Lógica para Computação

Exercícios - Lógica Proposicional

1) Em uma investigação as seguintes informações foram coletadas:

- Se a faca está na sala, então vimos quando limpamos a sala.
- O assassinato foi cometido no porão ou no apartamento.
- Se o assassinato foi no porão, então a faca está na lata de lixo.
- Não vimos a faca quando limpamos a sala.
- Se o assassinato foi cometido no apartamento, a faca está na sala.

a) Escreva as sentenças como fórmulas lógicas.
Vamos usar os seguintes símbolos proposicionais:
A: “A faca está na sala.”
B: “Vimos a faca quando limpamos a sala.”
C: “O assassinato foi cometido no porão.”
D: “O assassinato foi cometido no apartamento.”
E: “A faca está no lixo.”
Usando estas proposições, as afirmações podem ser escritas como:

- $A \rightarrow B$
- $\neg(C \leftrightarrow D)$
- $C \rightarrow E$
- $\neg B$
- $D \rightarrow A$

b) O que podemos concluir a partir das afirmações?
Vamos verificar como é possível satisfazer os 5 fatos simultaneamente:
O fato $\neg B$ é satisfeito se, e somente se, $I[B] = 0$.
$I[A \rightarrow B] = 1$ se $I[A] = 0$ e/ou $I[B] = 1$. Como sabemos que $I[B] = 0$, devemos ter $I[A] = 0$.
$I[D \rightarrow A] = 1$ se $I[D] = 0$ e/ou $I[A] = 1$. Como sabemos que $I[A] = 0$, devemos ter $I[D] = 0$.
Até agora temos que A, B e D devem ser falsos para satisfazer o primeiro, quarto e quinto fatos simultaneamente.
$I[\neg(C \leftrightarrow D)] = 1$ se, e somente se, $I[C] \neq I[D]$. Como sabemos que $I[D] = 0$, devemos ter $I[C] = 1$.
Finalmente, $I[C \rightarrow E] = 1$ se $I[C] = 0$ e/ou $I[E] = 1$. Como sabemos que $I[C] = 1$, devemos ter $I[E] = 1$.
Daí concluímos que, para satisfazer todos os fatos C e E devem ser verdadeiros, ou seja, o assassinato foi cometido no porão e a faca está no lixo.

2) Em uma certa cidade, os habitantes que moram no centro sempre mentem e os que moram fora dele sempre falam a verdade. Passando pela cidade você encontra algumas pessoas (A, B, C, D, E, F e G) e pergunta onde eles moram. Para cada caso, transforme as afirmações em fórmulas lógicas e diga o que pode ser concluído sobre a moradia dos habitantes.

Para todos os casos, vamos usar o nome da pessoa como proposição do tipo X: “X mora no centro da cidade.”

a) A te diz: “Eu moro no centro, mas B não”.

$\neg A \leftrightarrow (A \land \neg B)$

“A afirmação de A é verdadeira se, e somente se, A não mora no centro”

$\Leftrightarrow (\neg A \land (A \land \neg B)) \lor (\neg\neg A \land \neg(A \land \neg B))$

$\Leftrightarrow A \land (\neg A \lor \neg\neg B)$

$\Leftrightarrow A \land (\neg A \lor B)$

$\Leftrightarrow (A \land \neg A) \lor (A \land B)$

$\Leftrightarrow A \land B$

A e B moram no centro.

Pela Tabela Verdade:

A	B	$(A \land \neg B)$	$\neg A \leftrightarrow (A \land \neg B)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1

b) C te diz: “Se eu não moro no centro, então D também não mora”.

$\neg C \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)$

$\Leftrightarrow (\neg C \land (\neg C \rightarrow \neg D)) \lor (\neg\neg C \land \neg(\neg C \rightarrow \neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg C \land (C \lor \neg D)) \lor (C \land \neg C \land \neg\neg D))$

$\Leftrightarrow (\neg C \land C) \lor (\neg C \land \neg D)$

$\Leftrightarrow \neg C \land \neg D$

C e D não moram no centro.

Pela Tabela Verdade:

C	D	$(\neg C \rightarrow \neg D)$	$\neg C \leftrightarrow (\neg C \rightarrow \neg D)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	0

c) E te diz: “Eu moro no centro ou F não mora”.

$\neg E \leftrightarrow (E \lor \neg F)$

$\Leftrightarrow (\neg E \land (E \lor \neg F)) \lor (\neg\neg E \land \neg(E \lor \neg F))$

$\Leftrightarrow (\neg E \land E) \lor (\neg E \land \neg F) \lor (E \land \neg E \land \neg\neg F)$

$\Leftrightarrow \neg E \land \neg F$

E e F não moram no centro.

Pela Tabela Verdade:

E	F	$(E \lor \neg F)$	$\neg E \leftrightarrow (E \lor \neg F)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Supondo que o “ou” é exclusivo:

$\neg E \leftrightarrow \neg(E \leftrightarrow \neg F)$

$\Leftrightarrow (\neg E \land \neg(E \leftrightarrow \neg F)) \lor (\neg\neg E \land \neg\neg(E \leftrightarrow \neg F))$

$\Leftrightarrow (\neg E \land \neg(E \leftrightarrow \neg F)) \lor (E \land (E \leftrightarrow \neg F))$

$\Leftrightarrow (\neg E \land (\neg E \lor \neg\neg F) \land (E \lor \neg F)) \lor (E \land (\neg E \lor \neg F) \land (E \lor \neg\neg F))$

$\Leftrightarrow (\neg E \land (E \lor \neg F)) \lor (E \land (\neg E \lor \neg F))$

$\Leftrightarrow (\neg E \land E) \lor (\neg E \land \neg F) \lor (E \land \neg E) \lor (E \land \neg F)$

$\Leftrightarrow (\neg E \land \neg F) \lor (E \land \neg F)$

$\Leftrightarrow \neg F \land (\neg E \lor E)$

$\Leftrightarrow \neg F$

F não mora no centro mas não sabemos onde E mora.

Pela Tabela Verdade:

E	F	$\neg(E \leftrightarrow \neg F)$	$\neg E \leftrightarrow \neg(E \leftrightarrow \neg F)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0

d) G te diz: “Eu moro no centro”.

$\neg G \leftrightarrow G$

$\Leftrightarrow 0$

Não é possível determinar. Esta afirmação é um paradoxo.

3) Você está andando num labirinto e de repente encontra três estradas: uma de ouro, uma de mármore e uma de pedra. Cada estrada é protegida por um mentiroso, que te dizem:

- Guardião de Ouro: “Essa estrada vai levar você direto à saída. Além disso, se a estrada de pedra te levar à saída, a de mármore também vai.”
- Guardião de Mármore: “Nem a estrada de ouro nem a de pedra vão te levar à saída.”
- Guardião de Pedra: “Indo pela estrada de ouro você chega à saída, pela de mármore você vai se perder.”

a) Transforme as afirmações em fórmulas lógicas.

As proposições utilizadas são:
O: “A estrada de ouro leva à saída.”
M: “A estrada de mármore leva à saída.”
P: “A estrada de pedra leva à saída.”
$G_O = (O \land (P \to M))$
$G_M = (\neg O \land \neg P)$
$G_P = (O \land \neg M)$

b) Há uma estrada que te leva certamente à saída? Se sim, qual?

Sabemos que os três guardiões mentem, então veremos se é possível satisfazer a negação das 3 afirmações:
$\neg(O \land (P \to M)) \land \neg(\neg O \land \neg P) \land \neg(O \land \neg M)$
$\Leftrightarrow (\neg O \lor (P \land \neg M)) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M)$
$\Leftrightarrow (\neg O \lor P) \land (\neg O \lor \neg M) \land (O \lor P) \land (\neg O \lor M)$
$\Leftrightarrow (P \lor (\neg O \land O)) \land (\neg O \lor (\neg M \land M))$
$\Leftrightarrow P \land \neg O$

A estrada de pedra com certeza leva à saída e a de ouro com certeza não leva. Não podemos concluir nada sobre a de mármore.
Pela Tabela Verdade:

O	M	P	G_O	G_M	G_P	$\neg G_O \land \neg G_M \land \neg G_P$
0	0	0	0	1	0	0
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	1	0	0	1	0	0
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

Nas duas interpretações que satisfazem a fórmula temos P verdade, O falso e M não é definido (verdadeiro em um caso e falso no outro).

4) Oito pessoas (André, Bruna, Carla, Diogo, Edson, Fábio, Graça e Helen) foram a um restaurante no dia dos namorados, cada rapaz tem uma namorada diferente (e vice-versa). Chegando lá, apenas duas mesas estavam disponíveis, cada uma com 4 cadeiras. Segundo as regras do restaurante para este dia comemorativo, os namorados sentam em frente às respectivas namoradas. Além disso, sabemos dos seguintes fatos:

- André está sentado na mesma mesa que Bruna, mas não é namorado dela.
- Diogo e Fábio estão em mesas diferentes.
- Helen, que é namorada de Edson, está na mesa de Carla.
- Diogo é namorado de Carla.

a) Dê uma fórmula lógica que representa este problema de modo que seja possível inferir quem está sentado em cada mesa (utilize os símbolos proposicionais X: "A pessoa cujo nome começa com X está sentada na mesa 1". Como só há duas mesas, X é falso a pessoa cujo nome inicia com X está na outra mesa. Você vai precisar inferir quem são os casais para fazer essa modelagem.)

Seguindo o que foi dito no enunciado, as proposições são:

A: "André está na mesa 1"

B: "Bruna está na mesa 1"

C: "Carla está na mesa 1"

D: "Diogo está na mesa 1"

E: "Edson está na mesa 1"

F: "Fábio está na mesa 1"

G: "Graça está na mesa 1".

Para indicar que duas pessoas estão na mesma mesa, podemos utilizar o conectivo de bi-implicação, que só é verdadeiro quando os dois operandos têm o mesmo valor. Além disso, vamos utilizar a informação dada no enunciado que namorados sentam na mesma mesa.

As afirmações dadas podem ser escritas como:

- $(A \leftrightarrow B)$
- $\neg(D \leftrightarrow F)$
- $(H \leftrightarrow C) \land (H \leftrightarrow E)$
- $(D \leftrightarrow C)$

A última fórmula diz que Diogo e Carla estão na mesma mesa, o que é consequência deles serem namorados. Se a modelagem parar neste ponto não está errada, mas também não está completa, pois nem toda informação dada foi usada. A primeira afirmação diz que André e Bruna não são namorados, o que implica que André só pode ser namorado de Graça e Bruna é namorada de Fábio. Dessas duas afirmações temos duas fórmulas extras: $(A \leftrightarrow G)$ e $(B \leftrightarrow F)$.

A conjunção de todas estas fórmulas representa o problema. As interpretações que satisfazem esta fórmula resolvem o problema.

$P = (A \leftrightarrow B) \land \neg(D \leftrightarrow F) \land (H \leftrightarrow C) \land (H \leftrightarrow E) \land (D \leftrightarrow C) \land (A \leftrightarrow G) \land (B \leftrightarrow F)$

b) Quantas interpretações satisfazem a fórmula que você escreveu no item anterior?

P é verdade se todos os elementos da conjunção são verdadeiros.

$(A \leftrightarrow B)$ é verdade se, e somente se, $I[A] = I[B]$.

