UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Notas de Fundamentos Elementares da Matemática

Material para a Avaliação 1

Prof. José Anderson V. Cardoso

SÃO CRISTÓVÃO-SE

Sumário

Capítulo 1

Noções de Lógica e Conjuntos

Não seria exagero afirmar que praticamente toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos, sendo certamente a noção de conjunto uma das mais fundamentais da matemática. A partir dela, praticamente todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Heurística e intuitivamente falando, ela é também uma das ideias mais simples da matemática.

1.1 Conceitos Introdutórios

O desenvolvimento de uma teoria matemática geralmente se sucede com definições fazendo uso de termos específicos, os quais foram definidos usando outros termos específicos, e assim sucessivamente. Este processo iterativo termina geralmente em *palavras* (ou *conjunto de palavras*) que não são definidas, isto é, que são tomadas como representativas de *conceitos primitivos*. Na geometria básica, por exemplo, quando apresentamos o Teorema de Pitágoras, faz-se necessário ter a definição de *triângulo retângulo*, sendo que a definição de triângulo retângulo requer a noção de *ângulo*, e este por sua vez requer o conceito de *Reta*. Claro que um aluno mais questionador se perguntará: e qual a definição de *Reta*? Admitamos, num primeiro momento, que se considere *Reta* como sendo "um *conjunto* de *pontos*". Inevitavelmente surgiria então uma nova pergunta: e quais as definições de *conjunto* e *ponto*? Um conjunto significa uma *coleção*? E *coleção*, o que significa? Um *conjunto*? Veja que seguir nesta discussão, grosso modo, equivale a discutir se "*quem nasceu primeiro foi o ovo ou a galinha*". Portanto, para evitar discussões vazias, é consenso nos dias atuais que na construção de uma teoria considera-se em princípio os chamados *conceitos primitivos*.

Para poder empregar os *conceitos primitivos* adequadamente é necessário dispor de um conjunto de princípios ou regras que disciplinem sua utilização e estabeleçam suas propriedades. Tais princípios dá-se o nome de *axiomas* ou *postulados*. Assim, como os conceitos primitvos são objetos que não se definem, os axiomas são afirmações que não se demonstram.

Inicamos nosso estudo neste texto através do entendimento daqueles que podem ser considerados como conceitos mais fundamentais e importantes na matemática dos dias atuais: *conceito primitivo*, *axioma* e *definição*.

1.1.1 Conceitos Primitivos

Um ***Conceito Primitivo*** é um conceito adotado e não-definido.[1]

Exemplo 1.1.1. *Na Geometria Euclidiana os conceitos primitivos considerados atualmente são, dentre outros:*

Conceitos Primitivos de Euclides:

- *Ponto*
- *Reta*
- *Plano*

É bem verdade que na obra original de Euclides ele apresenta definições para Ponto, Reta *e* Plano *e tantos outros "objetos". Euclides escreveu em sua obra "Elementos de Geometria" (cerca de 300 a. C.), por exemplo*[2]*:*

- Ponto *é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.*
- Reta (Linha) *é o que tem comprimento sem largura.*
- Plano (Superfície Plana) *é aquela, sobre a qual assenta toda uma tinha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.*

É notável a falta de precisão em tais "definições", e ficou ainda mais evidente quando David Hilbert, em sua obra "Foundations of Geometry" (1899)[3]*, construiu toda a Geometria Euclidiana considerando apenas os "objetos" (conceitos primitivos) Ponto, Reta e Plano. Nos dias atuais considera-se que o desejo de Euclides com as "definições" era fornecer entendimentos intuitivos dos objetos ao leitor.*

Exemplo 1.1.2. *Na Teoria de Conjuntos os conceitos primitivos considerados são, dentre outros:*

[1] Na literatura é comum também o uso de *Termo Primitivo* ou *Objeto Primitivo*, etc, como sinônimos de Conceito Primitivo

[2] Disponível em http://livros01.livrosgratis.com.br/be00001a.pdf (acessado em 17/08/2021)

[3] Disponível em https://math.berkeley.edu/ wodzicki/160/Hilbert.pdf (acessado em 17/08/2021)

Conceiptos Primitivos:

- ➢ *Conjunto*
- ➢ *Elemento*
- ➢ *Pertinência*

Merece destaque o fato que a adoção desses termos como conceitos primitivos tem sua origem com os trabalhos Georg Cantor (1845-1918) mas se consolida apenas a partir da metade do século XX, com destaque para os trabalhos de Ernest Zermelo (1871-1953), Adolf Fraenkel (1891-1965), dentre outros.

Exemplo 1.1.3. *Estamos tão familiarizados com os Números Naturais nos dias atuais que atribuímos a eles uma simplicidade que chega a esconder toda uma saga que se confunde com a evolução civilizatória da humanidade, conforme apontam os primeiros registros de civilização. Tentativas de se dar um tratamento lógico-dedutivo aos Números Naturais, conforme Euclides deu à Geometria, são registradas desde o século XIII com o matemático e capelão do Papa Urbano IV, Giovanni Campano (1220-1296). Muitas tentativas foram feitas por vários matemáticos, até que em 1891 o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) conseguiu formalizar e provar com argumentos lógico-dedutivos o que se conhencia dos Números Naturais, valendo-se dos seguintes conceitos primitivos:*

Conceitos Primitivos de Peano:

- ➢ *Zero (que é denotado por* 0*)*
- ➢ *Número Natural*
- ➢ *Sucessor*

Fato é que tudo que se conhece nos dias atuais sobre Números Naturais prova-se usando os três conceitos primitivos de Peano.

Exemplo 1.1.4. *A estruturação de teorias baseadas em conceitos primitivos não é uma exclusividade da matemática. Na Mecânica Clássica, por exemplo, estabelecida pelo Físico-matemático britânico Isaac Newton, são adotados conceitos (grandezas) primitivos como:*

Conceitos Primitivos na Mecânica:

- ➢ *Tempo*
- ➢ *Massa*
- ➢ *Distância*

1.1.2 Axiomas

Estabelecidos os conceitos primitivos para uma determinada teoria, o passo seguinte é estabelecer quais afirmações sobre os conceitos primitivos deve-se acreditar (como verdade). Tais afirmações são chamadas de *Axiomas* ou *Postulados*:

Um ***Axioma*** é uma afirmação simples sobre conceitos primitivos que é aceita como verdadeira.

Exemplo 1.1.5. *Na construção da Geometria Euclidiana elaborada por David Hilbert em 1899, por exemplo, foram adotados os seguintes axiomas sobre os conceitos primitivos adotados:*

Axiomas de Euclides:

Axioma I. *Dois pontos distintos sempre determinam completamente uma reta.*

Axioma III. *Num plano, pode-se traçar através de qualquer ponto, situado fora de uma reta dada, uma única reta que não intercepta a reta dada. A reta traçada é chamada de paralela à reta dada através do ponto.*

Exemplo 1.1.6. *Na teoria de conjuntos a Igualdade e a União de conjuntos são adotadas como axiomas:*

Axioma de Extensão: *Dois conjuntos são iguais quando eles possuem os mesmos elementos.*

Axioma da União: *Dada qualquer coleção de conjuntos, existe um conjunto formado por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos da coleção.*

Exemplo 1.1.7. *Baseado em longas reflexões que se deram através de muitos séculos sobre os números naturais e sua construção, à medida que o matemático Giuseppe Peano considerou os conceitos (ou termos) primitivos do Exemplo 1.1.3, ele formulou os seguintes axiomas, hoje conhecidos como Axiomas de Peano:*

Axiomas de Peano:

P_1) *0 é número natural;*

P_2) *Cada número natural tem um único sucessor que também é número natural;*

P_3) *0 não é sucessor de nenhum número natural;*

P_4) *Dois números naturais que possuem sucessores iguais devem ser (eles próprios) iguais;*

P_5) *Se S é um conjunto de números naturais que contém 0 e contém o sucessor de cada um de seus elementos, então S é o conjunto de todos os números naturais.*

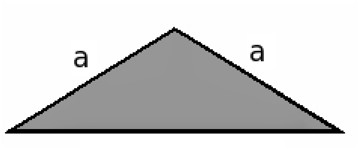
Observação 1.1.8. *Precisa-se ressaltar que os Conceitos Primitivos e os Axiomas não se firmam por opiniões isoladas pessoais. Eles são frutos da experiência, da observação e de um certo consenso coletivo.*

1.1.3 Definições Matemáticas

Uma ***Definição Matemática*** é uma convenção que consiste em usar um "nome" para designar um objeto mediante determinadas propriedades que o caracterizem e o identifiquem plenamente.

Exemplo 1.1.9. *1. Na Geometria Euclidiana a definição de Triângulo Isósceles é:*

Definição: *Um triângulo é dito **Isósceles** quando possui dois lados de mesmo comprimento.*



Triângulo Isósceles

2. A definição de conjunto unitário na teoria de conjuntos é:

Definição: *Dizemos que um conjunto é **Unitário** quando ele possui um único elemento.*

Ao longo do texto serão tratados vários outros exemplos de conceitos primitivos, axiomas e definições.

1.2 Conceitos sobre Conjuntos

Nossos propósitos aqui não é desenvolver uma teoria de conjuntos de maneira axiomática aos moldes de Ernest Zermelo (1871-1953), onde, conforme destacado no Exemplo 1.1.2, *Conjunto* é um conceito primitivo. A abordagem aqui adotada será intuitiva, e uma forma mais próxima de conceituar *Conjunto* através de uma definição foi dada por Georg Cantor (1845-1918):

> Um *Conjunto* é qualquer coleção, dentro de um todo de objetos definidos e distinguíveis, chamados *Elementos*, de nossa intuição ou pensamento.

Embora seja importante destacar que é possível admiti-la apenas como uma definição intuitiva, não rigorosa, devido ao *Paradoxo* de Bertrand Russel (1872-1970) (falaremos sobre o *Paradoxo de Russel* mais à frente).

Exemplo 1.2.1. *Exemplos de conjuntos:*

a) O conjunto das vogais: a, e, i, o e u;

b) O conjunto de todas as cadeiras de uma sala de aula;

c) O conjunto de todos os estudantes Sergipanos da UFS;

a) O conjunto das letras do Alfabeto.

Representação para Conjuntos

Comumente representamos os conjuntos através de letras maiúsculas,

$$A, B, C, \ldots$$

e os elementos, que constituem os conjuntos, por letras minúsculas

$$a, b, c, \ldots.$$

Em casos específicos como no item a) do exemplo anterior, podemos escrever

$$V = \{a, e, i, o, u\},$$

onde V representa o conjunto das vogais. Mais geralmente, quando for possível listar os elementos de um conjunto como, por exemplo, das letras do alfabeto:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z;$$

o representamos por

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\},$$

ou de maneira ainda mais útil, por

$$A = \{a, b, c, \ldots, z\},$$

onde o símbolo "..." (reticência) denota a omissão dos elementos (letras)

$$d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y.$$

Exemplo 1.2.2. *Naturalmente podemos ter conjuntos que possuem elementos que também são conjuntos. Por exemplo,*

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\}.$$

Observe que, da mesma forma que i é elemento de D, temos que $\{e, o, u\}$ é também um elemento de D. Note ainda que u não é elemento de D, assim como $\{a, i\}$ também não é elemento de D.

Relação de Pertinência

Um dos conceitos mais importantes no estudo dos conjuntos é o conceito de *Pertinência.*

Quando um "objeto" a é elemento do conjunto A, dizemos que a pertence a A e denotamos tal conceito por

$$a \in A.$$

Caso contrário, denota-se

$$a \notin A$$

e diz-se que *a não pertence* ao conjunto A. [a]

[a] A notação "$a \in A$" foi primeiro introduzida matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), ver [2, Pág. 16].

