

# Primeira Avaliação

## COMP0410 - 2023.2

1. Considere as seguintes afirmações acerca das propriedades semânticas da lógica proposicional. Considere que  $H$  é uma fórmula da lógica proposicional. Assinale as alternativas como verdadeiras ou falsas.

- a)  $\{H \text{ é tautologia}\} \Rightarrow \{H \text{ é satisfatível}\}$   
Verdadeiro. Se é verdade em todos os casos, é verdade em pelo menos um.
- b)  $\{H \text{ é satisfatível}\} \Rightarrow \{H \text{ é tautologia}\}$   
Falso. Pode ser verdadeiro em apenas alguns casos.
- c)  $\{H \text{ é insatisfatível}\} \Leftrightarrow \{\neg H \text{ é tautologia}\}$   
Verdadeiro. Se  $H$  é sempre falso, sua negação é sempre verdadeira.
- d)  $\{H \text{ é tautologia}\} \Leftrightarrow \{H \text{ é satisfatível}\}$   
Falso. Dos itens (a) e (b), só uma das implicações é válida.

2. Considere a fórmula  $H = ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ .

a) Determine o comprimento de H.

11

b) Marque as fórmulas que são subfórmulas de H.

i)  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Sim. Toda fórmula é subfórmula de si mesmo.

ii)  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$

Sim. É o antecedente da implicação mais externa.

iii)  $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Não.

iv)  $(Q \rightarrow R)$

Sim. É o segundo operando da conjunção do item (ii).

v)  $(Q \wedge Q)$

Não.

c) Assinale as alternativas como verdadeiras ou falsas.

i) H é tautologia.

Verdadeiro. A fórmula é a propriedade de transitividade da implicação.

ii) H é satisfatível.

Verdadeiro. Se é tautologia, também é satisfatível.

iii) H é insatisfatível.

Falso.

3. Considere a fórmula  $H = \neg((P \vee \neg Q) \rightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R))$ . Marque as fórmulas que são equivalentes a H. (use qualquer método para verificar)

a)  $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Verdadeiro. Apenas livre-se da negação da implicação e aplique DeMorgan.

b)  $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R)$

Verdadeiro.  $(\neg Q \vee R)$  surge da resolução das duas cláusulas do item (a).

c)  $P \wedge (R \vee \neg Q)$

Falso.

d)  $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \vee (\neg Q \wedge \neg P) \vee \neg Q \vee (\neg Q \wedge R)$

Verdadeiro. Distributividade aplicada ao item (a).

e)  $P \vee \neg Q$

Falso.

f)  $(P \wedge R) \vee \neg Q$

Verdadeiro. Todas as demais cláusulas do item (d) contêm  $\neg Q$ .

4. Considere o conjunto de hipóteses  $\square = \{H_1, H_2, H_3\}$ , onde

- $H_1 = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- $H_2 = (Q \vee \neg P)$
- $H_3 = P$ .

Assinale as alternativas como verdadeiras ou falsas. (use qualquer método para verificar)

a)  $\square$  é consistente.

Verdadeiro. Um conjunto é consistente se é satisfatível. Se P, Q e R são verdade, a fórmula é verdadeira.

b)  $\neg Q$  é consistente com  $\square$ .

Falso. É impossível satisfazer  $H_2$  e  $H_3$  e  $\neg Q$ .

c)  $\square \Rightarrow R$ .

Verdadeiro. De  $H_3$ , P é verdade. De  $H_2$  e  $H_3$ , Q é verdade. Dos valores obtidos anteriormente, junto com  $H_1$ , R é verdade. Então, se as hipóteses são verdadeiras, R também é.

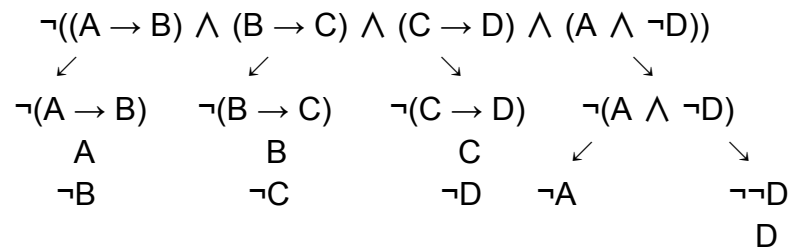
d) R é consequência lógica de  $\square$ .