$(A \leftrightarrow G)$ é verdade se, e somente se, $I[A] = I[G]$.
$(B \leftrightarrow F)$ é verdade se, e somente se, $I[B] = I[F]$.
Pela transitividade da igualdade, concluímos até esse ponto que A, B, F e G devem ter a mesma interpretação para que a fórmula seja verdadeira. Ou seja, André, Bruna, Fábio e Graça estão na mesma mesa.
$\neg(D \leftrightarrow F)$ é verdade se, e somente se, $I[D] \neq I[F]$. De onde concluímos que Diego está numa mesa distinta do grupo anterior.
$(D \leftrightarrow C)$ é verdade se, e somente se, $I[D] = I[C]$.
$(H \leftrightarrow C)$ é verdade se, e somente se, $I[H] = I[C]$.
$(H \leftrightarrow E)$ é verdade se, e somente se, $I[H] = I[E]$.
Pela transitividade da igualdade, concluímos que C, D, E e H devem ter a mesma interpretação para que a fórmula seja verdadeira. Ou seja, Carla, Diego, Edson e Helen estão na mesma mesa.
Portanto há apenas duas interpretações possíveis, uma em que A, B, F e G são verdadeiros e C, D, E e H são falsos e outra em que A, B, F e G são falsos e C, D, E e H são verdadeiros.

- Perceba que sem as duas últimas informações, $(A \leftrightarrow G)$ e $(B \leftrightarrow F)$, C, D, E e H seriam obrigados a ter o mesmo valor e F teria um valor distinto deles. A e B deveriam ter valores iguais, mas não necessariamente distintos de C, D, E e H e G seria livre para ter qualquer valor. Ou seja, a modelagem não estaria representando todas as informações que temos e teríamos apenas uma solução parcial do problema. Ao invés de inferir quem são os casais, uma outra possibilidade seria impor que exatamente quatro das proposições são verdadeiras e as outras quatro são falsas, já que sabemos que as mesas têm 4 lugares. Como escrever uma fórmula que representa isso?
  Dica: $(A \land B \land C \land D \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$ só é verdade se os quatro primeiros são verdade e os 4 últimos são falsos, basta fazer as outras 69 combinações. É muito trabalhoso, mas não é difícil.

c) Sabendo que Graça está na mesa 1, quem são as pessoas na outra mesa?
Pelo resultado da questão anterior, na outra mesa estão Carla, Diego, Edson e Helen.

d)* Tente modelar este problema de modo que a fórmula resultante permita inferir quem está sentado em cada mesa e também quem são os casais (além dos oito símbolos proposicionais do item (a), utilize outros 16 símbolos proposicionais, um para cada possível casal. N_{XY}: "A moça cujo nome começa com X o rapaz cujo nome começa com Y são um casal")]
A ideia é modelar todas as informações contidas no texto da forma mais direta possível, sem fazer nenhuma inferência "por fora".
Foi dito no texto que $N_{XY} \rightarrow (X \leftrightarrow Y)$, ou seja, se são namorados estão na mesma mesa. Teremos 16 destas fórmulas, já que existem 16 possíveis casais (N_{BA}, N_{BD}, N_{BE}, N_{BF}, N_{CA}, N_{CD}, N_{CE}, N_{CF}, N_{GA}, N_{GD}, N_{GE}, N_{GF}, N_{HA}, N_{HD}, N_{HE} e N_{HF}).
Além disso, foi dito que cada rapaz namora uma única moça:
$(N_{BA} \land \neg N_{CA} \land \neg N_{GA} \land \neg N_{HA}) \lor (\neg N_{BA} \land N_{CA} \land \neg N_{GA} \land \neg N_{HA}) \lor (\neg N_{BA} \land \neg N_{CA} \land N_{GA} \land \neg N_{HA}) \lor (\neg N_{BA} \land \neg N_{CA} \land \neg N_{GA} \land N_{HA})$ é verdade se André

namora exatamente uma das moças. Escreva mais três fórmulas dessas substituindo o índice A por D, E e F em cada uma das cópias.

Cada moça namora um único rapaz:

$(N_{BA} \land \neg N_{BD} \land \neg N_{BE} \land \neg N_{BF}) \lor (\neg N_{BA} \land N_{BD} \land \neg N_{BE} \land \neg N_{BE}) \lor (\neg N_{BA} \land \neg N_{BD} \land N_{BE} \land \neg N_{BF}) \lor (\neg N_{BA} \land \neg N_{BD} \land \neg N_{BE} \land N_{BF})$ é verdade se Bruna namora exatamente um dos rapazes. Escreva mais três fórmulas dessas substituindo o índice B por C, G e H em cada uma das cópias.

Os fatos dados no texto traduzem-se como:

- $(A \leftrightarrow B) \land \neg N_{BA}$
- $\neg(D \leftrightarrow F)$
- $(H \leftrightarrow C) \land N_{HE}$
- N_{CD}

A conjunção de todas as fórmulas que você escreveu representa tudo que sabemos sobre o problema. O resultado é uma fórmula bem grande mas que pode ser simplificada (verifique se quiser) para:

$\neg N_{BA} \land \neg N_{BD} \land \neg N_{BE} \land N_{BF} \land \neg N_{CA} \land N_{CD} \land \neg N_{CE} \land \neg N_{CF} \land N_{GA} \land \neg N_{GD} \land \neg N_{GE} \land \neg N_{GF} \land \neg N_{HA} \land \neg N_{HD} \land N_{HE} \land \neg N_{HF} \land (A \leftrightarrow B) \land \neg(D \leftrightarrow F) \land (H \leftrightarrow C) \land (H \leftrightarrow E) \land (D \leftrightarrow C) \land (A \leftrightarrow G) \land (B \leftrightarrow F)$

Ou seja, a mesma fórmula do item (a), mas aqui as inferências acerca das relações são descobertas por consequência da modelagem e não são feitas para tornar a modelagem possível.

5) Yakko, Wakko e Dot são suspeitos de um crime. Estes são seus depoimentos:

- Yakko: “Wakko é culpado e Dot é inocente.”
- Wakko: “Se Yakko é culpado, Dot também é.”
- Dot: “Eu sou inocente, mas, pelo menos um dos outros é culpado.”

a) Expresse cada um dos testemunhos como uma fórmula lógica.
Os símbolos proposicionais adotados são:
Y: “Yakko é culpado.”
W: “Wakko é culpado.”
D: “Dot é culpada.”
$T_Y = (W \land \neg D)$
$T_W = (Y \rightarrow D)$
$T_D = (\neg D \land (Y \lor W))$

b) Que conclusões podemos tirar se sabemos que Wakko está mentindo?
Atenção, o enunciado fala que Wakko está mentindo mas não fala nada sobre os outros, então vamos usar apenas a fala de Wakko.
$\neg T_W = \neg(Y \rightarrow D) \Leftrightarrow Y \land \neg D$
Ou seja, Yakko é culpado e Dot é inocente. Não sabemos sobre Wakko.

Assumindo que apenas Wakko está mentindo e os outros dois estão falando a verdade, temos:
$T_Y \land \neg T_W \land T_D$
$\Leftrightarrow (W \land \neg D) \land (Y \land \neg D) \land (\neg D \land (Y \lor W))$
$\Leftrightarrow W \land \neg D \land Y \land (Y \lor W)$
$\Leftrightarrow W \land \neg D \land Y$
Dot é inocente e Wakko e Yakko são culpados.

c) É possível que as três afirmações sejam falsas?
É possível satisfazer $\neg T_Y \land \neg T_W \land \neg T_D$?
$\neg T_Y \land \neg T_W \land \neg T_D$
$\Leftrightarrow \neg(W \land \neg D) \land (Y \land \neg D) \land \neg(\neg D \land (Y \lor W))$
$\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg(Y \lor W))$
$\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor (\neg Y \land \neg W))$
$\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg Y) \land (D \lor \neg W)$
$\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg Y)$
$\Leftrightarrow (\neg W \lor D) \land Y \land \neg D \land (D \lor \neg Y) \land D$
$\Leftrightarrow 0$
Ou seja, é impossível que os 3 estejam mentindo simultaneamente.
Pela Tabela Verdade:

Y	W	D	T_Y	T_W	T_D	$\neg T_Y \land \neg T_W \land \neg T_D$	$T_Y \land \neg T_W \land T_D$
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0

1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	1	1	0	1	0	0	0

6) Em um certo local, duas pessoas afirmaram:

- Pessoa 1: “Se chove, é verão”
- Pessoa 2: “Se chove, é inverno”

Sabendo que não é possível estar no inverno e no verão simultaneamente, é possível que as duas pessoas estejam corretas? Justifique.

Formalmente:

C: “Chove.”

V: “É verão.”

I: “É inverno.”

$P_1 = C \rightarrow V$

$P_2 = C \rightarrow I$

$R = \neg(V \land I)$

R é a restrição dada no texto que não pode ser verão e inverno simultaneamente.

Vamos verificar se é possível satisfazer estas fórmulas:

$P_1 \land P_2 \land R$

$\Leftrightarrow (\neg C \lor V) \land (\neg C \lor I) \land \neg(V \land I)$

$\Leftrightarrow (\neg C \lor (V \land I)) \land \neg(V \land I)$

$\Leftrightarrow (\neg C \lor (V \land I)) \land \neg(V \land I) \land \neg C$

$\Leftrightarrow \neg(V \land I) \land \neg C$

$\Leftrightarrow R \land \neg C$

P_1 e P_2 podem estar falando a verdade se satisfazemos a restrição e não chove nesta região.

Pela Tabela Verdade:

C	V	I	P_1	P_2	R	$P_1 \land P_2 \land R$
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Nos 3 casos em que a fórmula é satisfeita temos C falso.

7) A fórmula abaixo é satisfatível?

{{P, Q, S, T}, {P, S, ¬T}, {Q, ¬S, T}, {P, ¬S, ¬T}, {P, ¬Q}, {¬R, ¬P}, {R}}

Não foi dito qual método utilizar, mas como a fórmula já está na forma clausal, vamos usar a resolução. Expansão:

1.	{P, Q, S, T}	
2.	{P, S, ¬T}	
3.	{Q, ¬S, T}	
4.	{P, ¬S, ¬T}	
5.	{P, ¬Q}	
6.	{¬R, ¬P}	
7.	{R}	
8.	{¬P}	R(6, 7)
9.	{Q, S, T}	R(1, 8)
10.	{S, ¬T}	R(2, 8)
11.	{¬S, ¬T}	R(4, 8)
12.	{¬Q}	R(5, 8)
13.	{¬S, T}	R(2, 12)
14.	{S, T}	R(9, 12)
15.	{¬T}	R(10, 11)
16.	{T}	R(13, 14)
17.	{ }	R(15, 16)

Logo, a fórmula não é satisfatível.

8) Verdadeiro ou falso? Justifique brevemente suas respostas.

a) Toda cláusula não vazia é satisfatível.
Verdade. Toda cláusula é uma disjunção de literais e, portanto, satisfatíveis.

b) Se $(A \lor C)$ e $(A \to C)$ são verdades, então C só pode ser verdade.
Verdade. $(A \lor C) \land (A \to C) \Leftrightarrow (A \lor C) \land (\neg A \lor C) \Leftrightarrow C \lor (A \land \neg A) \Leftrightarrow C$.

c) Sabendo que $(A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor \neg C)$ é verdade, podemos concluir que C é verdade.
Falso. Se $I[A] \neq I[B\}$ a fórmula é satisfeita, independentemente do valor de C.

d) $(X_1 \lor X_2 \lor \ldots \lor X_N) \to X_k$ é tautologia para qualquer *k* entre 1 e N.
Falso. Saber que uma disjunção é verdade não implica nos operandos serem verdade.

e) $(X_1 \land X_2 \land \ldots \land X_N) \to X_k$ é tautologia para qualquer *k* entre 1 e N.
Verdade. Se a conjunção é verdadeira todos os seus operandos são verdadeiros.

