Exercícios de Fixação

Resolução

1. Considere o conjunto de hipóteses □ = {H1, H2, H3}, onde

   - H1 = (P ∧ Q) → R
   - H2 = (Q ∨ ¬P)
   - H3 = P.

   □ é consistente? (um conjunto é consistente se é satisfatível)

   Para ser consistente H = H1 ∧ H2 ∧ H3 deve ser satisfatível.

   Levando para a FNC:
   H = ((P ∧ Q) → R) ∧ (Q ∨ ¬P) ∧ P
   ⇔ (¬P ∨ ¬Q ∨ R) ∧ (Q ∨ ¬P) ∧ P

   1. ¬P, ¬Q, R
   2. ¬P, Q
   3. P
   4. ¬P, R R(1, 2)
   5. ¬Q, R R(1, 3)
   6. Q R(2, 3)
   7. R R(3, 4)

   Como não é fechada, a fórmula é satisfatível, as condições necessárias são I[P] = I[Q] = I[R] = 1

2. Verifique a validade das seguintes equivalências essenciais.

Lembre que a prova de tautologia por resolução sempre inicia com a fórmula negada. Se a resolução associada à negação da fórmula é fechada, a fórmula é uma tautologia.

A conversão para FNC poderia ser muito mais rápida em vários casos, eu estou usando o algoritmo sugerido em aula: primeiro elimina as bi-implicações, depois as implicações, depois internaliza as negações e por fim faz a distribuição.e

a. $(A \lor \neg A) \Leftrightarrow 1$

FNC:

$\neg H = \neg((A \lor \neg A) \leftrightarrow 1)$

$\Leftrightarrow \neg(((A \lor \neg A) \rightarrow 1) \land (1 \rightarrow (A \lor \neg A)))$

$\Leftrightarrow \neg(1 \land (1 \rightarrow (A \lor \neg A)))$

$\Leftrightarrow \neg(1 \rightarrow (A \lor \neg A))$

$\Leftrightarrow 1 \land \neg(A \lor \neg A)$

$\Leftrightarrow A \land \neg A$

Resolução:

1. A
2. $\neg A$
3. $\{\}$ R(1, 2)

b. $(A \land \neg A) \Leftrightarrow 0$

FNC:

$\neg H = \neg((A \land \neg A) \leftrightarrow 0)$

$\Leftrightarrow \neg(((A \land \neg A) \rightarrow 0) \land (0 \rightarrow (A \land \neg A)))$

$\Leftrightarrow \neg(((A \land \neg A) \rightarrow 0) \land 1)$

$\Leftrightarrow \neg((A \land \neg A) \rightarrow 0)$

$\Leftrightarrow (A \land \neg A) \land \neg 0$

$\Leftrightarrow A \land \neg A$

Resolução:

1. A
2. $\neg A$
3. $\{\}$ R(1, 2)

c. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$

FNC:

$\neg H = \neg((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)))$

$\Leftrightarrow \neg((((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))) \land$
$(((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))))$

$\Leftrightarrow \neg(((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \lor ((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land \neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (\neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor A))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land ((A \land \neg B) \lor (B \land \neg A))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (A \lor B) \land (A \lor \neg A) \land (\neg B \lor B) \land (\neg B \lor \neg A)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (A \lor B) \land (\neg B \lor \neg A)$

Resolução:

1. $\neg A, B$
2. $\neg B, A$
3. A, B
4. $\neg A, \neg B$
5. B — R(1, 3)
6. $\neg B$ — R(2, 4)
7. $\{\}$ — R(5, 6)

d. $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))$

FNC:

$\neg H = \neg((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)))$

$\Leftrightarrow \neg((((A \to B) \land (B \to A)) \to ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))) \land$
$\quad (((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)) \to ((A \to B) \land (B \to A))))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \lor ((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))) \land$
$\quad (\neg((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)) \lor ((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A))))$

$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \land \neg((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B))) \lor$
$\quad (\neg\neg((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)) \land \neg((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)))$

$\Leftrightarrow (((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \land (\neg(A \land B) \land \neg(\neg A \land \neg B))) \lor$
$\quad (((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)) \land (\neg(\neg A \lor B) \lor \neg(\neg B \lor A)))$