Exemplo 1.2.3. *Exemplos de pertinências:*

a) Como V denota o conjunto das vogais, $V = \{a,\ e,\ i,\ o,\ u\}$, temos:

$$a \in V, \quad e \in V, \quad i \in V, \quad o \in V, \quad u \in V;$$

já

$$b \notin V \quad e \quad t \notin V.$$

b) Do Exemplo 1.2.2 onde

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\}$$

temos:

$$a \in D, \quad i \in D, \quad \{e, o, u\} \in D, \quad \{o, \{a, i\}\} \in D, \quad e \in D;$$

porém

$$u \notin D \quad e \quad \{a, i\} \notin D.$$

Antes de seguir com nosso estudo é importante fazer a seguinte observação.

Observação 1.2.4.

Na matemática, uma coisa só é igual a si própria. Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos diferentes, usados para designar o mesmo objeto. Quando a e b representam objetos diferentes (distintos), escreve-se $a \neq b$. [a]

[a] O símbolo de igualdade "=", hoje amplamente popularizado, foi adotado inicialmente no século XVI pelo matemático inglês Robert Recorde (1510-1558) - veja mais detalhes em [8].

1.2.1 Números Naturais

Para melhor apresentar nosso estudo, os números naturais e suas propriedades são muito importantes e essenciais. Por esse motivo, o próximo exemplo traz um breve apanhado sobre números naturais, seus principais conceitos e propriedades.

Exemplo 1.2.5 (Números Naturais). *Objetivamente, podemos dizer que* ***Números*** *são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir. Provavelmente seja impossível se identificar uma origem para o surgimento da concepção de Número. Mas não é difícil aceitar que eles tenham surgidos com o homem começando a contar, talvez inicialmente através da ideia de correspondência biunívoca (por exemplo, relacionando dedos para indicar quantidade de membros da família). Nesse contexto é razoável aceitar que os primeiros números que tenham surgidos sejam os que hoje chamamos de* ***Números Naturais****. Sem dúvidas, o processo civilizatório nos faz conhecedores de números naturais e capazes de executar algumas de suas propriedades (soma, multiplicação, etc). Nossa pretensão é, naturalmente, se utilizando desse conhecimento comum, ir introduzindo um estudo mais formal (porém sem exageros) dos números naturais.*

Conforme já destacado nos Exemplos 1.1.3 e 1.1.7, decorridas longas reflexões que se deram através de muitos séculos, podemos estudar hoje tudo que se conhece sobre os Números Naturais através dos chamados Conceitos Primitivos e Axiomas de Peano. Adotaremos as seguintes notações:

- ➢ *Usamos a letra $\mathbb{N}$ para denotar o conjunto de todos os números naturais;*

- ➢ *Usamos a expressão $s(n)$ para representar o sucessor do número natural n;*

➢ O Axioma P_5), do Exemplo 1.1.7, é conhecido como Axioma (Princípio) da Indução Completa.

Fazendo uso dos Conceitos Primitivos e Axiomas de Peano, tratados nos Exemplos 1.1.3 e 1.1.7, temos a seguinte construção dos números naturais:

➢ $0 \in \mathbb{N}$ (exatamente o Axioma P_1)) e o chamamos de 'Número Zero' ou simplesmente 'Zero';

➢ $1 = s(0) \in \mathbb{N}$ (Axioma P_2), sucessor de 0) e o chamamos de 'Número Um' ou simplesmente 'Um'.

➢ $2 = s(1) = s(s(0)) \in \mathbb{N}$ (Axioma P_2), sucessor de 1) e o chamamos de 'Número Dois' ou simplesmente 'Dois'.

➢ $3 = s(2) = s(s(s(0))) \in \mathbb{N}$ (Axioma P_2), sucessor de 2) e o chamamos de 'Número Três' ou simplesmente 'três'.

➢ $4 = s(3) = s(s(s(s(1)))) \in \mathbb{N}$ (Axioma P_2), sucessor de 3) e o chamamos de 'Número Quatro' ou simplesmente 'Quatro'.

Seguindo esse raciocínio construímos os números naturais

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots, 997, 998, 999, 1000, 1001, \ldots, 100000000000000,$$

por exemplo. Observe que o número natural 100000000000000 não possui "nome", assim como "seus sucessores". Mas isso não tem a menor importância! O que realmente deve ser levado em consideração não são os "nomes" que damos a alguns números naturais, mas sim as suas propriedades.

Após a recorrência na construção de alguns números, surgem duas perguntas naturais:

➢ São todos os números naturais construídos distintos?

➢ Seguindo esse raciocínio indefinidamente consegue-se construir todos os números naturais de fato?

A resposta de ambas as perguntas é sim! Vamos aceitá-las até o momento que seja possível demonstrá-las. Realizada a construção, temos o que seja o conjunto de todos os Números Naturais, que vamos representar por:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\},}$$

onde o símbolo "..." representa a omissão de todos os demais números naturais. Também representamos por $\mathbb{N}^*$ todos os números naturais **exceto** o zero, ou seja,

$$\boxed{\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.}$$

Se valendo nesse primeiro momento do conhecimento (senso) comum, nos limitaremos agora a destacar aqui alguns conceitos e propriedades básicos (estes à frente serão formalizados).

Soma de Números Naturais *A soma de números naturais m e n é um número natural, representado por*

$$m + n,$$

ou seja, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, também $m + n \in \mathbb{N}$. Também é comum se dizer que $\mathbb{N}$ é fechado para a soma. É usual a palavra "Adição" como sinônima de "Soma". *Dados números naturais l, m e n, são válidas as propriedades da soma:*

Propriedades da Soma:

i) $(l + m) + n = l + (m + n)$;

ii) $m + n = n + m$;

iii) $m + 0 = m$.

As propriedades i) e ii) são ditas Associativa *e* Comutativa, *respectivamente. Por exemplo:*

$$(2 + 5) + 9 = 2 + (5 + 9), \qquad 3 + 11 = 11 + 3 \qquad e \qquad 4 + 0 = 4.$$

Com a soma estabelecida, o sucessor de um número natural m será então $m+1$, ou seja,

$$\boxed{s(m) = m + 1.} \tag{1.1}$$

Multiplicação de Números Naturais *A multiplicação de números naturais m e n é um número natural, que é representado por*

$$mn.$$

Para a representação da multiplicação também são usadas as notações $m \cdot n$ e $m \times n$, pois evita confusões a exemplo de $24 = 8$ quando $m = 2$ e $n = 4$. Neste caso, escrevemos $mn = 2 \times 4 = 2 \cdot 4$. Como no caso da soma, se dizer que $\mathbb{N}$ é fechado para a multiplicação, ou seja, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, também $mn \in \mathbb{N}$. Também é comum o uso da palavra "Produto" como sinônima de "Multiplicação". Entre números naturais l, m e n, são propriedades válidas:

Propriedades da Multiplicação:

i) $(lm)n = l(mn)$;

ii) $mn = nm$;

iii) $m \cdot 0 = 0$;

iv) $m \cdot 1 = m$;

v) $l(m+n) = lm + ln$.

A exemplo da soma, as propriedades i) e ii) da multiplicação são ditas Associativa *e* Comutativa*, respectivamente; enquanto a propriedade v) é chamada de* Distributiva*. Por exemplo:*

$$(2 \cdot 5) \cdot 9 = 2 \cdot (5 \cdot 9), \qquad 3 \cdot 11 = 11 \cdot 3 \quad e \quad 3(4+7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 7.$$

Relação de Ordem de Números Naturais *Vamos introduzir o conceito de ordem já usando os termos de definição matemática que tratamos na Seção 1.1.3.*

Definição 1.2.6 (Ordem de Números Naturais).

Dados números naturais m e n, dizemos que m é menor do que ou igual a *n, e representamos por $m \leq n$, quando n for igual a soma de m e outro número natural k, ou seja,*

$$n = m + k. \tag{1.2}$$

No caso de $m \leq n$ e $m \neq n$, dizemos que m é menor do que n, e representamos por $m < n$.

Também representamos $m \leq n$ por $n \geq m$, e neste caso dizemos que n é maior do que ou igual a *m. Analogamente, representamos também $m < n$ por $n > m$ e que dizemos que n* é maior do que *m. Por exemplo:*

- $8 \leq 8$, *pois* $8 = 8 + 0$;
- $1 < 7$, *pois* $7 = 1 + 6$;
- $12 \geq 5$, *pois* $12 = 5 + 7$;
- $9 > 3$, *pois* $9 = 3 + 6$.

De modo geral, dado $m \in \mathbb{N}$, por (1.1),

$$m < m + 1 = s(m).$$

Assim, podemos escrever (abusando da escrita, mas que se faz entender)

$$\boxed{0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < \cdots < m < m+1 < m+2 < \cdots.}$$

Propriedades básicas da relação de ordem são: dados números naturais l, m e n, vale:

Propriedades da Multiplicação:

i) $m \leq m$;

ii) $m \leq n$ *e* $n \leq m$ *é o mesmo que* $m = n$;

iii) $l \leq m$ *e* $m \leq n$ *garante* $l \leq n$;

iv) *sempre* $m \leq n$ *ou* $n \leq m$;

v) $m < n$ *garante* $m + 1 \leq n$.

As propriedades i), ii), iii) e iv) são chamadas respectivamente de Reflexiva, Antissimétrica, Transitiva *e* Ordem Total.

Potência de Números Naturais *Com a multiplicação estabelecida podemos introduzir o conceito de Potência de números naturais por recorrência também usando os termos de definição matemática como segue.*

Definição 1.2.7 (Potência de Números Naturais).

Dados números naturais m e n, com $m \neq 0$ e $n \geq 2$, definimos a $n-$ésima Potência *de m por*

$$0^1 = 0, \quad 0^n = 0 \quad m^0 = 1, \quad m^1 = m, \quad e \quad m^n = \underbrace{m \cdot m \cdots m}_{n \text{ vezes}}.$$

O caso 0^0 é não definido e chamado de Indeterminação Matemática. Por exemplo:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \qquad e \qquad 1^7 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Potências de números naturais têm duas principais propriedades que não podemos deixar de apresentar. Dados números naturais l, m e n, com $l \neq 0$, temos:

$$l^m \cdot l^n = l^{m+n} \qquad e \qquad (l^m)^n = l^{m \cdot n}. \tag{1.3}$$

Exemplo: $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$ *e* $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$.

Múltiplos e Divisores de Números Naturais

Definição 1.2.8 (Múltiplos e Divisores).

Dados números naturais m e n, dizemos que m é Múltiplo *de n quando n for igual a multiplicação de m e outro número natural k, ou seja,*

$$n = mk. \tag{1.4}$$

Quando n é múltiplo de m, dizemos que m Divide (ou é divisor de) n *e representamos essa propriedade por $m|n$.*

Por exemplo, $2|4$ e $9|72$ pois $4 = 2 \cdot 2$ e $72 = 9 \cdot 8$. Note que dado n natural, sempre $1|n$, pois $n = 1 \cdot n$. Da mesma forma, $0|0$, pois $0 = 0 \cdot 1$. Dizemos que um número natural m é Par *quando m é múltiplo de 2.*

Números Pares, Ímpar e Primos

- *Dizemos que um número natural m é* Par *quando m é múltiplo de 2. Nesse caso, o conjunto de números pares é representado por:*

$$\{0, 2, 4, 6, \ldots, 2i, \ldots\},$$

onde $i \in \mathbb{N}$.

- *Dizemos que um número natural n é* Ímpar *quando n não é par. O conjunto dos números ímpares é representado por:*

$$\{1, 3, 5, \ldots, 2j + 1, \ldots\},$$

com $j \in \mathbb{N}$.

- *Um número natural p é dito* Primo *quando seus únicos divisores são 1 e ele mesmo. O conjunto de números primos é representado por:*

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, \ldots\}.$$

Retornando a como apresentar conjuntos, temos o próximo exemplo.

Exemplo 1.2.9. *Considere que $n \in \mathbb{N}$ seja o número de alunos da UFS e N_n o conjunto dos n primeiros números, exceto 0, construídos no Exemplo 1.2.5 e que podemos denotar por*

$$N_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Então o conjunto de todos os alunos da UFS pode ser representado por

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Temos naturalmente:

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ \ldots,\ a_{n-1} \in A \text{ e } a_n \in A.$$

Se g representa o ex-presidente Getúlio Vargas, então $g \notin A$.

