Exercícios de Fixação

Modelagem Usando Lógica Proposicional

1. Considere os símbolos proposicionais P_1, P_2 e P_3.

a) Dê uma fórmula que é verdade se a maioria dos símbolos é verdade.
Como temos três símbolos, a fórmula deve ser verdade sempre que dois ou mais forem verdade. A coluna "F_1" na tabela verdade abaixo indica o comportamento desejado.

P_1	P_2	P_3	F_1	F_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Podemos escrever F_1 como a disjunção de cada um dos casos desejados:
$F_1 = (\neg P_1 \land P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land \neg P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land P_2 \land \neg P_3) \lor (P_1 \land P_2 \land P_3)$
Podemos também resumir essa fórmula como, porque cada uma das conjunções também é verdade na linha 8 da tabela verdade:
$F_1 = (P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land P_3) \lor (P_1 \land P_2)$

b) Dê uma fórmula que é verdade se exatamente um dos símbolos é verdade.
Esse é o comportamento esperado de um "ou exclusivo" entre três elementos, mostrado na coluna F_2 da tabela verdade acima. A negação de F_1 é verdade quando exatamente uma ou nenhuma proposição é verdade. Então poderíamos escrever
$F_2 = \neg F_1 \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$
$F_2 = \neg((P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land P_3) \lor (P_1 \land P_2)) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$
A disjunção final garante que pelo menos uma das proposições é verdadeira.
Outra forma é obter diretamente a partir da tabela verdade, descrevendo os casos em que desejamos que a fórmula seja verdadeira:
$F_2 = (P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3) \lor (\neg P_1 \land P_2 \land \neg P_3) \lor (\neg P_1 \land \neg P_2 \land P_3)$

c) Escreve as fórmulas que você escreveu anteriormente na FND e na FNC.

Em ambos os casos podemos obter a partir da tabela verdade ou manipular as fórmulas dadas.

F_1 já foi dada na FND. Vamos manipular para a FNC:

$F_1 = (P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land P_3) \lor (P_1 \land P_2)$ [FND]

$F_1 \Leftrightarrow ((P_1 \lor P_2) \land (P_1 \lor P_3) \land (P_2 \lor P_3) \land (P_3)) \lor (P_1 \land P_2)$

$F_1 \Leftrightarrow ((P_1 \lor P_2) \land P_3) \lor (P_1 \land P_2)$

$F_1 \Leftrightarrow (((P_1 \lor P_2) \land P_3) \lor P_1) \land (((P_1 \lor P_2) \land P_3) \lor P_2)$

$F_1 \Leftrightarrow (P_1 \lor P_2 \lor P_1) \land (P_1 \lor P_3) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_2) \land (P_2 \lor P_3)$[FNC]

$F_1 \Leftrightarrow (P_1 \lor P_2) \land (P_1 \lor P_3) \land (P_1 \lor P_2) \land (P_2 \lor P_3)$ [FNC]

$F_1 \Leftrightarrow (P_1 \lor P_2) \land (P_1 \lor P_3) \land (P_2 \lor P_3)$ [FNC]

Essa fórmula final é falsa sempre que duas (ou mais) proposições são falsas.

Também já foi dada uma versão de F_2 na FND:

$F_2 = (P_1 \land \neg P_2 \land \neg P_3) \lor (\neg P_1 \land P_2 \land \neg P_3) \lor (\neg P_1 \land \neg P_2 \land P_3)$
[FND]

Vamos manipular a outra versão para obter a FNC:

$F_2 = \neg((P_2 \land P_3) \lor (P_1 \land P_3) \lor (P_1 \land P_2)) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$

$F_2 \Leftrightarrow \neg(P_2 \land P_3) \land \neg(P_1 \land P_3) \land \neg(P_1 \land P_2) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$

$F_2 \Leftrightarrow (\neg P_2 \lor \neg P_3) \land (\neg P_1 \lor \neg P_3) \land (\neg P_1 \lor \neg P_2) \land (P_1 \lor P_2 \lor P_3)$
[FNC]

Essa fórmula é falsa se todos são falsos ou se qualquer par for verdadeiro.

2. Em uma investigação as seguintes informações foram coletadas:

- Se a faca está na sala, então vimos quando limpamos a sala.
- O assassinato foi cometido no porão ou no apartamento.
- Se o assassinato foi no porão, então a faca está na lata de lixo.
- Não vimos a faca quando limpamos a sala.
- Se o assassinato foi cometido no apartamento, a faca está na sala.

a) Escreva as sentenças como fórmulas lógicas.

