

Exercícios de Fixação

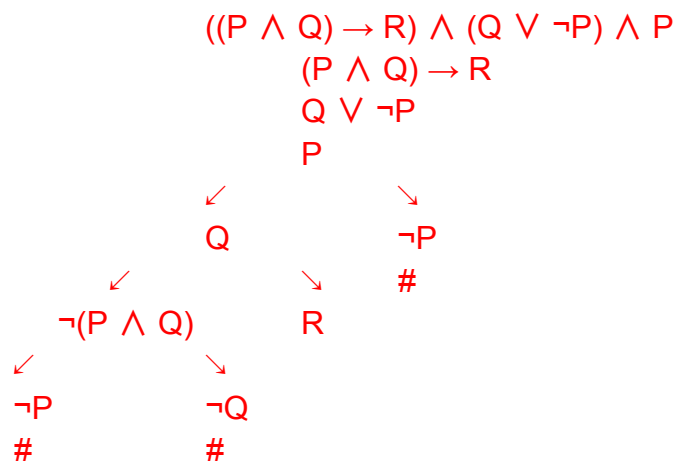
Tableaux Semânticos

1. Considere o conjunto de hipóteses $\Sigma = \{H1, H2, H3\}$, onde

- $H1 = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- $H2 = (Q \vee \neg P)$
- $H3 = P$.

Σ é consistente? (um conjunto é consistente se é satisfatível)

Para ser consistente $H1 \wedge H2 \wedge H3$ deve ser satisfatível. Por tableau:

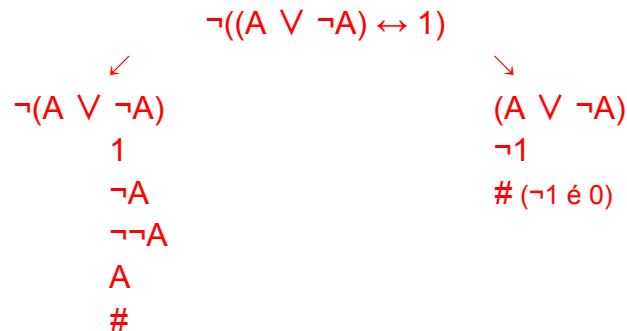


O símbolo $\#$ no fim do ramo indica que ele é fechado. Como há um ramo aberto, o conjunto é satisfatível. O ramo aberto nos diz que o conjunto é satisfeito quando P, Q e R são todos verdadeiros.

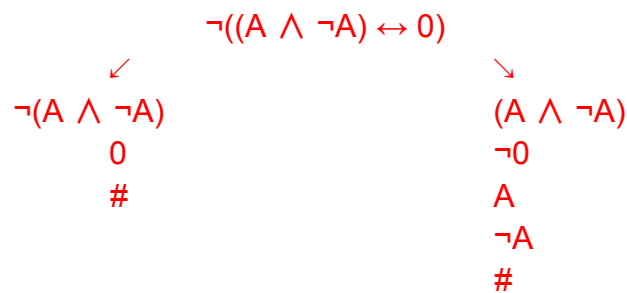
2. Verifique a validade das seguintes equivalências essenciais.

Lembre que a prova de tautologia por tableau sempre inicia com a fórmula negada. Se o tableau associado à negação da fórmula é fechado, a fórmula é uma tautologia.

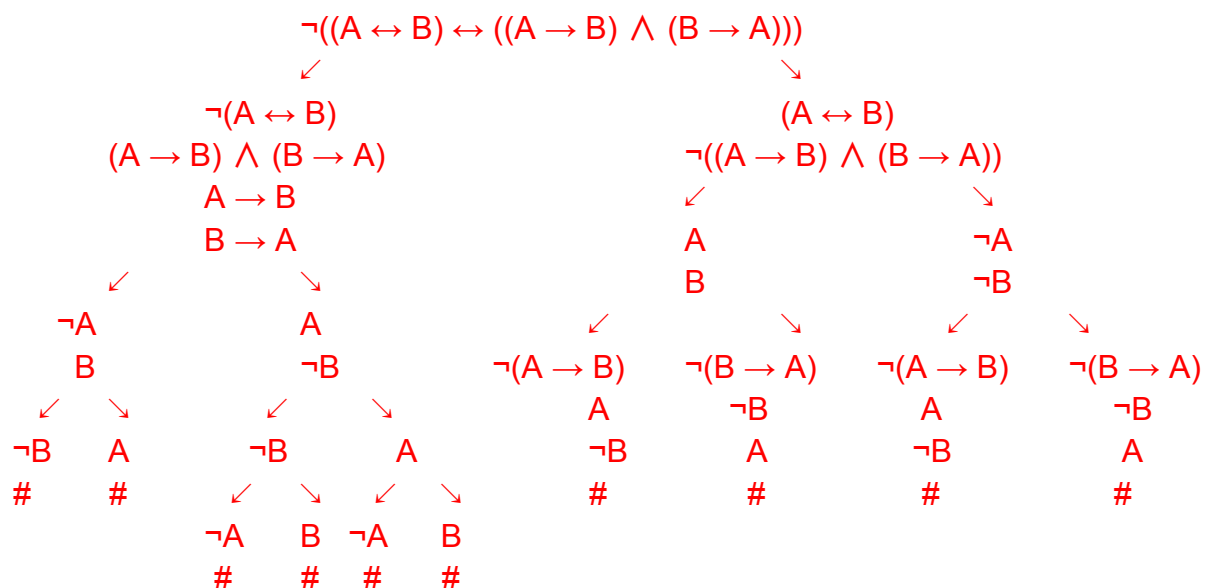
a. $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow 1$