Notação 1.2.10. *Podemos denotar*

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ \ldots,\ a_{n-1} \in A \text{ e } a_n \in A,$$

simplesmente por:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Igualdade de Conjuntos[4]

Dizemos que dois conjuntos A e B são *iguais* quando possuem os mesmos elementos e denotamos

$$A = B. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.2.11. *Sendo* $A = \{a, b, c, d\}$ *e* $B = \{d, b, b, b, c, c, a\}$*, temos:*

$$A = \{a, b, c, d\} = \{d, b, b, b, c, c, a\} = B.$$

A ordem em que aparecem os elementos no conjunto não tem importância. Assim, usando o Exemplo 1.2.11, temos que o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ é o mesmo que $B = \{d, c, c, b, b, b, a\}$. Além disso, como os elementos de um conjunto são denotados a princípio como "distintos", evitamos denotar $\{d, b, b, b, c, c, a\}$ e geralmente denotamos $\{a, b, c, d\}$.

Observação 1.2.12. *Neste ponto é útil fazer as seguintes observações:*

a) *Quando escrevemos*

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\},$$

estamos admitindo a princípio que os elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *são distintos. Com isso, evitamos escrever, por exemplo,* $\{a, a, i, o\}$*; e, portanto, nesse caso devemos escrever* $\{a, i, o\}$*, como anteriormente destacado.*

b) *Se* a *é elemento de um conjunto, note que* a *e* $\{a\}$ *são "objetos" distintos pois, enquanto* a *é um elemento,* $\{a\}$ *é um conjunto que possui* a *como elemento. Da mesma forma, temos que* a*,* $\{a\}$ *e* $\{\{a\}\}$ *são todos "objetos" distintos, pois* $\{a\}$ *apesar de ser um conjunto, ele é um elemento de* $\{\{a\}\}$*.*

Notação 1.2.13. *Se os conjuntos* A *e* B *não são iguais, dizemos que eles são* diferentes *e denotamos por*

$$A \neq B.$$

[4] Na teoria axiomática de conjuntos, esse conceito é conhecido como Axioma da Extensão

Exemplo 1.2.14. *Considere as vogais* a, e, i, o *e* u. *Note que os conjuntos*

$$A = \{\text{e, i}\} \qquad e \qquad B = \{\text{e, i, u}\}$$

não são iguais. Assim, $A \neq B$.

Observação 1.2.15. *Note que o conjunto* A *ser diferente do conjunto* B *significa que há algum elemento em* A *que é diferente de todos os elementos de* B*, ou que existe algum elemento em* B *que é diferente de todos os elementos de* A*. Veja que no caso do Exemplo 1.2.14, a vogal* u *do conjunto* B *é diferente de todas as vogais do conjunto* A.

Definição 1.2.16 (Subconjunto). [5]

Dizemos que um conjunto A *é* Subconjunto *de um conjunto* B*, e denotamos por* $A \subset B$ *(ou* $B \supset A$*), quando todos os elementos de* A *são também elementos de* B.

Exemplo 1.2.17.

a) *O conjunto das vogais* $V = \{a, e, i, o, u\}$ *é um subconjunto do conjunto das letras do alfabeto* $A = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$*, pois todo elemento de* V *é também elemento de* A*. Logo,* $V \subset A$ *ou* $A \supset V$.

b) *Do exemplo 1.2.3 item b), onde*

$$D = \{a, i, o, \{e, o, u\}, \{o, \{a, i\}\}, e\},$$

podemos destacar alguns subconjuntos, tais como:

$$\{a\} \subset D, \quad \{a,i\} \subset D, \quad \{\{e, o, u\}\} \subset D, \quad \{\{o, \{a, i\}\}, o, e\} \subset D.$$

Note que $\{a, e, i, o, u\} \not\subset D$ *pois* $u \notin D$.

Observação 1.2.18. *O conjunto* A *não ser subconjunto de* B *significa que há algum elemento em* A *que não é elemento de* B*. Note que no caso do item b) do Exemplo 1.2.17, a vogal* $u \in \{a, e, i, o, u\}$ *mas* $u \notin D$.

[5] Quando $A \subset B$ dizemos também que "A está contido em B". A notação $B \supset A$ geralmente é lida como "B contém A". Quando A não é subconjunto de B, dizemos que "A não está contido em B" ou que "B não contém A" e representamos por $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$, respectivamente.

1.2.2 Produto Cartesiano de Conjuntos

O Produto Cartesiano é uma das mais importantes construções da teoria de conjuntos. Para nossos propósitos é suficiente introduzi-lo como segue:

> *para cada dois 'objetos' x e y fazemos corresponder um novo 'objeto' (x, y), chamado de* Par Ordenado,

devendo ser cumprida a condição:

Dois pares ordenados (x, y) e (a, b) são iguais quando, e somente quando, temos

$$x = a \quad \text{e} \quad y = b. \tag{1.6}$$

É importante destacar alguns pontos:

- A condição (1.6) é geralmente conhecida como Condição Fundamental de Par Ordenado.
- O primeiro (segundo) 'objeto' do par ordenado é chamado de *Primeira (Segunda) Coordenada.*
- É necessário não confundir o par ordenado (a, b) com o conjunto $\{a, b\}$. O adjetivo "ordenado" enfatiza aqui que a ordem na qual cada elemento a e b aparecem entre os parênteses é essencial.

Observação 1.2.19. *A forma precisa de definir um par ordenado foge do contexto de interesse neste momento. A saber, define-se um par ordenado por:*

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

(ver, por exemplo, [4, Seção 6]). Essa definição é suficiente para garantir a propriedade fundamental de par ordenado (1.6)*.*

Exemplo 1.2.20. *Considerando o conjunto das vogais, por exemplo, temos que*

$$(a, a) \qquad e \qquad (i, a)$$

são pares ordenados distintos. Da mesma forma, os pares ordenados

$$(a, o) \qquad e \qquad (o, a)$$

são também pares ordenados distintos.

Definição 1.2.21 (Produto Cartesiano).

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. O conjunto de todos os pares ordenados (x_1, x_2), com $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$, é chamado o Produto Cartesiano *de A e B, e é denotado por $A \times B$.*

Exemplo 1.2.22. *Dados os conjuntos* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{1, 2\}$*, os produtos cartesianos* $A \times B$ *e* $B \times A$ *são:*

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

e

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Note que, devido à (1.6)*, os conjuntos* $A \times B$ *e* $B \times A$ *são conjuntos distintos (diferentes).*

Observação 1.2.23 (Ênupla Ordenada[6]).

O conceito de par ordenado pode ser generalizado para tripla ordenada (x_1, x_2, x_3)*, quádrupla ordenada* (x_1, x_2, x_3, x_4)*, e, mais geralmente, ênupla ordenada*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Com isso, temos produtos cartesianos triplos $A_1 \times A_2 \times A_3$*, quádruplos* $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$ *e ênuplos*

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

1.3 Proposições e Sentenças Abertas

Definição 1.3.1 (Proposição[7]).

Chama-se Proposição *todo conjunto de palavras ou símbolos que constitui uma afirmação que deve ser verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva.*[a]

[a] Nos referimos à veracidade ou falsidade de uma proposição por *Valor Lógico* da mesma.

Quando uma proposição é verdadeira dizemos que ela tem valor lógico *Verdade*, ou abreviadamente, que ela tem valor lógico V. No caso de uma proposição falsa, dizemos que ela tem valor lógico *Falso*, ou abreviadamente, que ela tem valor lógico F.

Notação 1.3.2. *As proposições serão geralmente denotadas por letras maiúsculas*

$$P, Q, R, S, \ldots.$$

Quando duas proposições P *e* Q *possuírem o mesmo valor lógico, representaremos tal fato por*

$$P \equiv Q.$$

[6] Por exemplo, no caso de tripla ordenada a definição precisa é $(x, y, z) = \{x, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$, que é suficiente para garantir uma propriedade análoga à (1.6).

[7] Na literatura é também muito comum a palavra *Sentença* como sinônima de Proposição.

Exemplo 1.3.3. *Exemplos de proposições:*

P_1 : *O ex-presidente Getúlio Vargas é aluno da UFS.*

Proposição falsa.

P_2 : $1 = 2$.

Proposição falsa. (*Note que no Exemplo 1.2.5 aceitamos que os números* 1 *e* 2 *são diferentes* (*distintos*).)

P_3 : *A letra "a" é uma vogal.*

Proposição verdadeira.

P_4 : $31234567893 + 212345678932114$ *é um número primo (Exemplo 1.2.5).*

Observe que mesmo não sabendo, ao menos de imediato, que a afirmação é verdadeira ou falsa, sabemos que ela é uma proposição, pois a soma é um número primo ou não.

Observação 1.3.4. *Deve-se notar que para se ter uma proposição, faz-se necessário:*

(1) Uma estrutura de oração, com sujeito, verbo e predicado;

(2) Ser declarativa, não podendo ser exclamativa, imperativa e nem interrogativa;

(3) Satisfazer os seguintes princípios:

(3.1) ***Princípio do Terceiro Excluído****. Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro;*

(3.2) ***Princípio da Não-contradição****. Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

Exemplo 1.3.5. *Exemplos de não proposições:*

a) *"Deus te acompanhe!"*
(Frase exclamativa, portanto não é uma proposição.)

b) *"Entre na sala de aula!"*
(Frase imperativa, portanto não é uma proposição.)

c) *"Você aceita um chocolate?"*
(A frase não é proposição por ser interrogativa e não declarativa.)

d) *"A bela moça."*
(A frase não é proposição por não ser uma oração, possuindo apenas sujeito, faltando verbo e predicado.)

e) *"Esta afirmação é falsa."*

A frase não é proposição porque faz referência a si mesma, tornando impossível atribuir-lhe um valor lógico: se assumirmos como verdadeira, então a proposição afirma que é falsa, e da mesma forma, ao assumirmos como falsa, concluímos que ela é verdadeira, não satisfazendo o Princípio da Não-contradição.

Para motivar e facilitar o entendimento das definições desta seção, consideremos a seguinte proposição:

"P: João é aluno da UFS".

Observe agora a sentença:

"P(Ele): Ele é aluno da UFS".

Note que "Ele" pode ser em particular "João", "José", "Paulo", etc. Veja ainda que, se trocamos "Ele" por "José", temos "P(José)" uma proposição com valor lógico verdadeiro ou Falso. O mesmo vale para cada pessoa particular que substituirmos na sentença. Denotando pela letra x a 'variável' "Ele", podemos reescrever a sentença anterior como

"$P(x)$: x é aluno da UFS",

onde x representa elementos do conjunto {João, José, Paulo,...}.

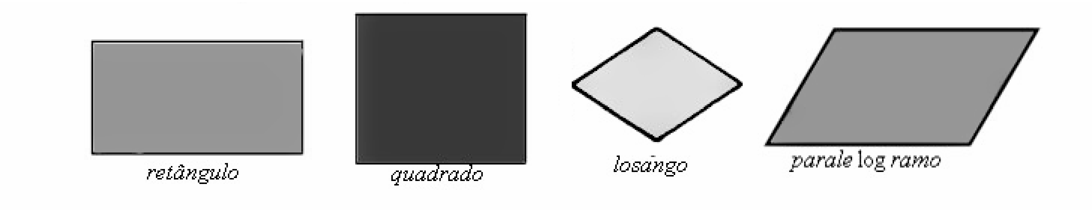
Definição 1.3.6 (Sentença Aberta).