9) Você encontra três caixas, uma contém um tesouro e as outras duas estão vazias. Cada caixa tem uma dica sobre o seu conteúdo:

- Caixa 1: “O tesouro não está aqui.”
- Caixa 2: “O tesouro não está aqui.”
- Caixa 3: “O tesouro está na caixa 2.”

Sabemos que apenas uma das mensagens é verdadeira. Formalize o problema e determine, se possível, em qual caixa o tesouro está.

Os símbolos proposicionais usados são C_i: “O tesouro está na caixa i”.

As afirmações são:

$A_1 = \neg C_1$

$A_2 = \neg C_2$

$A_3 = C_2$

Sabemos que apenas uma mensagem é verdadeira, então existem três possibilidades:

$P_1 = (A_1 \land \neg A_2 \land \neg A_3)$

$P_2 = (\neg A_1 \land A_2 \land \neg A_3)$

$P_3 = (\neg A_1 \land \neg A_2 \land A_3)$

Temos que satisfazer pelo menos uma delas:

$P_1 \land P_2 \land P_3$

$\Leftrightarrow (\neg C_1 \land \neg\neg C_2 \land \neg C_2) \lor (\neg\neg C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_2) \lor (\neg\neg C_1 \land \neg\neg C_2 \land C_2)$

$\Leftrightarrow (\neg C_1 \land C_2 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land \neg C_2 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land C_2 \land C_2)$

$\Leftrightarrow (C_1 \land \neg C_2) \lor (C_1 \land C_2)$

$\Leftrightarrow C_1 \land (\neg C_2 \lor C_2)$

$\Leftrightarrow C_1$

Logo, o tesouro com certeza está na caixa 1. As outras caixas talvez tenham, mas não podemos ter certeza (não foi dito se apenas uma caixa tem tesouro ou se pode haver mais de um).

Pela Tabela Verdade:

C_1	C_2	C_3	P_1	P_2	P_3	$P_1 \lor P_2 \lor P_3$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

10) O problema das N-rainhas consiste em colocar N rainhas em um tabuleiro de xadrez de tamanho N x N de modo que duas rainhas não estejam na mesma linha, coluna ou diagonal.

a)* Formalize o problema das 3 rainhas como um problema de satisfatibilidade. (Utilize símbolos proposicionais X: “Há uma rainha na posição X do tabuleiro”.)

Vamos considerar o seguinte tabuleiro, para visualizar os nomes dados às posições:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Pela descrição do problema, temos N rainhas em um tabuleiro N x N e, além disso, não pode haver duas rainhas na mesma linha, coluna ou diagonal. Isto implica que cada linha deve ter pelo menos uma rainha em cada linha e uma em cada coluna.

Se há uma rainha na posição A, por exemplo, não pode haver rainha em B, C, D, G, H e I. De modo contrário, se não há rainha em nenhuma dessas posições é necessário que haja uma rainha em A. Deste modo, vamos escrever as restrições para cada uma das posições:

$R_1 = A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)$

$R_2 = B \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg H)$

$R_3 = C \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$

$R_4 = D \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$

$R_5 = E \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg F \land \neg G \land \neg H \land \neg I)$

$R_6 = F \leftrightarrow (\neg D \land \neg E \land \neg C \land \neg I \land \neg B \land \neg H)$

$R_7 = G \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg H \land \neg I)$

$R_8 = H \leftrightarrow (\neg B \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$

$R_9 = I \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$

Agora vamos escrever a restrição de que há pelo menos uma rainha por linha:

$R_{10} = A \lor B \lor C$

$R_{11} = D \lor E \lor F$

$R_{12} = G \lor H \lor I$

E pelo menos uma rainha por coluna:

$R_{13} = A \lor D \lor G$

$R_{14} = B \lor E \lor H$

$R_{15} = C \lor F \lor I$

Não há necessidade de dizer que há exatamente uma rainha por linha e/ou coluna, porque junto com as regras R_1 a R_9 já podemos concluir isso.

b) Mostre que o problema não tem solução.

Para mostrar que este problema não tem solução, precisamos mostrar que a conjunção das 15 restrições é insatisfatível.

Vamos supor que A é verdade. A partir deste ponto podemos concluir que R_{10} e R_{13} são satisfeitas e B, C, D, E, G e I são falsos, para satisfazer R_1.
Além disso, R_2, R_3, R_4, R_5, R_7 e R_9 são satisfeitas.
Se D e E são falsos, precisamos que F seja verdadeiro para satisfazer R_{11}.
Se F é verdade, R_{15} está satisfeita e concluímos que H é falso para satisfazer R_6.
Como G, H e I devem ser falsos, R_{12} não pode ser satisfeita.

Vamos supor que B é verdadeiro. Daí concluímos que A, C, D, E, F e H são falsos (de R_2). Como D, E e F são falsos, R_{11} não pode ser satisfeita.

Vamos supor que C é verdadeiro. Daí concluímos que A, B, E, F, G e I são falsos (de R_3). R_1, R_2, R_3, R_5, R_6, R_7, R_9, R_{10} e R_{15} são satisfeitas.
Se E e F são falsos, D é verdade (de R_{11}).
Como D é verdade, H deve ser falso (de R_4).
Como B, E e H devem ser falsos, R_{14} não pode ser satisfeita.

Das suposições anteriores, A, B e C só podem ser falsos. Portanto R_{10} nunca será satisfeita e o conjunto de fórmulas é insatisfatível.

11) Mostre, por resolução e por tableau, se o conjunto □ = {H_1, H_2, H_3, H_4, H_5} é satisfatível.

- $H_1 = A \rightarrow B$
- $H_2 = \neg(C \leftrightarrow D)$
- $H_3 = C \rightarrow E$
- $H_4 = D \rightarrow A$
- $H_5 = \neg B$

Por resolução:

Primeiro devemos escrever a conjunção de todas as fórmulas do conjunto na forma normal conjuntiva.

$F \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land \neg(C \leftrightarrow D) \land (C \rightarrow E) \land (D \rightarrow A) \land \neg B$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land \neg(C \leftrightarrow D) \land (\neg C \lor E) \land (\neg D \lor A) \land \neg B$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (C \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg C \lor E) \land (\neg D \lor A) \land \neg B$

Na notação de conjuntos, temos:

$F = \{\{\neg A, B\}, \{C, D\}, \{\neg C, \neg D\}, \{\neg C, E\}, \{\neg D, A\}, \{\neg B\}\}$

Expansão por resolução:

1. $\{\neg A, B\}$
2. $\{C, D\}$
3. $\{\neg C, \neg D\}$
4. $\{\neg C, E\}$
5. $\{\neg D, A\}$
6. $\{\neg B\}$
7. $\{\neg A\}$ R(1, 6)
8. $\{\neg D\}$ R(5, 7)
9. $\{C\}$ R(2, 8)
10. $\{E\}$ R(4, 9)

Como a conjunção de todas as cláusulas na expansão é equivalente à fórmula original, temos:

$F \Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (C \lor D) \land (\neg C \lor \neg D) \land (\neg C \lor E) \land \neg B \land (\neg D \lor A) \land \neg A \land \neg D \land C \land E$

$F \Leftrightarrow \neg B \land \neg A \land \neg D \land C \land E$

Existem outras cláusulas que podem ser produzidas na resolução mas nenhuma delas é útil (contêm um dos literais já encontrados). Portanto, como não atingimos a cláusula vazia, a fórmula é satisfatível.

Por tableau:

$F \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land \neg(C \leftrightarrow D) \land (C \rightarrow E) \land (D \rightarrow A) \land \neg B$

$(A \rightarrow B) \land \neg(C \leftrightarrow D) \land (C \rightarrow E) \land (D \rightarrow A) \land \neg B$

$(A \rightarrow B)$

$\neg(C \leftrightarrow D)$

$(C \rightarrow E)$

$(D \rightarrow A)$

$\neg B$

↙ ↘

$\neg A$ $\quad$ B

x (under B)

↙ ↘ (from $\neg A$)

$\neg D$ $\quad$ A

x (under A)

↙ ↘ (from $\neg D$)

$\neg C$, D, x $\quad$ C, $\neg D$

↙ ↘ (from C, $\neg D$)

$\neg C$, x $\quad$ E

Há um ramo aberto no tableau, o que indica que a fórmula é satisfatível.

12) Mostre, por resolução e por tableau, que Z é consequência lógica de X e Y:

- $X = A \to B$
- $Y = C \to A$
- $Z = C \to B$

Por Tableau:

Devemos mostrar que $F = (X \land Y) \to Z$ é tautologia, ou, equivalentemente, $\neg F$ é insatisfatível.

$\neg F = \neg(((A \to B) \land (C \to A)) \to (C \to B))$
$(A \to B) \land (C \to A)$
$\neg(C \to B)$
$(A \to B)$
$(C \to A)$
C
$\neg B$
↙ ↘
$\neg C$ A
x ↙ ↘
$\neg A$ B
x x

Como todos os ramos são fechados, a fórmula $\neg F$ é insatisfatível, ou seja, F é tautologia e Z é consequência lógica de X e Y.

Por Resolução:

Vamos começar escrevendo $\neg F$ na FNC:

$\neg(((A \to B) \land (C \to A)) \to (C \to B))$
$\Leftrightarrow (A \to B) \land (C \to A) \land \neg(C \to B)$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg C \lor A) \land C \land \neg B$

Na forma clausal:

$\{\{\neg A, B\}, \{\neg C, A\}, \{C\}, \{\neg B\}\}$

Expansão:

1. $\{\neg A, B\}$
2. $\{\neg C, A\}$
3. $\{C\}$
4. $\{\neg B\}$
5. $\{\neg A\}$ R(1, 4)
6. $\{A\}$ R(2, 3)
7. $\{\ \}$ R(5, 6)

Como achamos a cláusula vazia, a fórmula F é tautologia.

13) Simplifique a fórmula H o máximo possível e determine quantas interpretações satisfazem-na:

- H = (¬A ∧ ¬¬B ∧ ¬B) ∨ (¬¬A ∧ ¬B ∧ ¬B) ∨ (¬¬A ∧ ¬¬B ∧ B) ∨ (C ∧ ¬C)

(¬A ∧ ¬¬B ∧ ¬B) ∨ (¬¬A ∧ ¬B ∧ ¬B) ∨ (¬¬A ∧ ¬¬B ∧ B) ∨ (C ∧ ¬C)
⇔ (¬A ∧ B ∧ ¬B) ∨ (A ∧ ¬B ∧ ¬B) ∨ (A ∧ B ∧ B)
⇔ (A ∧ ¬B) ∨ (A ∧ B)
⇔ A ∧ (¬B ∨ B)
⇔ A

Portanto a fórmula H tem 4 interpretações que satisfazem-na. Basta que A seja verdadeira e que B e C tenham qualquer valor. Como existem 4 combinações de B e C, temos 4 resultados possíveis.

Verificando a afirmação anterior:

A	B	C	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

14) Considere os símbolos proposicionais P_1, P_2 e P_3.

a) Dê uma fórmula que é verdade se a maioria dos símbolos é verdade.

Se temos 3 símbolos, a fórmula deve ser verdade se 2 ou 3 deles são verdade.

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \vee (P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3)$

b) Dê uma fórmula que é verdade se exatamente um dos símbolos é verdade.

$(P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3)$

c) Determine o comprimento da fórmula do item anterior. Se ao invés de 3 símbolos tivéssemos N símbolos, qual seria o comprimento da sua fórmula?

Da forma que foi escrita, temos uma conjunção para cada símbolo, então temos (N - 1) conectivos "$\vee$".