Verdadeiro. Essa afirmação é sinônimo da afirmação no item (c).

5. Estudamos o método dos Tableaux Semânticos e sabemos que é um sistema completo, correto e consistente. Considere que  $H$  é uma fórmula da lógica proposicional. Marque as alternativas como verdadeiras ou falsas.

- a) Se há um ramo aberto num tableau associado a  $H$ , então  $H$  é satisfatível.  
Verdadeiro. Cada ramo nos diz uma forma de satisfazer  $H$ .
- b) Se todos os ramos num tableau associado a  $H$  são abertos, então  $H$  é tautologia.  
Falso. Concluimos apenas que é satisfatível.
- c) Se todos os ramos num tableau associado a  $\neg H$  são fechados, então  $H$  é tautologia.  
Verdadeiro.  $\neg H$  é insatisfatível e consequentemente,  $H$  é tautologia.
- d) Se há um ramo aberto no tableau associado a  $\neg H$ , então  $H$  não é tautologia.  
Verdadeiro. O ramo aberto diz que há pelo menos uma forma de  $H$  ser falsa.
- e) Se todos os ramos num tableau associado a  $\neg H$  são abertos, então  $H$  é insatisfatível.  
Falso. Concluimos apenas que  $H$  pode ser falsa.
- f) A expansão por tableau pode gerar uma árvore infinita.  
Falso. Cada regra aplicada reduz o número de conectivos, eventualmente chegaremos aos literais e a árvore se encerra. Além disso, cada fórmula só é expandida uma vez. Outra forma de verificar isso é considerar a fórmula na FND, a primeira expansão vai provocar uma bifurcação e todas as expansões seguintes vão apenas empilhar os literais.
- g) O número de ramos de um tableau associado a uma fórmula na FNC é dado pelo produto do número de literais em cada cláusula. Considere que nenhum ramo vai ser encerrado precocemente, os ramos só serão fechados após a construção completa do tableau.  
Verdadeiro. Cada cláusula gera um número de bifurcações igual ao número de literais. As bifurcações da segunda cláusula expandida ocorrem em todas as bifurcações geradas pela primeira cláusula, e assim sucessivamente. Portanto, no final teremos um número de bifurcações igual ao produto dos literais em cada cláusula.

6. Considere o tableau abaixo.



Assinale as afirmações como verdadeiras ou falsas. A partir do tableau apresentado podemos concluir que o conjunto  $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), (C \rightarrow D), (A \wedge \neg D)\}$  é:

a) Verdade para qualquer interpretação.

Falso.

b) Verdade em pelo menos uma interpretação.

Falso.

c) Falso para qualquer interpretação.

Falso.

d) Falso em pelo menos uma interpretação.

Verdadeiro. O tableau é da negação do conjunto, portanto o fato de ter ramos abertos nos diz que em pelo menos um caso a negação é verdadeira. Ou seja, em pelo menos um caso o conjunto é falso.

7. Estudamos o método da Resolução e sabemos que é um sistema completo , correto e consistente. Considere que  $H$  é uma fórmula da lógica proposicional. Assinale as afirmações como verdadeiras ou falsas.

- a) Se toda expansão por resolução de  $H$  é aberta, então  $H$  é tautologia.  
Falso. Se a expansão é aberta,  $H$  é satisfatível.
- b) Se não existe expansão por resolução fechada de  $H$ , então  $H$  é insatisfatível.  
Falso. Se toda expansão é aberta,  $H$  é satisfatível.
- c) Se existe expansão por resolução fechada de  $H$ , então  $H$  é insatisfatível.  
Verdadeiro. Expansão fechada indica uma contradição.
- d) Se existe expansão por resolução fechada de  $\neg H$ , então  $H$  é tautologia.  
Verdadeiro. Se  $\neg H$  é insatisfatível,  $H$  é tautologia.
- e) Se toda expansão por resolução de  $\neg H$  é aberta, então  $H$  é insatisfatível.  
Falso. Se  $\neg H$  é satisfatível,  $H$  é falso em pelo menos um caso.
- f) É possível que o número de passos na expansão por resolução seja infinito.  
Falso. A quantidade de cláusulas para uma dado número de literais é finita.
- g) A regra de dedução modus ponens  $((X \wedge (X \rightarrow Y)) \Rightarrow Y)$  é um caso particular da regra da resolução.  
Verdadeiro. Considere as cláusulas  $C_1 = X$  e  $C_2 = (X \rightarrow Y) = (\neg X \vee Y)$ . A resolução de  $C_1$  e  $C_2$  é  $R(C_1, C_2) = \{X, \neg X, Y\} \setminus \{X, \neg X\} = \{Y\}$ .