Dizemos que uma frase (ou expressão) é uma Sentença Aberta *quando ela está subordinada a pelo menos uma variável que fica livre e não permite atribuição de valor lógico a mesma, mas que será uma proposição quando suas variáveis são substituídas por objetos específicos.*

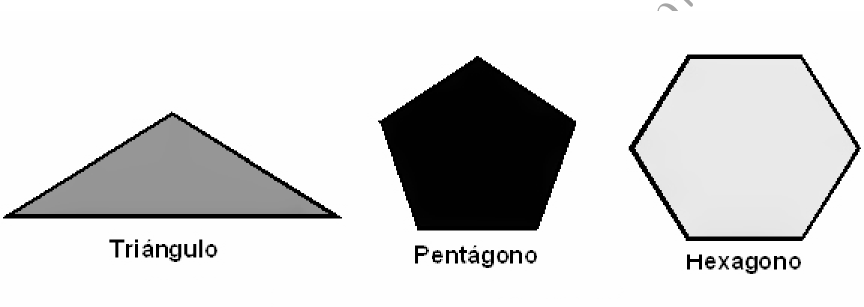
Exemplo 1.3.7. *Exemplos de sentenças abertas:*

a) *"O polígono tem exatamente quatro lados".*

Observe que esta frase é uma sentença aberta que tem como variável livre "polígono", pois há polígonos, a exemplo do quadrado, do retângulo, do losango e do paralelogramo, que a torna uma proposição verdadeira;



e outros que a torna falsa, a exemplo do triângulo, do pentágono e do hexágono.



b) $x^2 + 5x > 14$.

Note que esta expressão torna-se verdadeira quando trocarmos x por 3 e falsa quando trocarmos x por 1, por exemplo.

Notação 1.3.8. *Denotamos uma Sentença Aberta em uma variável livre x por $P(x)$.*

Como é simples observar, não há como atribuir diretamente um valor lógico, seja verdadeiro ou seja falso, para uma sentença aberta.

Definição 1.3.9.

Dizemos que $P(x)$ é uma sentença aberta num conjunto A quando $P(x)$ torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) todas as vezes que se substituir a variável livre x por qualquer elemento a de A.

Destacamos que:

- O conjunto A na definição recebe o nome de *Domínio*[8] da variável livre x e qualquer elemento $a \in A$ é dito um valor para a variável x.
- Se $a \in A$ é tal que $P(a)$ é uma proposição verdadeira, diz-se que *a satisfaz* (ou *verifica*) $P(x)$.

Exemplo 1.3.10. *Exemplos de sentenças abertas em seus domínios:*

[8]Na literatura é comum o uso da expressão *Conjunto Universo* ou *Universo do Discurso*.

a) *“$P(x): \ x^2+5x>14$” é uma sentença aberta no domínio $\mathbb{N}$.*

Por exemplo, temos:

- ➢ *$P(4)$ uma proposição verdadeira;*
- ➢ *$P(2)$ uma proposição falsa.*

b) *Considere A o conjunto de todos os polígonos do plano. Nesse caso, por exemplo, o quadrado, o retângulo, o triângulo pertencem a A. Considere agora a sentença aberta em A:*

“$P(x)$: o x tem exatamente quatro lados.”

Então, temos por exemplo:

- ➢ *P(quadrado) uma proposição verdadeira;*
- ➢ *P(triângulo) uma proposição falsa.*

Analogamente, podemos definir uma sentença aberta em duas ou mais variáveis livres num conjunto:

Definição 1.3.11.

Dizemos que $P(x_1, x_2)$ é uma sentença aberta num conjunto $A \times B$ quando $P(x_1, x_2)$ torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) todas as vezes que se substituir as variáveis livres x_1 por qualquer elemento a de A e x_2 por qualquer elemento b de B.

Destacamos também no caso de sentença aberta com duas variáveis que:

- o conjunto $A \times B$ é o *Domínio* das variáveis x_1 e x_2, e quaisquer elementos $a \in A$ e $b \in B$ são ditos valores das variáveis x_1 e x_2, respectivamente.
- Se $(a, b) \in A \times B$ é tal que $P(a, b)$ é uma proposição verdadeira, diz-se que (a, b) *satisfaz* ou *verifica* $P(x_1, x_2)$.

Exemplo 1.3.12. *Considere A o conjunto de todos os países da América do Sul e B o conjunto de todos os países da Ásia. Nesse caso, por exemplo, o Brasil, a Argentina e a Bolívia pertencem a A, enquanto que o Japão, a China, a Coreia do Sul pertencem a B. Considere agora a sentença aberta em $A \times B$:*

“$P(x_1, x_2)$: x_1 é mais populoso que x_2”.

Note que:

- ➢ *P(Brasil, Japão) é uma proposição verdadeira;*

➢ $P(\mathit{Brasil}, \mathit{China})$ *é uma proposição falsa.*

Observação 1.3.13. *Pode-se tratar de modo análogo sentenças abertas com n variáveis livres num produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ por*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Exemplo 1.3.14. *Considere $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e a sentença aberta:*

$$\text{“}Q(x, y, z): \; x + 2y + 3z \leq 15\text{”.}$$

Temos, por exemplo:

➢ $Q(3, 2, 1)$ *uma proposição verdadeira;*

➢ $Q(3, 3, 3)$ *uma proposição falsa.*

Mais detalhes sobre a Observação 1.3.13 veja, por exemplo, [1, Pag 160].

Observação 1.3.15. *Numa sentença aberta $P(x)$ num dado conjunto A, apenas três casos podem ocorrer:*

I) $P(x)$ *é verdadeira para* todo $x \in A$, *ou seja,* $P(x)$ *exprime uma* condição universal *ou* propriedade universal *no conjunto A.*

Exemplo: *“$P(x)$: x é mortal”, sendo A o conjunto dos seres humanos.*

II) $P(x)$ *é verdadeira para* alguns $x \in A$, *ou seja,* $P(x)$ *exprime uma* condição possível *ou* propriedade possível *no conjunto A.*

Exemplo: *“$P(x)$: x possui curso superior”, sendo A o conjunto de todas as pessoas.*

III) $P(x)$ *é verdadeira para* nenhum $x \in A$, *ou seja,* $P(x)$ *exprime uma* condição impossível *ou* propriedade impossível *no conjunto A.*

Exemplo: *“$P(x)$: x é imortal”, sendo A o conjunto dos seres humanos.*

Usamos nesta observação uma sentença aberta com uma variável livre apenas por simplicidade, pois o mesmo raciocínio pode ser empregado para sentenças abertas com mais de uma variável livre.

1.4 Especificações de Conjuntos

Um dos princípios básicos mais importantes na matemática é a construção de novos conjuntos a partir de outros. Antes da formulação desse princípio, vejamos o seguinte exemplo heurístico:

Exemplo 1.4.1. *Seja A o conjunto de todos os homens e considere a sentença aberta em A:*

"$P(x)$: x é casado".

Observe que a sentença aberta $P(x)$ torna-se uma proposição verdadeira para alguns elementos x de A e uma proposição falsa para outros. Dessa forma, usamos a notação

$$\{x \in A : x \text{ é casado}\}$$

para especificar o conjunto dos homens casados e essa notação é comumente lida como "o conjunto de todos os x em A tais que x é casado".

Analogamente temos o conjunto de todos os homens não casados:

$$\{x \in A : x \text{ não é casado}\}.$$

Especificação de Conjunto:[9]

Para cada conjunto A e cada sentença aberta $P(x)$ com domínio A, pode-se obter um conjunto B cujos elementos são exatamente aqueles elementos a de A tais que $P(a)$ é verdadeira. O conjunto B nesse caso representamos por

$$B = \{x \in A : P(x)\} \qquad \text{ou} \qquad B = \{x : P(x)\}.$$

Exemplo 1.4.2. *Análogo ao Exemplo 1.3.7, considere A o conjunto de todos os polígonos planos e a sentença aberta*

"$P(x)$: x tem exatamente quatro lados".

O conjunto formado por polígonos "x" tais que $P(x)$ é verdade, pode ser representado por:

$$\{x \in A : P(x)\}. \tag{1.7}$$

Note que o conjunto repesentado em (1.7) é o conjunto de todos os polígonos com exatamente quatro lados e, por exemplo, o Retângulo, o Paralelogramo e o Losango são seus elementos.

[9] Na teoria axiomática de conjuntos, a Especificação de Conjunto é um conceito conhecido como Axioma da Especificação (Ver [4, p. 10]).

Exemplo 1.4.3. *Seja A o conjunto de todos os estudantes da UFS. A sentença aberta*

$$\text{“}P(x)\text{: } x \text{ é sergipano”,}$$

é verdadeira para alguns elementos x de A e falsa para outros. Neste caso podemos usar a notação

$$\{x \in A : P(x)\}$$

para especificar o conjunto de todos os estudantes sergipanos da UFS.

Exemplo 1.4.4. (**Conjunto Vazio**). *Por simples entendimento, consideramos como Conjunto Vazio um conjunto que não possui elemento. Em verdade, existem várias formas de tratamento para o conjunto vazio, mas todas são essencialmente “iguais”. Por exemplo, considere A um conjunto. Note que*

$$\text{“}P(x) : x \neq x\text{”}$$

é uma sentença aberta em A, de modo que cada $a \in A$ torna $P(a)$ uma proposição falsa. Dessa forma, pela especificação de conjuntos, temos o conjunto

$$\{x \in A : P(x)\},$$

que não possui elementos e chamaremos de Conjunto Vazio *(de A). Denotamos o conjunto vazio por $\varnothing_A$. Assim,*

$$\varnothing_A = \{x \in A : x \neq x\}.$$

Exemplo 1.4.5. *Considere $\mathbb{N}$ e a sentença aberta:*

$$\text{“}P(x) : x^2 + 5x \leq 14\text{”.}$$

Observe que

- ➢ *$P(0)$ é uma proposição verdadeira;*
- ➢ *$P(1)$ é uma proposição verdadeira;*
- ➢ *$P(2)$ é uma proposição verdadeira;*
- ➢ *$P(3)$ é uma proposição falsa;*

sendo $0, 1$ e 2 os únicos números de $\mathbb{N}$ que tornam $P(x)$ verdadeira. Então temos:

$$\{x \in \mathbb{N} : P(x)\} = \{0, 1, 2\}.$$

Observação 1.4.6. *De forma análoga, para sentenças abertas com n variáveis livres $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e domínio $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, pode-se obter também um conjunto cujos elementos são exatamente aqueles elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ tais que $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é verdadeira. Nesse caso, representamos tal conjunto por*

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n : P(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Exemplo 1.4.7. *Considere* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *e a sentença aberta:*

$$\text{“}P(x,y,z):\ x+y+z=1\text{”.}$$

Observe que

➢ $P(1,0,0)$ *é uma proposição verdadeira;*

➢ $P(0,1,0)$ *é uma proposição verdadeira;*

➢ $P(0,0,1)$ *é uma proposição verdadeira;*

sendo estes os únicos elementos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *que tornam* $P(x,y,z)$ *verdadeira. Então temos:*

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}: P(x,y,z)\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

1.5 Quantificadores

Uma forma de transformar uma sentença aberta em proposição é substituir a variável livre por qualquer elemento do domínio da sentença aberta, por exemplo, como visto no Exemplo 1.3.10. Uma outra maneira de transformar uma sentença aberta em uma proposição é através do uso dos chamados *Quantificadores.*

1.5.1 Quantificador Universal

Para introduzir o quantificador universal, consideremos inicialmente o conjunto A, formado por todos os seres humanos, e a sentença aberta em A:

“$P(x)$: x depende de água para sobreviver”,

onde x representa cada pessoa do conjunto A. Agora observe a afirmação:

“Todo x de A depende de água para sobreviver”.

Ela é uma proposição verdadeira. Então, para transformar a sentença aberta $P(x)$ numa proposição, pode-se usar a estrutura:

“Para todo x de A, x depende de água para sobreviver”, (1.8)

do chamado quantificador universal que agora introduziremos.

Definição 1.5.1 (Quantificador Universal).

Dada uma sentença aberta $P(x)$, com variável x e domínio A, a afirmação

"Para todo x no conjunto A, $P(x)$",

que denotamos simbolicamente por

$$\forall\ x \in A; P(x),$$

é verdadeira quando $P(x)$ for sempre verdadeira ao substituirmos a variável x por qualquer elemento de A; e falsa se existir ao menos um elemento em A que torna $P(x)$ falsa quando a variável é substituída por esse elemento.

Notação 1.5.2.