Cada disjunção tem N literais, (N-1) deles negados. Então em cada disjunção temos N símbolos proposicionais, (N-1) conectivos "$\neg$" e (N-1) conectivos "$\wedge$".

Então no total temos:

$(N - 1) + N \times (N + (N - 1) + (N - 1)) = 3N^2 - N - 1$

15) Determine, por qualquer método, se o conjunto de fórmulas abaixo é satisfatível.

- $R_1 = A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)$
- $R_2 = B \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg H)$
- $R_3 = C \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$
- $R_4 = D \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$
- $R_5 = E \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg F \land \neg G \land \neg H \land \neg I)$
- $R_6 = F \leftrightarrow (\neg D \land \neg E \land \neg C \land \neg I \land \neg B \land \neg H)$
- $R_7 = G \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg H \land \neg I)$
- $R_8 = H \leftrightarrow (\neg B \land \neg D \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg I)$
- $R_9 = I \leftrightarrow (\neg A \land \neg C \land \neg E \land \neg F \land \neg G \land \neg H)$
- $R_{10} = A \lor B \lor C$
- $R_{11} = D \lor E \lor F$
- $R_{12} = G \lor H \lor I$
- $R_{13} = A \lor D \lor G$
- $R_{14} = B \lor E \lor H$
- $R_{15} = C \lor F \lor I$

Este é o item (b) da questão 10. Vamos fazer por outro caminho aqui (muito
$A \leftrightarrow (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)$
$\Leftrightarrow (A \rightarrow (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)) \land ((\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I) \rightarrow A)$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)) \land (\neg(\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I) \lor A)$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor (\neg B \land \neg C \land \neg D \land \neg E \land \neg G \land \neg I)) \land (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor G \lor I)$
$\Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg D) \land (\neg A \lor \neg E) \land (\neg A \lor \neg G) \land (\neg A \lor \neg I) \land (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor G \lor I)$
A última disjunção diz que pelo menos um dos símbolos é verdade, as demais, em conjunto, dizem que no máximo um deles é verdade. Seguindo o mesmo raciocínio, vamos reescrever R_1 a R_9 neste formato:

- $R_1 \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg D) \land (\neg A \lor \neg E) \land (\neg A \lor \neg G) \land (\neg A \lor \neg I) \land (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor G \lor I)$
- $R_2 \Leftrightarrow (\neg B \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor \neg D) \land (\neg B \lor \neg E) \land (\neg B \lor \neg F) \land (\neg B \lor \neg H) \land (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor F \lor H)$
- $R_3 \Leftrightarrow (\neg C \lor \neg A) \land (\neg C \lor \neg B) \land (\neg C \lor \neg E) \land (\neg C \lor \neg F) \land (\neg C \lor \neg G) \land (\neg C \lor \neg I) \land (A \lor B \lor C \lor E \lor F \lor G \lor I)$
- $R_4 \Leftrightarrow (\neg D \lor \neg A) \land (\neg D \lor \neg B) \land (\neg D \lor \neg E) \land (\neg D \lor \neg F) \land (\neg D \lor \neg G) \land (\neg D \lor \neg H) \land (A \lor B \lor D \lor E \lor F \lor G \lor H)$
- $R_5 \Leftrightarrow (\neg E \lor \neg A) \land (\neg E \lor \neg B) \land (\neg E \lor \neg C) \land (\neg E \lor \neg D) \land (\neg E \lor \neg F) \land (\neg E \lor \neg G) \land (\neg E \lor \neg H) \land (\neg E \lor \neg I) \land (A \lor B \lor C \lor D \lor E \lor F \lor G \lor H \lor I)$
- $R_6 \Leftrightarrow (\neg F \lor \neg B) \land (\neg F \lor \neg C) \land (\neg F \lor \neg D) \land (\neg F \lor \neg E) \land (\neg F \lor \neg H) \land (\neg F \lor \neg I) \land (B \lor C \lor D \lor E \lor F \lor H \lor I)$
- $R_7 \Leftrightarrow (\neg G \lor \neg A) \land (\neg G \lor \neg C) \land (\neg G \lor \neg D) \land (\neg G \lor \neg E) \land (\neg G \lor \neg H) \land (\neg G \lor \neg I) \land (A \lor C \lor D \lor E \lor G \lor H \lor I)$
- $R_8 \Leftrightarrow (\neg H \lor \neg B) \land (\neg H \lor \neg D) \land (\neg H \lor \neg E) \land (\neg H \lor \neg F) \land (\neg H \lor \neg G) \land (\neg H \lor \neg I) \land (B \lor D \lor E \lor F \lor G \lor H \lor I)$
- $R_9 \Leftrightarrow (\neg I \lor \neg A) \land (\neg I \lor \neg C) \land (\neg I \lor \neg E) \land (\neg I \lor \neg F) \land (\neg I \lor \neg G) \land (\neg I \lor \neg H) \land (A \lor C \lor E \lor F \lor G \lor H \lor I)$

As regras R_{10} a R_{15} já estão na FNC.

A conjunção de todas as cláusulas dá a seguinte fórmula (confira aí):

X = (¬A ∨ ¬B) ∧ (¬A ∨ ¬C) ∧ (¬A ∨ ¬D) ∧ (¬A ∨ ¬E) ∧ (¬A ∨ ¬G) ∧ (¬A ∨ ¬I) ∧ (¬B ∨ ¬C) ∧ (¬B ∨ ¬D) ∧ (¬B ∨ ¬E) ∧ (¬B ∨ ¬F) ∧ (¬B ∨ ¬H) ∧ (¬C ∨ ¬E) ∧ (¬C ∨ ¬F) ∧ (¬C ∨ ¬G) ∧ (¬C ∨ ¬I) ∧ (¬D ∨ ¬E) ∧ (¬D ∨ ¬F) ∧ (¬D ∨ ¬G) ∧ (¬D ∨ ¬H) ∧ (¬E ∨ ¬F) ∧ (¬E ∨ ¬G) ∧ (¬E ∨ ¬H) ∧ (¬E ∨ ¬I) ∧ (¬F ∨ ¬H) ∧ (¬F ∨ ¬I) ∧ (¬G ∨ ¬H) ∧ (¬G ∨ ¬I) ∧ (¬H ∨ ¬I) ∧ (A ∨ B ∨ C) ∧ (D ∨ E ∨ F) ∧ (G ∨ H ∨ I) ∧ (A ∨ D ∨ G) ∧ (B ∨ E ∨ H) ∧ (C ∨ F ∨ I)

Expansão por resolução:

1. {¬A, ¬B}
2. {¬A, ¬C}
3. {¬A, ¬D}
4. {¬A, ¬E}
5. {¬A, ¬G}
6. {¬A, ¬I}
7. {¬B, ¬C}

{¬B, ¬D}mais longo):

8.
9. {¬B, ¬E}
10. {¬B, ¬F}
11. {¬B, ¬H}
12. {¬C, ¬E}
13. {¬C, ¬F}
14. {¬C, ¬G}
15. {¬C, ¬I}
16. {¬D, ¬E}
17. {¬D, ¬F}
18. {¬D, ¬G}
19. {¬D, ¬H}
20. {¬E, ¬F}
21. {¬E, ¬G}
22. {¬E, ¬H}
23. {¬E, ¬I}
24. {¬F, ¬H}
25. {¬F, ¬I}
26. {¬G, ¬H}
27. {¬G, ¬I}
28. {¬H, ¬I}
29. {A, B, C}
30. {D, E, F}
31. {G, H, I}
32. {A, D, G}
33. {B, E, H}
34. {C, F, I}
35. {¬B, D, F} R(9, 30)

36. {¬B, F}	R(8, 35)
37. {¬B}	R(10, 36)
38. {¬E, B, C}	R(4, 29)
39. {¬E, C}	R(9, 38)
40. {¬E}	R(12, 39)
41. {¬H, E, F}	R(19, 30)
42. {¬H, F}	R(22, 41)
43. {¬H}	R(24, 42)
44. {E, H}	R(33, 37)
45. {H}	R(40, 44)
46. { }	R(43, 45)

Portanto, a fórmula é insatisfatível.

16) Qual o comprimento e as subfórmulas das seguintes fórmulas:

a) $\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))$

Comprimento: 10

Subfórmulas:

1. $\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))$
   De 1:
2. $\neg(P \land Q)$
3. $P \lor (P \leftrightarrow Q)$
   De 2:
4. $P \land Q$
   De 3:
5. P
6. $P \leftrightarrow Q$
   De 4:
7. P
8. Q
   De 6:
9. P
10. Q

b) $(\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)$

Comprimento: 16

Subfórmulas:

1. $(\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)$
   De 1:
2. $(\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q)$
3. $\neg(\neg P \lor \neg Q)$
   De 2:
4. $\neg\neg P \lor Q$
5. $R \lor Q$
   De 3:
6. $\neg P \lor \neg Q$
   De 4:
7. $\neg\neg P$
8. Q
   De 5:
9. R
10. Q
   De 6:
11. $\neg P$
12. $\neg Q$
   De 7:
13. $\neg P$
   De 11:
14. P
   De 12:
15. Q
   De 13:

16. P

17) Expresse o comprimento de uma fórmula que tem N negações e S símbolos proposicionais em função de N e S. Determine a paridade do comprimento em função de N.

O número de conectivos binários em uma fórmula é sempre um a menos que o número de símbolos proposicionais. Portanto o comprimento da fórmula será:

$|F| = N + S + (S - 1) = N + 2S - 1$

$2S - 1$ é um número ímpar, portanto o comprimento da fórmula será par se N for ímpar e ímpar se N for par. O comprimento da fórmula tem paridade oposta a N.

18) Qual o número máximo de subfórmulas de uma fórmula?

O número máximo de subfórmulas é igual ao comprimento da fórmula. O número de subfórmulas é menor que o comprimento se há símbolos proposicionais ou subfórmulas repetidas.

A partir da definição de subfórmula e de comprimento podemos perceber que cada vez que o comprimento é incrementado de uma unidade há uma subfórmula.

