Primeira Avaliação - COMP0410 - 2022.1

1. Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Uma fórmula de comprimento par tem uma quantidade par de negações.

Falso. Intuitivamente, entre cada par de átomos consecutivos deve haver um operador binário. Se temos K+1 átomos temos K conectivos binários. Os operadores de negação podem ser adicionados livremente, seja N a quantidade de negações. Portanto, se F tem K conectivos binários e N negações, |F| = (2K + 1) + N. Como (2K + 1) é ímpar, |F| só é par se N for ímpar.

Prova por Indução:
A(X) = "Se X tem K_X conectivos binários e N_X negações, $|X| = (2K_X + 1) + N_X$".

- Bases:
  - F = 1, então $N_F = 0$ e $K_F = 0$.
    - |F| = 1.
      A(F) é verdade. (2x0 + 1) + 0 = 1.
  - F = P, onde P é proposição, então $N_F = 0$ e $K_F = 0$:
    - |F| = 1.
      A(F) é verdade. (2x0 + 1) + 0 = 1.
- Passos:
  Suponha que A(H) e A(G) são verdades.
  - $F = G \wedge H$, então $K_F = K_G+K_H+1$ e $N_F = N_G + N_H$.
    - $|F| = |G \wedge H| = |G| + |H| + 1$
      Pela hipótese de indução:
      $|F| = (2K_G+1)+N_G + (2K_H+1)+N_H + 1$
      $= (2(K_G+K_H+1)+1) + (N_G+N_H) = (2K_F + 1) + N_F$.
      A(F) é verdade.
  - $F = \neg G$, então $K_F = K_G$ e $N_F = N_G + 1$.
    - $|F| = |\neg G| = |G| + 1$
      Pela hipótese de indução:
      $|F| = (2K_G + 1) + (N_G + 1) = (2K_F + 1) + N_F$
      A(F) é verdade.

Logo, A(X) vale para qualquer fórmula.

b) $((A \to C) \land (\neg A \to C)) \Leftrightarrow C$

Verdade. Existem várias formas de provar, vou fazer por manipulação:
$(A \to C) \land (\neg A \to C) \Leftrightarrow (\neg A \lor C) \land (A \lor C) \Leftrightarrow (\neg A \land A) \lor C \Leftrightarrow C$

c) O comprimento da fórmula é maior ou igual ao número de subfórmulas.

Verdade.

Prova por Indução:
A(X) = "$|X| \geq |s(X)|$, onde s(X) é o conjunto de subfórmulas de X".

- Bases:
  - F = 1.
    - $|F| = 1$ e a única subfórmula é o próprio F, sub(F) = 1.
      Como $1 \geq 1$, A(F) é verdade.
  - F = P, onde P é proposição, então $N_F = 0$ e $K_F = 0$:
    - $|F| = 1$ e a única subfórmula é o próprio F, sub(F) = 1.
      Como $1 \geq 1$, A(F) é verdade.
- Passos:
  Suponha que A(H) e A(G) são verdades.
  - $F = G \land H$
    - $|F| = |G| + |H| + 1$.
      $s(F) = s(G) \cup s(H) \cup F$, portanto $|s(F)| \leq |s(G)| + |s(H)| + 1$.
      (A igualdade só vale se s(G) e s(H) são disjuntos.)
      Pela hipótese de indução:
      $|F| \geq |s(G)| + |s(H)| + 1 \geq |s(F)|$
      A(F) é verdade.
  - $F = \neg G$
    - $|F| = |G| + 1$.
      $s(F) = s(G) \cup F$, portanto $|s(F)| = |s(G)| + 1$.
      Pela hipótese de indução:
      $|F| \geq |s(G)| + 1 = |s(F)|$
      A(F) é verdade.

Logo, A(X) vale para qualquer fórmula.

d) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \rightarrow B)$

Verdade. Devemos provar que $F = (A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ é tautologia. Vou fazer por manipulação

$F = (A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee \neg A \vee B \Leftrightarrow 1$

e) $(A \rightarrow B) \Rightarrow (A \wedge B)$

Falso. Queremos provar que $F = (A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B)$ é tautologia. Vou fazer por resolução, pra variar. Primeiro devemos negar F e levar para a FNC.

