FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 14: 18/08/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 14: Método Direto de Prova

Método Direto

Considere que tenhamos uma implicação

$$H \Rightarrow T,$$

que desejamos garantir ser verdadeira.

Para isso, imagine que tenhamos prop.

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$$

de modo que as implicações

$$P_1 \Rightarrow P_2,\ P_2 \Rightarrow P_3,\ \dots,\ P_{k-1} \Rightarrow P_k$$

todos verdadeiros. Note que uma maneira de provar que $H \Rightarrow T$ é verdadeira, é garantir então que

$$H \Rightarrow P_1 \quad e \quad P_k \Rightarrow T,$$

de modo que se terá

$$H \Rightarrow P_1,\ P_1 \Rightarrow P_2,\ \ldots,\ P_{k-1} \Rightarrow P_k,\ P_k \Rightarrow T$$

Esta sequência de implicações é conhecida por Método Direto de Prova.

<u>Ex.</u>: Escrever uma prova para o seguinte:

<u>Teorema</u>: Se $m, n \in \mathbb{N}$, são pares, então $m+n$ é par.

Reescrevendo o teorema, pode ficar:

$$\text{“}\forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \underbrace{m \text{ e } n \text{ pares}}_{H} \Rightarrow \underbrace{m+n \text{ par}}_{T}\text{”}$$

Agora note que:

H_1: m é par

H_2: n é par

Q_1: $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

Q_2: $n = 2\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$

P_1: $m + n = \underbrace{2k + 2\ell}$

P_2: $m + n = 2\underbrace{(k + \ell)}_{t}$

P_3: $m + n = 2t$, $t = k + \ell \in \mathbb{N}$

T: $m + n$ é par.

Assim, perceba:

$$\left.\begin{array}{l}
\overbrace{H_1 \wedge H_2}^{H} \Rightarrow Q_1 \wedge Q_2 \\[1em]
Q_1 \wedge Q_2 \Rightarrow P_1 \\[1em]
P_1 \Rightarrow P_2 \\[1em]
P_2 \Rightarrow P_3 \\[1em]
P_3 \Rightarrow T
\end{array}\right\} H \Rightarrow T.$$

Veja que temos garantida a veracidade de $H \Rightarrow T$ e agora podemos "passar a limpo", escrevendo uma prova:

<u>Prova</u>: Suponha que m e n são pares. Por definição de número par, temos

$$m = 2k \quad e \quad n = 2l \quad , \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Então, somando as igualdades, temos

$$m+n = 2k+2l = 2(k+l).$$

Como $t = k+l \in \mathbb{N}$, temos

$$m+n = 2t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, $m+n$ é um número par.

Portanto, temos a implicação verdadeira.

$\square$

Técnica "Para frente – para trás"

É comum para provar uma implicação

$$H \Rightarrow T,$$

que seja necessário construir uma sequência

$$H \Rightarrow P_1, \; P_1 \Rightarrow P_2, \dots, P_{k-1} \Rightarrow P_k$$

e não se sabe se $P_k \overset{?}{\Rightarrow} T$. Nessa situação, Podemos buscar construir uma sequência

$$Q_1 \Rightarrow T,\ Q_2 \Rightarrow Q_1,\ \ldots,\ Q_m \Rightarrow Q_{m-1}.$$

Note assim que, se

$$P_k \Rightarrow Q_m,$$

então:

$$H \Rightarrow P_1,\ P_1 \Rightarrow P_2,\ \ldots,\ P_{k-1} \Rightarrow P_k,$$

$$P_k \Rightarrow Q_m,$$

$$Q_m \Rightarrow Q_{m-1},\ \ldots,\ Q_2 \Rightarrow Q_1,\ Q_1 \Rightarrow T.$$

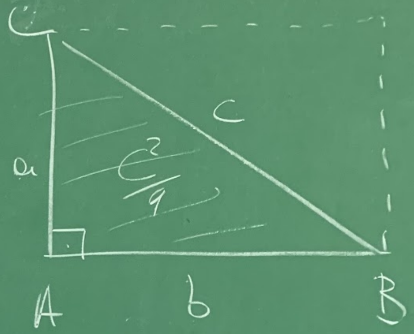
<u>Conclusão</u>: neste caso, garantimos a implicação

$$H \Rightarrow T.$$

Ex.: Prove que:

"Se um triângulo <u>retângulo</u> ABC, com lados a e b e hipotenusa c, tem <u>área</u> igual a $\frac{c^2}{4}$, então ABC é isósceles."

Dedução lógica:



Hipóteses

H_1: ABC é retângulo

H_2: ABC tem área igual a $\frac{c^2}{4}$

Tese:

T: ABC é isósceles.

Note que precisamos provar que

$$H_1 \wedge H_2 \Rightarrow T$$

Para tanto, usando a fórmula de área,

temos a prop.:

$P_1: \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2}{4}$

$P_2: a^2 + b^2 = c^2$ (Teo. Pitágoras)

$P_3: 2ab = a^2 + b^2$

Partindo agora de T, temos

$Q_1: a = b$, $Q_1 \Rightarrow T$.

$Q_2: a - b = 0$, $Q_2 \Rightarrow Q_1$

$Q_3: (a-b)^2 = 0$, $Q_3 \Rightarrow Q_2$

$Q_4: a^2 - 2ab + b^2 = 0$

Assim, temos

$$\overbrace{H_1 \wedge H_2}^{H} \Rightarrow P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3$$

$$P_3 \Rightarrow Q_4$$

$$Q_4 \Rightarrow Q_3 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow Q_1 \Rightarrow T.$$

Conclusão: $H_1 \wedge H_2 \Rightarrow T.$

Agora podemos escrever uma prova:

Prova: Pelas hipóteses e pela fórmula de área de um triângulo retâng.:

temos que

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{c^2}{4}$$

Também por ser um triâng. retângulo,

pelo Teorema de Pitágoras, vale

$$a^2+b^2=c^2.$$

Juntando as igualdades, obtemos

$$2ab=a^2+b^2,$$

ou seja,

$$a^2-2ab+b^2=0.$$

Assim, $(a-b)^2=0.$

Então, $a=b$. Portanto, temos ABC um triângulo isósceles. $\square$

Exercício: Estudar mais exemplos no material.