19) Complete com o símbolo de verdade adequado (se não for possível definir, preencha com uma interrogação):

a) Se $I[P] = 1$, então $I[P \land Q] = I[Q] = ?$
b) Se $I[P] = 0$, então $I[P \land Q] = 0$
c) Se $I[P] = 1$, então $I[P \lor Q] = 1$
d) Se $I[P] = 0$, então $I[P \lor Q] = I[Q] = ?$
e) Se $I[P] = 1$, então $I[P \rightarrow Q] = I[Q] = ?$
f) Se $I[P] = 0$, então $I[P \rightarrow Q] = 1$
g) Se $I[Q] = 1$, então $I[P \rightarrow Q] = 1$
h) Se $I[P] = 0$, então $I[P \leftrightarrow Q] = I[\neg Q] = ?$

20) Escreva as fórmulas da questão 16 nas formas normais conjuntiva e disjuntiva.

a) F = ¬(P ∧ Q) → (P ∨ (P ↔ Q))
⇔ ¬¬(P ∧ Q) ∨ (P ∨ (P ↔ Q))
⇔ (P ∧ Q) ∨ (P ∨ (P ↔ Q))
⇔ (P ∧ Q) ∨ (P ∨ ((P ∧ Q) ∨ (¬P ∧ ¬Q)))
⇔ (P ∧ Q) ∨ P ∨ (P ∧ Q) ∨ (¬P ∧ ¬Q) [FND]
⇔ P ∨ (¬P ∧ ¬Q) [FND]
⇔ P ∨ ¬Q [FNC/FND]
Tabela Verdade (só pra conferir):

P	Q	¬(P∧Q)	P∨(P↔Q)	F	P∨(¬P∧¬Q)	P∨¬Q
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

b) G = (¬¬P ∨ Q) ∧ (R ∨ Q) ∧ ¬(¬P ∨ ¬Q)
⇔ (P ∨ Q) ∧ (R ∨ Q) ∧ P ∧ Q [FNC]
⇔ P ∧ Q [FNC e FND]

P	Q	R	P ∨ Q	R ∨ Q	P ∧ Q	G
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

21) Demonstre se as fórmulas a seguir são tautologias usando tabela verdade, tableau e resolução:

Já fizemos as tabelas verdade na questão anterior, de lá é possível verificar claramente que as fórmulas são tautologias.

a) $(\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))) \leftrightarrow (P \lor \neg Q)$

P	Q	W = $\neg(P \land Q)$	X = $P \lor (P \leftrightarrow Q)$	Y = $W \rightarrow X$	Z = $P \lor \neg Q$	$Y \leftrightarrow Z$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Tableau (não vou simplificar a fórmula antes, mas se quiser pode):

$\neg((\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\swarrow$ $\searrow$

$\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))$ $\qquad$ $\neg(\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q)))$

$\neg(P \lor \neg Q)$ $\qquad$ $(P \lor \neg Q)$

$\neg P$ $\qquad$ $\neg(P \land Q)$

$\neg\neg Q$ $\qquad$ $\neg(P \lor (P \leftrightarrow Q))$

Q $\qquad$ $\neg P$

$\swarrow$ $\searrow$ $\qquad$ $\neg(P \leftrightarrow Q)$

$\neg\neg(P \land Q)$ $\qquad$ $(P \lor (P \leftrightarrow Q))$ $\qquad$ $\swarrow$ $\searrow$

$P \land Q$ $\qquad$ $\swarrow$ $\searrow$ $\qquad$ P $\qquad$ $\neg Q$

P $\qquad$ P $\qquad$ $P \leftrightarrow Q$ $\qquad$ x $\quad$ $\swarrow$ $\searrow$

Q $\qquad$ x $\qquad$ $\swarrow$ $\searrow$ $\qquad$ P $\qquad$ $\neg P$

x $\qquad$ P $\qquad$ $\neg P$ $\qquad$ $\neg Q$ $\qquad$ Q

Q $\qquad$ $\neg Q$ $\qquad$ x $\qquad$ x

x $\qquad$ x

Como o tableau da negação da fórmula é fechado, ela é tautologia.

Resolução:

Conversão da negação da fórmula para FNC:

$\neg((\neg(P \land Q) \rightarrow (P \lor (P \leftrightarrow Q))) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\Leftrightarrow \neg(((P \land Q) \lor P \lor (P \leftrightarrow Q)) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\Leftrightarrow \neg(((P \land Q) \lor P \lor (\neg P \land \neg Q)) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\Leftrightarrow \neg((P \lor \neg Q) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\Leftrightarrow \neg((P \lor \neg Q) \leftrightarrow (P \lor \neg Q))$

$\Leftrightarrow (P \lor \neg Q) \land \neg(P \lor \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \lor \neg Q) \land \neg P \land Q$

Expansão:

1. $\{P, \neg Q\}$
2. $\{\neg P\}$
3. $\{Q\}$

4. {P} R(1, 3)
5. { } R(2, 4)

b) $((\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P$

P	Q	R	W = P ∨ Q	X = R ∨ Q	Y = P ∧ Q	Z = W ∧ X ∧ Y	Z → P
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau:

$$\neg(((\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P)$$
$$(\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)$$
$$\neg P$$
$$\neg\neg P \lor Q$$
$$R \lor Q$$
$$\neg(\neg P \lor \neg Q)$$
$$\neg\neg P$$
$$\neg\neg Q$$
$$P$$
$$x$$

Resolução:

$\neg(((\neg\neg P \lor Q) \land (R \lor Q) \land \neg(\neg P \lor \neg Q)) \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow \neg((P \land Q) \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow P \land Q \land \neg P$

Expansão:

1. {P}
2. {Q}
3. {¬P}
4. { } R(1, 3)

22) Mostre por indução que

$$\sum_{k=1}^{N} 2^k = 2 \cdot (2^N - 1)$$

Para N = 1 a fórmula é válida:

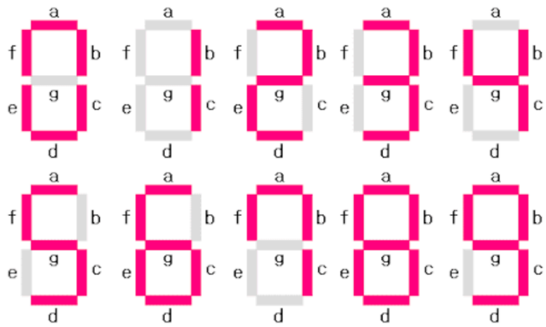
$$\sum_{k=1}^{1} 2^k = 2^1 = 2 = 2 \cdot (2^1 - 1).$$

Assuma que a fórmula vale para N = x, vamos verificar se vale para N = (x + 1).

$$\sum_{k=1}^{x+1} 2^k = \sum_{k=1}^{x} 2^k + 2^{x+1} = 2 \cdot (2^x - 1) + 2^{x+1} = 2^{x+1} - 2 + 2^{x+1} = 2 \cdot 2^{x+1} - 2 = 2 \cdot (2^{x+1} - 1)$$

Portanto, a afirmação é válida.

23) Um display de 7 segmentos é usado para representar os dígitos de 0 a 9 conforme ilustrado na figura abaixo. As letras *a* a *f* identificam os segmentos. Usando os símbolos proposicionais A, B, C e D como um contador binário, faça uma fórmula lógica para ativar cada um dos 7 segmentos. Por exemplo, o segmento *e* deve acender quando ABCD é 0000, 0010, 0110 ou 1000. Para os valores 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111 tanto faz se os segmentos acendem ou não.



Basicamente, esta questão consiste em determinar fórmulas a partir da tabela verdade.

- O *led a* só apaga em 0001 e 0100, portanto:
  a = (A ∨ B ∨ C ∨ ¬D) ∧ (A ∨ ¬B ∨ C ∨ D)
- O *led b* só apaga em 0101 e 0110, portanto:
  b = (A ∨ ¬B ∨ C ∨ ¬D) ∧ (A ∨ ¬B ∨ ¬C ∨ D)
- O *led c* só apaga em 0010, portanto:
  c = (A ∨ B ∨ ¬C ∨ D)
- O *led d* só apaga em 0001, 0100 e 0111, portanto:
  d = *a* ∧ (A ∨ ¬B ∨ ¬C ∨ ¬D)
- O *led e* só acende em 0000, 0010, 0110 e 1000, portanto:

e = (¬A ∧ ¬B ∧ ¬C ∧ ¬D) ∨ (¬A ∧ ¬B ∧ C ∧ ¬D) ∨ (¬A ∧ B ∧ C ∧ ¬D) ∨ (A ∧ ¬B ∧ ¬C ∧ ¬D)

- O *led f* só apaga em 0001, 0010 e 0011, portanto:
  f = (A ∨ B ∨ C ∨ ¬D) ∧ (A ∨ B ∨ ¬C ∨ D) ∧ (A ∨ B ∨ ¬C ∨ ¬D)
- O *led g* só apaga em 0000, 0001 e 0111, portanto:
  g = (A ∨ B ∨ C ∨ D) ∧ (A ∨ B ∨ C ∨ ¬D) ∧ (A ∨ ¬B ∨ ¬C ∨ ¬D)

24) Escreva a seguinte fórmula na forma normal conjuntiva e na forma normal disjuntiva:

$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow \neg((A \rightarrow (B \leftrightarrow C)))$

$\Leftrightarrow (\neg((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \lor \neg((A \rightarrow (B \leftrightarrow C)))$

$\Leftrightarrow (((A \rightarrow B) \land \neg(A \rightarrow C)) \lor (A \land \neg(B \leftrightarrow C))$

$\Leftrightarrow ((\neg A \lor B) \land A \land \neg C) \lor (A \land \neg(B \leftrightarrow C))$

$\Leftrightarrow (A \land B \land \neg C) \lor (A \land (B \lor C) \land (\neg B \lor \neg C))$

$\Leftrightarrow (A \land B \land \neg C) \lor (((A \land B) \lor (A \land C)) \land (\neg B \lor \neg C))$

$\Leftrightarrow (A \land B \land \neg C) \lor (((A \land B) \land (\neg B \lor \neg C)) \lor ((A \land C) \land (\neg B \lor \neg C)))$

$\Leftrightarrow (A \land B \land \neg C) \lor (A \land B \land \neg B) \lor (A \land B \land \neg C) \lor (A \land C \land \neg B) \lor (A \land C \land \neg C)$

$\Leftrightarrow (A \land B \land \neg C) \lor (A \land C \land \neg B)$ [FND]

$\Leftrightarrow (A \lor A) \land (A \lor C) \land (A \lor \neg B) \land (B \lor A) \land (B \lor C) \land (B \lor \neg B) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor C) \land (\neg C \lor \neg B)$

$\Leftrightarrow A \land (A \lor C) \land (A \lor \neg B) \land (B \lor A) \land (B \lor C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg C \lor \neg B)$ [FNC]

$\Leftrightarrow A \land (B \lor C) \land (\neg B \lor \neg C)$ [FNC]

25) Mostre, por tableau e por resolução, que $\neg(B \leftrightarrow C)$ é consequência lógica da fórmula da questão anterior.

Queremos mostrar que $F \rightarrow \neg(B \leftrightarrow C)$ é tautologia. Da questão anterior, vamos utilizar a FND para fazer o Tableau:

$$\neg(((A \land B \land \neg C) \lor (A \land C \land \neg B)) \rightarrow \neg(B \leftrightarrow C))$$
$$(A \land B \land \neg C) \lor (A \land C \land \neg B)$$
$$\neg\neg(B \leftrightarrow C)$$
$$B \leftrightarrow C$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \swarrow & & \searrow & & \\
 & A \land B \land \neg C & & & & A \land C \land \neg B & \\
 & A & & & & A & \\
 & B & & & & C & \\
 & \neg C & & & & \neg B & \\
\swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\
B & & \neg B & & B & & \neg B \\
C & & \neg C & & C & & \neg C \\
x & & x & & x & & x
\end{array}$$

Como o tableau é fechado, está provado.

Por Resolução:

Vamos utilizar a conversão para a FNC já obtida na questão anterior:

$\neg((A \land (B \lor C) \land (\neg B \lor \neg C)) \rightarrow \neg(B \leftrightarrow C))$

$\Leftrightarrow A \land (B \lor C) \land (\neg B \lor \neg C) \land (B \leftrightarrow C)$

$\Leftrightarrow A \land (B \lor C) \land (\neg B \lor \neg C) \land (\neg B \lor C) \land (B \lor \neg C)$

Expansão:

1. $\{A\}$
2. $\{B, C\}$
3. $\{\neg B, \neg C\}$
4. $\{\neg B, C\}$
5. $\{B, \neg C\}$
6. $\{B\}$ R(2, 5)
7. $\{\neg B\}$ R(3, 4)
8. $\{\ \}$ R(6, 7)

26)* Seja S um conjunto de fórmulas que contêm apenas os símbolos proposicionais A, B e C. Mostre que se |S| > 256 existem pelo menos duas fórmulas equivalentes em S.

Com 3 símbolos proposicionais temos $2^3 = 8$ interpretações possíveis, ou seja, a tabela verdade tem 8 linhas. Duas fórmulas são equivalentes se suas tabelas verdade são idênticas. Cada uma das 8 linhas da tabela verdade pode ter dois valores (0 ou 1), portanto temos $2^8 = 256$ tabelas distintas. Logo, se temos mais de 256 fórmulas, pelo menos duas delas são equivalentes.