- *O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja", e é chamado de* ***Quantificador Universal****.*
- *A proposição "$\forall\ x \in A; P(x)$" também é escrita como*

  $$\text{"}\forall\ x \in A, P(x)\text{"}$$

  e ambas podem ser lidas como "para todo x em A, $P(x)$" ou "para todo x em A, temos $P(x)$"; além de outras formas de leitura que aparecem na literatura.
- *No caso do Quantificador Universal, é comum também se denotar*

  $$\text{"}P(x),\ \forall\ x \in A\text{"}$$

Exemplo 1.5.3. *Considere A o conjunto de todos os estados do nordeste brasileiro, ou seja,*

$$A = \{\text{AL, BA, CE, MA, PB, PI, PE, RN, SE}\}$$

e

"$P(x)$: x é um estado do Brasil"

a sentença aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

"Para todo x no conjunto A, x é um estado do Brasil".

ou

"x é um estado do Brasil, para todo x no conjunto A".

Simbolicamente a proposição é

$$\forall\ x \in A; P(x) \qquad ou \qquad P(x),\ \forall\ x \in A$$

e é uma proposição verdadeira, pois

$$P(\text{AL}),\ P(\text{BA}),\ P(\text{CE}),\ P(\text{MA}),\ P(\text{PB}),\ P(\text{PI}),\ P(\text{PE}),\ P(\text{RN})\ e\ P(\text{SE})$$

são todas proposições verdadeiras.

Exemplo 1.5.4. *Do Exemplo 1.3.10, temos A o conjunto de todos os polígonos planos e*

"$P(x)$: x tem exatamente quatro lados",

a sentença aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

"Para todo x no conjunto A, x tem exatamente quatro lados".

Simbolicamente a proposição é

$$\forall\ x \in A; P(x).$$

Observe que essa é uma proposição falsa, pois substituindo x pelo elemento "Triângulo", temos P(Triângulo) com valor lógico falso.

Exemplo 1.5.5. *Considere $\mathbb{N}$ e*

"$P(x)$: $x + 5 \geq 7$"

a sentença aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

"Para todo x no conjunto $\mathbb{N}$, $x + 5 \geq 7$"

ou

"$x + 5 \geq 7$, para todo x no conjunto $\mathbb{N}$".

Simbolicamente a proposição é

$$x + 5 \geq 7,\ \forall\ x \in \mathbb{N}.$$

Observe que essa é uma proposição falsa, pois substituindo x por 1, não é verdade que $1 + 5 \geq 7$, e assim se tem $P(1)$ falsa.

Exemplo 1.5.6. *Considere os conjuntos cujos elementos são algumas capitais de estados brasileiros:*

$$A = \{\textit{Aracaju, Curitiba, Recife}\} \qquad e \qquad B = \{\textit{Salvador, Porto Alegre}\ \}.$$

Seja a sentença aberta em $A \times B$

$$\text{“}P(x_1, x_2)\text{: } x_1 \text{ e } x_2 \text{ pertencem à mesma região do Brasil”.}$$

A proposição

$$\forall\ (x_1, x_2) \in A \times B,\ P(x_1, x_2). \tag{1.9}$$

afirma que qualquer par (x_1, x_2) *de* $A \times B$*, tem-se* x_1 *e* x_2 *pertencentes à mesma região do Brasil. Observe que, por exemplo, Recife está na região nordeste enquanto que Porto Alegre está na região sul. Portanto, a proposição* (1.9) *é falsa, pois temos:*

$$P(\textit{Aracaju}, \textit{Porto Alegre})$$

uma proposição falsa.

Observação 1.5.7.

a) *Embora tenhamos apresentado Quantificador Universal de uma sentença aberta de duas variáveis livres na forma* (1.9)*, há outros modos "equivalentes" de representar* (1.9)*, como por exemplo*

$$\forall\ x_1 \in A \text{ e } \forall\ x_2 \in B;\ P(x_1, x_2).$$

b) *Quando temos conjuntos A e B iguais, também denotamos a proposição* (1.9) *por*

$$\forall\ x_1, x_2 \in A,\ P(x_1, x_2).$$

Exemplo 1.5.8. *Considere* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *e*

$$\text{“}P(x, y) :\ (x + y)^2 \geq x^2 + y^2\text{”}$$

a sentença aberta. Utilizando o quantificador universal, temos a proposição:

$$\text{“Para todos } x \text{ e } y \text{ no conjunto } \mathbb{N},\ (x + y)^2 \geq x^2 + y^2\text{”}$$

ou

$$\text{“}(x + y)^2 \geq x^2 + y^2, \text{ para todos } x \text{ e } y \text{ no conjunto } \mathbb{N}\text{”.}$$

Simbolicamente, a proposição é

$$\forall\ x, y \in \mathbb{N}; P(x) \qquad ou \qquad (x + y)^2 \geq x^2 + y^2,\ \forall\ x, y \in \mathbb{N}.$$

1.5.2 Quantificador Existencial

Para introduzir o quantificador existencial, consideremos inicialmente o conjunto $\mathbb{N}$ e a sentença aberta em $\mathbb{N}$:

$$\text{“}Q(x)\text{: } x^2 \geq 100\text{”},$$

onde x representa cada número natural do conjunto $\mathbb{N}$. Agora observe a afirmação

$$\text{“Existe } x \text{ em } \mathbb{N} \text{ tal que } x^2 \geq 100\text{”}. \tag{1.10}$$

Note que a afirmação é uma proposição verdadeira, pois $11^2 = 121$. Isto motiva a introdução do quantificador existencial.

Definição 1.5.9 (Quantificador Existencial).

Dada uma sentença aberta $Q(y)$, com variável y e domínio B, a afirmação

“Existe y no conjunto B tal que $Q(y)$”,

que denotamos simbolicamente por

$$\exists\ y \in B; Q(y),$$

é verdadeira quando existir pelo menos um elemento de B que, ao substituir a variável y, torna a afirmação $Q(y)$ verdadeira; e é falsa quando não existir elemento de B que torne $Q(y)$ verdadeira.

Notação 1.5.10.

- *O símbolo $\exists$ significa “existe”, e é chamado de Quantificador Existencial.*
- *A afirmação “$\exists\ x \in A; Q(x)$” também é escrita como*

  $$\text{“}\exists\ x, Q(x)\text{”}$$

  e ambas são lidas como “existe x em A tal que $Q(x)$”, além de outras formas de leitura que podem ser encontradas na literatura.

Exemplo 1.5.11. *Considere o conjunto $\mathbb{N}$ e a sentença aberta:*

$$\text{“}P(x): \ x^2 + 5x = 24\text{”}.$$

Observe que temos a proposição existencial

$$\text{“Existe } x \text{ em } \mathbb{N} \text{ tal que } x^2 + 5x = 24\text{”},$$

que simbolicamente escrevemos

$$\text{“}\exists\ x \in \mathbb{N},\ x^2 + 5x = 24\text{”} \qquad \text{ou} \qquad \text{“}\exists\ x \in \mathbb{N},\ P(x)\text{”}.$$

Note que esta é uma proposição verdadeira pois quando $x = 3$ temos $3^2 + 5 \cdot 3 = 24$, ou seja, $P(3)$ é verdadeira.

Exemplo 1.5.12. *Considere A o conjunto de todos os polígonos do plano e*

"$P(x)$: o x tem exatamente quatro lados",

uma sentença aberta (veja Exemplo 1.3.10). Utilizando o quantificador existencial, temos a proposição:

"Existe um x no conjunto A tal que x tem exatamente quatro lados".

Simbolicamente a proposição é

$$\exists\ x \in A; P(x).$$

Observe que essa é uma proposição verdadeira, pois substituindo x pelo elemento "Quadrado", temos $P(\mathit{Quadrado})$ com valor lógico verdadeiro.

Exemplo 1.5.13. *Considere os conjuntos cujos elementos são algumas capitais de estados brasileiros:*

$$C = \{\mathit{Manaus},\ \mathit{Cuiabá}, \mathit{Vitória}\} \qquad e \qquad D = \{\mathit{Aracaju},\ \mathit{Recife}\ \}$$

e considere a sentença aberta em $C \times D$

"$P(x_1, x_2)$: x_1 e x_2 pertencem à mesma região do Brasil".

A proposição

$$\exists\ (x_1, x_2) \in C \times D; P(x_1, x_2) \tag{1.11}$$

é falsa pois

- ➢ *$P(\mathit{Manaus}, \mathit{Aracaju})$ é uma proposição falsa;*
- ➢ *$P(Manaus, Recife)$ é uma proposição falsa;*
- ➢ *$P(Cuiabá, Aracaju)$ é uma proposição falsa;*
- ➢ *$P(Cuiabá, Recife)$ é uma proposição falsa;*
- ➢ *$P(\mathit{Vitória}, \mathit{Aracaju})$ é uma proposição falsa;*
- ➢ *$P(\mathit{Vitória}, Recife)$ é uma proposição falsa;*

ou seja, não há elemento em $C \times D$ que torne $P(x_1, x_2)$ uma proposição verdadeira.

Observação 1.5.14.

a) *Similar ao caso do Quantificador Universal, uma sentença aberta de duas variáveis livres na forma (1.11), há outros modos "equivalentes" de representá-la, a exemplo de:*

$$\exists\ x_1 \in A,\ \exists\ x_2 \in B, P(x_1, x_2).$$

b) *Quando temos conjuntos A e B iguais, também denotamos a proposição* (1.11) *por*

$$\exists\ x_1, x_2 \in A,\ P(x_1, x_2).$$

Exemplo 1.5.15. *Considere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e a sentença aberta:*

$$\text{“}P(x, y):\ 2x + 3y = 1\text{”}.$$

Observe que

$$P(0,0),\ P(1,0),\ P(0,1),\ P(1,1),\ P(0,2,),\ P(2,0),\ P(1,2),\ \cdots$$

são todas proposições falsas. Então temos que a proposição existencial

$$\exists\ x, y \in \mathbb{N},\ 2x + 3y = 1,$$

é falsa.

1.5.3 Combinação de Quantificadores

Diversas afirmações matemáticas envolvem mais de um quantificador e para lidar com afirmação desse tipo é preciso cautela. Para apresentar as propriedades mais importantes de proposições com mais de um quantificador é suficiente considerar o caso de proposições envolvendo apenas dois quantificadores. Considere conjuntos A e B e $P(x, y)$ uma sentença aberta com domínio $A \times B$. Observe que todas as combinações possíveis entre dois quantificadores são:

Combinações de Dois Quantificadores

a) $\forall\ x \in A, \forall\ y \in B;\ P(x, y)$	**e)** $\exists\ x \in A, \forall\ y \in B;\ P(x, y)$
b) $\forall\ y \in B, \forall\ x \in A;\ P(x, y)$	**f)** $\exists\ y \in B, \forall\ x \in A;\ P(x, y)$
c) $\forall\ x \in A, \exists\ y \in B;\ P(x, y)$	**g)** $\exists\ y \in B, \exists\ x \in A;\ P(x, y)$
d) $\forall\ y \in B, \exists\ x \in A;\ P(x, y)$	**h)** $\exists\ x \in A, \exists\ y \in B;\ P(x, y)$

Nas combinações de dois quantificadores, devemos fazer destaques sobre os itens **a)**, **b)**, **g)** e **f)** que:

✍ A proposição

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in B;\ P(x, y)$$

do item **a)**, como mostra a Observação 1.5.7, é exatamente a proposição

$$\forall\ (x, y) \in A \times B;\ P(x, y). \tag{1.12}$$

Agora observe que (1.12) é também exatamente a proposição

$$\forall\ y \in B, \forall\ x \in A;\ P(x, y)$$

do item **b)**. Sendo assim, temos nos itens **a)** e **b)** uma mesma proposição. Destacamos então:

$$[\forall\ x \in A, \forall\ y \in B;\ P(x,y)]\ \equiv\ [\forall\ y \in B, \forall\ x \in A;\ P(x,y)]. \tag{1.13}$$

✍ Analogamente, a proposição

$$\exists\ y \in B, \exists\ x \in A;\ P(x,y)$$

do item **g)**, conforme a Observação 1.5.14, é a proposição

$$\exists\ (x,y) \in A \times B;\ P(x,y). \tag{1.14}$$

Agora note que (1.14) é exatamente

$$\exists\ x \in A, \exists\ y \in B;\ P(x,y)$$

do item **h)**. Novamente temos nos itens **g)** e **h)** uma mesma proposição, e como no caso anterior, denotamos por:

$$[\exists\ x \in A, \exists\ y \in B;\ P(x,y)]\ \equiv\ [\exists\ y \in B, \exists\ x \in A;\ P(x,y)]. \tag{1.15}$$

Observação 1.5.16 (Cuidado!).

