UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMA

DISCIPLINA: Fundamentos Elementares da Matemática
TURMAS: 01 e 02 PERÍODO: 2022-1
PROFESSOR: J. Anderson Valença Cardoso DATA: 03/10/2022

Lista de Exercícios 3

1. Escreva uma prova para cada uma das afirmações a seguir (reescreva as afirmações, quando necessário, para facilitar o entendimento):

   (a) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x^4 + y^6 = 0$, então $x = 0$ e $y = 0$.

   (b) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $(n+1)^2 - 1$ é par, então n é par.

   (c) Seja $m, n \in \mathbb{Z}$. Se mn é ímpar, então $n^2 + m^2$ é par.

   (d) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se x é racional e y é irracional, então xy é irracional.

   (e) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se a não divide bc, então a não divide b.

   (f) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

   (g) Sejam $a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

   (h) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

   (i) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

   (j) Prove que $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.

   (k) Prove que se $n \in \mathbb{Z}$, então $n^2 + 3n + 5$ é ímpar.

   (l) Prove que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ temos $|xy| = |x||y|$.

   (m) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, definimos

   $$\min\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } y \leq x \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \max\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y \\ y, & \text{se } y \geq x \end{cases}.$$

   i. Prove que

   $$\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2} \qquad \text{e} \qquad \max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2};$$

   ii. Prove que $\max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x + y$.

   (n) Prove que m e n são números inteiros pares (ambos) se, e somente se, mn é par.

   (o) Prove que m e n são números inteiros ímpares (ambos) se, e somente se, mn é ímpar.

   (p) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

   i. n é um número par;

   ii. $n - 1$ é um número ímpar;

   iii. n^2 é um número par.

   (q) Seja $n \in \mathbb{N}$. n é par se, e somente se, $7n + 4$ é par.

   (r) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que se $a \neq 0$ então existe uma única solução para a equação na variável x: $ax + b = c$.

(s) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que se a e b são ímpares, então existe um único inteiro c tal que $|a-c| = |b-c|$.

2. Prove que cada uma das afirmações a seguir são válidas para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (b) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{(n+1)}$;

   (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Prove as seguintes afirmações:

   (a) $2^n > n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 5$;

   (b) $1 + 2n \leq 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

   (c) $1 + 3n < n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$;

   (d) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$;.

4. Encontre uma fórmula para $1+4+7+\cdots+(3n-2)$, onde n é número natural, e então verifique sua fórmula pelo método de indução matemática.

5. Prove que não existe inteiro positivo m tal que $2m < m^2 < 3m$.

6. Prove que não existem inteiros m e n tais que $2m + 4n = 7$.

7. Prove que a igualdade $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ não vale para números reais $x > 0$ e $y > 0$.

8. Prove a validade ou falsidade das sequintes afirmações:

   (a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x > 0$;

   (b) $n^2 - n + 17$ é um número primo para todo n natural;

   (c) Existem um número racional x e um número irracional y tais que x^y é um número irracional.

   (d) Se x e y são números racionais, então x^y é um número racional.

Bons Estudos!