27) Você encontra dois baús. Um dos baús traz a inscrição: “Pelo menos um de nós tem um tesouro” e o outro baú diz: “Eu tenho um tesouro”. Você sabe que ou ambos estão dizendo a verdade ou ambos estão mentindo. Formalize o problema e determine qual baú você escolheria, para tentar encontrar o tesouro, e justifique.

Seja B_1: “O baú 1 tem um tesouro” e B_2: “O baú 2 tem um tesouro”. As duas afirmações encontradas são:

$A_1 = (B_1 \vee B_2)$

$A_2 = B_2$

Sabemos que as duas afirmações são verdade ou ambas são falsas, ou seja:

$F = (A_1 \wedge A_2) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2)$

$\Leftrightarrow ((B_1 \vee B_2) \wedge B_2) \vee (\neg(B_1 \vee B_2) \wedge \neg B_2)$

$\Leftrightarrow ((B_1 \wedge B_2) \vee B_2) \vee (\neg B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg B_2)$

$\Leftrightarrow (B_1 \wedge B_2) \vee B_2 \vee (\neg B_1 \wedge \neg B_2)$

$\Leftrightarrow B_2 \vee (\neg B_1 \wedge \neg B_2)$

Se ambos estão falando a verdade o Baú 2 tem um tesouro com certeza e talvez o Baú 1 tenha (não sabemos). Se ambos estão mentindo ninguém tem tesouro.

Então a melhor aposta é no Baú 2, se não há tesouro lá, não há no 1 também.

Para verificar:

B_1	B_2	A_1	A_2	$A_1 \wedge A_2$	$\neg A_1 \wedge \neg A_2$	F
0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

28) Um semáforo trabalha em unidades de tempo de 30s. Numa dada unidade de tempo ele está com apenas uma das luzes acesas (verde, amarelo ou vermelho). Ele pode passar até 1m30s na mesma cor. A transição de cores se dá do verde para o amarelo, do amarelo para o vermelho e do vermelho para o verde. Represente o funcionamento deste semáforo através de fórmulas lógicas.

Os símbolos proposicionais utilizados aqui são:

G_k: “A luz verde está acesa na unidade de tempo k”

Y_k: “A luz amarela está acesa na unidade de tempo k”

R_k: “A luz vermelha está acesa na unidade de tempo k”

Perceba, mais uma vez, que estes não são símbolos proposicionais, propriamente ditos, mas uma família de símbolos. Na prática, se quisermos tentar representar o funcionamento do semáforo por um certo tempo precisamos de vários destes símbolos, um para cada unidade de tempo da simulação. As respostas dadas são em termos destas famílias de símbolos.

Vamos escrever as restrições dadas no enunciado:

- Apenas uma luz em determinada unidade de tempo:
  $(G_k \land \neg Y_k \land \neg R_k) \lor (\neg G_k \land Y_k \land \neg R_k) \lor (\neg G_k \land \neg Y_k \land R_k)$

- No máximo 1m30s (3 unidades de tempo) na mesma cor. Vamos representar da seguinte forma, se ficar 3 unidades de tempo consecutivas na mesma cor, na próxima unidade ele não estará mais nesta cor.
  $(G_{k-3} \land G_{k-2} \land G_{k-1}) \rightarrow \neg G_k$
  $(Y_{k-3} \land Y_{k-2} \land Y_{k-1}) \rightarrow \neg Y_k$
  $(R_{k-3} \land R_{k-2} \land R_{k-1}) \rightarrow \neg R_k$

- Transição de cores. Se está na cor X agora, na próxima unidade de tempo permanece nesta cor ou transita de acordo com as regras dadas:
  $G_{k-1} \rightarrow (G_k \lor Y_k)$
  $Y_{k-1} \rightarrow (Y_k \lor R_k)$
  $R_{k-1} \rightarrow (R_k \lor G_k)$

29) O Brasil tem cinco regiões. Você tem 3 lápis (um azul, um bege e um cinza) e deseja pintar o mapa de modo que regiões vizinhas não tenham a mesma cor. Formalize o problema através de fórmulas lógicas.
Assuma que alguém te deu a lista de vizinhos através de proposições lógicas $V_{x,y}$ que indicam se as regiões x e y são vizinhas.
Sejam $P_{x,w}$ as proposições "A região x tem a cor w" e $V_{x,y}$ são as proposições "A região x é vizinha da região y".

- Uma certa região tem apenas uma das cores (trocar *x* por cada uma das regiões):
  $(P_{x,a} \land \neg P_{x,b} \land \neg P_{x,c}) \lor (\neg P_{x,a} \land P_{x,b} \land \neg P_{x,c}) \lor (\neg P_{x,a} \land \neg P_{x,b} \land P_{x,c})$

- Se duas regiões são vizinhas elas não podem ter a mesma cor (repetir para cada combinação de regiões x e y e para cada cor w):
  $V_{x,y} \to (P_{x,w} \to \neg P_{y,w})$

Para 5 regiões e 3 cores teremos 5 fórmulas do primeiro tipo e 30 do segundo tipo. Estas fórmulas descrevem as regras do problema.

30) A turma vai fazer uma confraternização e comprou 50 garrafas d'água. Houve uma denúncia anônima de que uma das garrafas foi envenenada. Você tem 6 cobaias. É possível dar uma mistura das águas (de quantas garrafas você quiser) a cada uma das cobaias uma única vez. Se a água envenenada fizer parte da mistura que a cobaia bebeu, ele morrerá em 10h. A festa vai acontecer daqui a 12h! Como determinar se há uma garrafa envenenada e qual é?

Sugestão: use o sistema binário para rotular as garrafas. A resposta é um procedimento e não uma fórmula lógica.

Seguindo a sugestão do enunciado, basta considerar que cada cobaia é um *bit* do rótulo da garrafa, cada cobaia vai beber de todas as garrafas que têm o *bit* correspondente igual a 1. Por exemplo, a cobaia que representa o *bit* menos significativo vai beber de todas as garrafas ímpares. Ao fim, basta verificar quais cobaias morreram, o número representado por elas é o número da garrafa (se nenhuma morrer é porque não tem veneno).

Um exemplo reduzido com 8 garrafas e 3 cobaias:

	abc
1:	001
2:	010
3:	011
4:	100
5:	101
6:	110
7:	111

A cobaia *c* bebe das garrafas (1, 3, 5 e 7). A cobaia *b* bebe das garrafas (2, 3, 6 e 7). A cobaia *a* bebe das garrafas (4, 5, 6 e 7). Se as cobaias *a* e *b* morrem, sabemos que o número 110 está envenenado, ou seja, a garrafa número 6 (que é a única garrafa que estas duas cobaias beberam e a outra não bebeu).

31) Considere as seguintes fórmulas proposicionais

- $H_1 = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow P))) \rightarrow P$
- $H_2 = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow Q))) \rightarrow P$
- $H_3 = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow R))) \rightarrow P$

Determine a interpretação de cada uma das fórmulas (se possível) se:

a) $I[P] = 1$

Todas as fórmulas são verdadeiras.

São implicações e sabemos que o consequente é verdadeiro. Pela definição, $I[X \rightarrow P] = 1$ se $I[X] = 0$ e/ou $I[P] = 1$.

b) $I[P] = 0$

Perceba que os antecedentes de todas as fórmulas são idênticos com exceção do último símbolo proposicional. Vamos chamar ele de X por enquanto.

$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \land Q) \leftrightarrow P) \land ((P \lor Q) \leftrightarrow X))) \rightarrow P$

Agora vamos reescrever a fórmula substituindo P por 0 e fazendo as simplificações possíveis:

$((0 \rightarrow Q) \rightarrow (((0 \land Q) \leftrightarrow 0) \land ((0 \lor Q) \leftrightarrow X))) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (1 \rightarrow ((0 \leftrightarrow 0) \land (Q \leftrightarrow X))) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (1 \rightarrow (1 \land (Q \leftrightarrow X))) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (1 \rightarrow (Q \leftrightarrow X)) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (Q \leftrightarrow X) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \neg(Q \leftrightarrow X)$

Agora vamos analisar os três casos:

$H_1 = \neg(Q \leftrightarrow 0) = Q$

Depende de Q.

$H_2 = \neg(Q \leftrightarrow Q) = 0$

$I[H_2] = 0$

$H_3 = \neg(Q \leftrightarrow R)$

Depende de Q e R.

32) Determine se as seguintes fórmulas são tautologias:

- $H_1 = A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow A)))$

  $H_1 \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor \neg D \lor A$ ($\Leftrightarrow$ 1)

  $\neg H_1 = A \land B \land C \land D \land \neg A$

  Resolução:

  1. {A}
  2. {B}
  3. {C}
  4. {D}
  5. {¬A}
  6. { } R(1,5)

- $H_2 = A \rightarrow ((B \land C) \rightarrow ((D \land E) \rightarrow F))$

  $H_2 \Leftrightarrow \neg A \lor \neg(B \land C) \lor \neg(D \land E) \lor F$

  $H_2 \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor \neg D \lor \neg E \lor F$

  $\neg H_2 = A \land B \land C \land D \land E \land \neg F$

  Como não há cláusulas complementares, a resolução não chegará à cláusula vazia. Portanto não é tautologia.

- $H_3 = (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \land B) \rightarrow C)$

  $H_3 \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C) \rightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C)$ ($\Leftrightarrow$ 1)

  $\neg H_3 = \neg((\neg A \lor \neg B \lor C) \rightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C))$

  $\neg H_3 \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C) \land \neg(\neg A \lor \neg B \lor C)$

  $\neg H_3 \Leftrightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C) \land A \land B \land \neg C$

  Expansão:

  1. {¬A, ¬B, C}
  2. {A}
  3. {B}
  4. {¬C}
  5. {¬B, C} R(1,2)
  6. {C} R(3,5)
  7. { } R(4,6)

- $H_4 = ((A \rightarrow C) \lor (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \land B) \rightarrow C)$

  $H_4 \Leftrightarrow (\neg A \lor C \lor \neg B \lor C) \rightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C)$ ($\Leftrightarrow$ 1)

  $\neg H_4 = \neg((\neg A \lor C \lor \neg B \lor C) \rightarrow (\neg A \lor \neg B \lor C))$

  $\neg H_4 \Leftrightarrow (\neg A \lor C \lor \neg B) \land A \land B \land \neg C$

  (mesmo caso do item anterior)

33) Quais das seguintes fórmulas é consequência lógica de □ = {A ∨ B, (C ∧ D) → E}?