Modelar consiste em representar o problema através de fórmulas lógicas. Vou definir os seguintes símbolos proposicionais para poder representar as sentenças como fórmulas:

S: “A faca está na sala”

V: “Vimos a faca quando limpamos a sala”

P: “O assassinato foi cometido no porão”

A: “O assassinato foi cometido no apartamento”

L: “A faca está na lata de lixo”

As negações dos símbolos são simplesmente as negações das sentenças, por exemplo, $\neg P$ significa “o assassinato não foi cometido no porão”

Desse modo, as informações coletadas são:

- $F_1 = S \rightarrow V$
- $F_2 = \neg(P \leftrightarrow A)$ [aqui as opções são exclusivas]
- $F_3 = P \rightarrow L$
- $F_4 = \neg V$
- $F_5 = A \rightarrow S$

Como só são apresentadas duas opções para a localização da faca (lata de lixo e apartamento) e para o assassinato (porão e apartamento) seria possível representar o problema com apenas três símbolos proposicionais desde que definíssimos as negações de cada símbolo, por exemplo:

$I[S] = 1 \Leftrightarrow$ “a faca está na sala”

$I[S] = 0 \Leftrightarrow$ “a faca está na lata de lixo”

$I[A] = 1 \Leftrightarrow$ “o assassinato foi cometido no apartamento”

$I[A] = 0 \Leftrightarrow$ “o assassinato foi cometido no porão”

Neste caso as sentenças seriam:

- $G_1 = S \rightarrow V$
- (esse sentença não é necessária, a escolha da proposição já diz que foi em um dos dois locais, e não em ambos simultaneamente)
- $G_3 = \neg A \rightarrow \neg S$
- $G_4 = \neg V$
- $G_5 = A \rightarrow S$

Um possível problema desse tipo de abordagem é que cria restrições. No mundo real a faca pode não estar em nenhum dos dois locais indicados, mas na modelagem adotada ela necessariamente está em um deles. Vai funcionar nesta questão, mas nem sempre é o caso.

b) O que podemos concluir a partir das afirmações?

Supondo que as afirmações são todas verdades, é necessário que o conjunto de afirmações seja consistente, ou seja, todas devem ser satisfeitas simultaneamente.

Utilizando a primeira modelagem:

Para satisfazer F_4 é necessário que I[V] = 0. Com isso, concluímos que para satisfazer F_1 é necessário que I[S] = 0. Isso implica que, para satisfazer F_5, I[A] = 0.

Para satisfazer F_2, considerando os resultados anteriores, devemos ter I[P] = 1. Finalmente, isso implica que I[L] = 1, para satisfazer F_3.

Como só há esta forma de satisfazer todas as restrições, concluímos que o assassinato foi no porão e a faca está na lata de lixo (I[P] = I[L] = 1).

Utilizando a segunda modelagem o caminho é similar:

Para satisfazer G_4 é necessário que I[V] = 0. Com isso, concluímos que para satisfazer G_1 é necessário que I[S] = 0. Isso implica que, para satisfazer G_5, I[A] = 0. Com isso, a G3 é satisfeita.

Daí concluímos a mesma coisa, o assassinato foi no porão e a faca está na lata de lixo (I[A] = I[S] = 0).

Outra abordagem é através da tabela-verdade. A tabela verdade da segunda modelagem é mais compacta, mas a conclusão é a mesma porque só há um caso verdadeiro (destacado na tabela). Lembre que I[S] = 0 significa que a faca está no lixo e I[A] = 0 significa que o assassinato foi no porão.

S	V	A	G_1	G_3	G_4	G_5	$G_1 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0

A da primeira modelagem é um pouco extensa, porque temos 5 proposições. Como só há um caso verdadeiro (destacado na tabela), chegamos às mesmas conclusões anteriores (I[P] = I[L] = 1 e I[A] = I[S] = I[V] = 0).

S	V	P	A	L	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0

3. Em uma certa cidade, os habitantes que moram no centro sempre mentem e os que moram fora dele sempre falam a verdade. Passando pela cidade você encontra algumas pessoas (A, B, C, D, E, F e G) e pergunta onde eles moram. Para cada caso, transforme as afirmações em fórmulas lógicas e diga o que pode ser concluído sobre a moradia dos habitantes.