$\Leftrightarrow (((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A)) \land ((\neg A \lor \neg B) \land (\neg\neg A \lor \neg\neg B))) \lor$
$\quad (((A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)) \land ((\neg\neg A \land \neg B) \lor (\neg\neg B \land \neg A)))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B)) \lor$
$\quad ((A \lor \neg B) \land (B \lor \neg A) \land (A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor A) \land (\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B)$

Resolução:

1. ¬A, B
2. ¬B, A
3. A, B
4. ¬A, ¬B
5. B R(1, 3)
6. ¬B R(2, 4)
7. { } R(5, 6)

e. $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B)$

FNC:

$\neg H = \neg((A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B))$

$\Leftrightarrow \neg(((A \to B) \to (\neg A \lor B)) \land ((\neg A \lor B) \to (A \to B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(\neg A \lor B) \lor (\neg A \lor B)) \land (\neg(\neg A \lor B) \lor (\neg A \lor B)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A \lor B) \lor (\neg A \lor B))$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg A \lor B) \land \neg(\neg A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land \neg\neg A \land \neg B$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land A \land \neg B$

Resolução:

1. ¬A, B
2. A
3. ¬B
4. B R(1, 2)
5. { } R(3, 4)

f. $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

FNC:

$\neg H = \neg((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A))$

$\Leftrightarrow \neg(((A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \wedge ((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)) \wedge (\neg(\neg A \vee \neg\neg B) \vee (\neg A \vee B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B)) \wedge (\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee B))$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg A \vee B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge \neg\neg A \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge A \wedge \neg B$

Resolução:

1. $\neg A, B$
2. A
3. $\neg B$
4. B R(1, 2)
5. { } R(3, 4)

g. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

FNC:

$\neg H = \neg(\neg\neg A \leftrightarrow A)$

$\Leftrightarrow \neg((\neg\neg A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \neg\neg A))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg\neg\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg\neg A))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg\neg A \vee A) \vee \neg(\neg A \vee \neg\neg A)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg\neg\neg A \wedge \neg A) \vee (\neg\neg A \wedge \neg\neg\neg A)$

$\Leftrightarrow (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$

$\Leftrightarrow A \wedge \neg A$

Resolução:

1. A
2. $\neg A$
3. { } R(1,2)

h. $\neg(A \land B) \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$

FNC:

$\neg H = \neg(\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(A \land B) \rightarrow (\neg A \lor \neg B)) \land ((\neg A \lor \neg B) \rightarrow \neg(A \land B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg\neg(A \land B) \lor (\neg A \lor \neg B)) \land (\neg(\neg A \lor \neg B) \lor \neg(A \land B)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg(A \land B) \lor (\neg A \lor \neg B)) \lor \neg(\neg(\neg A \lor \neg B) \lor \neg(A \land B))$

$\Leftrightarrow (\neg\neg\neg(A \land B) \land \neg(\neg A \lor \neg B)) \lor (\neg\neg(\neg A \lor \neg B) \land \neg\neg(A \land B))$

$\Leftrightarrow (\neg(A \land B) \land \neg(\neg A \lor \neg B)) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land (A \land B))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor \neg B) \land (\neg\neg A \land \neg\neg B)) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land (A \land B))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor \neg B) \land A \land B) \lor ((\neg A \lor \neg B) \land A \land B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B) \land A \land B$

Resolução:

1. $\neg A, \neg B$
2. A
3. B
4. $\neg B$ R(1, 2)
5. { } R(3, 4)

i. $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$

FNC:

$\neg H = \neg(\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(A \lor B) \rightarrow (\neg A \land \neg B)) \land ((\neg A \land \neg B) \rightarrow \neg(A \lor B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg\neg(A \lor B) \lor (\neg A \land \neg B)) \land (\neg(\neg A \land \neg B) \lor \neg(A \lor B)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg(A \lor B) \lor (\neg A \land \neg B)) \lor \neg(\neg(\neg A \land \neg B) \lor \neg(A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg\neg\neg(A \lor B) \land \neg(\neg A \land \neg B)) \lor (\neg\neg(\neg A \land \neg B) \land \neg\neg(A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg(A \lor B) \land \neg(\neg A \land \neg B)) \lor (\neg A \land \neg B \land (A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land (\neg\neg A \lor \neg\neg B)) \lor (\neg A \land \neg B \land (A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land (A \lor B)) \lor (\neg A \land \neg B \land (A \lor B))$