Na forma clausal o conjunto é □ = {{A, B}, {¬C, ¬D, E}}. Vamos provar todos os itens por resolução. Em todos os casos temos que provar que □ → X é tautologia. Negando a fórmula temos ¬(□ → X) ⇔ (□ ∧ ¬X). Portanto, na resolução teremos as cláusulas de □ e a fórmula dada no item negada.

a) (A ∨ B)

¬(A ∨ B) ⇔ (¬A ∧ ¬B)

Expansão:

1. {A, B}
2. {¬C, ¬D, E}
3. {¬A}
4. {¬B}
5. {B} R(1, 3)
6. { } R(4, 5)

Portanto é consequência lógica. É fácil ver que é consequência lógica mesmo sem fazer a resolução, já que (A ∨ B) é uma das fórmulas de □.

b) (A ∨ B ∨ C) ∧ ((B ∧ C ∧ D) → E)

¬((A ∨ B ∨ C) ∧ ((B ∧ C ∧ D) → E))

⇔ (¬A ∧ ¬B ∧ ¬C) ∨ (B ∧ C ∧ D ∧ ¬E)

⇔ (¬A ∨ B) ∧ (¬A ∨ C) ∧ (¬A ∨ D) ∧ (¬A ∨ ¬E) ∧ (¬B ∨ C) ∧ (¬B ∨ D) ∧

(¬B ∨ ¬E) ∧ (¬C ∨ B) ∧ (¬C ∨ D) ∧ (¬C ∨ ¬E)

Expansão:

1. {A, B}
2. {¬C, ¬D, E}
3. {¬A, B}
4. {¬A, C}
5. {¬A, D}
6. {¬A, ¬E}
7. {¬B, C}
8. {¬B, D}
9. {¬B, ¬E}
10. {¬C, B}
11. {¬C, D}
12. {¬C, ¬E}
13. {B} R(1, 3)
14. {C} R(7, 13)
15. {D} R(8, 13)
16. {¬E} R(9, 13)
17. {¬D, E} R(2, 14)
18. {E} R(15, 17)
19. { } R(16, 18)

Portanto é consequência lógica. Mais uma vez era fácil inferir pois, se (A ∨ B) é verdade, (A ∨ B ∨ C) também deve ser. Do mesmo modo, se (¬C ∨ ¬D ∨ E) é verdade, (¬B ∨ ¬C ∨ ¬D ∨ E) também deve ser.

c) $(A \lor B) \land (\neg D \lor E)$

$\neg((A \lor B) \land (\neg D \lor E))$

$\Leftrightarrow (\neg A \land \neg B) \lor (D \land \neg E)$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor D) \land (\neg A \lor \neg E) \land (\neg B \lor D) \land (\neg B \lor \neg E)$

E daí temos que

$\neg F = (A \lor B) \land (\neg C \lor \neg D \lor E) \land (\neg A \lor D) \land (\neg A \lor \neg E) \land (\neg B \lor D) \land (\neg B \lor \neg E)$

Expansão de ¬F:

1. {A, B}
2. {¬C, ¬D, E}
3. {¬A, D}
4. {¬A, ¬E}
5. {¬B, D}
6. {¬B, ¬E}
7. {A, D} R(1, 5)
8. {D} R(3, 7)
9. {A, ¬E} R(1, 6)
10. {¬E} R(4, 9)
11. {¬C, ¬D} R(2, 10)
12. {¬C} R(8, 11)

Você pode continuar tentando, mas não haverá cláusula vazia. Lembre que a conjunção de todas as cláusulas da expansão é equivalente à fórmula original. Além disso, a conjunção de $(X \land (X \lor Y))$ é equivalente a X. Deste modo, todas as cláusulas que contém as cláusulas unitárias podem ser removidas e ficamos somente com:

$\neg F \Leftrightarrow (A \lor B) \land \neg C \land D \land \neg E$

Há 3 interpretações que satisfazem ¬F, portanto não podemos concluir que F é tautologia.

Num raciocínio similar ao dos itens anteriores, podemos argumentar que o primeiro $(A \lor B)$ claramente é consequência lógica de □. Portanto, basta verificar se $(\neg D \lor E)$ também é. □ tem a disjunção $(\neg C \lor \neg D \lor E)$, e já sabemos que uma disjunção não implica em suas partes. Portanto, como $(\neg C \lor \neg D \lor E)$ não implica em $(\neg D \lor E)$, concluímos que □ não implica em $(A \lor B) \land (\neg D \lor E)$.

34) Dizem que uma pessoa radical (R) só consegue se eleger (E) se for conservadora (C), caso contrário não é elegível.

a) Quais das seguintes fórmulas representa essa frase?

i) $(R \land E) \leftrightarrow C$

Não. Uma das direções da bi-implicação diz que ser consevador implica em ser radical. Isso não foi dito no enunciado.

ii) $R \rightarrow (E \leftrightarrow C)$

Sim. Se é radical, ele é elegível se, e somente se, for conservador.

iii) $R \rightarrow ((C \rightarrow E) \lor \neg E)$

Não. Isso é uma tautologia.

b) Quais das sentenças anteriores podem ser descritas como um conjunto de cláusulas de Horn (i.e., na FNC e com no máximo um literal positivo por cláusula)?

Todas:

i) $(R \land E) \leftrightarrow C$

$\Leftrightarrow ((R \land E) \rightarrow C) \land (C \rightarrow (R \land E))$

$\Leftrightarrow ((R \land E) \rightarrow C) \land (C \rightarrow R) \land (C \rightarrow E)$

$\Leftrightarrow (\neg R \lor \neg E \lor C) \land (\neg C \lor R) \land (\neg C \lor E)$

ii) $R \rightarrow (E \leftrightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg R \lor ((E \rightarrow C) \land (C \rightarrow E))$

$\Leftrightarrow \neg R \lor ((\neg E \lor C) \land (\neg C \lor E))$

$\Leftrightarrow (\neg R \lor \neg E \lor C) \land (\neg R \lor \neg C \lor E)$

iii) $R \rightarrow ((C \rightarrow E) \lor \neg E)$

$\Leftrightarrow \neg R \lor \neg C \lor E \lor \neg E$

35) Suponha que um agente vive num mundo que tem apenas dois estados S e ¬S, e a cada instante de tempo tem que tomar uma de duas ações: ficar parado (P) ou mudar de estado (M). Seja S_t a proposição que o agente está no estado S no tempo *t* e seja P_t a proposição que o agente fez a ação P no tempo *t* (similarmente para M_t)

a) Escreva uma fórmula lógica que determina S_{t+1} em função S_t.

Se o agente está no estado 1 no instante (t+1) há duas possibilidades. Ou ele estava no estado 0 no instante t e resolveu mudar de estado ou estava no estado 1 no instante t e resolveu ficar parado.

$S_{t+1} \leftrightarrow ((S_t \land P_t) \lor (\neg S_t \land M_t))$

b) Converta a função sucessora para a FNC. (Considere $M_t = \neg P_t$)

$S_{t+1} \leftrightarrow ((S_t \land P_t) \lor (\neg S_t \land \neg P_t))$

$\Leftrightarrow (S_{t+1} \rightarrow ((S_t \land P_t) \lor (\neg S_t \land \neg P_t))) \land (((S_t \land P_t) \lor (\neg S_t \land \neg P_t)) \rightarrow S_{t+1})$

$\Leftrightarrow (\neg S_{t+1} \lor ((S_t \lor \neg P_t) \land (\neg S_t \lor P_t))) \land (\neg((S_t \land P_t) \lor (\neg S_t \land \neg P_t)) \lor S_{t+1})$

$\Leftrightarrow (\neg S_{t+1} \lor S_t \lor \neg P_t) \land (\neg S_{t+1} \lor \neg S_t \lor P_t) \land (\neg S_t \lor \neg P_t \lor S_{t+1}) \land (S_t \lor P_t \lor S_{t+1})$

$\square = \{\{\neg S_{t+1}, S_t, \neg P_t\}, \{\neg S_{t+1}, \neg S_t, P_t\}, \{\neg S_t, \neg P_t, S_{t+1}\}, \{S_t, P_t, S_{t+1}\}\}.$

c) Mostre, por resolução, que se o agente está no estado ¬S no tempo t e faz a ação P, ele continua no estado ¬S no tempo t+1.

A afirmação dada é $A = (\neg S_t \land P_t) \rightarrow \neg S_{t+1}$.

Queremos mostrar que $\square \vdash A$.

Vamos iniciar fazendo a negação:

$\neg(\square \rightarrow A) \Leftrightarrow \square \land \neg A \Leftrightarrow \square \land \neg((\neg S_t \land P_t) \rightarrow \neg S_{t+1}) \Leftrightarrow \square \land \neg S_t \land P_t \land S_{t+1}$

Expansão:

1. $\{\neg S_{t+1}, S_t, \neg P_t\}$
2. $\{\neg S_{t+1}, \neg S_t, P_t\}$
3. $\{\neg S_t, \neg P_t, S_{t+1}\}$
4. $\{S_t, P_t, S_{t+1}\}$
5. $\{\neg S_t\}$
6. $\{P_t\}$
7. $\{S_{t+1}\}$
8. $\{\neg S_{t+1}, \neg P_t\}$ R(1, 5)
9. $\{\neg S_{t+1}\}$ R(6, 8)
10. $\{ \}$ R(7, 9)

36) Verdadeiro ou Falso? Justifique.

a) A única cláusula insatisfatível é a cláusula vazia.
Verdade. Toda cláusula é uma disjunção e toda disjunção é satisfatível.

b) Se C_1 e C_2 são cláusulas da lógica proposicional e todos os literais de C_1 estão contidos em C_2, então $C_1 \vdash C_2$.
Verdade. Se todos os elementos contidos em C_1 estão em C_2, e C_2 é uma disjunção, temos que $C_2 = C_1 \vee X$. $C_1 \rightarrow C_1 \vee X$ é uma tautologia (de fato é um dos axiomas do sistema axiomático).

c) Se uma cláusula pode ser resolvida com uma cópia dela mesma, ela é tautologia.
Verdade. Se uma cláusula pode ser resolvida com ela mesma, existem literais complementares nesta cláusula. Uma cláusula é uma disjunção. Uma disjunção que de literais complementares é uma tautologia.

d) Todo par de cláusulas proposicionais ou não tem resolvente ou todos os seus resolventes são equivalentes.
Verdade. Caso 1: Se não há literais complementares, não há resolvente. Caso 2: Se há exatamente um par, há um único resolvente (que é logicamente equivalente a ele mesmo). Caso 3: Se tem mais de um par de literais complementares, um par é eliminado e os demais ficam no resolvente, de modo que todos os resolventes possíveis são logicamente equivalentes a 1.

37) Assuma as seguintes proposições:

- B: "Bateria descarregada"
- C: "Sem combustível"
- P: "Partida funciona"
- R: "Rádio funciona"

a) Qual o número de interpretações de qualquer fórmula com estas proposições?
Com 4 proposições temos $2^4 = 16$ interpretações.

b) Quantas interpretações falsas existem para $H = (R \land P) \rightarrow (\neg B \land \neg C)$?
Para a implicação ser falsa, devemos ter $I[R \land P] = 1$ e $I[\neg B \land \neg C] = 0$.
Existem 4 interpretações com R e P verdadeiros, que é o número de interpretações possíveis para as demais proposições.
Dessas 4 interpretações, em 3 delas temos $I[\neg B \land \neg C] = 0$. Essa fórmula só é verdadeira se B e C são ambos falsos.
Portanto, existem 3 interpretações falsas para H.

c) Prove que H não é consequência lógica de $R \rightarrow \neg B$.
Para provar que não é consequência lógica basta achar uma interpretação onde $(R \rightarrow \neg B)$ é verdadeiro e H é falso. Para H ser falso, é necessário ter $I[R] = 1$ e $I[P] = 1$. Mas, se $I[R] = 1$, e $(R \rightarrow \neg B)$ é verdade, é necessário que $I[B] = 0$. Finalmente, Com P, R e B definidos, basta fazer $I[C] = 1$ para H ser falso.

38) Prove, usando resolução, que G é consequência lógica de

□ = {{A, B}, {¬A, C}, {¬B, D}, {¬C, G}, {¬D, G}}

Devemos provar que ¬(□ → G) é insatisfatível.

¬(□ → G) ⇔ (□ ∧ ¬G)

Expansão:

1.	{A, B}	
2.	{¬A, C}	
3.	{¬B, D}	
4.	{¬C, G}	
5.	{¬D, G}	
6.	{¬G}	
7.	{¬C}	R(4, 6)
8.	{¬D}	R(5, 6)
9.	{¬A}	R(2, 7)
10.	{¬B}	R(3, 8)
11.	{B}	R(1, 9)
12.	{ }	R(10, 11)

39)* Uma expressão na forma k-CNF é uma fórmula na CNF com a restrição extra de que cada cláusula contém exatamente k literais. Duas cláusulas são semanticamente distintas se não são equivalentes.

a) Se temos n símbolos proposicionais, quantas cláusulas semanticamente distintas podemos escrever na 2-CNF?

