FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 21: 20/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 21: Falsidade de Afirmações

PIF - 1ª Verificação Genérica

Muitas situações possuem afirmações que são válidas para n natural que seja maior do que ou igual a um certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Por exemplo: $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1^2 < 3 \cdot 1$

$$n \geq 4 \Rightarrow n^2 > 3n$$

Note que no exemplo é um caso particul

da prop na forma:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow P(n), \quad (*)$$

Onde $n_0 \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta.

Para provar prop. do tipo (*), pode-se usar o P.I.F.. Basta, considerar uma nova sentença aberta:

$$Q(n) = P(n_0 + (n-1))$$

e observar que temos a seguinte eq. lógica:

$$\left[\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q(n)\right] \equiv \left[\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq n_0 \Rightarrow P(n)\right]$$

Note que

$$Q(1) = P(n_0).$$

Assim, podemos proceder do seguinte modo, devendo verificar que:

- $P(n_0)$ é verdade;
- $k \geq n_0$ e $\underline{P(k) \text{ verdade}} \Rightarrow \underline{P(k+1) \text{ verdade}}$;

pois o P.I.F, garante que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$$

é verdade.

Ex.: Prove que vale:

"$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n^2 > 3n$"

<u>Prova:</u>

Vamos aplicar o P.I.F. para $n_0 = 4$.

Considere a sentença aberta

$$P(n): \ n^2 > 3n.$$

Note que $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ e $P(3)$ são todas falsa. Além disso, Observe que

$$P(4): \ 4^2 > 3 \cdot 4$$

é verdade, logo vale a 1ª verificação.

Vamos assumir agora que $P(k)$ é válida para $\underline{k \geq 4}$, ou seja, vale

$$P(k): \ k^2 > 3k.$$

Dessa forma, temos que

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1.$$

Como $k \geq 4$, então $k > 1$ e $2k > 2$. Assim:

$$(k+1)^2 > 3k + 2k + 1 > 3k + 2 + 1 = 3k + 3.$$

Logo,
$$(k+1)^2 > 3(k+1).$$

Portanto, pelo P.I.F., $P(n)$ é válida para todo $n \geq 4$, ou seja, sempre vale:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 \Rightarrow n^2 > 3n.$$

$\square$

Prova de Falsidade de Proposição

Contra-Exemplo

Provar que uma proposição da forma:

$$\forall x \in D, P(x)$$

é falsa, basta provar que

$$\exists x \in D, \sim P(x)$$

é verdadeira, ou seja, basta encontrar $a \in D$ tal que

$$\sim P(a)$$

verdadeiro, ou equivalente, que $P(a)$ é falsa.

Def. (Contra-Exemplo): Um $a \in D$ é chamado de <u>Contra-Exemplo</u> para

$$\forall x \in D, P(x),$$

quando $P(a)$ falso.

Ex.: A prop.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n^2, \qquad (\star).$$

é falsa. De fato, para $n=2$ temos

$$2^2 = 2^2,$$

de modo que $n=2$ é um contra-exemplo para $(\star)$.

Ex.: Considere a afirmação:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n^2+n+41 \text{ é primo.}$$

A afirmação "n^2+n+41 é primo" pode ser verificada verdadeira até $n=39$, porém

$$40^2+40+41 = 40(40+1)+41$$

$$\Rightarrow \quad 40^2+40+41 = 40(40+1)+41$$
$$= 40\times 41+41$$
$$= (40+1)\,41$$
$$= 41\times 41.$$

Neste caso $40^2+40+41$ não é primo.

Falsidade de Afirmação Existencial

Provar que uma afirmação da forma

$$\exists x\in D,\ P(x)$$

é falsa equivale a provar que

$$\forall x\in D,\ \sim P(x)$$

é verdadeira.

Ex.: Prove que esta afirmação:

"Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+1=0$"

é falsa.

Para tanto, basta observar que

$$x^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad x^2+1>0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a prop.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2+1>0,$$

é verdadeira, o que garante a falsidade de

$$\exists x \in \mathbb{R}, \ x^2+1=0.$$