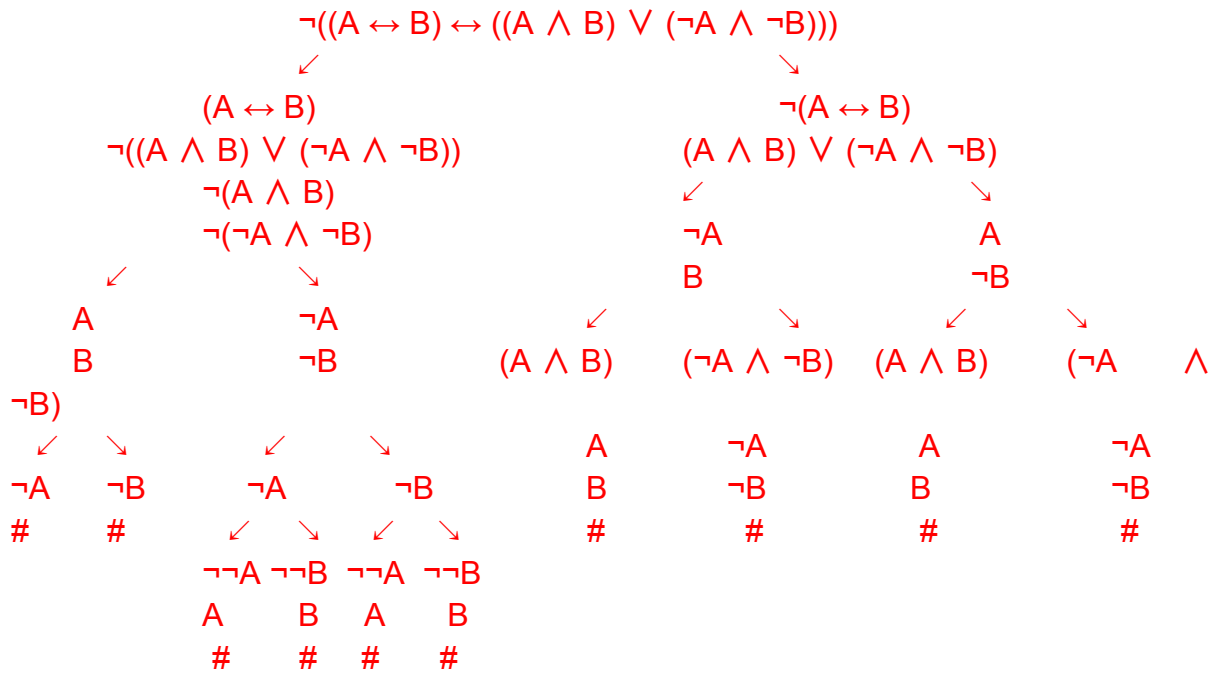
b. $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow 0$



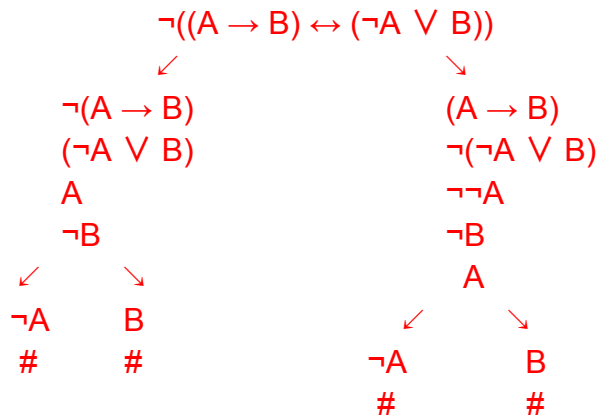
c. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$



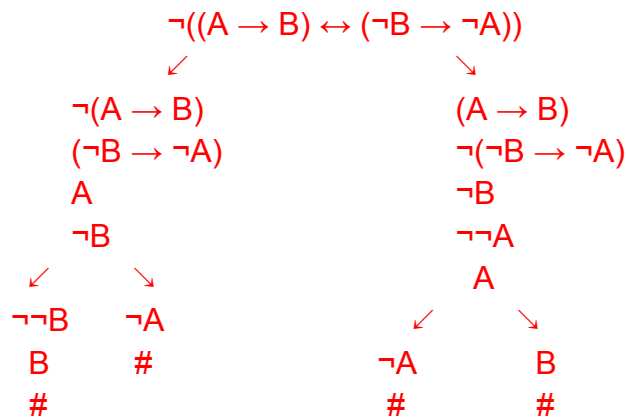
d. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$