Para todos os casos, seria possível criar uma proposição X_m para dizer que o indivíduo X mente (consequentemente, $\neg X_m$ diz que X fala a verdade), e outro X_c para dizer que mora no centro e mais um X_f para dizer que mora fora. No entanto, sabemos que é impossível morar no centro e fora dele simultaneamente, então basta usar X_c como mora no centro e $\neg X_c$ para dizer que mora fora. Além disso, não há porque questionar o enunciado, como $X_c \Leftrightarrow X_m$ (se mora no centro mente, se não mora fala a verdade), basta um único símbolo proposicional, definido como X: "O indivíduo X mora no centro da cidade" ⇔ "O indivíduo X mente".

a) A te diz: "Eu moro no centro, mas B não".
Sabemos que A fala a verdade se, e somente se, ele não mora no centro. Além disso, quando sabemos que ele mente, não sabemos que parte da sentença é falsa, pode ser ela toda ou parte dela. Por exemplo, se o indivíduo mente e diz que duas coisas ocorrem simultaneamente, existem três formas dessa afirmação ser falsa, se apenas uma das coisas não ocorre ou se ambas não ocorrem (essa é uma das leis de DeMorgan). Por isso, só temos certeza que a sentença dita é falsa se ele mora no centro, mas não sabemos qual parte da sentença é falsa. Dito isto, vamos ao modelo:
$S_a = A \leftrightarrow \neg(A \land \neg B)$
Ou seja, A mora no centro da cidade se, e somente se, a frase dita por ele, que está entre parênteses, é falsa.
A tabela-verdade desta fórmula é dada a seguir:

A	B	$\neg B$	$(A \land \neg B)$	$\neg(A \land \neg B)$	S_a
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Daí concluímos que A e B moram no centro, já que essa é a única forma de satisfazer S_a.

b) C te diz: “Se eu moro no centro, então D também não mora”.
(Por acidente, eu cometi um erro na redação da frase. Aquele “também” não faz sentido, e existem três formas de corrigir a frase, vou fazer os três casos aqui)
Possibilidade 1: “Se eu moro no centro, então D ~~também~~ não mora” (removendo o “também”)
$S_b = C \leftrightarrow \neg(C \rightarrow \neg D)$

C	D	¬D	(C → ¬D)	¬(C → ¬D)	S_b
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Não podemos concluir muita coisa sobre a moradia dos indivíduos, sabemos apenas que não ocorre a situação onde C mora no centro e D não mora.

Possibilidade 2: “Se eu moro no centro, então D também ~~não~~ mora” (removendo o “não”)
$S_b = C \leftrightarrow \neg(C \rightarrow D)$

C	D	(C → D)	¬(C → D)	S_b
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Também não podemos concluir muito, já que tem 3 casos em que a restrição é satisfeita. Sabemos apenas que pelo menos um deles não mora no centro.

Possibilidade 3: “Se eu **não** moro no centro, então D também não mora” (acrescentando um “não”, essa era a frase que eu queria originalmente)
$S_b = C \leftrightarrow \neg(\neg C \rightarrow \neg D)$

C	D	¬C	¬D	(¬C → ¬D)	¬(¬C → ¬D)	S_b
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Nesse caso podemos concluir que nenhum dos dois mora no centro.

c) E te diz: “Eu moro no centro ou F não mora”.

Novamente temos duas possibilidades, podemos interpretar o “ou” como inclusivo ou exclusivo. Vou fazer os dois casos.

Possibilidade 1: ou inclusivo

$S_c = E \leftrightarrow \neg(E \lor \neg F)$

E	F	¬F	(E ∨ ¬F)	¬(E ∨ ¬F)	S_c
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0

Neste caso concluímos que nenhum dos dois mora no centro. Perceba que este é o mesmo caso da terceira possibilidade apresentada no caso anterior, já que $(\neg X \rightarrow \neg Y) \Leftrightarrow (X \lor \neg Y)$.

Possibilidade 2: ou exclusivo

$S_c = E \leftrightarrow \neg(\neg(E \leftrightarrow \neg F)) \Leftrightarrow E \leftrightarrow (E \leftrightarrow \neg F)$

E	F	¬F	(E ↔ ¬F)	S_c
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

Perceba que nos dois casos em que S_c é satisfeito temos I[F] = 0, daí podemos concluir com certeza que F não mora no centro. Quanto a E, não é possível definir sua morada.

d) G te diz: “Eu moro no centro”.