Quando uma afirmação possui dois ou mais quantificadores diferentes (por exemplo, um universal e outro existencial, ou um existencial e outro universal) a ordem dos quantificadores é importante, ou seja, em geral, mudou a ordem, altera-se a afirmação. Veja exemplos a seguir.

Exemplo 1.5.17. *Considere H o conjunto de todos seres humanos e*

$$\text{“}P(x,y) : x \text{ é filho de } y\text{”}$$

a sentença aberta com domínio $H \times H$. A proposição:

$$\forall\ x \in H, \exists\ y \in H; x \text{ é filho de } y,$$

significa que “para cada ser humanos x, existe um pai y de x”, e é portanto uma proposição verdadeira. Agora, trocando a ordem dos quantificadores, temos a seguinte proposição:

$$\exists\ y \in H, \forall\ x \in H; x \text{ é filho de } y.$$

Esta proposição significa que “existe um ser humano y que é pai de todo ser humano x”, sendo assim uma proposição falsa.

Exemplo 1.5.18. *Considere* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos números naturais e*

$$\text{“}P(x,y) : y > x\text{”}$$

a sentença aberta com domínio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *A proposição:*

$$\forall\ x \in \mathbb{N}, \exists\ y \in \mathbb{N}; y > x,$$

que significa “para cada número x*, existe um número* y *tal que* $y > x$*”, é portanto uma proposição verdadeira. Trocando agora a ordem dos quantificadores, temos a seguinte proposição:*

$$\exists\ y \in \mathbb{N}, \forall\ x \in \mathbb{N}; y > x.$$

Esta proposição significa que “existe um número y *que é maior que todos os números* x*”, sendo assim uma proposição falsa.*

Os dois exemplos anteriores deixam claro que a mudança da ordem de quantificadores diferentes pode mudar a proposição.

Observação 1.5.19. *As conclusões apresentadas em* (1.13) *e* (1.15) *foram discutidas com somente dois quantificadores apenas por simplicidade, pois elas continuam válidas para três ou mais quantificadores.*

1.6 Negação e Conectivos Lógicos

Há vários modos de se obter uma nova proposição através de uma ou mais proposições dadas. Neste texto estudaremos apenas as cinco formas mais comuns e usados frequentemente na matemática. A forma mais simples de obter uma proposição através de outra é fazer a negação. Além da negação, os outros modos de formar novas proposições a partir de outras, que estudaremos, são através dos seguintes *conectivos* da nossa língua (comunicação):

➢ *e*

➢ *ou*

➢ *se ..., então*

➢ *... se, e somente se,...*

Grosso modo:

Um *Conectivo Lógico* (ou simplesmente *Conectivo*) é um símbolo, palavra ou expressão, usado para conectar duas ou mais proposições de uma maneira gramaticalmente válida, de modo que o sentido da proposição composta produzida dependa apenas das proposições originais.

1.6.1 Negação

O modo mais simples de se obter uma proposição através de uma dada proposição, é considerar a negação da mesma.

Definição 1.6.1 (Negação de Proposição).

Dada uma proposição P, a Negação *de P é a proposição, representada por $\sim P$, cujo valor lógico é* verdadeiro*, quando P é falsa, e* falso*, quando P é verdadeira.*[a]

[a]Geralmente a notação $\sim P$ é lida por "não P" ou "não é verdade que P".

Exemplo 1.6.2.

a) *Considerando a proposição*

"P : Aracaju é a capital da Paraíba"

sua negação é

"$\sim P$: Aracaju não é a capital da Paraíba"

b) *A negação da proposição*

"Q : João é careca"

é

"$\sim Q$: É falso que João é careca".

Note que P e $\sim P$ são proposições com valores lógicos contrários, de modo que o valor lógico de $\sim P$ depende naturalmente do valor lógico de P. Podemos resumir o conceito de negação de uma proposição na seguinte tabela, chamada de Tabela Verdade da Negação, onde aparecem todos os valores lógicos de uma proposição e sua negação:

P	$\sim P$
V	F
F	V

Tabela 1.1: Tabela Verdade da Negação

Negação de Sentenças Abertas

Considere $P(x)$ uma sentença aberta em um conjunto A. Como anteriormente discutido, para cada $a \in A$, tem-se $P(a)$ uma proposição. Naturalmente, podemos representar a negação de $P(a)$ por $\sim P(a)$. Isso justifica que:

Definição 1.6.3 (**Negação de Sentença Aberta**).

Dada uma sentença aberta $P(x)$ em um conjunto A, a Negação *de $P(x)$, que representaremos por $\sim P(x)$, é a sentença aberta em A tal que $\sim P(a)$ é a negação de $P(a)$, para cada $a \in A$.*

Exemplo 1.6.4.

a) *Consideremos o conjunto H de todos os seres humanos e a sentença aberta*

"$P(x)$: x tem menos de 21 anos de idade".

Dessa forma, temos naturalmente que a negação da sentença aberta $P(x)$ é a sentença aberta em H

"$\sim P(x)$: x não tem menos de 21 anos de idade",

ou escrita de outra forma,

"$\sim P(x)$: não é verdade que x tem menos de 21 anos de idade".

b) *Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$ e a sentença aberta em $A \times B$:*

"$P(x, y)$: $x \geq y$".

A negação de $P(x, y)$ é

"$\sim P(x, y)$: $x < y$".

De forma a facilitar o entendimento, é possível organizar as informações como na Tabela 1.2, que pode neste caso ser entendida como a Tabela Verdade da sentença aberta $P(x, y)$ em $A \times B$.

c) *Considere $\mathbb{N}$ e a sentença aberta:*

"$Q(x)$: $x^2 + 5x = 14$".

A negação de $Q(x)$ é

Valor de (x,y)	$P(x,y)$	$\sim P(x,y)$
$(1,2)$	F	V
$(1,4)$	F	V
$(3,2)$	V	F
$(3,4)$	F	V
$(5,2)$	V	F
$(5,4)$	V	F

Tabela 1.2: Tabela Verdade de $P(x,y)$ em $A \times B$

$$\text{“}\sim Q(x): \; x^2 + 5x \neq 14\text{”.}$$

Note que $x = 2$ é um (único) valor de $\mathbb{N}$ tal que $x^2 + 5x = 14$. Assim, $Q(2)$ é uma (única) proposição verdadeira. Como neste caso as sentenças abertas têm domínios que não são possíveis de apresentar todos os seus elementos, não dá para explicitar todos os valores lógicos um por um. Mas podemos ilustrar como na Tabela 1.3.

Valor de x	$Q(x)$	$\sim Q(x)$
0	F	V
1	F	V
2	V	F
3	F	V
4	F	V
5	F	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.3: Valores lógicos de $Q(x)$ e $\sim Q(x)$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.6.5 (Diferença de Conjuntos). *Considere A e B conjuntos quaisquer. Note que podemos considerar*

$$\text{“}P(x): x \in B\text{”}$$

como uma sentença aberta em A cuja negação é

$$\text{“} \sim P(x): x \notin B\text{”.}$$

Dessa forma, pela especificação de conjuntos, temos o conjunto

$$\{x \in A : \sim P(x)\},$$

que é chamado de Conjunto Diferença entre *A e B (nessa ordem). Denotamos o conjunto diferença entre A e B por $A \setminus B$. Assim, podemos escrever*

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Em palavras, o conjunto diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B. Por exemplo, se

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

(conjunto dos números naturais pares), então

$$\mathbb{N} \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

(conjunto dos números naturais ímpares) .

Observação 1.6.6. *É possível que o conjunto diferença entre A e B seja um conjunto sem elemento, ou seja, vazio. Isso acontece por exemplo quando $A = B$.*

1.6.2 Negação de Quantificadores

Para facilitar a compreensão das negações dos quantificadores, consideremos a seguinte proposição:

$$\text{“}\textit{Todos os alunos de Cálculo estão na sala de aula}\text{”.} \tag{1.16}$$

Assumindo que a afirmação é verdadeira, sua negação deve ser falsa. Então, qual é a negação? Observe que para a afirmação ser falsa, basta que um aluno de Cálculo não esteja na sala de aula. Portanto, a negação da proposição (1.16) é

$$\text{“}\textit{Existe ao menos um aluno de Cálculo que não está na sala de aula}\text{”.} \tag{1.17}$$

Conforme já estudamos, considerando a váriavel livre x para representar os alunos, o conjunto D formado pelos alunos de Cálculo e

$$\text{“}P(x) : x \text{ está na sala de aula”}$$

a sentença aberta com domínio em D, podemos representar (1.16) por

$$\forall\, x \in D, P(x)$$

e sua negação (1.17) por

$$\exists\, x \in D, \sim P(x).$$

Dessa forma, a negação da proposição $\forall\, x \in D; P(x)$ tem o mesmo valor lógico da proposição $\exists\, x \in D; \sim P(x)$, e assim podemos escrever

$$\sim [\forall\, x \in D; P(x)] \;\equiv\; \exists\, x \in D; \sim P(x),$$

conforme a Notação 1.3.2. Portanto, no caso de proposições com um quantificador, temos as negações:

☞ **Negação do Quantificador Universal**

$$\boxed{\sim [\forall\ x \in D, P(x)] \ \equiv \ \exists\ x \in D, \sim P(x)}$$

☞ **Negação do Quantificador Existencial**

$$\boxed{\sim [\exists\ x \in D, P(x)] \ \equiv \ \forall\ x \in D, \sim P(x)}$$

Exemplo 1.6.7. *Exemplos de negação de quantificadores:*

a) *Considere a afirmação*

"para qualquer número natural n, tem-se $n + 1 > 2$".

Simbolicamente temos

$$\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 > 2.$$

A negação desta afirmação é

$$\exists n \in \mathbb{N}, n + 1 \leq 2.$$

Em palavras,

"existe ao menos um número natural n tal que $n + 1 \leq 2$".

b) *Considere a afirmação*

$$\exists\ x \in \mathbb{N}, x^2 = 0.$$

A negação desta afirmação é

$$\forall\ x \in \mathbb{N}, x^2 > 0.$$

Negação de Proposições com Quantificadores

Devemos destacar que não existe uma fórmula geral para se obter a negação de uma proposição que possui mais de um quantificador. Porém, uma maneira "prática" de se obter a negação de uma proposição com dois ou mais quantificadores é ir negando cada quantificador e cada propriedade na ordem em que aparecem na proposição e, com cada parte negada, formar uma frase que faça sentido e tenha significado lógico. Sendo assim, quando se deseja negar uma proposição com mais de um quantificador, requer-se bastante atenção. Vejamos a seguir um exemplo ilustrando o processo.

Exemplo 1.6.8. *Considere a proposição*

"para todo número natural x e para todo número natural y, temos xy maior do que zero".

Simbolicamente:

$$\forall\, x \in \mathbb{N}, \forall\, y \in \mathbb{N};\ xy > 0. \tag{1.18}$$

Como destacado, uma maneira de obter a negação de (1.18) *é proceder da seguinte forma: negamos o primeiro quantificador e escrevemos*

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \sim [\forall\, y \in \mathbb{N};\ xy > 0].$$

Agora, negamos o segundo quantificador e escrevemos:

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N}; \sim [\ xy > 0].$$

O passo agora é negar a sentença aberta e temos:

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N};\ xy \leq 0.$$

Devemos agora verificar o sentido lógico do que obtivemos. Neste caso, com atenção verificamos que se obteve

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N},\ \textit{tais que}\ xy \leq 0,$$

ou ainda,

> *"existem um número natural x e um número natural y tais que xy é menor do que ou igual a zero".*

Finalmente vê-se que o obtido é a negação desejada.