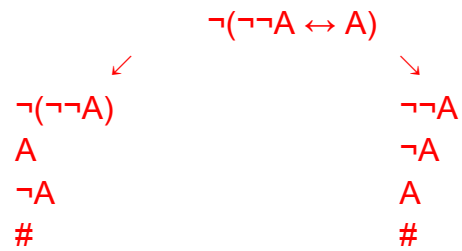
e. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$



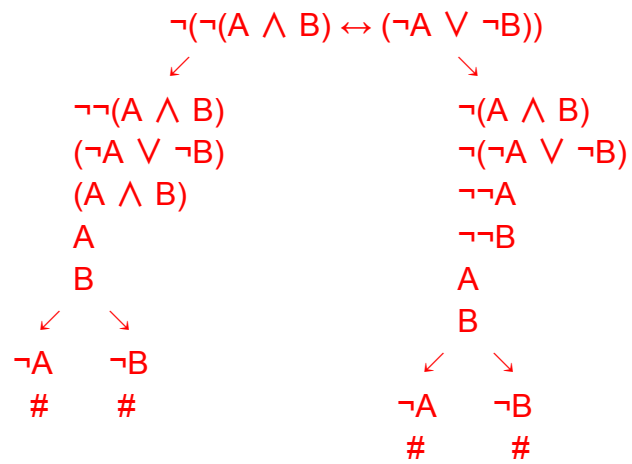
f. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$



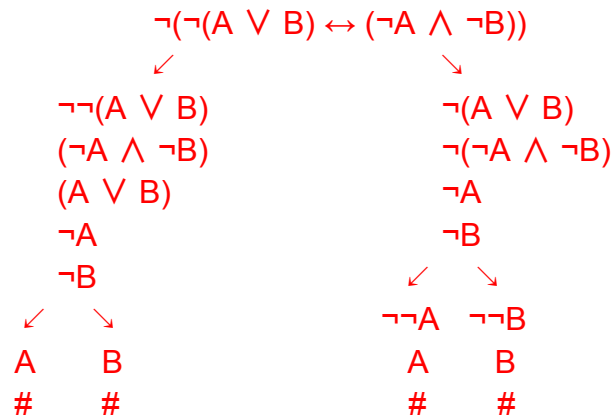
g. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$



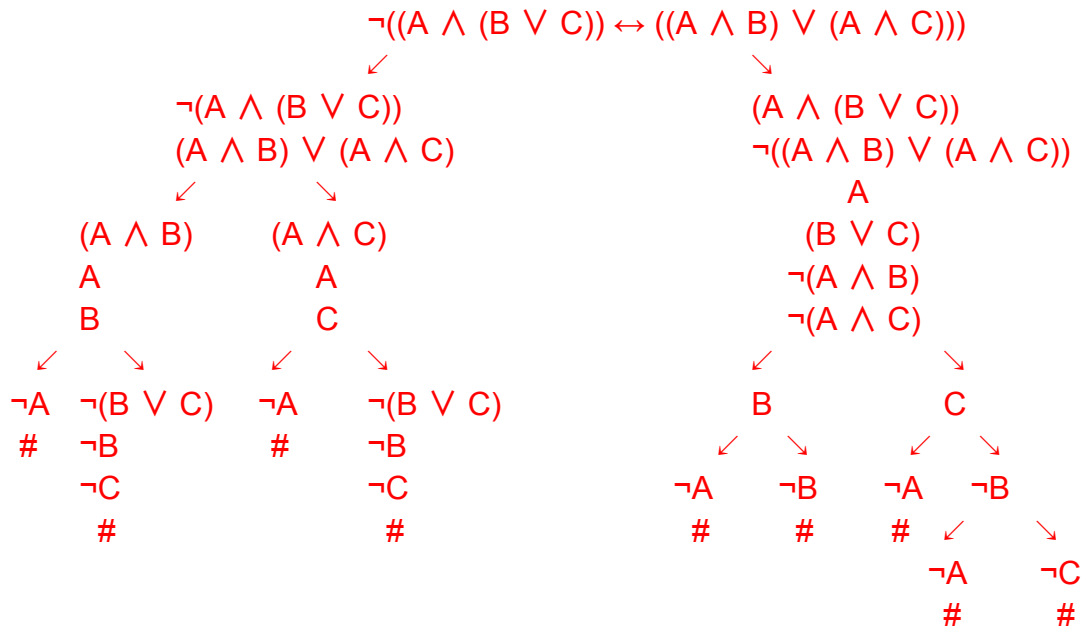
h. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$