$S_d = G \leftrightarrow \neg G$

Claramente isso é uma contradição, essa frase é um paradoxo lógico. Nada pode ser concluído.

G	¬G	S_d
0	1	0
1	0	0

4. Você está andando num labirinto e de repente encontra três estradas: uma de ouro, uma de mármore e uma de pedra. Cada estrada é protegida por um mentiroso, que te dizem:
    - Guardião de Ouro: “Essa estrada vai levar você direto à saída. Além disso, se a estrada de pedra te levar à saída, a de mármore também vai.”
    - Guardião de Mármore: “Nem a estrada de ouro nem a de pedra vão te levar à saída.”
    - Guardião de Pedra: “Indo pela estrada de ouro você chega à saída, pela de mármore você vai se perder.”

    a) Transforme as afirmações em fórmulas lógicas.
    Vou usar as seguintes proposições:
    O: “A estrada de ouro leva à saída”
    M: “A estrada de mármore leva à saída”
    P: “A estrada de pedra leva à saída”

    A afirmação do guardião de ouro é:
    $G_o = O \land (P \rightarrow M)$
    A afirmação do guardião de mármore é:
    $G_m = \neg O \land \neg P$
    A afirmação do guardião de pedra é:
    $G_p = O \land \neg M$

    O enunciado diz que os três são mentirosos, então, a fórmula a seguir representa todas as informações que nos foram dadas:
    $G = \neg G_o \land \neg G_m \land \neg G_p$

    b) Há uma estrada que leva certamente à saída? Se sim, qual?
    Podemos avaliar a tabela verdade e ver em que situações G é satisfeita.

O	P	M	G_o	G_m	G_p	G
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0

    Daí concluímos que a estrada de ouro certamente não leva à saída, a de pedra certamente leva a saída (já que nos dois casos em que G é satisfeito, temos I[O] = 0 e I[P] = 1) e não podemos concluir nada sobre a estrada de mármore.

Também podemos chegar a esta conclusão manipulando a fórmula G:

$G = \neg G_o \land \neg G_m \land \neg G_p$

$G = \neg(O \land (P \rightarrow M)) \land \neg(\neg O \land \neg P) \land \neg(O \land \neg M)$

$G \Leftrightarrow (\neg O \lor \neg(P \rightarrow M)) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M)$

$G \Leftrightarrow (\neg O \lor (P \land \neg M)) \land ((O \land \neg O) \lor (O \land M) \lor (\neg O \land P) \lor (P \land M))$

$G \Leftrightarrow (\neg O \lor (P \land \neg M)) \land ((O \land M) \lor (\neg O \land P) \lor (P \land M))$

$G \Leftrightarrow (\neg O \land O \land M) \lor (\neg O \land \neg O \land P) \lor (\neg O \land P \land M) \lor (P \land \neg M \land O \land M) \lor$

$\lor (P \land \neg M \land \neg O \land P) \lor (P \land \neg M \land P \land M)$

$G \Leftrightarrow (\neg O \land P) \lor (\neg O \land P \land M) \lor (P \land \neg M \land \neg O)$

$G \Leftrightarrow (\neg O \land P) \lor ((\neg O \land P) \land (M \lor \neg M))$

$G \Leftrightarrow (\neg O \land P) \lor (\neg O \land P)$

$G \Leftrightarrow (\neg O \land P)$

Que só é satisfeito se P é verdadeiro e O é falso, como na tabela verdade.

5. Yakko, Wakko e Dot são suspeitos de um crime. Estes são seus depoimentos:

- Yakko: “Wakko é culpado e Dot é inocente.”
- Wakko: “Se Yakko é culpado, Dot também é.”
- Dot: “Eu sou inocente, mas, pelo menos um dos outros é culpado.”

a) Expresse os testemunhos como fórmulas lógicas.
Escolhi as seguintes proposições:
Y: “Yakko é culpado”
W: “Wakko é culpado”
D: “Dot é culpada”

