Exercícios de Fixação

Sintaxe e Semântica da Lógica Proposicional

1. Determine o comprimento e as subfórmulas das seguintes fórmulas:

a) $F_1 = ((P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

$|F_1| = 11$ (6 símbolos proposicionais e 5 conectivos)

Usando a definição recursiva:
$|F_1| = |((P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)|$
$|F_1| = |((P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R))| + |(P \rightarrow R)| + 1$
$|F_1| = |(P \rightarrow Q)| + |(Q \rightarrow R)| + 1 + |P| + |R| + 1 + 1$
$|F_1| = |P| + |Q| + 1 + |Q| + |R| + 1 + 1 + 1 + 3$
$|F_1| = 1 + 1 + 1 + 1 + 7$
$|F_1| = 11$

Subfórmulas:
$((P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R)$
$(P \rightarrow Q)$
$(Q \rightarrow R)$
$(P \rightarrow R)$
P
Q
R

b) $F_2 = \neg((P \lor \neg Q) \rightarrow (P \land Q \land \neg R))$

$|F_2| = 12$ (5 símbolos proposicionais e 7 operadores)

Usando a definição recursiva:
$|F_2| = |\neg((P \lor \neg Q) \rightarrow (P \land Q \land \neg R))|$
$|F_2| = 1 + |(P \lor \neg Q) \rightarrow (P \land Q \land \neg R)|$
$|F_2| = 1 + 1 + |(P \lor \neg Q)| + |(P \land Q \land \neg R)|$
$|F_2| = 2 + 1 + |P| + |\neg Q| + 1 + |P \land Q| + |\neg R|$
$|F_2| = 4 + 1 + 1 + |Q| + 1 + |P| + |Q| + 1 + |R|$
$|F_2| = 8 + 1 + 1 + 1 + 1$
$|F_2| = 12$

Subfórmulas:
$\neg((P \lor \neg Q) \rightarrow (P \land Q \land \neg R))$
$(P \lor \neg Q) \rightarrow (P \land Q \land \neg R)$
$(P \lor \neg Q)$
P
$\neg Q$
Q
$(P \land Q \land \neg R)$
$P \land Q$
$\neg R$
R

*No ponto em que temos $(P \land Q \land \neg R)$ pode parecer ambíguo determinar se as subfórmulas disto são $(P \land Q)$ e $\neg R$, ou P e $(Q \land \neg R)$ ou alguma outra combinação. Porque, do ponto de vista semântico, a ordem não afeta o resultado.

No entanto, segundo a nossa definição de precedência, a interpretação é da esquerda para a direita, então a fórmula $(P \land Q \land \neg R)$ é a fórmula $((P \land Q) \land (\neg R))$.

2. Avalie as afirmações que seguem como verdadeiras ou falsas:

a) "H é tautologia" $\Rightarrow$ "H é satisfatível"

Verdadeiro. Se H é tautologia, ela é sempre verdadeira, portanto ela é verdade em pelo menos um caso.

b) "H é satisfatível" $\Rightarrow$ "H é tautologia"

Falso. Se H é satisfatível, ela é verdade em pelo menos um caso, isso não garante que seja verdade sempre. Considere a fórmula $H = A \lor B$, como contra-exemplo, ela é satisfatível mas não é uma tautologia.

c) "H é insatisfatível" $\Leftrightarrow$ "¬H é tautologia"

Verdadeiro. Se H é instatisfatível, ela é sempre falsa. ¬H tem interpretação oposta de H, ou seja, é sempre verdadeira. Logo, ¬H é tautologia.

d) "H é tautologia" $\Leftrightarrow$ "H é satisfatível"

Falso. Pela letra (b), já vimos que uma das implicações não é válida. Como a implicação não vale nos dois sentidos, a equivalência não é válida. Lembre que $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A))$.

3. Considere o conjunto de hipóteses □ = {H1, H2, H3}, onde

- H1 = $(P \land Q) \rightarrow R$
- H2 = $(Q \lor \neg P)$
- H3 = P.