$\neg F = \neg((A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B)) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Expansão:

1. $\{\neg A, B\}$
2. $\{\neg A, \neg B\}$
3. $\{\neg A\}$ R(1,2)

Não há mais resoluções possíveis, portanto concluímos que $\neg F$ é satisfatível, ou seja, F não é tautologia.

2. Considere as seguinte fórmulas:

$H = S \leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$ e

$G = (\neg T \land P) \rightarrow \neg S$.

Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) $|H| - |G| = 4$.

Verdade. $|H| = 11$ e $|G| = 7$, portanto $|H|-|G| = 4$.

b) $H \Rightarrow G$

Verdade. Devemos provar que $F = H \rightarrow G$ é tautologia. Então vamos partir de $\neg F$.

$\neg F = \neg(H \rightarrow G)$

$H = S \leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$

$\neg G = \neg((\neg T \land P) \rightarrow \neg S)$

$(\neg T \land P)$

$\neg\neg S$

S

$\neg T$

P

$\swarrow$ $\searrow$

$\neg S$	S
$\neg((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$	$(T \land P) \lor (\neg T \land \neg P)$
fechado	$\swarrow$ $\searrow$
	T | $\neg T$
	P | $\neg P$
	fechado | *fechado*

Portanto, $\neg F$ é insatisfatível e F é tautologia.

c) Se H é tautologia, então $S \Leftrightarrow (T \leftrightarrow P)$

Verdade. Se H é tautologia, e $H = S \leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P))$, isso quer dizer que $S \Leftrightarrow ((T \land P) \lor (\neg T \land \neg P)) \Leftrightarrow (T \leftrightarrow P)$

d) S é sub fórmula de H e G.

Verdade. De modo geral, todos os símbolos proposicionais que ocorrem numa fórmula são subfórmulas. Como S ocorre em H e G, ele é subfórmula de ambos.

e) $(H \land G) \Leftrightarrow H$

Verdade. Você pode fazer uma tabela verdade e verificar. Mas, vimos em sala que, para duas fórmulas quaisquer, se $H \Rightarrow G$, então $(H \land G) \Leftrightarrow H$. No item (b) vimos que $H \Rightarrow G$, portanto esse item é verdadeiro.

3. Considere a fórmula

H = $(T \wedge P) \vee (\neg T \wedge \neg P)$.

Marque como como (V) todas as fórmulas que são equivalentes a H e como (F) as que não são equivalentes.

a) $(T \vee P) \wedge (\neg T \vee \neg P)$

Falso. Essa fórmula é falsa quando T e P são ambos verdadeiros ou ambos falsos.

b) $(T \vee \neg P) \wedge (\neg T \vee P)$

Verdade. $(T \wedge P) \vee (\neg T \wedge \neg P) \Leftrightarrow (T \vee \neg T) \wedge (T \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg T) \wedge (P \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (T \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg T)$

c) $(P \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow P)$

Verdade. $(T \wedge P) \vee (\neg T \wedge \neg P) \Leftrightarrow (T \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg T) \Leftrightarrow (P \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow P)$

d) $(P \leftrightarrow T)$

Verdade. Da definição da bi-implicação, ela é verdade quando ambos são verdadeiros ou ambos são falsos.

e) $(\neg T \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow \neg T)$

Verdade. $(T \wedge P) \vee (\neg T \wedge \neg P) \Leftrightarrow (P \rightarrow T) \wedge (T \rightarrow P) \Leftrightarrow (\neg T \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow \neg T)$

4. Considere o seguinte conjunto de fórmulas:

P = (¬A ∨ B),

Q = (B ∧ ¬C),

R = (C → D),

S = (¬D ∨ E) e

T = (A ∧ ¬E).

Marque as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) O conjunto é insastisfatível.

Falso. Para satisfazer a fórmula Q, precisamos de I[B] = 1 e I[C] = 0.
Para satisfazer a fórmula T, precisamos de I[A] = 1 e I[E] = 0.
Com esses valores, P e R são satisfeitos, porque I[B] = 1 ⇒ I[P] = 1 e I[C] = 0 ⇒ I[R] = 1. Portanto, resta verificar se é possível satisfazer S.
Como já sabemos que I[E] = 0, concluímos que para satisfazer S é necessário que I[D] = 0. Conseguimos satisfazer simultaneamente todas as fórmulas, logo, o conjunto é satisfatível.

b) Se o conjunto é satisfatível, D é falso.