As afirmações de cada um deles são:
$A_Y = W \land \neg D$
$A_W = Y \rightarrow D$
$A_D = \neg D \land (Y \lor W)$

b) Que conclusões podemos tirar se sabemos que Wakko está mentindo?
Sabemos apenas que Wakko está mentindo, não foi dito nada sobre os outros dois. Isto quer dizer que A_w é falso.
$\neg A_w = \neg(Y \rightarrow D) \Leftrightarrow (Y \land \neg D)$
Essa informação, sozinha, nos diz que Yakko é culpado e Dot é inocente. Na tabela verdade abaixo, veja que as linhas destacadas são aquelas onde A_w é falso, em ambas temos I[Y] = 1 e I[D] = 0.

c) É possível que os três estejam mentindo?
Isso equivale a perguntar se a seguinte fórmula é satisfatível:
$A = \neg A_Y \land \neg A_w \land \neg A_D$
$A = \neg(W \land \neg D) \land \neg(Y \rightarrow D) \land \neg(\neg D \land (Y \lor W))$
$A \Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg(Y \lor W))$
$A \Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land ((\neg D \land D) \lor (\neg D \land \neg Y \land \neg W))$
$A \Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land \neg Y \land \neg W$
$A \Leftrightarrow 0$
Logo, é impossível.

Pela tabela verdade vemos que não há nenhuma linha onde as três afirmações sejam falsas simultaneamente.

D	W	Y	A_Y	A_W	A_D	A
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0

6. Você encontra três caixas, uma contém um tesouro e as outras duas estão vazias. Cada caixa tem uma dica sobre o seu conteúdo:
   - Caixa 1: “O tesouro não está aqui.”
   - Caixa 2: “O tesouro não está aqui.”
   - Caixa 3: “O tesouro está na caixa 2.”

   Sabemos que apenas uma das mensagens é verdadeira. Formalize o problema e determine, se possível, em qual caixa o tesouro está.

   Vou usar as seguintes proposições:
   C_1: “Há ouro na caixa 1”
   C_2: “Há ouro na caixa 2”
   C_3: “Há ouro na caixa 3”

   As afirmações são:
   $A_1 = \neg C_1$
   $A_2 = \neg C_2$
   $A_3 = C_2$

   Foi dito que apenas uma das mensagens é verdadeira, então devemos ter:
   $A = (A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg A_1 \land A_2 \land \neg A_3) \lor (\neg A_1 \land \neg A_2 \land A_3)$
   $A = (\neg C_1 \land \neg\neg C_2 \land \neg C_2) \lor (\neg\neg C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_2) \lor (\neg\neg C_1 \land \neg\neg C_2 \land C_2)$
   $A \Leftrightarrow (\neg C_1 \land C_2 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land C_2 \land C_2)$
   $A \Leftrightarrow (C_1 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land C_2)$

   Até agora concluímos que ou há ouro na Caixa 1 e não há na caixa 2 ou há ouro em ambas (não sabemos nada sobre a Caixa 3). Nos dois casos, há ouro na Caixa 1, então essa seria a melhor escolha.

   Mas, na verdade, só um dos casos atende às restrições do problema porque tem uma informação extra que não usamos ainda. Foi dito que há ouro em uma caixa e as outras duas estão vazias, essa restrição pode ser representada como:
   $R = (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_3) \lor (\neg C_1 \land C_2 \land \neg C_3) \lor (\neg C_1 \land \neg C_2 \land C_3)$

   Portanto o modelo completo do problema é:
   $F = A \land R$
   $F = ((C_1 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land C_2)) \land ((C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_3) \lor (\neg C_1 \land C_2 \land \neg C_3) \lor (\neg C_1 \land \neg C_2 \land C_3))$
   $F \Leftrightarrow (C_1 \land \neg C_2 \land C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_3) \lor (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_1 \land C_2 \land \neg C_3) \lor$
   $\lor (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_1 \land \neg C_2 \land C_3) \lor (C_1 \land C_2 \land C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_3) \lor$
   $\lor (C_1 \land C_2 \land \neg C_1 \land C_2 \land \neg C_3) \lor (C_1 \land C_2 \land \neg C_1 \land \neg C_2 \land C_3)$
   $F \Leftrightarrow (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_3)$

   Portanto, a conclusão final é que há ouro apenas na Caixa 1.

Tabela-verdade do problema:

C_1	C_2	C_3	A_1	A_2	A_3	A	R	F
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0

7. Você encontra dois baús. Um dos baús traz a inscrição: “Pelo menos um de nós tem um tesouro” e o outro baú diz: “Eu tenho um tesouro”. Você sabe que ou ambos estão dizendo a verdade ou ambos estão mentindo. Formalize o problema e determine qual baú você escolheria para tentar encontrar o tesouro. Justifique.

