C) ∧ (¬B ∨ C) ∧ (A)

Tabela Verdade de H:

A	B	C	P_1: ¬A∨¬B∨ C	P_2: ¬B∨ C	P_3: A	H: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

a. Em quantas interpretações a subfórmula no primeiro parêntese é falsa?

   1 (linha 7 da tabela acima)

b. Em quantas interpretações a subfórmula no segundo parêntese é falsa?

   2 (linhas 3 e 7 da tabela acima)

c. Em quantas interpretações a subfórmula no terceiro parêntese é falsa?

   4 (linhas 1, 2, 3 e 4 da tabela acima)

d. De modo geral, para uma fórmula na forma normal conjuntiva com N símbolos proposicionais distintos, a quantidade de interpretações em que uma cláusula envolvendo K literais distintos é falsa é 2 elevado a:

   N-K. Uma cláusula é uma disjunção. Cada literal da disjunção nos diz qual o valor que um certo símbolo deve ter para que a disjunção seja falsa. Numa fórmula com N símbolos, temos 2^N interpretações possíveis. Se uma cláusula desta fórmula tem K=N literais distintos, ela é falsa em exatamente uma linha da tabela. Se ela tem K=N-1 literais, o valor de um dos símbolos proposicionais não importa (2 casos). Se ela tem K=N-2 literais, o valor de 2 símbolos não importam (4 casos). Seguindo este raciocínio, se ela tem K=1 literal, o valor de N-1 símbolos não importam (2^{N-1} casos). De modo geral, o número de símbolos que não importam é N-K e o número de casos é 2^{N-K}.

7. Avalie as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).
   a. Existem infinitas cláusulas semanticamente distintas para uma dada quantidade de símbolos proposicionais.

      Falso. Vamos pensar na notação de conjuntos para simplificar a argumentação. A notação de conjuntos já desconsidera a ordem e literais repetidos, já que essas alterações não alteram a semântica. Se o número de símbolos proposicionais é dado, P, temos 2P literais (os símbolos e suas negações. Qualquer subconjunto desses 2P literais é uma cláusula, então temos 2^{2P} cláusulas. Então o número de cláusulas é limitado por esta quantidade, logo é finito. Na prática o número é bem menor, já que várias dessas cláusulas são semanticamente equivalentes, mas isso não altera o fato de que a quantidade de cláusulas semanticamente distintas é finito.

   b. $((P \rightarrow R) \land (Q \rightarrow R)) \Rightarrow ((P \land Q) \rightarrow R))$

      Verdadeiro. O consequente só é falso se P e Q são verdadeiros e R é falso. Nesta situação o antecedente é falso, e isso não afeta a implicação.

P	Q	R	X_1: $P \rightarrow R$	X_2: $Q \rightarrow R$	X_3: $X_1 \land X_2$	X_4: $P \land Q$	X_5: $X_4 \rightarrow R$	$X_3 \rightarrow X_5$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

c. Se F é uma contradição, então F ⇒ G, para qualquer fórmula G.

Verdadeiro. Uma implicação onde o antecedente é falso é sempre verdadeira. I[0 → G] = 1.

F	G	F→G
0	0	1
0	1	1

d. Se F é uma tautologia, então F ⇒ G, para qualquer fórmula G.

Falso. Uma implicação onde o antecedente é verdadeiro é equivalente ao seu consequente, portanto nem sempre a implicação é uma tautologia.

F	G	F→G
1	0	0
1	1	1

e. A única cláusula insatisfatível é a cláusula vazia.

Verdadeiro. Toda cláusula é uma disjunção, e toda disjunção é satisfatível.