FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 9: 02/08/22)

FUND. ELEMEN. DA MATEMÁTICA

AULA 9: Prop. Compostas

Prop. Simples

Def.: Diz-se que uma prop. é uma Prop. Simples quando ela não possui qualquer outra prop. como parte integrante de si mesma.

Ex.: a) "P: João é médico"

b) "Q: Aracaju tem praia"

c) $\sim P$: João não é médico.

Prop. Composta

Def: Diz-se que uma prop. é uma Prop. Composta quando ela é constituída pela combinação de duas ou mais prop.

Ex. Considere P, Q e R prop. Temos as seguinte prop. compostas:

a) $P \land Q$

b) "José bebe suco ou refrigerante"

c) $P \to Q$

d) $(P \wedge Q) \vee R$

Notação: Comumente representamos uma prop. P, composta por

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n,$$

como

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Por exemplo:

$$(Q \leftrightarrow R) \vee S \quad \text{e} \quad (T_1 \vee T_4) \wedge (T_3 \to T_2)$$

podem ser representadas por

$$P(Q, R, S) : (Q \leftrightarrow R) \vee S$$

e $\top(T_1,T_2,T_3,T_4): (T_1 \vee T_4)\wedge(T_3\to T_2)$.

Tabelas Verdades

Como motivação, consideremos a prop. $(P\wedge R)\to((\sim Q)\vee R)$

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{P}_{V}\wedge\underbrace{R}_{F})}_{F}\to\underbrace{(\underbrace{(\sim \underbrace{Q}_{V})}_{F}\vee\underbrace{R}_{F})}_{F}}_{V}$$

2^3

P	Q	R	$\sim Q$	$P\wedge R$	$(\sim Q)\vee R$	$(P\wedge R)\to((\sim Q)\vee R)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

De modo geral, a construção de uma tabela verdade é sempre possível para prop. da forma

$$P(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n)$$

onde a tabela tem o cabeçário com os valores lógicos de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ distribuídos nas primeiras n colunas da seguinte forma:

→ Coluna de P_1: $\frac{2^n}{2}$ primeiras linhas de V e os $\frac{2^n}{2}$ linhas seguintes de F.

→ coluna de P_2: $\frac{2^n/2}{2}$ primeiras linhas de V e os $\frac{2^n}{4}$ seguintes de F, gundo o preenchimento dos $\frac{2^n}{2}$ últimos conforme as $\frac{2^n}{2}$ primeiras linhas.

Coluna P_3: segue conforme anterior

No geral se produz a tabela da prop. desejada.

Ex. $P \wedge (\sim Q)$

P	Q	$\sim Q$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Equivalência Lógica

Def.: Diz-se que duas prop.

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

e

$$S(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n)$$

são Logicamente Equivalentes quando possuem os mesmos valores lógicos, e representamos tal prop. por

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n) \equiv S(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Ex. $\sim(\sim P) \equiv P$

P	$\sim P$	$\sim(\sim P)$
V	F	V
F	V	F

$\equiv$

Ex. (Leis de De Morgan): Considere P e Q prop. Temos:

↳ $\sim(P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q)$

↳ $\sim(P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Ex. (Negação da Condicional):

$$\sim(P \to Q) \equiv P \wedge (\sim Q).$$

Prop. da Equiv. Lógica

Considere P, Q e R prop. Temos:

a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ (Comutativa)

b) $P \vee Q \equiv Q \vee P$

c) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ (Associat.)

d) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

e) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (Dist.)

f) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$