Mais geralmente, vamos supor A, B conjuntos e $P(x, y)$ uma sentença aberta em $A \times B$. Digamos que desejemos negar a proposição

$$\exists\, x \in A, \exists\, y \in B, P(x, y). \tag{1.19}$$

Seguindo os passos do Exemplo 1.6.8, escrevemos:

$$\sim [\exists\, x \in A, \exists\, y \in B, P(x, y)].$$

No passo seguinte, negamos o primeiro quantificador e escrevemos:

$$\forall\, x \in A, \sim [\exists\, y \in B, P(x, y)].$$

No próximo passo, negamos o segundo quantificador e escrevemos:

$$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B, \sim [P(x, y)].$$

Agora, organizamos a expressão de forma que tenha significado lógico:

$$\forall\, x \in A, \forall\, y \in B, \sim P(x, y).$$

Por fim, verificamos com bastante atenção se a proposição obtida é realmente a negação da proposição inicial.

No caso de proposições com dois quantificadores, temos:

☞ **Negação de proposições com dois quantificadores iguais**

$$\begin{array}{|ll|}\hline \blacktriangleright & \sim[\forall\, x \in A, \forall\, y \in B, P(x,y)] \;\equiv\; \exists\, x \in A, \exists\, y \in B, \sim P(x,y) \\ \blacktriangleright & \sim[\exists\, x \in A, \exists\, y \in B, P(x,y)] \;\equiv\; \forall\, x \in A, \forall\, y \in B, \sim P(x,y). \\ \hline \end{array}$$

☞ **Negação de proposições com dois quantificadores diferentes**

$$\begin{array}{|ll|}\hline \blacktriangleright & \sim[\forall\, x \in A, \exists\, y \in B, P(x,y)] \;\equiv\; \exists\, x \in A, \forall\, y \in B, \sim P(x,y) \\ \blacktriangleright & \sim[\exists\, x \in A, \forall\, y \in B, P(x,y)] \;\equiv\; \forall\, x \in A, \exists\, y \in B, \sim P(x,y). \\ \hline \end{array}$$

Exemplo 1.6.9. *Considere os conjuntos*

$$H = \{\textit{Miguel, João, Paulo}\} \qquad e \qquad M = \{\textit{Nathália, Priscila}\}$$

e seja

$$\text{“}P(x,y) : x \text{ é irmão de } y\text{”}$$

sentença aberta em $H \times M$*. A proposição*

$$\exists\, y \in M, \forall\, x \in H, P(x,y) \tag{1.20}$$

pode ser lida, por exemplo, como

“Pelo menos uma mulher de M é irmã de todos os homens de H”.

Note que a negação de (1.20) *é*

$$\forall\, y \in M, \exists\, x \in H, \sim P(x,y)$$

que pode ser lida, por exemplo, como

“Qualquer que seja a mulher de M, existe um homem de H que não é seu irmão”.

Exemplo 1.6.10. *Determine a negação da proposição:*

$$\forall\, x, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \exists\, y \in \mathbb{N} \textit{ tal que } x < y + \varepsilon. \tag{1.21}$$

Uma maneira de obter a negação é observar que

$$\begin{array}{c} \sim[\forall\, x \in \mathbb{N}, \forall\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \exists\, y \in \mathbb{N};\; x < y + \varepsilon] \\ \exists\, x \in \mathbb{N}, \sim[\forall\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \exists\, y \in \mathbb{N};\; x < y + \varepsilon] \\ \exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \sim[\exists\, y \in \mathbb{N};\; x < y + \varepsilon] \\ \exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \forall\, y \in \mathbb{N}; \sim[\, x < y + \varepsilon] \\ \exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \forall\, y \in \mathbb{N};\; x \geq y + \varepsilon. \end{array}$$

Agora podemos verificar com atenção que

$$\exists\, x \in \mathbb{N}, \exists\, \varepsilon \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \textit{ tais que } \forall\, y \in \mathbb{N} \textit{ temos } x \geq y + \varepsilon$$

é de fato a negação de (1.21).

1.6.3 Conjunção

Definição 1.6.11 (Conjunção).

Chama-se Conjunção *de duas proposições P e Q, a proposição representada por*

$$P \wedge Q,$$

cujo valor lógico é verdadeiro, quando as proposições P e Q são ambas verdadeiras, e falso nos demais casos. [a]

[a] Geralmente a notação $P \wedge Q$ é lida por "P e Q".

Exemplo 1.6.12. *Exemplos de conjunções:*

a) *Considere as proposições*

"P: João gosta de feijão" e *"Q: João gosta de arroz".*

A conjunção de P e Q é a proposição

"$P \wedge Q$: João gosta de feijão e de arroz".

b) *Considere a proposição*

"R: 2 é um número par e primo".

Se considerarmos as proposições

"P_1: 2 é um número par" e *"P_2: 2 é um número primo",*

temos que $R \equiv P_1 \wedge P_2$. O valor lógico de R é verdadeiro.

O valor lógico da conjunção é determinado pelos valores lógicos das proposições P e Q. Note que há 4 possibilidades de combinar os valores lógicos de proposições P e Q, a saber:

> P verdadeira e Q verdadeira; P verdadeira e Q falsa; P falsa e Q verdadeira; e P falsa e Q falsa.

Podemos então resumir o conceito de conjunção de duas proposições na seguinte Tabela 1.4 que é chamada de Tabela Verdade da Conjunção:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.4: Tabela Verdade da Conjunção

Conjunção de Sentenças Abertas

Considere A e B conjuntos e sejam $P(x)$ uma sentença aberta em A e $Q(y)$ uma sentença aberta em B. Dados $a \in A$ e $b \in B$, tem-se $P(a)$ e $Q(b)$ proposições, que naturalmente permitem fazer a conjunção de $P(a)$ e $Q(b)$ dada por

$$P(a) \wedge Q(b).$$

Dessa forma, podemos definir a conjunção de sentenças abertas:

Definição 1.6.13 (Conjunção de Sentença Aberta).

Dadas sentenças abertas $P(x)$ no conjunto A e $Q(y)$ no conjunto B, a Conjunção de $P(x)$ e $Q(y)$, que representaremos por

$$P(x) \wedge Q(y),$$

a sentença aberta em $A \times B$ tal que $P(a) \wedge Q(b)$ (a conjunção de $P(a)$ e $Q(b)$), para cada $a \in A$ e para cada $b \in B$.

Exemplo 1.6.14. *Considere os conjuntos*

$$A = \{\text{AL, BA, CE, MA, PB, PI, PE, RN, SE}\}$$

(estados do nordeste brasileiro) e H dos seres humanos, e as sentenças abertas

"$P(x)$: x tem praia"   *e*   *"$Q(y)$: y foi presidente do Brasil"*

em A e H, respectivamente. Temos a sentença aberta

"$P(x) \wedge Q(y)$: x tem praia e y foi presidente do Brasil"

em $A \times H$. Observe, por exemplo, que:

- $P(\text{AL}) \wedge Q(\text{Vargas})$ *é verdade,*
- $P(\text{SE}) \wedge Q(\text{Pelé})$ *é falsa.*

Exemplo 1.6.15. *Considere $\mathbb{N}$ e as sentenças abertas*

"$P(x)$: $x > 2$"   *e*   *"$Q(x)$: $x \leq 6$".*

A conjunção das sentenças abertas $P(x)$ e $Q(x)$ é

"$P(x) \wedge Q(x)$: $2 < x \leq 6$"

com domínio $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Veja alguns valores lógicos na Tabela 1.5.

Exemplo 1.6.16. *Considere as sentenças abertas*

"$R(x,y)$: $2x + y = 8$"   *e*   *"$S(x,y)$: $5x + 3y = 21$"*

em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Temos que

"$R(x,y) \wedge S(x,y)$: $2x + y = 8$ e $5x + 3y = 9$"

é uma sentença aberta em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ também. Por exemplo, temos:

Valor de x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \wedge Q(x)$
1	F	V	F
3	V	V	V
6	V	V	V
10	V	F	F
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.5: Valores lógicos de $P(x) \wedge Q(x)$ em $\mathbb{N}$.

- ➢ $R(1,6)$ *é verdade,*
- ➢ $S(1,6)$ *é falsa,*
- ➢ $R(3,2) \wedge S(3,2)$ *é verdade,*
- ➢ $R(1,6) \wedge S(1,6)$ *é falsa.*

Exemplo 1.6.17. *Considere as duas sentenças abertas*

"$P(x)$: x é médico" *e* *"$Q(x)$: x é professor",*

com domínio no conjunto H dos seres humanos. Assim, temos a sentença aberta em H:

"$P(x) \wedge Q(x)$: x é médico e *professor".*

1.6.4 Disjunção

Definição 1.6.18 (Disjunção).

Dadas proposições P e Q, a Disjunção de P e Q é a proposição, representada por

$$P \vee Q,$$

cujo valor lógico é V (verdadeiro), quando ao menos P ou Q possue valor lógico V, e F (falsa), quando P e Q possuem (ambas) valores lógicos F.[a]

[a] Geralmente a notação $P \vee Q$ é lida por "P ou Q".

Exemplo 1.6.19. *Exemplos de Disjunções:*

a) *Considere as proposições*

"P: José bebe suco" *e* *"Q: José bebe refrigerante".*

A disjunção de P e Q é a proposição

"$P \vee Q$: José bebe suco ou refrigerante".

b) *Considerando*

$$P: 5 < 5 \qquad e \qquad Q: 5 = 5$$

temos

$$P \vee Q: 5 \leq 5.$$

O valor lógico de $P \vee Q$ é V.

c) *Considere as proposições*

"P: 2 é um número ímpar", "Q: 2 é múltiplo de 3"

e

"R: 2 é um número primo".

A disjunção de P, Q e R é a proposição

"$P \vee Q \vee R$: 2 é um número ímpar ou múltiplo de 3 ou primo".

O valor lógico de $P \vee Q \vee R$ é V.

Observação 1.6.20. *No cotidiano fazemos uso do 'ou' de forma exclusiva. Por exemplo, na frase*

"Pedro estava estudando ou Pedro estava brincando"

estamos usando o 'ou' no sentido: ou um ou outro, mas não ambos. Em matémática o uso do 'ou' é no sentido inclusico, isto é, inclui a possibilidade 'Pedro estava estudando e Pedro estava brincando'. Mais especificamente, $P \vee Q$ é falsa somente quando ambas P e Q forem falsas. No latim clássico havia duas palavras para distinguir o ou inclusivo do exclusivo, as palavras: vel e aut, respectivamente (ver [8]).

Conforme discutido no caso da conjunção, podemos resumir o conceito de Disjunção de duas proposições na seguinte Tabela 1.6, que é chamada de Tabela Verdade da Disjunção:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.6: Tabela Verdade da Disjunção

Disjunção de Sentenças Abertas

Naturalmente análogo ao exposto sobre conjunção, considere A e B conjuntos e sejam $P(x)$ uma sentença aberta em A e $Q(y)$ uma sentença aberta em B. Dados $a \in A$ e $b \in B$, tem-se $P(a)$ e $Q(b)$ proposições que naturalmente permitem constituir a disjunção

$$P(a) \vee Q(b)$$

de $P(a)$ e $Q(b)$. Conforme a conjunção, podemos definir a disjunção de sentenças abertas como segue:

Definição 1.6.21 (Disjunção de Sentença Aberta).

Dadas sentenças abertas $P(x)$ no conjunto A e $Q(y)$ no conjunto B, a Disjunção de $P(x)$ e $Q(y)$, que representaremos por

$$P(x) \vee Q(y),$$

é a sentença aberta em $A \times B$ tal que $P(a) \vee Q(b)$ (disjunção de $P(a)$ e $Q(b)$), para cada $a \in A$ e para cada $b \in B$.