$\Leftrightarrow \neg A \land \neg B \land (A \lor B)$

Resolução:

1. $\neg A$
2. $\neg B$
3. A, B
4. B R(1, 3)
5. { } R(2, 4)

3. Verifique a validade das seguintes implicações essenciais.

a. $((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$

FNC:

$\neg H = \neg(((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land \neg(\neg A \lor C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor C) \land A \land \neg C$

Resolução:

1. ¬A, B
2. ¬B, C
3. A
4. C
5. B — R(1, 3)
6. ¬B — R(2, 4)
7. { } — R(5, 6)

b. $((A \rightarrow B) \land A) \Rightarrow B$

FNC:

$\neg H = \neg(((A \rightarrow B) \land A) \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land A \land \neg B$

Resolução:

1. ¬A, B
2. A
3. ¬B
4. B — R(1, 2)
5. { } — R(3, 4)

c. $((A \rightarrow B) \land \neg B) \Rightarrow \neg A$

FNC:

$\neg H = \neg(((A \rightarrow B) \land \neg B) \rightarrow \neg A)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land \neg B \land A$

Resolução:

1. ¬A, B
2. ¬B
3. A
4. ¬A — R(1, 2)
5. { } — R(3, 4)

d. $(A \land B) \Rightarrow A$

FNC:

$\neg H = \neg((A \land B) \rightarrow A)$

$\Leftrightarrow A \land B \land \neg A$

Resolução:

1. A
2. B
3. $\neg A$
4. $\{\,\}$ R(1, 3)

e. $A \Rightarrow (A \lor B)$

FNC:

$\neg H = \neg(A \rightarrow (A \lor B))$

$\Leftrightarrow A \land \neg(A \lor B)$

$\Leftrightarrow A \land \neg A \land \neg B$

Resolução:

1. A
2. $\neg A$
3. $\neg B$
4. $\{\,\}$ R(1, 2)

★ $(A \rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow A)$

FNC:

$\neg H = \neg((A \rightarrow B) \leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow A))$

$\Leftrightarrow \neg(((A \rightarrow B) \rightarrow (((A \land B) \rightarrow A) \land (A \rightarrow (A \land B)))) \land$
$\quad ((((A \land B) \rightarrow A) \land (A \rightarrow (A \land B))) \rightarrow (A \rightarrow B)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg(\neg A \lor B) \lor ((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B)))) \land$
$\quad (\neg((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \lor (\neg A \lor B)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A \lor B) \lor ((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B)))) \lor$
$\quad \neg(\neg((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \lor (\neg A \lor B))$

$\Leftrightarrow (\neg\neg(\neg A \lor B) \land \neg((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B)))) \lor$
$\quad (\neg\neg((\neg(A \land B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \land \neg(\neg A \lor B))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land(\neg(\neg(A \land B) \lor A) \lor \neg(\neg A \lor (A \land B)))) \lor$
$\quad ((((\neg A \lor \neg B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \land (\neg\neg A \land \neg B))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land ((\neg\neg(A \land B) \land \neg A) \lor (\neg\neg A \land \neg(A \land B)))) \lor$
$\quad ((((\neg A \lor \neg B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \land A \land \neg B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land ((A \land B \land \neg A) \lor (A \land (\neg A \lor \neg B)))) \lor$
$\quad ((((\neg A \lor \neg B) \lor A) \land (\neg A \lor (A \land B))) \land A \land \neg B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land (A \land (\neg A \lor \neg B))) \lor ((\neg A \lor (A \land B)) \land A \land \neg B)$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land A \land \neg B) \lor ((\neg A \lor B) \land A \land \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land A \land \neg B$

Resolução:

1. $\neg A, B$
2. A
3. $\neg B$
4. B $\quad$ R(1, 2)
5. $\{\}$ $\quad$ R(3, 4)

4. Verifique se é tautologia

$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P$

FNC:

$\neg H = \neg(((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow ((\neg(P \rightarrow Q) \lor (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow P))) \land \neg P$

$\Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor ((Q \lor \neg P) \land (P \lor \neg Q))) \land \neg P$

$\Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor (Q \lor \neg P)) \land ((P \land \neg Q) \lor (P \lor \neg Q)) \land \neg P$

$\Leftrightarrow (P \lor \neg Q) \land \neg P$

Resolução:

1. $P, \neg Q$
2. $\neg P$
3. $\neg Q$ R(1,2)

Como não é fechado, a fórmula não é tautologia. A condição necessária para satisfazer H é que P e Q sejam falsos.

