FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 23: 27/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 23: Operações com Conjuntos

Conjunto vazio

Para introduzir o conj. vazio, vamos considerar a sentença aberta:

$$P(x):\ x \neq x.$$

Observe que neste caso a prop

$$\forall x \in A,\ P(x)$$

é falsa para qualquer conj. A considerado.

Assim, dados conjuntos A e B, por especificação, passamos a ter:

$$\{x \in A : P(x)\} \quad \text{e} \quad \{x \in B : P(x)\}$$

<u>Teorema:</u> $\{x \in A : P(x)\} = \{x \in B : P(x)\}$.

Prova: Vamos provar que

$(\ast)$ $\{x \in A : P(x)\} \subset \{x \in B : P(x)\}$

$(\ast\ast)$ $\{x \in B : P(x)\} \subset \{x \in A : P(x)\}$.

Prova de $(\ast)$: Vamos usar o método da contradição. Imagine que

$$\{x \in A : P(x)\} \not\subset \{x \in B : P(x)\}.$$

Então, isto significa que

$\exists y,\ y \in \{x \in A : P(x)\}$ e $y \notin \{x \in B : P(x)\}$.

Mas assim, o fato de

$$y \in \{x \in A : P(x)\}$$

então implica $y \neq y$, que é uma prop. falsa (contradição). Portanto, temos garantido que vale a inclusão $(*)$.

Prova de $(**)$: É apenas repetir os passos do caso $(*)$ que obtemos a prova de $(**)$.

$\square$

<u>Def.</u> (Conjunto vazio): Chamamos de conjunto vazio o conjunto

$$\{x : x \neq x\}$$

e este é denotado por ϕ, ou seja,

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Obs.: 1) Note que o teorema anterior garante que o conjunto vazio é único, e independe do domínio da sentença aberta $P(x): x \neq x$.

2) Atentem para a diferença entre

$$\emptyset \text{ e } \{\emptyset\},$$

ou seja, $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Teorema: Dada A um conj., sempre $\emptyset \subset A$.

Prova: Note que se $\emptyset \not\subset A$, devemos ter então que

$$\exists z,\ \underbrace{z \in \emptyset} \text{ e } z \notin A;$$

o que significa que $z \in \emptyset$, ou seja, $z \neq z$, que é falso (contradição).

Portanto, sempre devemos ter $\emptyset \subset A$.

$\square$

Operações com Conjuntos

Def: Considere A e B conjuntos.

* A União de A e B é definida por

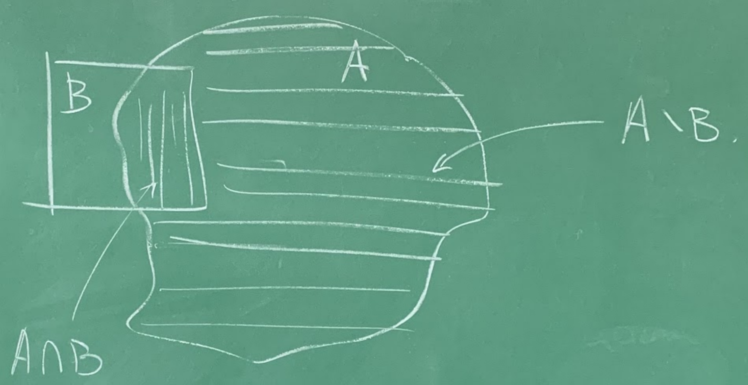
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

* A Interseção de A e B é definida por

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

* A Diferença entre A e B é definida por

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



<u>Ex.:</u> Considere os conj.

$A_1 = \{2, 5, 7, 8\}$, $A_2 = \{1, 3, 5\}$ e $A_3 = \{2, 4, 6, 8\}$

↳ $A_1 \cup A_3 = \{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

↳ $A_1 \cap A_2 = \{5\}$

↳ $A_1 \setminus A_3 = \{5, 7\}$

↳ $A_3 \setminus A_1 = \{4, 6\}$.

Obs.: Sempre valem:

→ $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$

→ $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$.

Teorema: Considere A, B e C conjuntos.

Valem sempre:

(a_1) $A \cup \emptyset = A$ (a_2) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

(b_1) $A \cup B = B \cup A$ (b_2) $A \cap B = B \cap A$

(c_1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (c_2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(d_1) $A \cup A = A$ (d_2) $A \cap A = A$

(e_1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ (e_2) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Prova de (C_1): Vamos provar então

$$(*)\quad \overbrace{(A\cup B)\cup C}^{E} \subset \overbrace{A\cup(B\cup C)}^{F}$$

$$(**)\quad A\cup(B\cup C) \subset (A\cup B)\cup C$$

Prova de $(*)$:

$$\forall x,\ x\in(A\cup B)\cup C \Rightarrow [x\in(A\cup B) \text{ ou } x\in C]$$

$$\Rightarrow [(x\in A \text{ ou } x\in B) \text{ ou } x\in C]$$

$$\Rightarrow [x\in A \text{ ou } (x\in B \text{ ou } x\in C)]$$

$$\Rightarrow [x\in A \text{ ou } x\in(B\cup C)]$$

$$\Rightarrow [x\in A\cup(B\cup C)]$$

Conclusão: temos

$$\forall x,\ x\in(A\cup B)\cup C \Rightarrow [x\in A\cup(B\cup C)].$$

Portanto, temos garantido a inclusão $(*)$.

Prova de (**):

$$\forall y,\ y \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow [y \in A \text{ ou } y \in (B \cup C)]$$

$$\Rightarrow [y \in A \text{ ou } (y \in B \text{ ou } y \in C)]$$

$$\Rightarrow [(y \in A \text{ ou } y \in B) \text{ ou } y \in C]$$

$$\Rightarrow [y \in (A \cup B) \text{ ou } y \in C]$$

$$\Rightarrow [y \in (A \cup B) \cup C]$$

Conclusão: vale então

$$\forall y,\ y \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow [y \in (A \cup B) \cup C]$$

e, portanto, temos garantida a inclusão (**).

Logo, temos provado a igualdade dos conjuntos. □

Teorema: Considere A, B e C conjuntos.

São válidos:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Prova de (a):

$$\forall z,\ z \in A \cap (B \cup C) \iff [z \in A \text{ e } z \in (B \cup C)]$$

$$\iff [(z \in A \text{ e } z \in B) \text{ ou } (z \in A \text{ e } z \in C)]$$

$$\iff [(z \in A \cap B) \text{ ou } (z \in A \cap C)]$$

$$\iff [z \in A \cap B \text{ ou } z \in A \cap C]$$

$$\iff z \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Conclusão: Vale a prop

$$\forall z,\ z \in A \cap (B \cup C) \iff z \in (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

de modo que temos a igualdade garantida do item (a). $\square$