Cada cláusula na 2-CNF tem 2 literais. com n símbolos proposicionais temos $2n$ literais possíveis. Considerando que um cláusula é formada por 2 literais, temos um total de $2n^2$ cláusulas *sintaticamente* distintas, mas muitas destas cláusulas são semanticamente idênticacas.

Primeiro, perceba que a ordem dos literais na cláusula não faz diferença, (*e.g.* $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$) então, ignorando a ordem, o número de cláusulas com 2 literais distintos é o número de combinações de $2n$ elementos tomados 2 a 2: $(2n!) / ((2n - 2)!2!) = 2n^2 - n$. No entanto, n destas cláusulas são formadas por literais complementares e são todas semanticamente idênticas, vamos retirar $n - 1$ cláusulas (já que basta contar uma delas) e ficamos com $2n^2 - 2n + 1$ cláusulas semanticamente idênticas que têm dois literais distintos.

Falta agora acrescentar as $2n$ cláusulas com literais repetidos (*e.g.* $(A \vee \neg A)$). Então temos no total $2n^2 + 1$ cláusulas semanticamente distintas na 2-CNF.

b) Usando sua resposta anterior, prove que a resolução na 2-CNF sempre termina em uma quantidade de passos que é um polinômio em n.

O resultado da aplicação da regra da resolução sobre duas cláusulas da 2-CNF sempre dá uma cláusulas com 2 ou menos literais. Ou seja, a resolução sobre duas cláusulas da 2-CNF dá uma cláusula da 2-CNF.

Como o número de cláusulas semanticamente distintas é $2n^2 + 1$, este é o número máximo de passos da expansão por resolução. (na verdade é menos que isso, mas como mesmo nesse caso absurdo já é um polinômio, não vai ser pior que isso.)

c) Explique porque seu argumento não vale para 3-CNF.

Na 3-CNF o número de cláusulas no resolvente de duas cláusulas pode ser maior que as cláusulas originais, podendo chegar até n literais.

40) Quantas interpretações satisfazem as seguintes fórmulas?

a) $B \lor C$

3, só é falso se I[B] = I[C] = 0.

b) $\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor \neg D$

15, só é falso se I[A] = I[B] = I[C] = I[D] = 1.

c) $(A \rightarrow B) \land A \land \neg B \land C \land D$

0. Note que para satisfazer ¬B, devemos ter B falso. Se B é falso, precisamos ter A falso para satisfazer (A → B). Aí temos uma contradição com A.

$(A \rightarrow B) \land A \land \neg B \land C \land D$

$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land A \land \neg B \land C \land D$

$\Leftrightarrow ((\neg A \land A) \lor (B \land A)) \land \neg B \land C \land D$

$\Leftrightarrow B \land A \land \neg B \land C \land D$

$\Leftrightarrow 0$

41) Considere a seguinte fórmula na 2-CNF

$(\neg X_1 \lor X_2) \land (\neg X_2 \lor X_3) \land (\neg X_3 \lor X_4) \land \ldots \land (\neg X_{n-1} \lor X_n)$

Quantas interpretações verdadeiras existem, em função de n?

Perceba que se um certo X_i é verdade, todos os X_a, a > i, precisam ser verdade para tornar a expressão verdadeira. Então, toda solução é uma sequência de *k* símbolos proposicionais falsos seguidos de (*n* - *k*) símbolos verdadeiros, com *k* = 0, 1, …, *n*. Portanto, existem (*n* + 1) interpretações que satisfazem a fórmula.

42)* Mostre que todo conjunto de até 2^k-1 cláusulas da k-CNF é satisfatível. Assuma que as cláusulas não têm literais complementares e que temos k símbolos proposicionais.

Uma fórmula com k símbolos proposicionais tem 2^k interpretações possíveis. Existem 2^k cláusulas com símbolos proposicionais distintos. Cada uma dessas cláusulas impõe restrições aos valores dos símbolos proposicionais, eliminando $1/2^k$ das interpretações. (2^k - 1) cláusulas determinam unicamente o valor de cada símbolo proposicional da fórmula. (Lembre de como obtemos a CNF a partir da tabela verdade de uma fórmula, cada cláusula representa uma linha com interpretação falsa, uma fórmula insatisfatível tem todas as linhas falsas).

Ex: Na 2-CNF, existem as seguintes cláusulas com 2 símbolos proposicionais distintos:

$\{X_1, X_2\}, \{\neg X_1, X_2\}, \{X_1, \neg X_2\}, \{\neg X_1, \neg X_2\}$

Cada uma dessas cláusulas impõe uma certa restrição, qualquer subconjunto de 3 cláusulas determina unicamente os valores lógicos de X_1 e X_2, mas é impossível satisfazer as 4 ao mesmo tempo.

43) Prove:

a) $(A \leftrightarrow B) \vdash (\neg A \lor B)$

Se $(A \leftrightarrow B)$ é verdade, concluímos que A e B têm o mesmo valor. Daí temos que, se $(A \leftrightarrow B)$ é verdade, $(\neg A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \lor A) \Leftrightarrow 1$. Ou seja, se $(A \leftrightarrow B)$ é verdade, $(\neg A \lor B)$ também é.

b) $(C \lor (\neg A \land \neg B)) \Leftrightarrow ((A \rightarrow C) \land (B \rightarrow C))$

$(C \lor (\neg A \land \neg B)) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \land (B \rightarrow C))$

$\Leftrightarrow ((C \lor \neg A) \land (C \lor \neg B)) \leftrightarrow ((\neg A \lor C) \land (\neg B \lor C))$

Como os dois lados da bi-implicação são idênticos:

$\Leftrightarrow 1$

c) $0 \vdash 1$

Pela própria definição da semântica do operador "→", sempre que o antecedente é falso o consequente é verdadeiro. "Falso" implica em qualquer coisa.

d) $(A \land B) \vdash (A \leftrightarrow B)$

Se $(A \land B)$ é verdade, $I[A] = I[B] = 1$, então $(A \leftrightarrow B)$ é verdade.

e) $(A \leftrightarrow B) \land (\neg A \lor B)$ é satisfatível

Consequência da letra (a).

f) $(A \lor B) \land \neg(A \rightarrow B)$ é satisfatível

Para $\neg(A \rightarrow B)$ ser verdade, precisamos ter $I[A] = 1$ e $I[B] = 0$, o que também torna $(A \lor B)$ verdadeiro.

Um robô move-se sobre um tabuleiro de tamanho N x N. No tempo *t* o robô deve mover-se para baixo ou para a direita, chegando no quadrado adjacente
no tempo $t + 1$. Usando as proposições D^t: "O robô move-se para a direita no tempo *t*.", B^t: "O robô move-se para baixo no tempo *t*." e $P^t_{x,y}$: "O robô está na posição (x, y) no tempo *t*." (assuma que $P^t_{x,y}$ é falso para x = 0 ou y = 0):

Para esta questão o tabuleiro considerado tem a seguinte estrutura:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	⋯	(1,N)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	⋯	(2,N)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	⋯	(3,N)
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
(N,1)	(N,2)	(N,3)	⋯	(N,N)

a) Determine, para um tabuleiro 2 x 2, uma fórmula que diz que o robô deve começar (t = 0) em alguma posição do tabuleiro.
O robô começa em uma única posição do tabuleiro:
$H_a = (P^0_{1,1} \land \neg P^0_{1,2} \land \neg P^0_{2,1} \land \neg P^0_{2,2}) \lor (\neg P^0_{1,1} \land P^0_{1,2} \land \neg P^0_{2,1} \land \neg P^0_{2,2}) \lor$
$(\neg P^0_{1,1} \land \neg P^0_{1,2} \land P^0_{2,1} \land \neg P^0_{2,2}) \lor (\neg P^0_{1,1} \land \neg P^0_{1,2} \land \neg P^0_{2,1} \land P^0_{2,2})$

b) Qual seria o comprimento da fórmula do item (a) para um tabuleiro NxN?
O número de símbolos proposicionais é igual ao tamanho do tabuleiro (N^2). Então para cada conjunção teríamos N^2 símbolos proposicionais, (N^2 - 1) operações "$\land$" e (N^2 - 1) operações "¬". São N^2 conjunções e, entre elas, (N^2 - 1) operações "$\lor$". Portanto o comprimento seria:
$|H_a| = N^2 (N^2 + 2(N^2 - 1)) + (N^2 - 1)$
$|H_a| = N^2 (3N^2 - 2) + N^2 - 1$
$|H_a| = 3N^4 - N^2 - 1$

c) Dê uma fórmula que determina que apenas uma das ações pode ser tomada no tempo *t*.
$H^t_b = \neg(D^t \leftrightarrow B^t)$

d) Quantas fórmulas do tipo que você escreveu no item (c) são necessárias para determinar caminhos de comprimento *K*? (um caminho de comprimento K é uma sequência de (K+1) posições que inicia em t = 0 e termina em t = K, seguindo as regras de movimentação do problema).
São necessárias K destas fórmulas, para t variando de 0 a (K - 1).

e) Escreva uma fórmula lógica que determina $P^{t+1}_{x,y}$ em função dos outros símbolos proposicionais.
O robô está na posição (x, y) no tempo (t + 1) se, e somente se, estava na posição (x - 1, y) e moveu-se para baixo ou estava na posição (x, y - 1) e moveu-se para a direita:

$P^{t+1}_{x,y} \leftrightarrow ((P^{t}_{(x-1),y} \land B^{t}) \lor (P^{t}_{x,(y-1)} \land D^{t}))$

f) Quantas fórmulas do item (e) são necessárias para determinar os caminhos de comprimento K em um tabuleiro N x N?

São necessárias KN^2 destas fórmulas, uma para cada posição do tabuleiro em cada instante t de 0 a (K-1).

g) A conjunção de todas as fórmulas dos itens anteriores só é satisfatível se o robô pode fazer um caminho de comprimento K entre dois pontos do tabuleiro. Quantas linhas tem a tabela verdade desta conjunção?

Temos N^2 símbolos proposicionais para representar posição para cada instante de tempo de 0 a K. Portanto, $N^2(K + 1)$ símbolos. Akém disso temos 2 símbolos proposicionais para as ações em cada instante de tempo de 0 a (K - 1), totalizando $N^2(K + 1) + 2K$ símbolos proposicionais.

Portanto, o número de linhas da tabela verdade seria:

$2^{(N2(K + 1) + 2K)}$

Obs: Para um tabuleiro 2 x 2 e 2 passos teríamos um total de 2^{16} = 65.536 linhas, mas só duas delas satisfazem a fórmula. Na prática, boa parte destas linhas não precisaria ser avaliada pois sabemos que toda linha que tem $I[D^t] = I[B^t]$ não precisam ser avaliadas.

Além disso, $P^{t}_{x,y}$ é falso sempre que $(x + y) \leq (t + 1)$. Então, para o exemplo em questão, apenas $P^{2}_{2,2}$ pode ser verdade e basta avaliar esta possibilidade.

h) O que devemos acrescentar à fórmula do item anterior para determinar os caminhos de comprimento K que iniciam em (xi, yi) e terminam em (xf, yf)?

Basta acrescentar $P^{0}_{xi,yi}$ e $P^{K}_{xf,yf}$ à conjunção de todas as fórmulas que temos até agora.