5. Em uma investigação as seguintes informações foram coletadas:
   a. Se a faca está na sala, então vimos quando limpamos a sala.
   b. O assassinato foi cometido no porão ou no apartamento.
   c. Se o assassinato foi no porão, então a faca está na lata de lixo.
   d. Não vimos a faca quando limpamos a sala.
   e. Se o assassinato foi cometido no apartamento, a faca está na sala.

   Na lista anterior modelamos essas informações através das seguintes fórmulas:

   - $F_1 = S \rightarrow V$
   - $F_2 = \neg(P \leftrightarrow A)$ [aqui as opções são exclusivas]
   - $F_3 = P \rightarrow L$
   - $F_4 = \neg V$
   - $F_5 = A \rightarrow S$

   Vamos verificar a satisfatibilidade deste conjunto.

$H = (S \rightarrow V) \land \neg(P \leftrightarrow A) \land (P \rightarrow L) \land \neg V \land (A \rightarrow S)$
$\Leftrightarrow (\neg S \lor V) \land (P \lor A) \land (\neg P \lor \neg A) \land (\neg P \lor L) \land \neg V \land (\neg A \lor S)$

Resolução:

1.	$\neg S, V$	
2.	P, A	
3.	$\neg P, \neg A$	
4.	$\neg P, L$	
5.	$\neg V$	
6.	$\neg A, S$	
7.	$\neg S$	R(1, 5)
8.	$V, \neg A$	R(1, 6)
9.	A, L	R(2, 4)
10.	P, S	R(2, 6)
11.	P, V	R(2, 8)
12.	L, S	R(4, 10)
13.	L, V	R(4, 11)
14.	$\neg A$	R(5, 8)
15.	P	R(5, 11)
16.	L	R(5, 13)

Como é aberto, é satisfatível. As condições necessárias para satisfazer H são $I[P] = I[L] = 1$ e $I[V] = I[S] = I[A] = 0$.

6. Em uma certa cidade, os habitantes que moram no centro sempre mentem e os que moram fora dele sempre falam a verdade. Passando pela cidade você encontra algumas pessoas (A, B, C, D, E, F e G) e pergunta onde eles moram. Para cada caso, verifique se podemos determinar se a pessoa que falou mora no centro.
Vamos utilizar os mesmos modelos da lista anterior.

a) A te diz: "Eu moro no centro, mas B não".

FNC:
$\neg H = \neg((A \leftrightarrow \neg(A \land \neg B)) \to A)$
$\Leftrightarrow \neg(((A \to \neg(A \land \neg B)) \land (\neg(A \land \neg B) \to A)) \to A)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg A \lor \neg(A \land \neg B)) \land (\neg\neg(A \land \neg B) \lor A)) \lor A)$
$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg A \lor \neg(A \land \neg B)) \land (\neg\neg(A \land \neg B) \lor A)) \land \neg A)$
$\Leftrightarrow (((\neg A \lor \neg(A \land \neg B)) \land ((A \land \neg B) \lor A)) \land \neg A)$
$\Leftrightarrow (((\neg A \lor \neg A \lor \neg\neg B) \land ((A \land \neg B) \lor A)) \land \neg A)$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land A \land (\neg B \lor A) \land \neg A$

Resolução:
1. $\neg A, B$
2. A
3. $\neg B, A$
4. $\neg A$
5. { } R(2, 4)

Concluímos, portanto, que A mora no centro.

b) C te diz: "Se eu moro no centro, então D também não mora".
(Por acidente, eu cometi um erro na redação da frase. Aquele "também" não faz sentido, e existem três formas de corrigir a frase, vou fazer os três casos aqui)