□ é consistente? (um conjunto é consistente se é satisfatível)

Para ser consistente, devemos ter, para alguma interpretação, $I[\beta] = 1$, ou seja, $I[H_1 \land H_2 \land H_3] = 1$.
Para a conjunção ser verdadeira, devemos ter $I[H_1] = 1$ e $I[H_2] = 1$ e $I[H_3] = 1$, as três hipóteses devem ser satisfeitas simultaneamente.
Da hipótese 3, $I[H_3] = 1 \Leftrightarrow I[P] = 1$, determinamos que a proposição P deve ser verdadeira para satisfazê-la.
Da hipótese 2, $I[H_2] = 1 \Leftrightarrow I[Q] = 1$ e/ou $I[\neg P] = 1 \Leftrightarrow I[Q] = 1$ e/ou $I[P] = 0$. Como já determinamos que P deve ser verdadeiro para satisfazer H_3, a única forma de satisfazer simultaneamente H_2 e H_3 é se tivermos $I[P] = I[Q] = 1$.
Da hipótese 1, $I[H_1] = 1 \Leftrightarrow I[P \land Q] = 0$ e/ou $I[R] = 1$. Para satisfazer as hipóteses anteriores, já sabemos que $I[P \land Q] = 1$. Portanto, devemos ter todas as proposições verdadeiras para satisfazer as três hipóteses.
Logo, existe uma forma de satisfazer as hipóteses simultaneamente e o conjunto é consistente (satisfatível).

Pela tabela verdade:

P	Q	R	H_3	$\neg P$	H_2	$P \land Q$	H_1	$H_1 \land H_2 \land H_3$
0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1

Como pelo menos uma linha da tabela é verdade é verdadeira, a fórmula o conjunto é consistente (satisfatível).

4. Estude e verifique a validade das seguintes equivalências essenciais.

(Estas relações são a base da álgebra booleana, já que uma manipulação algébrica da uma fórmula é simplesmente uma substituição da fórmula atual por uma equivalente.)

A prova das relações é bem trivial, o objetivo aqui era mais de apresentar as relações do que de fazer a prova.

a. (A ⋁ ¬A) ⇔ 1

A	¬A	A⋁¬A
0	1	1
1	0	1

Essa tautologia fundamental diz que toda proposição precisa assumir pelo menos um dos valores lógicos.

b. (A ⋀ ¬A) ⇔ 0

A	¬A	A⋀¬A
0	1	0
1	0	0

Essa contradição fundamental diz que uma proposição não pode assumir valores lógicos distintos simultaneamente.

c. (A ↔ B) ⇔ ((A → B) ⋀ (B → A))

A	B	I: A↔B	II: A→B	III: B→A	IV: II ⋀ III	I↔IV
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Essa é uma relação entre entre a bi-implicação e a implicação. Uma bi-implicação é válida se, e somente se, a implicação vale nos dois sentidos.

d. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

A	B	I: $A \leftrightarrow B$	II: $A \wedge B$	III: $\neg A \wedge \neg B$	IV: II $\vee$ III	I $\leftrightarrow$ IV
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1

Essa relação pode ser deduzida diretamente da interpretação da bi-implicação. Ela é verdadeira se os operandos são ambos verdadeiros ou ambos falsos.

e. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A	B	I: $A \rightarrow B$	II: $\neg A \vee B$	I $\leftrightarrow$ II
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Essa relação pode ser deduzida diretamente da interpretação da implicação. Ela é verdadeira se o antecedente é falso e/ou o consequente é verdadeiro. Ela é útil para eliminar implicações de fórmulas.

f. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

A	B	I: $A \rightarrow B$	II: $\neg B \rightarrow \neg A$	I $\leftrightarrow$ II
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Essa relação é conhecida como contra-positiva da implicação. Lembre-se que se o antecedente de uma implicação é falsa, não podemos deduzir nada sobre o consequente. Já quando o consequente é falso, podemos deduzir o valor do antecedente.

g. ¬¬A ⇔ A

A	¬A	¬¬A	A↔¬¬A
0	1	0	1
1	0	1	1

Isso apenas nos diz que negar duas vezes é equivalente a não negar.

h. ¬(A ∧ B) ⇔ (¬A ∨ ¬B)

A	B	I: A∧B	II: ¬I	III: ¬A∨¬B	II ↔ III
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Essa é uma das leis de deMorgan, que estabelece uma relação entre conjunção e disjunção. Ela é útil para fazer a internalização das negações.

i. ¬(A ∨ B) ⇔ (¬A ∧ ¬B)

A	B	I: A∨B	II: ¬I	III: ¬A∧¬B	II ↔ III
0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Essa é uma das leis de deMorgan, que estabelece uma relação entre conjunção e disjunção. Ela é útil para fazer a internalização das negações.

j. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

A	B	C	I: $B \vee C$	II: $A \wedge I$	III: $A \wedge B$	IV: $A \wedge C$	V: $III \vee IV$	$II \leftrightarrow V$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Essa é a distributividade da conjunção sobre a disjunção.

k. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

A	B	C	I: $B \wedge C$	II: $A \vee I$	III: $A \vee B$	IV: $A \vee C$	V: $III \wedge IV$	$II \leftrightarrow V$
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Essa é a distributividade da disjunção sobre a conjunção.

l. (A ∧ B) ∧ C ⇔ A ∧ (B ∧ C)

A	B	C	I: A∧B	II: I ∧ C	III: B∧C	IV: A ∧ III	II ↔ IV
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Essa é a associatividade da conjunção.

m. (A ∨ B) ∨ C ⇔ A ∨ (B ∨ C)

A	B	C	I: A∨B	II: I ∨ C	III: B∨C	IV: A ∨ III	II ↔ IV
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Essa é a associatividade da disjunção.

n. (A ∧ B) ⇔ (B ∧ A)

Essa é a comutatividade da conjunção. É uma consequência direta da definição da interpretação.

o. (A ∨ B) ⇔ (B ∨ A)

Essa é a comutatividade da disjunção. É uma consequência direta da definição da interpretação.

p. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
Igual ao item (l), repeti por engano.

q. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
Igual ao item (m), repeti por engano.

r. $(A \wedge 1) \Leftrightarrow A$

A	A ∧ 1
0	0
1	1

“Verdadeiro” é o elemento neutro da conjunção.

s. $(A \wedge 0) \Leftrightarrow 0$

A conjunção de qualquer coisa com “falso” é falsa. Vem da definição da interpretação.

t. $(A \vee 1) \Leftrightarrow 1$

A disjunção de qualquer coisa com “verdadeiro” é verdadeira. Vem da definição da interpretação.

u. $(A \vee 0) \Leftrightarrow A$

A	A ∨ 0
0	0
1	1

“Falso” é o elemento neutro da disjunção.

v. $(A \rightarrow 1) \Leftrightarrow 1$

Quando o consequente é verdadeiro, a implicação é verdadeira. Vem da definição da interpretação.

w. $(A \rightarrow 0) \Leftrightarrow \neg A$

$(A \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\neg A \vee 0) \Leftrightarrow \neg A$
Quando o consequente é “falso”, o resultado da implicação é o oposto do antecedente.

x. $(1 \rightarrow A) \Leftrightarrow A$

$(1 \rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg 1 \vee A) \Leftrightarrow (0 \vee A) \Leftrightarrow A$
Quando o antecedente é verdadeiro, o resultado da implicação é o mesmo do consequente.

y. $(0 \rightarrow A) \Leftrightarrow 1$

Quando o antecedente é falso, a implicação é verdadeira. Vem da definição da interpretação.

z. $(A \leftrightarrow 1) \Leftrightarrow A$

$(A \leftrightarrow 1) \Leftrightarrow (A \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow A) \Leftrightarrow 1 \wedge A \Leftrightarrow A$
“Verdadeiro” é o elemento neutro da bi-implicação.

aa. $(A \leftrightarrow 0) \Leftrightarrow \neg A$

$(A \leftrightarrow 0) \Leftrightarrow (A \rightarrow 0) \wedge (0 \rightarrow A) \Leftrightarrow \neg A \wedge 1 \Leftrightarrow \neg A$
Quando um operando é “falso”, o resultado da bi-implicação é o oposto do outro operando.

5. Estude e verifique a validade das seguintes implicações essenciais.
(Estas relações são a base para a inferência lógica. A implicação nos permite deduzir uma informação que não estava presente explicitamente nas fórmulas originais.)
Mais uma vez, conhecer e entender as relações é mais importante que a prova em si.

a. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

b. $((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
Por contradição. Para que seja falsa, devemos ter o antecedente verdadeiro e o consequente falso.
Para o antecedente ser verdadeiro devemos ter que $I[A] = 1$ e, para satisfazer a primeira implicação, $I[B] = 1$ também.
Nesse caso é impossível que o consequente seja falso, pois é necessário que B seja verdadeiro para que o antecedente seja verdadeiro. Logo, a implicação é válida.

Essa relação é conhecida como *modus ponens*, se uma coisa (A) implica numa outra coisa (B) e sabemos que a primeira coisa é verdade, podemos concluir que a segunda também é.

c. $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$
Já sabemos que $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$. Usando isso junto com o resultado do item (b), concluímos que a relação é válida.

Essa relação é conhecida como *modus tollens*, se uma coisa (A) implica numa outra coisa (B) e sabemos que a segunda coisa é falsa, podemos concluir que a primeira também é falsa.

d. $(A \wedge B) \Rightarrow A$
Para que o antecedente seja verdadeiro, é necessário que $I[A] = I[B] = 1$. Portanto, é impossível ter o antecedente verdadeiro com o consequente falso, e a relação é válida.