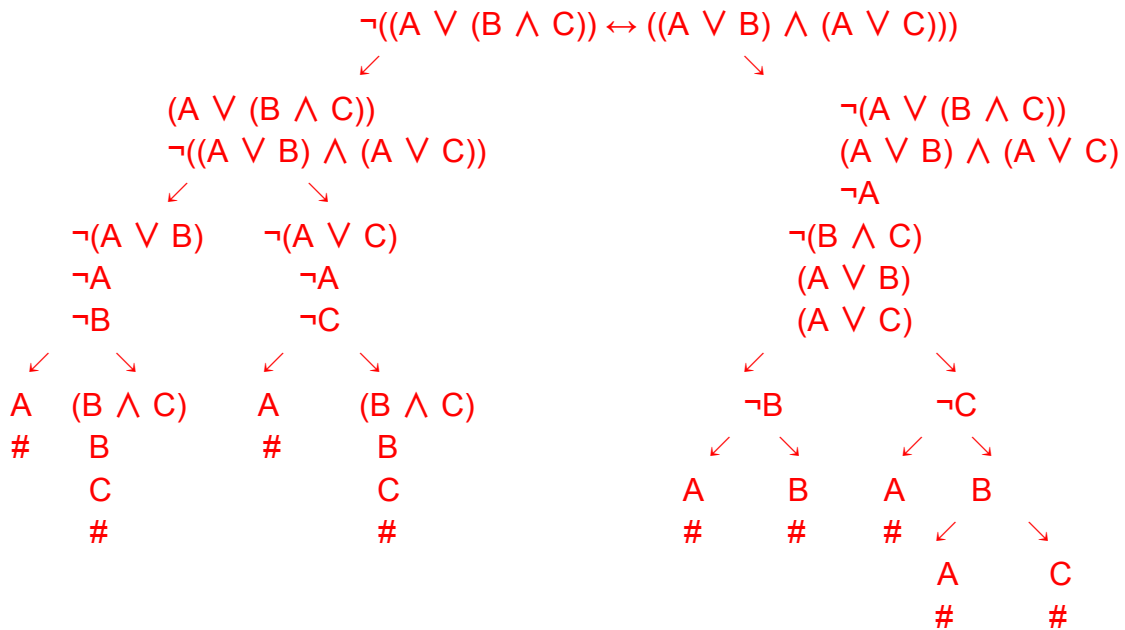
i. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$



j. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

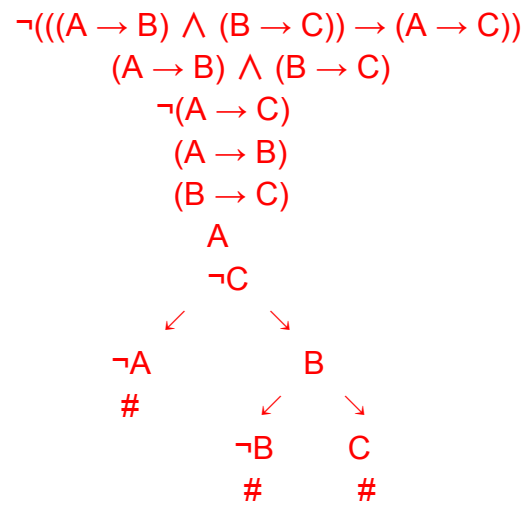


k. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

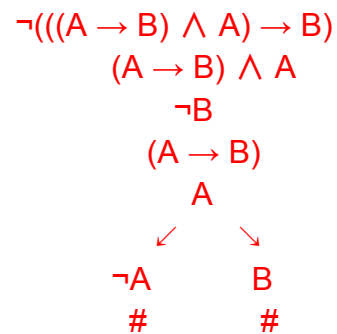


3. Verifique a validade das seguintes implicações essenciais.

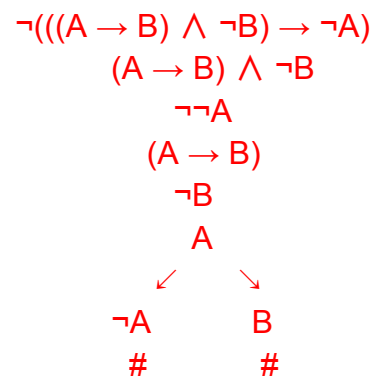
a. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$



b. $((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$



c. $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A$



d. $(A \wedge B) \Rightarrow A$

$\neg((A \wedge B) \rightarrow A)$
 $(A \wedge B)$
 $\neg A$
 A
 B
 $\#$

e. $A \Rightarrow (A \vee B)$

$\neg(A \rightarrow (A \vee B))$
 A
 $\neg(A \vee B)$
 $\neg A$
 $\neg B$
 $\#$

★ $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \leftrightarrow A)$

$\neg((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \wedge B) \leftrightarrow A))$

↙ ↘

$\neg(A \rightarrow B)$ $(A \rightarrow B)$
 $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ $\neg((A \wedge B) \leftrightarrow A)$