Possibilidade 1: "Se eu moro no centro, então D ~~também~~ não mora" (removendo o "também")
FNC:
$\neg H = \neg((C \leftrightarrow \neg(C \to \neg D)) \to C)$
$\Leftrightarrow \neg(((C \to \neg(C \to \neg D)) \land (\neg(C \to \neg D) \to C)) \to C)$
$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg C \lor \neg(\neg C \lor \neg D)) \land (\neg\neg(\neg C \lor \neg D) \lor C)) \lor C)$
$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg C \lor \neg\neg C \lor \neg\neg D) \land (\neg\neg(\neg C \lor \neg D) \lor C)) \land \neg C)$
$\Leftrightarrow (\neg C \lor C \lor D) \land (\neg C \lor \neg D \lor C) \land \neg C$
$\Leftrightarrow \neg C$

Resolução:
1. $\neg C$

Não podemos concluir que C mora no centro, pois é aberto.

Possibilidade 2: “Se eu moro no centro, então D também ~~não~~ mora” (removendo o “não”)

FNC:

$\neg H = \neg((C \leftrightarrow \neg(C \rightarrow D)) \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg(((C \rightarrow \neg(C \rightarrow D)) \wedge (\neg(C \rightarrow D) \rightarrow C)) \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg C \vee \neg(\neg C \vee D)) \wedge (\neg\neg(\neg C \vee D) \vee C)) \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg C \vee \neg\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg\neg(\neg C \vee D) \vee C)) \wedge \neg C)$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee C \vee \neg D) \wedge (\neg C \vee D \vee C) \wedge \neg C$

$\Leftrightarrow \neg C$

Resolução:

1. ¬C

Não podemos concluir que C mora no centro, pois é aberto.

Possibilidade 3: “Se eu **não** moro no centro, então D também não mora” (acrescentando um “não”, essa era a frase que eu queria originalmente)

FNC:

$\neg H = \neg((C \leftrightarrow \neg(\neg C \rightarrow \neg D)) \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg(((C \rightarrow \neg(\neg C \rightarrow \neg D)) \wedge (\neg(\neg C \rightarrow \neg D) \rightarrow C)) \rightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg C \vee \neg(\neg\neg C \vee \neg D)) \wedge (\neg\neg(\neg\neg C \vee \neg D) \vee C)) \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg C \vee \neg\neg\neg C \vee \neg\neg D) \wedge (\neg\neg(\neg\neg C \vee \neg D) \vee C)) \wedge \neg C)$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee \neg C \vee D) \wedge (C \vee \neg D \vee C) \wedge \neg C$

$\Leftrightarrow (\neg C \vee D) \wedge (C \vee \neg D) \wedge \neg C$

Resolução:

1. ¬C, D
2. C, ¬D
3. ¬C
4. ¬D R(2, 3)

Não podemos concluir que C mora no centro, pois é aberto.

c) E te diz: “Eu moro no centro ou F não mora”.

FNC:

$\neg H = \neg((E \leftrightarrow \neg(E \vee \neg F)) \rightarrow E)$

$\Leftrightarrow \neg(((E \rightarrow \neg(E \vee \neg F)) \wedge (\neg(E \vee \neg F) \rightarrow E)) \rightarrow E)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg E \vee \neg(E \vee \neg F)) \wedge (\neg\neg(E \vee \neg F) \vee E)) \vee E)$

$\Leftrightarrow (\neg\neg((\neg E \vee (\neg E \wedge \neg\neg F)) \wedge (E \vee \neg F \vee E)) \wedge \neg E)$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee (\neg E \wedge F)) \wedge (E \vee \neg F \vee E) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow \neg E \wedge (\neg E \vee F) \wedge (E \vee \neg F) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow \neg E \wedge (\neg E \vee F) \wedge (E \vee \neg F)$

Resolução:

1. ¬E
2. ¬E, F
3. E, ¬F
4. ¬F R(1,3)

Não podemos concluir que E mora no centro, pois é aberto.