Verdade. Ver o argumento do item (a). Só dá para satisfazer o conjunto com I[D] = 0.

c) (R ∧ S) ⇒ (C → E)

Verdade. Perceba que S pode ser escrito como (D → E). Daí temos que R ∧ S = (C → D) ∧ (D → E) ⇒ (C → E), pela transitividade da implicação.

d) O conjunto é uma tautologia.

Falso. Se A é falso, T é falso. Daí o conjunto nem sempre é verdadeiro. De fato, do item (a) vimos que só há 1 interpretação verdadeira: I[A] = I[B] = 1 e I[C] = I[D] = I[E] = 0.

5. Considere que β é um conjunto qualquer de fórmulas.
Marque as opções como verdadeiras (V) ou falsas (F).

Em todos os casos, lembre que o conjunto de fórmulas é tratado como uma conjunção.

a) Se β é tautologia, todo subconjunto de β é tautologia.

Verdade. Se uma conjunção é verdade, todos os seus elementos são verdade. Se uma conjunção é sempre verdadeira, os seus elementos são sempre verdadeiros. Logo, qualquer subconjunto é tautologia.

b) Se β é insatisfatível, todo subconjunto de β é insatisfatível.

Falso. Se uma conjunção é falsa, quer dizer que pelo menos um de seus elementos é falso. Não podemos garantir que todos sejam falsos. Podemos concluir que pelo menos um subconjunto é insatisfatível.
Como exemplo, considere $F_1 = A \lor B$, $F_2 = \neg A \lor B$, $F_3 = A \lor \neg B$ e $F_4 = \neg A \lor \neg B$. $F_1 \land F_2 \land F_3 \land F_4$ é insatisfatível, mas qualquer outro subconjunto é satisfatível.

c) Se β é satisfatível, todo subconjunto de β é satisfatível.

Verdade. Se a conjunção é satisfatível, não há subconjunto insatisfatível. Se isso ocorresse, o conjunto seria insatisfatível, como dito no item (b).

d) Se β é tautologia, todo subconjunto de β é satisfatível.

Verdade. Consequência direta do item (a). Se os subconjuntos são tautologia, são satisfatíveis.

6. Considere a seguinte fórmula:

H = (¬A ∧ ¬B ∧ C) ∨ (¬B ∧ C) ∨ (A).

A	B	C	(¬B∧C)	(¬A∧¬B∧C)	H
0	0	0	0	0	0
0	0	1	**1**	**1**	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	**1**	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

a) Em quantas interpretações a subfórmula no primeiro parêntese é verdadeira?

1. Veja a coluna 5 da tabela acima. Isso ocorre porque cada linha da tabela verdade atribui valores às proposições. Como temos 3 proposições e as 3 ocorrem na conjunção, apenas uma linha é especificada.

b) Em quantas interpretações a subfórmula no segundo parêntese é verdadeira?

2. Veja a coluna 4 da tabela acima. Neste caso, uma proposição ficou fora da conjunção, então basta que B seja falso e C seja verdade, não importando o valor de A. Como há tem duas possibilidades, duas linhas são verdadeiras.

c) Em quantas interpretações a subfórmula no terceiro parêntese é verdadeira?

4. Coluna 1 da tabela acima. Neste caso, duas proposições ficaram de fora. Basta que A seja verdadeiro, como B e C têm quatro combinações possíveis, essa é a quantidade de linhas especificadas.

d) De modo geral, para uma fórmula na forma normal disjuntiva com N símbolos proposicionais distintos, a quantidade de interpretações em que uma conjunção envolvendo K literais distintos é verdadeira é 2 elevado a:

i) K

ii) N-K

iii) K-N

iv) N

No caso geral, a quantidade de linhas verdadeiras será o número de combinações que podem ser formadas com as proposições que não fazem parte da conjunção. Como temos N no total e K na conjunção, ficam N-K de fora, e o número de combinações é 2^{N-K}.
Se você fez corretamente os itens anteriores, dava pra chegar nessa resposta por eliminação. Vimos que o número de linhas verdadeiras aumenta com a redução de K. o item (i) aumenta com K, o item (iv) é constante, o item (iii) gera uma fração, sobra o item (ii).

7. Avalie as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se temos apenas K símbolos proposicionais, todas as cláusulas com mais que K literais são semanticamente idênticas.