A ↙ ↘
 $\neg B$ $(A \wedge B)$ $\neg(A \wedge B)$

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

$(A \wedge B)$ $\neg(A \wedge B)$ $\neg A$ A $\neg A$ $\neg B$

A $\neg A$ $\neg A$ A $\neg A$ B

A $\neg A$ $\neg A$ A $\neg A$ B

B $\#$ $\#$ $\#$ $\#$ $\#$

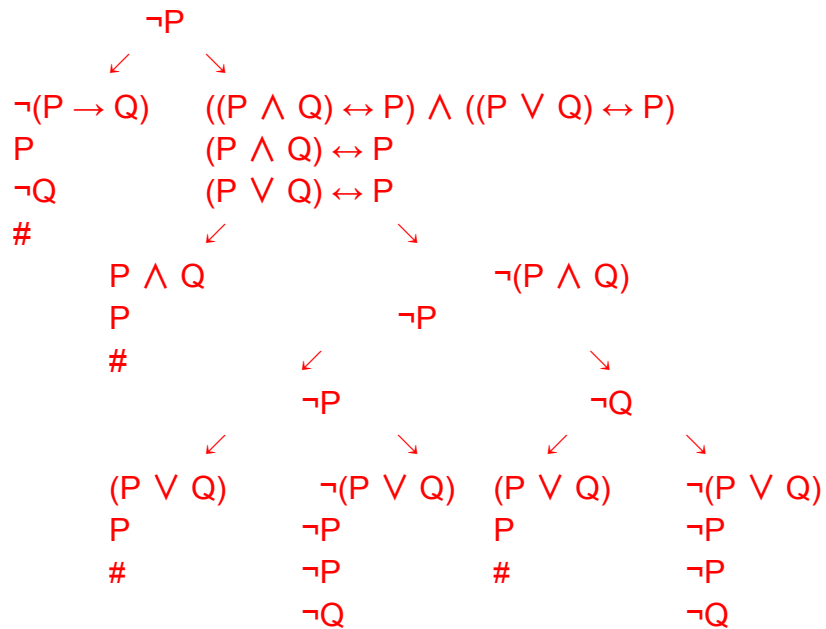
$\#$ $\#$ $\#$ $\#$ $\#$ $\#$

4. Verifique se é tautologia

$$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P$$

$$\neg(((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow P))$$



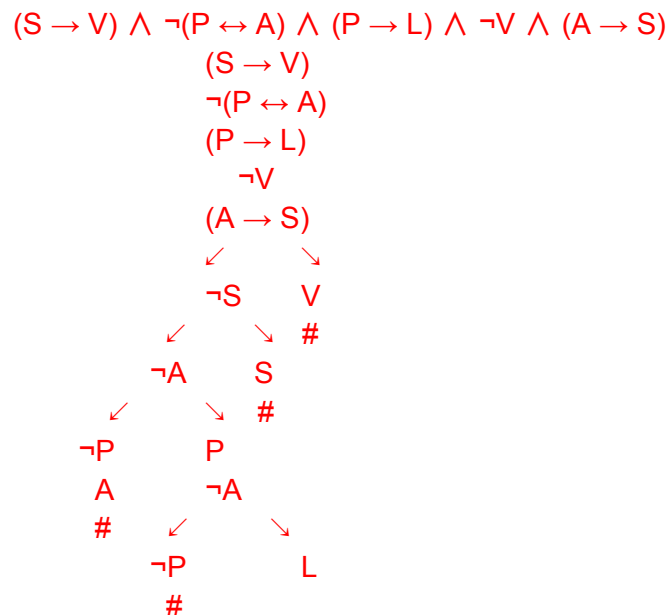
Como há ramos abertos, a fórmula não é tautologia. Os ramos abertos nos dizem que H é falsa quando P e Q são falsos.

5. Em uma investigação as seguintes informações foram coletadas:
- Se a faca está na sala, então vimos quando limpamos a sala.
 - O assassinato foi cometido no porão ou no apartamento.
 - Se o assassinato foi no porão, então a faca está na lata de lixo.
 - Não vimos a faca quando limpamos a sala.
 - Se o assassinato foi cometido no apartamento, a faca está na sala.

Na lista anterior modelamos essas informações através das seguintes fórmulas:

- $F_1 = S \rightarrow V$
- $F_2 = \neg(P \leftrightarrow A)$ [aqui as opções são exclusivas]
- $F_3 = P \rightarrow L$
- $F_4 = \neg V$
- $F_5 = A \rightarrow S$

Vamos verificar a satisfatibilidade deste conjunto.



Só há um ramo aberto e neste ramo concluímos que para satisfazer o conjunto de fórmulas devemos ter $I[V] = I[S] = I[A] = 0$ e $I[P] = I[L] = 1$

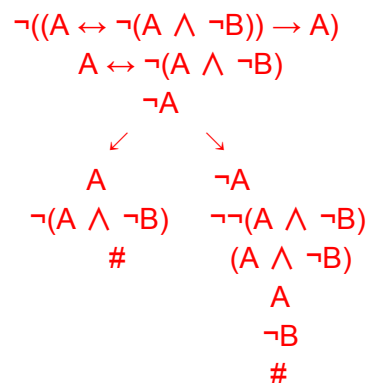
6. Em uma certa cidade, os habitantes que moram no centro sempre mentem e os que moram fora dele sempre falam a verdade. Passando pela cidade você encontra algumas pessoas (A, B, C, D, E, F e G) e pergunta onde eles moram. Para cada caso, verifique se podemos determinar se a pessoa que falou mora no centro.

Vamos utilizar os mesmos modelos da lista anterior.

- a) A te diz: “Eu moro no centro, mas B não”.

$$S_a = A \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

Queremos verificar se A mora no centro, ou seja, se $S_a \Rightarrow A$.