Possibilidade 2: ou exclusivo

FNC:

$\neg H = \neg((E \leftrightarrow (E \leftrightarrow \neg F)) \rightarrow E)$

$\Leftrightarrow \neg(((E \rightarrow ((E \rightarrow \neg F) \wedge (\neg F \rightarrow E))) \wedge (((E \rightarrow \neg F) \wedge (\neg F \rightarrow E)) \rightarrow E)) \rightarrow E)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg E \vee ((\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg\neg F \vee E))) \wedge (\neg((\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg\neg F \vee E)) \vee E)) \vee E)$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee ((\neg E \vee \neg F) \wedge (F \vee E))) \wedge ((\neg(\neg E \vee \neg F) \vee \neg(F \vee E)) \vee E) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee ((\neg E \vee \neg F) \wedge (F \vee E))) \wedge (((\neg\neg E \wedge \neg\neg F) \vee (\neg F \wedge \neg E)) \vee E) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee ((\neg E \vee \neg F) \wedge (F \vee E))) \wedge (((E \wedge F) \vee (\neg F \wedge \neg E)) \vee E) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee \neg E \vee \neg F) \wedge (\neg E \vee F \vee E) \wedge ((E \wedge F) \vee (\neg F \wedge \neg E) \vee E) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee \neg F) \wedge ((E \wedge F) \vee (\neg F \vee E)) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg F \vee E \vee E) \wedge (\neg F \vee E \vee F) \wedge \neg E$

$\Leftrightarrow (\neg E \vee \neg F) \wedge (\neg F \vee E) \wedge \neg E$

Resolução:

1. ¬E, ¬F
2. ¬F, E
3. ¬E
4. ¬F R(2, 3)

Não podemos concluir que E mora no centro, pois é aberto.

d) G te diz: “Eu moro no centro”.

Atenção nesse exemplo!

FNC:

$\neg H = \neg((G \leftrightarrow \neg G) \rightarrow G)$

$\Leftrightarrow \neg(((G \rightarrow \neg G) \land (\neg G \rightarrow G)) \rightarrow G)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg G \lor \neg G) \land (\neg\neg G \lor G)) \lor G)$

$\Leftrightarrow \neg\neg((\neg G \lor \neg G) \land (\neg\neg G \lor G)) \land \neg G$

$\Leftrightarrow (\neg G \lor \neg G) \land (G \lor G) \land \neg G$

$\Leftrightarrow \neg G \land G$

$\Leftrightarrow 0$

Resolução:

1. { }

Podemos concluir que G mora no centro, pois todos é fechado.

No entanto, essa conclusão está ao mesmo tempo certa e errada! Vamos provar agora que G não mora no centro:

FNC:

$\neg H = \neg((G \leftrightarrow \neg G) \rightarrow \neg G)$

$\Leftrightarrow \neg(((G \rightarrow \neg G) \land (\neg G \rightarrow G)) \rightarrow \neg G)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg G \lor \neg G) \land (\neg\neg G \lor G)) \lor \neg G)$

$\Leftrightarrow \neg\neg((\neg G \lor \neg G) \land (\neg\neg G \lor G)) \land \neg\neg G$

$\Leftrightarrow (\neg G \lor \neg G) \land (G \lor G) \land G$

$\Leftrightarrow \neg G \land G$

$\Leftrightarrow 0$

Resolução:

1. { }

Na verdade podemos concluir qualquer coisa a partir de S_d, porque S_d é insatisfatível e, se a premissa é falsa, a implicação é sempre verdadeira. ($I[0 \rightarrow X] = 1$ independentemente de quem é X)

Prova de que S_d é insatisfatível:

FNC:

$S_d = G \leftrightarrow \neg G$

$\Leftrightarrow (G \rightarrow \neg G) \land (\neg G \rightarrow G)$

$\Leftrightarrow (\neg G \lor \neg G) \land (\neg\neg G \lor G)$

$\Leftrightarrow (\neg G \lor \neg G) \land (G \lor G)$

$\Leftrightarrow \neg G \land G$

$\Leftrightarrow 0$

Resolução:

1. { }

Como é fechado, S_d é insatisfatível.

7. Você está andando num labirinto e de repente encontra três estradas: uma de ouro, uma de mármore e uma de pedra. Cada estrada é protegida por um mentiroso, que te dizem:
    a. Guardião de Ouro: “Essa estrada vai levar você direto à saída. Além disso, se a estrada de pedra te levar à saída, a de mármore também vai.”
    b. Guardião de Mármore: “Nem a estrada de ouro nem a de pedra vão te levar à saída.”
    c. Guardião de Pedra: “Indo pela estrada de ouro você chega à saída, pela de mármore você vai se perder.”

