FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 18: 06/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 18: Afirmações Equivalentes e Existenciais

Implicações com Teses Conjuntivas

Temos muito comum na ciência implicações na forma

$$H \Longrightarrow T_1 \wedge T_2.$$

Provar implicações como esta, pela equivalência

$$[H \Rightarrow (T_1 \wedge T_2)] \equiv [(H \Rightarrow T_1) \wedge (H \Rightarrow T_2)]$$

é suficiente provar que

$$H \Rightarrow T_1 \text{ e } H \Rightarrow T_2 .$$

Ex.: Prove que

"Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $\overbrace{6 \text{ divide } n}^{H}$, então

$\underbrace{2 \text{ divide } n}_{T_1}$ e $\underbrace{3 \text{ divide } n}_{T_2}$."

Prova:

Conforme a lógica, provar a implicação é suficiente provar as implicações

$(*)$ 6 divide $n \Rightarrow$ 2 divide n

$(**)$ 6 divide $n \Rightarrow$ 3 divide n.

Prova de $(*)$: Se 6 divide n, então

$$n = 6k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Temos que $6 = 2 \cdot 3$. Logo,

$$m = 6k = (2 \cdot 3)k = 2\underbrace{(3k)}_{\ell}$$
$$= 2\ell,$$

onde $\ell = 3k \in \mathbb{Z}$. Assim, temos garantido que 2 divide m, conforme afirmado.

<u>Prova de (**)</u>: Se 6 divide m, então

$$m = 6 \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Temos: $6 = 3 \cdot 2$. Logo,

$$m = 6 \cdot k = (3 \cdot 2) \cdot k = 3 \cdot \underbrace{(2k)}_{m}$$
$$= 3 \cdot m,$$

onde $m = 2k \in \mathbb{Z}$. Assim, garantimos que 3 divide m.

<u>Conclusão</u>: Valendo as implicações, garantimos

a implicação com a tese conjuntiva. □

Provas de "se e somente se"

Conforme estudamos, encontramos muito frequentemente afirmações na forma:

$$P \iff Q.$$

Pela lógica:

$$[P \iff Q] \equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)].$$

Então, prova que $P \iff Q$ é suficiente provar as implicações:

$$P \Rightarrow Q \text{ e } Q \Rightarrow P.$$

Ex.: Prove que:

Teorema (Fórmula de Bháskara): Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Vale:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Suponha que

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com $a \neq 0$. Então:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

Agora note que

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a},$$

então

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{-b}{2a} - \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Portanto, temos a prova da implicação.

($\Leftarrow$) A prova da recíproca é uma simples substituição de

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

na equação:

$$a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{a}{4a^2}\left(b^2 - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2 - 4ac\right)$$

$$+ \frac{1}{2a}\left(-b^2 + b\sqrt{b^2-4ac}\right) + c$$

$$= \frac{\cancel{a}\,b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \cancel{\frac{2\cancel{a}\,b\sqrt{b^2-4ac}}{4a^{\cancel{2}}}} + \frac{a\,b^2}{4a^2} - \cancel{\frac{4a^{2}c}{4a^2}}$$

$$- \cancel{\frac{b^2}{2a}} + \cancel{\frac{b}{2a}\sqrt{b^2-4ac}} + \cancel{c}$$

$$= \cancel{\frac{2a\,b^2}{4a^2}} - \cancel{\frac{b}{2a}\sqrt{b^2-4ac}} + \cancel{\frac{b}{2a}\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$- \cancel{\frac{b^2}{2a}} - \cancel{c} + \cancel{c}$$

$$= 0.$$

<u>Conclusão</u>: provados as duas implicações, temos garantida a equivalência

$\square$

Também é muito comum equivalências de 3 ou mais prop. Por exemplo:

$$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \quad \begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ P \Leftrightarrow R \end{cases}$$

Neste caso, pela lógica

$$[P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R] \equiv$$

$$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P)]$$

Assim, uma forma de provar as equivalências é provar as 3 implicações:

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow R \quad e \quad R \Rightarrow P.$$

Ex.: Prove que para cada $n \in \mathbb{Z}$, as seguintes itens são equivalentes:

(a) n é impar

(b) n^2 é impar

(c) $n^2 - 2n + 1$ é par.

Uma das formas de provar as equivalência é então provar:

$$(a) \Rightarrow (b),\ (b) \Rightarrow (c) \text{ e } (c) \Rightarrow (a).$$

Exercício para o Feriado!

Prova de Existências

É comum termos que garantir a existência de certos "objetos".

"Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^4+x^3-x^2+x-2=0$".

Esse tipo de afirmação é exemplo de prop. na forma:

$$\exists x \in D,\ P(x).$$

Então, provar que a prop. é verd. significa encontrar $a \in D$ que $P(a)$ é verdade. Assim, no caso do exemplo, verificar que $x=1$ é tal que

$$1^4+1^3-1^2+1-2=0,$$

prova a afirmação.

Diferente deste exemplo, nem sempre

se consegue exibir um determinado elemento quando se precisa provar a existência. Na grande maioria das situações é necessário usar os métodos de prova para garantir tal existência.

Ex.: Prove que:

"Existem x e y nº irracionais tais que

$$x^y$$

é um nº racional."

$$\pi^{\sqrt{2}}$$ é racional?