Isso quer dizer que sabendo que uma conjunção é verdadeira, sabemos que qualquer uma de suas partes é verdadeira.
O contrário não é verdade, saber que uma parte é verdadeira não garante que a conjunção seja verdadeira.

e. $A \Rightarrow (A \vee B)$
Se o antecedente é verdadeiro o consequente também é, já que $I[1 \vee B] = 1$. Portanto a relação é válida.

Isso quer dizer que sabendo que uma parte é verdadeira, sabemos que a disjunção é verdadeira.
O contrário não é verdade, saber que uma disjunção é verdadeira não garante que uma parte específica seja verdadeira.

★ $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow A)$

$(A \land B) \leftrightarrow A$

$\Leftrightarrow ((A \land B) \rightarrow A) \land (A \rightarrow (A \land B))$

$\Leftrightarrow (\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B \lor A) \land (\neg A \lor A) \land (\neg A \lor B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B)$

$\Leftrightarrow (A \rightarrow B)$

Essa relação é uma equivalência, não uma implicação, por isso marquei com uma estrela.

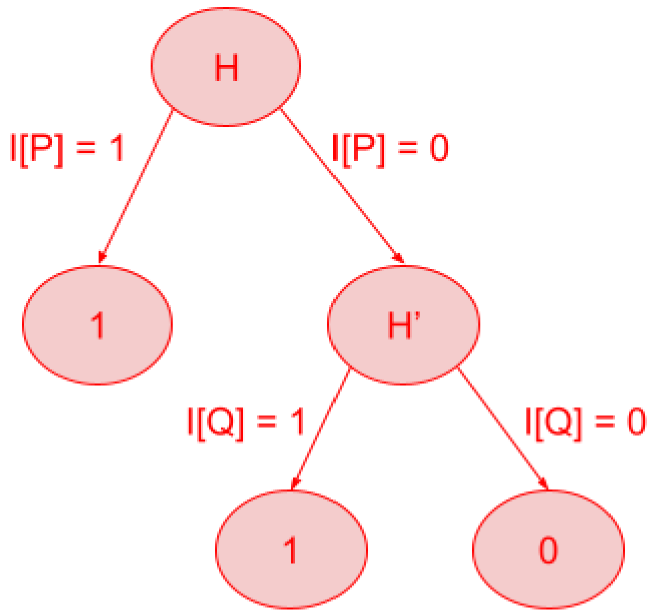
Imagine que “A” é o que você sabe e “B” é o que você infere a partir de “A” (isso está na implicação do lado esquerdo). Quando podemos inferir algo a partir do que sabemos, juntar essa informação nova ao que já sabíamos antes não nos dá mais do que já tínhamos antes.

Ou seja, nos casos em que B pode ser inferido a partir de A (lado esquerdo da equivalência), a conjunção de A e B é equivalente ao A sozinho. Isso quer dizer que a informação B já estava em A, só não estava explícita. Além disso, tudo que pode ser inferido de A e B pode ser inferido de A sozinho.

6. Faça uma árvore semântica da fórmula:
$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P$

Se I[P] = 1: temos uma implicação com consequente verdadeiro, logo a fórmula H é verdadeira.

Se I[P] = 0:
$H' = ((0 \rightarrow Q) \rightarrow (((0 \land Q) \leftrightarrow 0) \land ((0 \lor Q) \leftrightarrow 0))) \rightarrow 0$
$\Leftrightarrow (1 \rightarrow ((0 \leftrightarrow 0) \land (Q \leftrightarrow 0))) \rightarrow 0$
$\Leftrightarrow (1 \rightarrow (1 \land \neg Q)) \rightarrow 0$
$\Leftrightarrow (1 \rightarrow \neg Q) \rightarrow 0$
$\Leftrightarrow \neg Q \rightarrow 0$
$\Leftrightarrow Q$



7. Seja S um conjunto de fórmulas que contêm apenas os símbolos proposicionais A, B e C. Mostre que se |S| > 256, então existem pelo menos duas fórmulas equivalentes em S.

   Com 3 símbolos proposicionais (A, B e C), cada fórmula do conjunto S tem 8 interpretações possíveis.
   Cada interpretação tem dois valores possíveis (verdadeiro ou falso), portanto existe um total de $2^8 = 256$ tabelas verdades distintas para fórmulas com 3 símbolos proposicionais.
   Portanto, se temos mais de 256 fórmulas com 3 símbolos proposicionais, pelo menos duas delas terão a mesma tabela verdade, logo, são equivalentes.