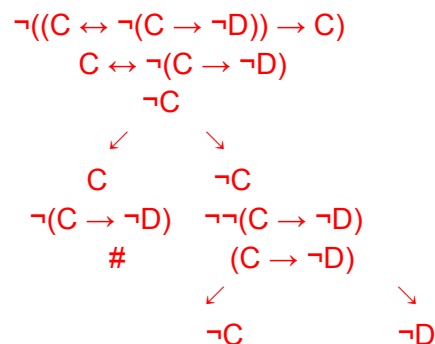


Concluimos, portanto, que A mora no centro.

- b) C te diz: “Se eu moro no centro, então D também não mora”.
(Por acidente, eu cometi um erro na redação da frase. Aquele “também” não faz sentido, e existem três formas de corrigir a frase, vou fazer os três casos aqui)

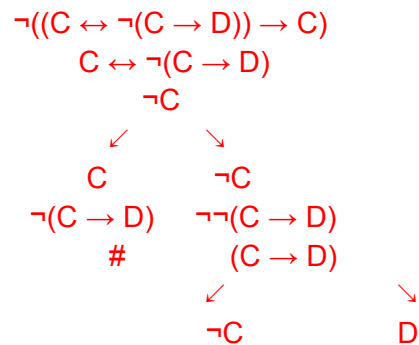
Possibilidade 1: “Se eu moro no centro, então D ~~também~~ não mora”
(removendo o “também”)

$$S_b = C \leftrightarrow \neg(C \rightarrow \neg D)$$



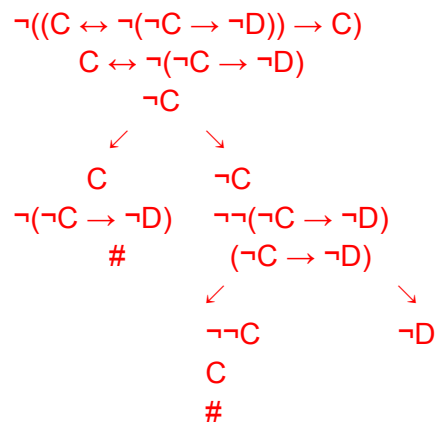
Não podemos concluir que C mora no centro, pois há ramos abertos.

Possibilidade 2: “Se eu moro no centro, então D também ~~não~~ mora”
 (removendo o “não”)
 $S_b = C \leftrightarrow \neg(C \rightarrow D)$



Não podemos concluir que C mora no centro, pois há ramos abertos.

Possibilidade 3: “Se eu **não** moro no centro, então D também não mora”
 (acrescentando um “não”, essa era a frase que eu queria originalmente)
 $S_b = C \leftrightarrow \neg(\neg C \rightarrow \neg D)$

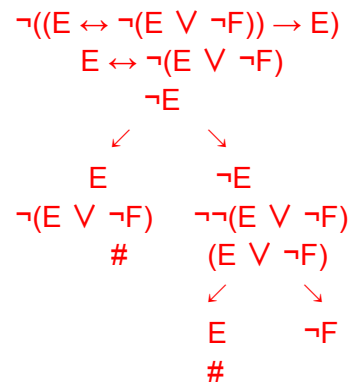


Não podemos concluir que C mora no centro, pois há ramos abertos.

c) E te diz: “Eu moro no centro ou F não mora”.

Possibilidade 1: ou inclusivo

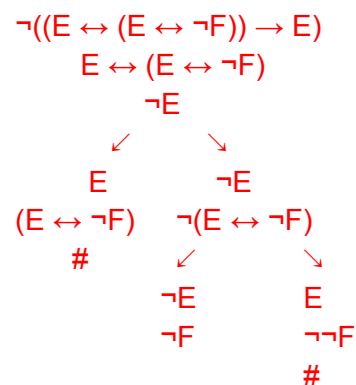
$$S_c = E \leftrightarrow \neg(E \vee \neg F)$$



Não podemos concluir que E mora no centro, pois há ramos abertos.

Possibilidade 2: ou exclusivo

$$S_c = E \leftrightarrow \neg(\neg(E \leftrightarrow \neg F)) \Leftrightarrow E \leftrightarrow (E \leftrightarrow \neg F)$$

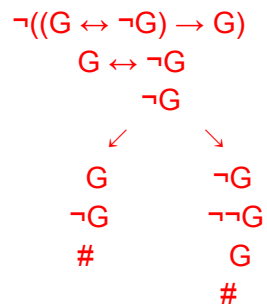


Não podemos concluir que E mora no centro, pois há ramos abertos.

d) G te diz: “Eu moro no centro”.

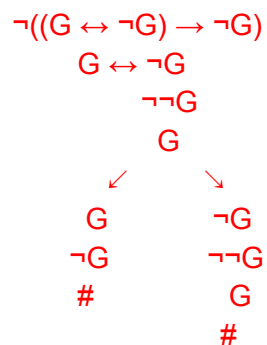
Atenção nesse exemplo!

$$S_d = G \leftrightarrow \neg G$$



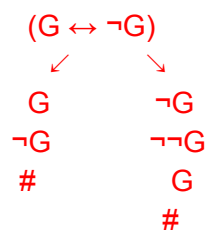
Podemos concluir que G mora no centro, pois todos os ramos estão fechados.