Vou usar as seguintes proposições:

B_1 = “o primeiro baú tem um tesouro”

B_2 = “o segundo baú tem um tesouro”

As afirmações são:

$A_1 = (B_1 \lor B_2)$

$A_2 = B_2$

Sabemos que as duas afirmações são verdadeiras ou as duas são falsas, então a fórmula que representa o problema é:

$F = (A_1 \land A_2) \lor (\neg A_1 \land \neg A_2)$

$F = ((B_1 \lor B_2) \land B_2) \lor (\neg(B_1 \lor B_2) \land \neg B_2)$

$F \Leftrightarrow (B_1 \land B_2) \lor (B_2 \land B_2) \lor (\neg B_1 \land \neg B_2 \land \neg B_2)$

$F \Leftrightarrow (B_1 \land B_2) \lor B_2 \lor (\neg B_1 \land \neg B_2)$

$F \Leftrightarrow B_2 \lor (\neg B_1 \land \neg B_2)$

$F \Leftrightarrow (B_2 \lor \neg B_1) \land (B_2 \lor \neg B_2)$

$F \Leftrightarrow (B_2 \lor \neg B_1)$

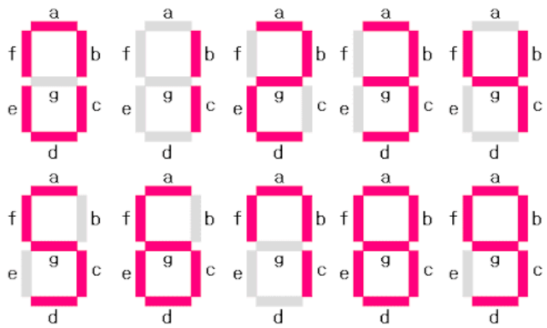
$F \Leftrightarrow (B_1 \rightarrow B_2)$

Se temos que escolher apenas um, é melhor escolher o segundo baú, porque se ele não tiver tesouro o primeiro também não tem. Se ele tiver um tesouro pode ser que o primeiro tenha ou não.

Tabela-verdade do problema:

B_1	B_2	A_1	A_2	F
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

8. Um *display* de 7 segmentos é usado para representar os dígitos de 0 a 9 conforme ilustrado na figura abaixo. As letras *a* a *f* identificam os segmentos. Usando os símbolos proposicionais W, X, Y e Z como um contador binário, faça uma fórmula lógica para ativar cada um dos 7 segmentos. Por exemplo, o segmento *e* deve acender quando WXYZ é 0000, 0010, 0110 ou 1000. Para os valores 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111 tanto faz se os segmentos acendem ou não.



Esse problema ilustra uma situação real. Temos quatro “entradas” binárias (W, X, Y e Z) e o *display* deve acender adequadamente, representando o algarismo decimal equivalente ao número binário WXYZ, onde W é o bit mais significativo e Z o menos significativo. Vou começar fazendo uma tabela verdade que representa o comportamento desejado para cada segmento do display. Não importa o que acontece a partir do decimal 10, porque os algarismos vão apenas até 9, vou representar isso com uma interrogação na tabela.

W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	Decimal
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	2
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	3
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	4
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	6
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	7
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	8
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	9
1	0	1	0	?	?	?	?	?	?	?	10
1	0	1	1	?	?	?	?	?	?	?	11
1	1	0	0	?	?	?	?	?	?	?	12
1	1	0	1	?	?	?	?	?	?	?	13
1	1	1	0	?	?	?	?	?	?	?	14
1	1	1	1	?	?	?	?	?	?	?	15

Agora podemos observar a tabela e escrever uma fórmula para cada segmento do *display*, é assim que os circuitos deste tipo são projetados. As interrogações podem ser tratadas tanto como verdadeiro quanto como falso, o que for mais conveniente. Vou utilizar a técnicas discutida para obtenção da FNC e FND a partir da tabela:

Para o *led* "a" é mais interessante obter a FNC, pois apenas dois casos são obrigatoriamente falsos:
$A = (W \lor X \lor Y \lor \neg Z) \land (W \lor \neg X \lor Y \lor Z)$

Para o *led* "b" é mais interessante obter a FNC, pois apenas dois casos são obrigatoriamente falsos:
$B = (W \lor \neg X \lor Y \lor \neg Z) \land (W \lor \neg X \lor \neg Y \lor Z)$