O modelo obtido foi:
$G_o = O \land (P \to M)$
$G_m = \neg O \land \neg P$
$G_p = O \land \neg M$

$G = \neg G_o \land \neg G_m \land \neg G_p$

FNC:
$G = \neg(O \land (P \to M)) \land \neg(\neg O \land \neg P) \land \neg(O \land \neg M)$
$\Leftrightarrow (\neg O \lor \neg(\neg P \lor M)) \land (\neg\neg O \lor \neg\neg P) \land (\neg O \lor \neg\neg M)$
$\Leftrightarrow (\neg O \lor (\neg\neg P \land \neg M)) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M)$
$\Leftrightarrow (\neg O \lor P) \land (\neg O \lor \neg M) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M)$

Resolução:
1. $\neg O, P$
2. $\neg O, \neg M$
3. $\neg O, M$
4. O, P
5. P — R(1, 4)
6. $\neg O$ — R(2, 3)
7. $P, \neg M$ — R(2, 4)

Como é aberto, concluímos que a fórmula é satisfatível. Além disso, as condições necessárias para satisfazer a fórmula são $I[P] = 1$ e $I[O] = 0$.
Daí concluímos que a estrada de ouro certamente não leva à saída, a de pedra certamente leva a saída.

Também podemos descobrir se há uma estrada que leva à saída se testarmos se $G \Rightarrow O$, $G \Rightarrow M$ e $G \Rightarrow P$. O tableau será praticamente idêntico, com exceção que teremos o consequente negado, além das fórmulas de G.

FNC:

$\neg H = \neg(G \to O)$

$\Leftrightarrow G \land \neg O$

$\Leftrightarrow (\neg O \lor P) \land (\neg O \lor \neg M) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M) \land \neg O$

Resolução:

1. ¬O, P
2. ¬O, ¬M
3. O, P
4. ¬O, M
5. ¬O
6. P — R(1, 3)
7. P, ¬M — R(2, 3)

G não implica em O, pois a resolução de $\neg(G \to O)$ é aberta.

FNC:

$\neg H = \neg(G \to M)$

$\Leftrightarrow (\neg O \lor P) \land (\neg O \lor \neg M) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M) \land \neg M$

Resolução:

1. ¬O, P
2. ¬O, ¬M
3. O, P
4. ¬O, M
5. ¬M
6. P — R(1, 3)
7. P, ¬M — R(2, 3)
8. ¬O — R(2, 4)

G não implica em M, pois a resolução de $\neg(G \to M)$ é aberta.

FNC:

$\neg H = \neg(G \to P)$

$\Leftrightarrow (\neg O \lor P) \land (\neg O \lor \neg M) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M) \land \neg M$

Resolução:

1. ¬O, P
2. ¬O, ¬M
3. O, P
4. ¬O, M
5. ¬P
6. P — R(1, 3)
7. { } — R(5, 6)

G implica em P, pois a resolução de $\neg(G \to P)$ é fechada.

8. Yakko, Wakko e Dot são suspeitos de um crime. Estes são seus depoimentos:
   a. Yakko: “Wakko é culpado e Dot é inocente.”
   b. Wakko: “Se Yakko é culpado, Dot também é.”
   c. Dot: “Eu sou inocente, mas, pelo menos um dos outros é culpado.”

   Modelo, da lista anterior:
   $A_Y = W \land \neg D$
   $A_W = Y \rightarrow D$
   $A_D = \neg D \land (Y \lor W)$

   a) É possível que os três estejam mentindo?
   Isso equivale a perguntar se a seguinte fórmula é satisfatível:
   $A = \neg A_Y \land \neg A_w \land \neg A_D$

   FNC:
   $A = \neg(W \land \neg D) \land \neg(Y \rightarrow D) \land \neg(\neg D \land (Y \lor W))$
   $\Leftrightarrow (\neg W \lor \neg\neg D) \land \neg(\neg Y \lor D) \land (\neg\neg D \lor \neg(Y \lor W))$
   $\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land \neg\neg Y \land \neg D \land (D \lor (\neg Y \land \neg W))$
   $\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg Y) \land (D \lor \neg W)$
   $\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg Y)$

   Resolução:
   1. $\neg W, D$
   2. Y
   3. $\neg D$
   4. $D, \neg Y$
   5. D R(2, 4)
   6. { } R(3, 5)

   Não é satisfatível, então é impossível que os três estejam mentindo.