Verdade. Com K proposições temos 2K literais, sendo metade positivo e metade negativo. Para criar uma cláusula, selecionamos alguns desses 2K literais e montamos uma disjunção. Todas as cláusulas com pelo menos um par de literais complementares são tautologias, portanto equivalentes entre si. Como existem K proposições, é possível selecionar até K literais que não são complementares entre si, basta que cada literal trate de uma proposição diferente. Se selecionarmos mais que K literais, obrigatoriamente teremos pelo menos um par de literais complementares. Portanto, todas as cláusulas com mais de K literais são equivalentes entre si.

b) $((P \rightarrow R) \land (Q \rightarrow R)) \Rightarrow ((P \land Q) \rightarrow R)$

Verdade. Para o lado esquerdo ser verdade precisamos de R verdade ou P e Q ambos falsos. Nos dois casos, o lado direito da implicação é verdadeiro. Portanto, a implicação é válida.

Por resolução, $F = ((P\rightarrow R) \land (Q\rightarrow R)) \rightarrow ((P\land Q) \rightarrow R)$ é tautologia?

$\neg F = \neg(((P\rightarrow R) \land (Q\rightarrow R)) \rightarrow ((P\land Q) \rightarrow R))$

$\neg F \Leftrightarrow (P\rightarrow R) \land (Q\rightarrow R) \land \neg((P\land Q) \rightarrow R)$

$\neg F \Leftrightarrow (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor R) \land P \land Q \land \neg R$

Expansão:

1. $\{\neg P, R\}$
2. $\{\neg Q, R\}$
3. $\{P\}$
4. $\{Q\}$
5. $\{\neg R\}$
6. $\{R\}$ Res(1, 3) ou Res(2, 4)
7. $\{ \}$ Res(5, 6)

Logo, $\neg F$ é insatisfatível e F é tautologia.

c) Se F é uma contradição, então $F \Rightarrow G$, para qualquer fórmula G.

Verdade. Queremos verificar se $F \rightarrow G$ é tautologia. Mas como $F \Leftrightarrow 0$, temos que $F \rightarrow G \Leftrightarrow 0 \rightarrow G \Leftrightarrow 1$. Logo, $F \Rightarrow G$.

d) Se F é uma tautologia, então $F \Rightarrow G$, para qualquer fórmula G.

Falso. Queremos verificar se $F \rightarrow G$ é tautologia. Mas como $F \Leftrightarrow 1$, temos que $F \rightarrow G \Leftrightarrow 1 \rightarrow G \Leftrightarrow G$. Logo, o resultado depende de G e não podemos garantir que é tautologia.

e) Toda cláusula não vazia é satisfatível.

Verdade. Por definição, cláusula é disjunção e toda disjunção é satisfatível. A única cláusula insatisfatível é a cláusula vazia, que representa o símbolo "Falso".

8. Avalie as afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) O processo de resolução pode ser infinito.

Falso. A resolução acaba quando encontramos a cláusula vazia ou quando esgotamos todas as cláusulas possíveis. Como não escrevemos cláusulas repetidas e existe uma quantidade finita de cláusulas, o processo sempre termina.

b) O processo do tableau sempre tem fim.

Verdade. O tableau elimina gradativamente os operadores, até chegarmos nos literais. Como a fórmula é finita e cada operador é substituído uma única vez, eventualmente o processo tem fim.

c) Ao tentar provar uma implicação por prova direta, se não conseguimos chegar no consequente, a implicação não é válida.

Falso. Na prova direta, a qualquer momento existem infinitos passos possíveis. Deste modo, quando não conseguimos demonstrar algo por prova direta não temos garantia que de fato não existe nenhum caminho possível pois não esgotamos todas as possibilidades.

d) Se alcançamos a cláusula vazia na resolução, a fórmula é insatisfatível.

Verdade. Essa é a definição do processo de resolução apresentado.

e) Se, para cada ramo do tableau de F, montarmos uma conjunção com os literais e depois fazemos uma disjunção destas conjunções, temos uma fórmula na forma normal conjuntiva equivalente a F.

Falso. Seria uma fórmula na forma normal *disjuntiva* equivalente a F. O processo descrito constrói uma fórmula na FND. Logo, não temos uma fórmula na FNC, como diz o enunciado.