8. Considere a seguinte expansão por resolução de  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \wedge \neg D)$ .

1.  $\{\neg A, B\}$
2.  $\{\neg B, C\}$
3.  $\{\neg C, D\}$
4.  $\{A\}$
5.  $\{\neg D\}$
6.  $\{B\}$  [R(1, 4)]
7.  $\{C\}$  [R(2, 6)]
8.  $\{D\}$  [R(3, 7)]
9.  $\{\}$  [R(5, 8)]

Assinale as afirmações como verdadeiras ou falsas. A partir do tableau apresentado podemos concluir que o conjunto  $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), (C \rightarrow D), (A \wedge \neg D)\}$  é:

a) Verdade para qualquer interpretação.

Falso.

b) Verdade em pelo menos uma interpretação.

Falso.

c) Falso para qualquer interpretação.

Verdadeiro. A expansão é do conjunto não negado e é fechada, portanto é insatisfatível.

d) Falso em pelo menos uma interpretação.

Verdadeiro. Se é falso em qualquer interpretação, é falso em pelo menos uma.



9. Na modelagem de um jogo, as seguintes regras estavam presentes:

- Há um fantasma na posição (1, 1)
- Se há um fantasma na posição (1, 1;) e o jogador está na posição (1, 1) então o jogador perdeu.
- Se o jogador está na posição (1,1) e o jogador move-se para a direita, então o jogador vai para a posição (2, 1).
- Se o jogador está na posição (0, 1) e há um fantasma na posição (1,1) e o jogador move-se para a direita, então o jogador perdeu.
- O jogador está na posição (1,1) ou na posição (2,1), mas não nas duas simultaneamente.

As seguintes fórmulas foram usadas para modelar estas regras, mas não necessariamente na ordem em que as regras foram escritas:

- $\neg(A \leftrightarrow D)$
- $(A \wedge E) \rightarrow D$
- $(A \wedge C) \rightarrow B$
- $(\neg C \vee \neg E \vee \neg F \vee B)$
- $C$

Faça a correspondência entre fórmulas e regras e responda qual símbolo proposicional corresponde a cada uma das seguintes proposições.

- A primeira regra só tem uma proposição, então corresponde à fórmula C.
- A segunda regra tem 3 proposições, uma delas já sabemos que é C. Portanto  $(A \wedge C) \rightarrow B$ , corresponde à esta regra. Daí concluímos que A é “o jogador está na posição (1,1)” e B é “o jogador perdeu”.
- A terceira regra tem 3 proposições, uma delas já sabemos que é A. Portanto  $(A \wedge E) \rightarrow D$ , corresponde à esta regra. Daí concluímos que E é “o jogador move-se para a direita” e D é “o jogador está na posição (2,1)”.
- Por eliminação, F deve ser “o jogador está na posição (0,1). Vamos verificar se está consistente com as demais fórmulas.
- A quinta regra é a fórmula  $\neg(A \leftrightarrow D)$ , e está consistente com o que já deduzimos.
- Por eliminação, a quarta regra é a fórmula  $(\neg C \vee \neg E \vee \neg F \vee B)$ . Que pode ser reescrita como  $(C \wedge E \wedge F) \rightarrow B$ , que é justamente a regra.

- a) C: “Há um fantasma na posição (1,1)”
- b) F: “O jogador está na posição (0,1)”
- c) A: “O jogador está na posição (1,1)”
- d) D: “O jogador está na posição (2,1)”
- e) B: “O jogador perdeu”
- f) E: “O jogador move-se para a direita”