Para o *led* "c" é mais interessante obter a FNC, pois apenas um caso é obrigatoriamente falso:
$C = (W \lor X \lor \neg Y \lor Z)$

Para o *led* "d" é mais interessante obter a FNC, pois apenas três casos são obrigatoriamente falsos:
$D = (W \lor X \lor Y \lor \neg Z) \land (W \lor \neg X \lor Y \lor Z) \land (W \lor \neg X \lor \neg Y \lor \neg Z)$

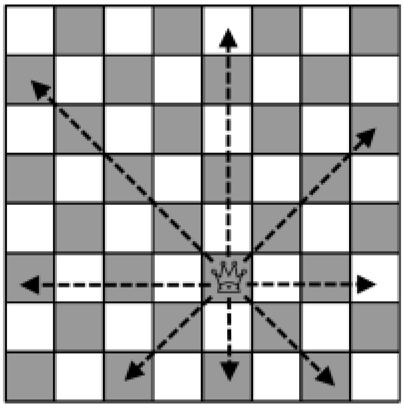
Para o *led* "e" é mais interessante obter a FND, pois apenas quatro casos são obrigatoriamente verdadeiros:
$E = (\neg W \land \neg X \land \neg Y \land \neg Z) \lor (\neg W \land \neg X \land Y \land \neg Z) \lor (\neg W \land X \land Y \land \neg Z) \lor$
$\lor (W \land \neg X \land \neg Y \land \neg Z)$

Para o *led* "f" é mais interessante obter a FNC, pois apenas três casos são obrigatoriamente falsos:
$F = (W \lor X \lor Y \lor \neg Z) \land (W \lor X \lor \neg Y \lor Z) \land (W \lor X \lor \neg Y \lor \neg Z)$

Para o *led* "f" é mais interessante obter a FNC, pois apenas três casos são obrigatoriamente falsos:
$G = (W \lor X \lor Y \lor Z) \land (W \lor X \lor Y \lor \neg Z) \land (W \lor \neg X \lor \neg Y \lor \neg Z)$

Todas estas fórmulas podem ser simplificadas. Como as interrogações podem ser consideradas como verdadeiras ou falsas, uma simples manipulação algébrica pode não conseguir chegar à versão mais simples das fórmulas. Por exemplo, a fórmula $C = W \lor X \lor \neg Y \lor Z$ não pode ser simplificada algebricamente, mas neste problema poderíamos ter escrito $C' = X \lor \neg Y \lor Z$, que vai tornar falsas as linhas 3 e 11. Como o valor da linha 11 não importa, essa também é uma fórmula aceitável para o problema.
Não é o objetivo desta disciplina discutir métodos de simplificação envolvendo estes casos indefinidos, mas quem tiver interesse pode estudar mapas de Karnaugh e o método de Quine-McCluskey. O método de Karnaugh é mais intuitivo e visual, e é fácil de utilizar em problemas com até 4 proposições. O método de Quine-McCluskey é funcionalmente idêntico, e é mais indicado para implementação em computadores e para fórmulas com mais proposições. Em ambos os casos o trabalho cresce exponencialmente com o número de variáveis.

9. O problema das N-rainhas consiste em colocar N rainhas em um tabuleiro de xadrez de tamanho N x N de modo que quaisquer duas rainhas do tabuleiro não possam se atacar. O ataque da rainha pode ser feito na vertical, horizontal ou diagonal, como ilustrado na figura abaixo em um tabuleiro tradicional 8 x 8.



a)* Formalize o problema das 3 rainhas como um problema de satisfatibilidade. (Utilize um símbolo proposicional para cada posição do tabuleiro. Os símbolos devem ser definidos como I[X]=1 ⇔ “Há uma rainha na posição X do tabuleiro”.)

Como temos 3 rainhas, teremos 3x3 = 9 proposições, uma para cada posição do tabuleiro. Para deixar claro qual proposição corresponde a qual lugar do tabuleiro, segue uma figura do tabuleiro:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Considerando a movimentação da rainha, e que elas não podem se atacar, podemos escrever, por exemplo, que se há uma rainha na casa A, não podemos ter rainhas nas casas B e C (mesma linha) nem nas casas D e G (mesma coluna), nem nas casas E e I (mesma diagonal). De forma análoga, se não tem rainha em B e C nem em D e G, é necessário que haja uma rainha em A, porque com *n* rainhas, *n* linhas e *n* colunas é preciso que haja exatamente uma rainha por linha e por coluna. Daí podemos escrever as seguintes restrições.

