FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 17: 01/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 17: Alguns tipos de afirmação.

Hipóteses Conjuntivas

É comum afirmações do tipo:

$$H_1 \wedge H_2 \Rightarrow T.$$

Para provar implicações desse tipo, usa-se em geral os métodos direto e da contradição.

Ex.: Prove que

"$\forall m, n \in \mathbb{N}$, se m e n são ímpares, então $m \cdot n$ é ímpar."

Note que:

H_1: m é ímpar

H_2: n é ímpar

e T: $m \cdot n$ é ímpar.

e temos:

$$(m \text{ é ímpar}) \wedge (n \text{ é ímpar}) \Longrightarrow m \cdot n \text{ é ímpar.}$$

Imaginando que já fizemos os devidos rascunhos, podemos escrever a prova:

Prova: Suponha que m e n são ímpares. Então, temos:

$$m = 2k+1 \quad \text{e} \quad n = 2l+1,$$

onde $k, l \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (2k+1)(2l+1) \\ &= 2k \cdot 2l + 2k + 2l + 1 \\ &= 2\underbrace{(k \cdot 2 \cdot l + k + l)}_{s} + 1 \\ &= 2s+1, \end{aligned}$$

onde $s = k \cdot 2 \cdot l + k + l \in \mathbb{N}$. Logo,

$$m \cdot n = 2s + 1,$$

onde $s \in \mathbb{N}$, ou seja, $m \cdot n$ é ímpar. ∎

Tese Disjuntiva

É também muito comum, afirmações na forma:

$$H \Rightarrow (T_1 \vee T_2).$$

Provar afirmações desta forma, geralmente o método direto não produzirá muito êxito. O mais comum é usar-se os métodos da contrapositiva ou contradição. Neste caso, deve-se provar que

$$\underbrace{(\sim T_1) \wedge (\sim T_2)}_{\sim (T_1 \vee T_2)} \Rightarrow \sim H.$$

Ex: Prove que:

"$\forall a, b, n \in \mathbb{N},\ n = a \cdot b \Rightarrow (a \leq \sqrt{n} \text{ ou } b \leq \sqrt{n})$"

Conforme destacamos, provar isso é equivalente (pela contrapositiva) a provar que:

$$\sim (a \leq \sqrt{n} \text{ ou } b \leq \sqrt{n}) \Rightarrow \sim (n = a \cdot b)$$

Ou seja,

$$(a > \sqrt{n}) \text{ e } (b > \sqrt{n}) \Rightarrow n \neq a \cdot b.$$

Sendo assim, observe que

$$\left.\begin{array}{l} a > \sqrt{n} \\ b > \sqrt{n} \end{array}\right\} \Rightarrow a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = (\sqrt{n})^2 = n$$

Ou seja, $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n} \Rightarrow ab > n \Rightarrow a \cdot b \neq n$

Portanto, pela contrapositiva, é válida a afirmação $\blacksquare$

Hipóteses Disjuntivas

É comum na matemática afirmações do tipo:

$$H_1 \vee H_2 \Longrightarrow T.$$

$$\vee H_3$$

Este tipo de implicação tem uma forma equivalente:

$$\left[H_1 \vee H_2 \Longrightarrow T\right] \equiv \left[(H_1 \Rightarrow T) \wedge (H_2 \Rightarrow T)\right]$$

Note que esta equivalência nos diz então que precisamos provar que

$$H_1 \Rightarrow T \quad \text{e} \quad H_2 \Rightarrow T.$$

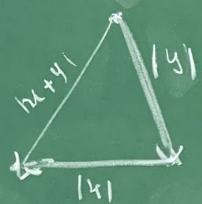
Este tipo de prova é chamada de Prova por casos.

Ex.: Prove o teorema:

Teorema (Desigualdade Triangular):

Se $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$



Antes de escrever a prova, precisamos dos rascunhos necessários. Observemos que:

$$|z| = z \quad , \text{ se } z \geq 0$$

$$|z| = -z \quad , \text{ se } z < 0 \qquad |-2| = -(-2)$$

Além disso, note que temos 3 casos para x e y:

1º caso: $x \geq 0$ e $y \geq 0$ $\quad H_1$

2º caso: $x > 0$ e $y < 0$ $\quad H_2$

3º caso: $x < 0$ e $y < 0$ $\quad H_3$

Note que temos então um teorema da forma

$$H_1 \vee H_2 \vee H_3 \Rightarrow T.$$

Neste caso faremos uma prova por casos:

$$H_1 \Rightarrow T, \quad H_2 \Rightarrow T \text{ e } H_3 \Rightarrow T.$$

Vamos agora escrever a prova:

Prova: Pela forma do Teorema, faremos uma prova por casos:

Caso 1: $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Caso 2: $x > 0$ e $y < 0$

caso 3: $x < 0$ e $y < 0$.

Prova do Caso 1: neste caso temos:

$$|x| = x \qquad\qquad x + y \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = y \qquad\qquad |x+y| = x+y$$

Então:

$$|x+y| = x+y = |x| + |y|$$

$$\hookrightarrow \ |x+y| = |x| + |y|$$

Neste caso, vale então a desigualdade.

Prova do Caso 2: neste caso, vale:

$|x| = x$ e $|y| = -y$.

Aqui vamos considerar 2 situações:

$$x+y \geq 0 \quad \text{e} \quad x+y<0.$$

Na situação $\underline{x+y \geq 0}$, temos:

$$|x+y| = x+y = |x| + y \quad \text{e} \quad y<0<-y=|y|$$

↳ $|x+y| = |x|+y < |x|+|y|$,

e assim vale a desigualdade.

Na situação $\underline{x+y<0}$, temos:

$$|x+y| = -(x+y) = -x-y = -x+|y|$$

e $-x<0<x=|x|$

↳ $|x+y| = -x+|y| < |x|+|y|$

Assim, novamente vale a desigualdade e no caso 2 temos provado a validade.

Prova do <u>caso 3</u>: neste caso,

$$|x| = -x \quad , \quad |y| = -y$$

$$x + y < 0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y)$$

Então:

$$|x+y| = -x - y = |x| + |y|,$$

e novamente vale a desigualdade.

<u>Conclusão</u>: Desde que a desigualdade vale nos 3 casos, a mesma vale sempre ∎