No entanto, essa conclusão está ao mesmo tempo certa e errada! Vamos provar agora que G não mora no centro:



Na verdade podemos concluir qualquer coisa a partir de S_d , porque S_d é insatisfatível e, se a premissa é falsa, a implicação é sempre verdadeira.
 $(\lceil 0 \rightarrow X \rceil = 1$ independentemente de quem é X)

Prova de que S_d é insatisfatível:



7. Você está andando num labirinto e de repente encontra três estradas: uma de ouro, uma de mármore e uma de pedra. Cada estrada é protegida por um mentiroso, que te dizem:
- Guardião de Ouro: “Essa estrada vai levar você direto à saída. Além disso, se a estrada de pedra te levar à saída, a de mármore também vai.”
 - Guardião de Mármore: “Nem a estrada de ouro nem a de pedra vão te levar à saída.”
 - Guardião de Pedra: “Indo pela estrada de ouro você chega à saída, pela de mármore você vai se perder.”

O modelo obtido foi:

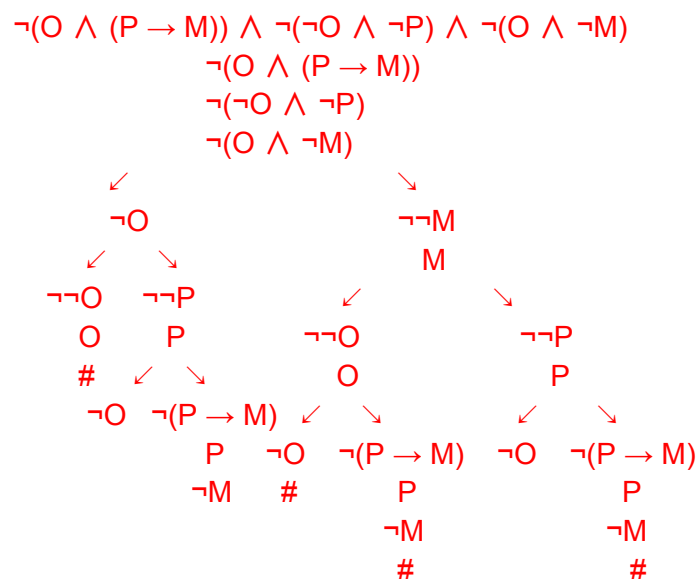
$$G_o = O \wedge (P \rightarrow M)$$

$$G_m = \neg O \wedge \neg P$$

$$G_p = O \wedge \neg M$$

$$G = \neg G_o \wedge \neg G_m \wedge \neg G_p$$

Vamos verificar se G é satisfatível.

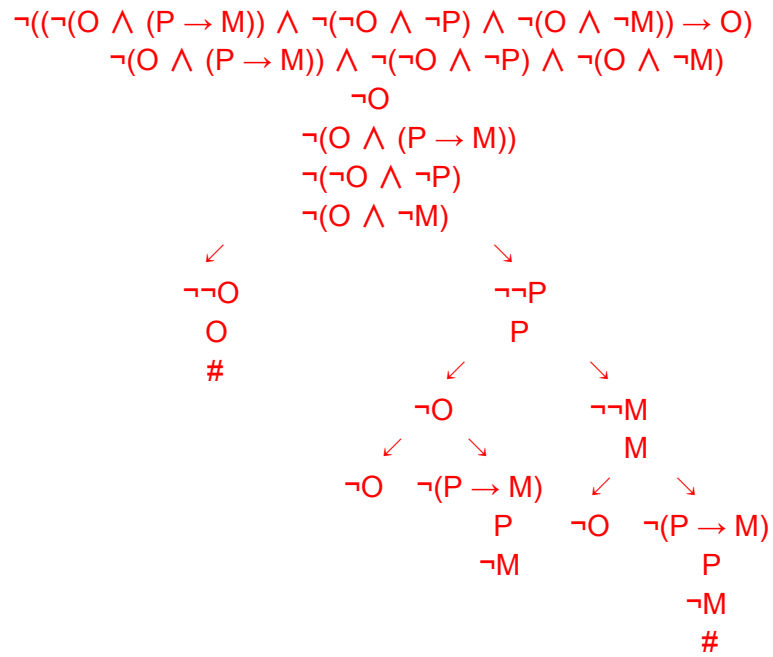


Pelos ramos abertos concluímos que a seguinte fórmula é equivalente:

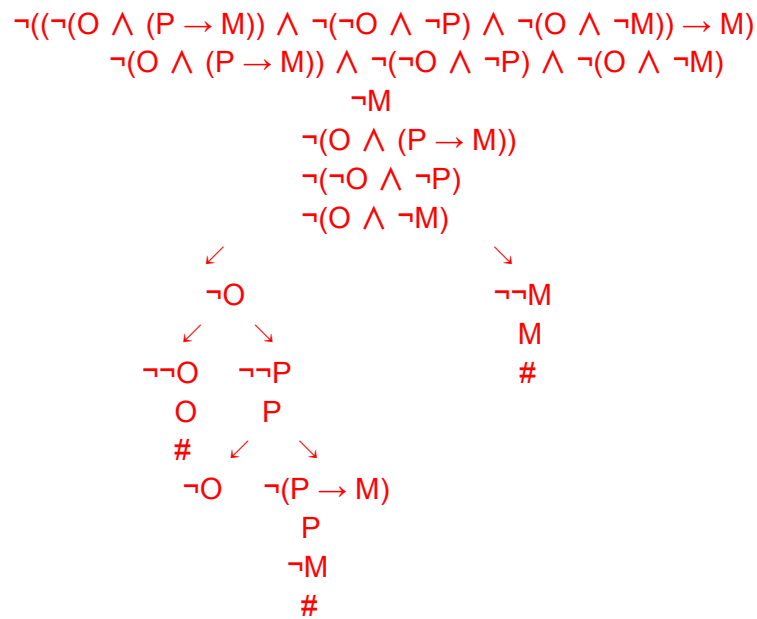
$$(\neg O \wedge P) \vee (\neg O \wedge P \wedge M) \vee (\neg O \wedge P \wedge \neg M) \Leftrightarrow (\neg O \wedge P)$$

Daí concluímos que a estrada de ouro certamente não leva à saída, a de pedra certamente leva a saída.

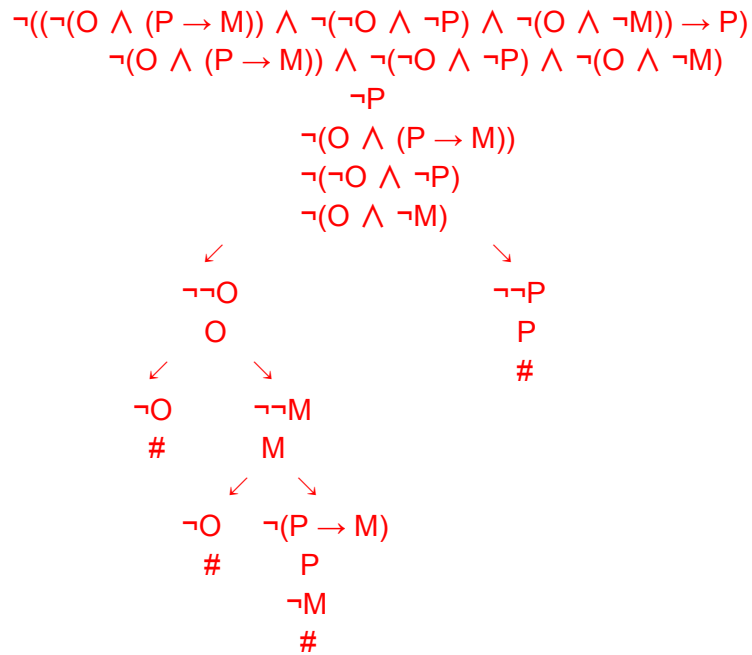
Também podemos descobrir se há uma estrada que leva à saída se testarmos se $G \Rightarrow O$, $G \Rightarrow M$ e $G \Rightarrow P$. O tableau será praticamente idêntico, com exceção que teremos o consequente negado, além das fórmulas de G .



G não implica em O, pois há ramos abertos no tableau de $\neg(G \rightarrow O)$.



G não implica em M, pois há ramos abertos no tableau de $\neg(G \rightarrow M)$.



G implica em P, pois todos os ramos do tableau de $\neg(G \rightarrow P)$ são fechados

8. Yakko, Wakko e Dot são suspeitos de um crime. Estes são seus depoimentos:

- Yakko: “Wakko é culpado e Dot é inocente.”
- Wakko: “Se Yakko é culpado, Dot também é.”
- Dot: “Eu sou inocente, mas, pelo menos um dos outros é culpado.”

Modelo, da lista anterior:

$$A_Y = W \wedge \neg D$$

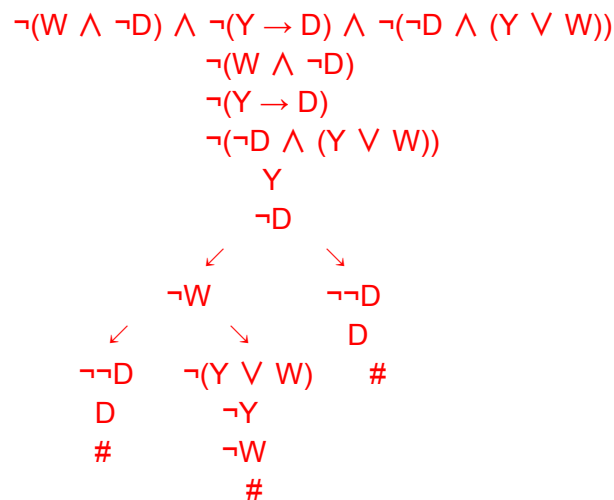
$$A_W = Y \rightarrow D$$

$$A_D = \neg D \wedge (Y \vee W)$$

a) É possível que os três estejam mentindo?

Isso equivale a perguntar se a seguinte fórmula é satisfatível:

$$A = \neg A_Y \wedge \neg A_W \wedge \neg A_D$$



Não é satisfatível, então é impossível que os três estejam mentindo.