$R_1 = A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)$

$R_2 = B \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg H)$

$R_3 = C \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$

$R_4 = D \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$

$R_5 = E \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg F \land \neg G \land \neg H \land \neg I)$

$R_6 = F \leftrightarrow (\neg D \land \neg E \land \neg C \land \neg I \land \neg B \land \neg H)$

$R_7 = G \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg H \land \neg I)$

$R_8 = H \leftrightarrow (\neg B \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$

$R_9 = I \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$

Essas fórmulas ainda não representam o problema todo, porque elas garantem que tem no máximo uma rainha por linha/coluna/diagonal, mas permitem que tenha menos que 3 rainhas no total. Verifique que se há apenas uma rainha em E, todas as restrições são satisfeitas. O mesmo também ocorre com uma rainha em A e outra em F, por exemplo.

Precisamos garantir que haja pelo menos uma rainha por linha, representados pelas restrições:

$R_{10} = (A \lor B \lor C)$

$R_{11} = (D \lor E \lor F)$

$R_{12} = (G \lor H \lor I)$

E também pelo menos uma rainha por coluna:

$R_{13} = (A \lor D \lor G)$

$R_{14} = (B \lor E \lor H)$

$R_{15} = (C \lor F \lor I)$

Combinando tudo, o problema das 3 rainhas pode ser descrito pela fórmula

$$Q_3 = R_1 \land R_2 \land R_3 \land R_4 \land R_5 \land R_6 \land R_7 \land R_8 \land R_9 \land R_{10} \land R_{11} \land R_{12} \land R_{13} \land R_{14} \land R_{15}$$

Como as fórmulas R_1 a R_9 permitem no máximo uma rainha por linha/coluna e as fórmulas R_{10} a R_{15} exigem que haja no mínimo uma rainha por linha/coluna, então temos exatamente uma rainha por linha/coluna, além de respeitar as restrições diagonais.

b) Mostre que o problema das 3 rainhas não tem solução.

Para mostrar que não tem solução, temos que mostrar que a fórmula Q_3, obtida anteriormente, não pode ser satisfeita. Ou seja, as restrições do problema não podem ser satisfeitas simultaneamente.
Obviamente não vamos fazer isso pela tabela verdade, porque ela teria 512 linhas. Então, vamos tentar satisfazer as restrições sequencialmente.

Suponha que A é verdadeiro.

- Para satisfazer R_1 é necessário que B, C, D, E, G e I sejam falsos.
- Neste ponto estamos satisfazendo as restrições R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7, R_9, R_{10} e R_{13}.
- Como D e E são falsos, F deve ser verdadeiro para satisfazer R_{11} e, consequentemente, R_{15}.
- Para satisfazer R_6, é necessário que H seja falso.
- Com G, H e I falsos fica impossível satisfazer R_{12}.

Concluímos aqui que com A verdadeiro é impossível satisfazer as restrições, então A só pode ser falso.

Suponha que C é verdadeiro.

- Para satisfazer R_3 é necessário que A, B, E, F, G e I sejam falsos.
- Neste ponto estamos satisfazendo as restrições R_1, R_2, R_3, R_5, R_6, R_7, R_9, R_{10} e R_{15}.
- Como E e F são falsos, D deve ser verdadeiro para satisfazer R_{11} e, consequentemente, R_{13}.
- Para satisfazer R_4, é necessário que H seja falso.
- Com B, E e H falsos fica impossível satisfazer R_{14}.

Concluímos aqui que com C verdadeiro é impossível satisfazer as restrições, então C só pode ser falso.

Suponha que B é verdadeiro.

- Para satisfazer R_2 é necessário que A, C, D, E, F e H sejam falsos.
- Neste ponto estamos satisfazendo as restrições R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_8, R_{10} e R_{14}.
- Com D, E e F falsos fica impossível satisfazer R_{11}.

Concluímos aqui que com B verdadeiro é impossível satisfazer as restrições, então B só pode ser falso.

Neste ponto descobrimos que A, B e C não podem ser verdadeiros, com isso é impossível satisfazer R_{10}, e concluímos que Q_3 é insatisfatível. Ou seja, o problema não tem solução.