Exemplo 1.6.22. *Considere as duas sentenças abertas*

"$P(x)$: x é médico" e *"$Q(x)$: x é professor",*

com domínio no conjunto H dos seres humanos. Assim, temos a sentença aberta em H:

"$P(x) \vee Q(x)$: x é médico ou *x é professor".*

Exemplo 1.6.23. *Considere os conjuntos*

$$A = \{\text{AL, BA, CE, MA, PB, PI, PE, RN, SE}\}$$

(estados do nordeste brasileiro) e H dos seres humanos, e as sentenças abertas

"$P(x)$: x tem praia" e *"$Q(y)$: y foi presidente do Brasil"*

em A e H, respectivamente. Temos a sentença aberta

"$P(x) \vee Q(y)$: x tem praia ou *y foi presidente do Brasil"*

em $A \times H$. Observe, por exemplo, que:

- $P(\text{AL}) \vee Q(\text{Mandela})$ *é verdade,*
- $P(\text{SE}) \vee Q(\text{Pelé})$ *é verdade.*

Note que todos os estados do Nordeste possuem praia. Então, $\forall x \in A; P(x)$ é verdade. Consequentemente, também

$$\forall\ x \in A, \forall\ y \in H; P(x) \vee Q(y)$$

é verdadeira.

Exemplo 1.6.24. *Considere o conjunto $\mathbb{N}$ e as sentenças abertas*

$$\text{“}P(x)\text{: } x < 3\text{”} \qquad e \qquad \text{“}Q(x)\text{: } x \geq 7\text{”.}$$

A disjunção aberta definida por $P(x)$ e $Q(x)$ é

$$\text{“}P(x) \vee Q(x)\text{: } x < 3 \quad ou \quad x \geq 7\text{”}$$

com domínio $\mathbb{N}$. Veja alguns valores lógicos na Tabela 1.7.

Valor de x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \vee Q(x)$
1	V	F	V
3	F	F	F
6	F	F	F
10	F	V	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.7: Valores lógicos de $P(x) \vee Q(x)$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.6.25 (União e Interseção de Conjuntos). *Considere A e B conjuntos quaisquer. A União de A e B é o conjunto formado por todos os elementos de A ou de B (veja o axioma da União, Exemplo 1.1.6). Denotamos a união por $A \cup B$. Podemos considerar a sentença aberta*

$$\text{“}P(x) : x \in A \vee x \in B\text{”}$$

como tendo domínio $A \cup B$. Dessa forma, é possível escrever

$$A \cup B = \{x : P(x)\} = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Agora podemos considerar a sentença aberta

$$\text{“}Q(x) : x \in A \wedge x \in B\text{”}$$

com domínio $A \cup B$. Logo, pela especificação de conjuntos, temos o

$$\{x \in A \cup B : Q(x)\} = \{x \in A \cup B : x \in A \wedge x \in B\},$$

que é chamado de Conjunto Interseção *de A e B. Denotamos o conjunto interseção por $A \cap B$, e escrevemos*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Em palavras, o conjunto interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos de A que também são elementos de B. Por exemplo, se

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \qquad e \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\},$$

temos

$$\mathbb{N} = A \cup B \qquad e \qquad A \cap B = \varnothing.$$

Observação 1.6.26. *A diferença entre o uso comum e o uso matemático do conectivo "ou" é ilustrada pela anedota do obstetra que também era matemático (ver [6, p.18]):*

> *"Ao sair da sala onde acabara de realizar um parto, foi abordado pelo pai da criança, que lhe perguntou: Foi menino ou menina, doutor? Resposta do médico: Sim!"*

Note que se A é o conjunto das meninas*, B* o conjunto dos meninos e x o recém-nascido*, com certeza se tem $x \in A \cup B$.*

1.6.5 Condicional e Bicondicional

Antes de definir o conectivo condicional, diferentemente da conjunção e disjunção, como forma de fixar e contextualizar o entendimento, consideremos a seguinte situação:

> *Um aluno está com notas ruins na disciplina Cálculo e seu professor fez-lhe a seguinte afirmação:*
>
> *"Se estudar bastante, então será aprovado na disciplina".*

Em que situação o professor mentirá? Observe que o professor mentirá somente no caso em que o aluno estude bastante e não consiga a aprovação. Note ainda que, se o aluno não estudar bastante e ainda assim for aprovado, o professor não mentiu. Essa situação motiva o conceito de condicional.

Definição 1.6.27 (Condicional).

Chama-se Proposição Condicional *(ou simplesmente* Condicional*) de duas proposições P e Q, a proposição representada por*

$$P \to Q,$$

cujo valor lógico é falso*, apenas quando P é verdadeira e Q é falsa,* e verdadeiro*, nos demais casos.*[a]

[a] A notação $P \to Q$ é lida mais comumente por "se P então Q". Além disso, P é chamada de **Antecedente** e Q chamada de **Consequência**.

Novamente temos a condicional definida a partir de duas proposições, e também nesse caso vale o que discutimos no caso da conjunção, de modo que podemos resumir o conceito de condicional de duas proposições na Tabela 1.8, que chamamos Tabela Verdade da Condicional. Ela apresenta todos possíveis valores lógicos para a condicional $P \to Q$ a partir dos valores lógicos possíveis para P e Q.

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.8: Tabela Verdade da Condicional

Exemplo 1.6.28. *Exemplos de Condicionais:*

a) *Considere as proposições*

"P: 2 é um número par" *e* *"Q: 3 é um número ímpar".*

A proposição P condicional Q é

"$P \to Q$: Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar."

O valor lógico de $P \to Q$ é verdadeiro.

b) *A proposição*

"Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar"

tem valor lógico falso.

c) *A proposição*

"Se 2 é um número ímpar, então Brasília é a capital do Brasil"

tem valor lógico verdadeiro.

d) *A proposição "Se $0 = 1$, então $1 = 1$." tem valor lógico verdadeiro.*

Observação 1.6.29. i) *O item c) do exemplo anterior deixa claro que a condicional $P \to Q$ não pressupõe uma relação causal entre as proposições P e Q.*

ii) *Já o item d) do exemplo anterior deixa claro que a partir de uma informação falsa pode-se chegar a uma verdadeira (de fato, perceba que $0 = 1$ também é $1 = 0$, e assim, somando as duas igualdades, chega-se a $1 = 1$).*

Análogo ao conceito de Condicional, podemos estabelecer a chamada proposição Bicondicional.

Definição 1.6.30 (Bicondicional).

Chama-se Proposição Bicondicional *(ou apenas* Bicondicional*) das proposições P e Q, a proposição representada por*

$$P \leftrightarrow Q, \ ^{a}$$

cujo valor lógico é verdade*, quando P e Q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e* falso*, nos demais casos.*

[a] A notação $P \leftrightarrow Q$ é lida mais comumente por "P se, e somente se, Q".

Os possíveis valores lógicos da Bicondicional a partir dos valores lógicos de P e Q, estão dispostos na Tabela 1.9, que é chamada de Tabela Verdade da Bicondicional. Note que a Bicondicional $P \leftrightarrow Q$ tem então valor lógico verdadeiro quando P e Q têm valores lógicos iguais, e valor lógico falso quando P e Q têm valores lógicos diferentes.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.9: Tabela Verdade da Bicondicional

Exemplo 1.6.31. *Exemplos práticos de bicondicionais:*

a) Considere as proposições

"P: Roma é a capital da Itália" e *"Q: Paris é a capital da França".*

A bicondicional de P e Q é a proposição

"$P \leftrightarrow Q$: Roma é a capital da Itália se, e somente se*, Paris é a capital da França".*

A bicondicional é verdadeira, pois P é verdadeira e Q é verdadeira.

b) Considere as proposições

"R: Campinas é um estado brasileiro" e *"T: O sol é um planeta".*

A bicondicional de R e T é a proposição

"$R \leftrightarrow T$: Campinas é um estado brasileiro se, e somente se*, o sol é um planeta".*

A bicondicional é verdadeira, pois R é falsa (Campinas é uma cidade brasileira, e não um estado) e T é falsa (O sol é uma estrela, e não um planeta).

c) Considere as proposições

"S: Cantor nasceu na Rússia" e *"K: Fermat era médico".*

A bicondicional de S e K é a proposição

"$S \leftrightarrow K$: Cantor nasceu na Rússia se, e somente se*, Fermat era médico".*

A bicondicional é falsa, pois S é verdadeira e K é falsa.

Assim como no caso da condicional, a bicondicional foge em parte ao nosso interesse pois, por exemplo, o caso em que as duas proposições são ambas falsas não possui qualquer essência dedutiva, conforme pode ser obervado no item *b)* do Exemplo 1.6.31. Portanto, análogo ao caso da condicional, na linguagem lógica formal, a última linha da Tabela Verdade da Bicondicional (Tabela 1.9), trata-se de uma convenção, pois é naturalmente necessário designar um valor lógico para cada uma das quatros possibilidades, mesmo que muito embora o caso em que P e Q são ambas falsas pareça sem sentido.

1.7 Proposições Compostas e Tabelas Verdade

Para uma apresentação com maior precisão dos conceitos que serão explorados nas próximas seções, iniciaremos esta por definir o que são Proposições Simples e Proposições Compostas:

Definição 1.7.1 (Proposição Simples).

Diz-se que uma proposição é uma Proposição Simples *quando ela não possui qualquer outra proposição como parte integrante de si mesma.* [a]

[a] As proposições simples são também chamadas na literatura de *Proposições Atômicas.*

São exemplos de proposições simples todas aquelas proposições do Exemplo 1.3.3.

Exemplo 1.7.2. *Exemplos de proposições simples:*

(a) P :"João é médico";

(*b*) Q :*"Aracaju tem praia";*

(*c*) R :*"Getúlio Vargas é presidente do Brasil";*

(*d*) $\sim P$:*"João não é médico".*

Definição 1.7.3 (Proposição Composta).

Diz-se que uma proposição é uma Proposição Composta *quando ela é constituída pela combinação de duas ou mais proposições.* [a]

[a] As proposições compostas são também chamadas de *Proposições Moleculares*.

Vários dos exemplos que já vimos são exemplos de proposições compostas.

Exemplo 1.7.4. *Considere P, Q e R proposições. São exemplos de proposições compostas:*

(*a*) $P \wedge Q$;

(*b*) *"José bebe suco ou refrigerante"*

(*c*) $P \rightarrow Q$;

(*d*) $\sim Q \rightarrow \sim P$;

(*e*) $P \leftrightarrow Q$;

(*f*) $(P \wedge Q) \vee R$;

Notação 1.7.5. *Comumente representamos proposições simples ou compostas por letras maúsculas P, Q, R, S, T, P_1, S_1, etc; o que fizemos até aqui reforça isso. Porém, há situações que podem gerar risco de confusão. Nesses casos nós devemos usar a notação*

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

para representar uma proposição que é composta pelas proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Por exemplo, as proposições

$$(Q \leftrightarrow R) \vee S \qquad e \qquad (T_1 \vee T_4) \wedge (T_3 \rightarrow T_2)$$ [10]

também podem ser representadas, respectivamente, na forma

$$P(Q, R, S) \qquad e \qquad T(T_1, T_2, T_3, T_4).$$

Tabelas Verdade

Determinar o valor lógico de uma proposição composta é algo não imediato ao primeiro olhar, principalmente quando o número de proposições envolvidas não é pequeno. Até mesmo em casos de proposições compostas bastante simples não é imediato saber com certeza se a mesma é verdadeira ou falsa. Por exemplo, a proposição

$$(P \wedge R) \rightarrow ((\sim Q) \vee R)$$

[10] Os parênteses são colocados na ordem em que os conectivos lógicos são usados entre as proposições que formam a proposição composta.

é verdadeira, mas, convenhamos, esta não é uma conclusão com garantia plena imediatamente feita à primeiro vista.

Conforme já vimos quando definimos os conectivos lógicos, particularmente a conjunção, a partir dos valores lógicos de duas proposições, há 4 possibilidade de valores lógicos para os conectivos e nós os organizasmos em tabelas que chamamos de tabelas verdade. Nós agora vamos tratar das chamadas tabelas verdade de uma proposição composta.

Dada uma proposição

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

composta por n proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$, admitidos conhecidos os valores lógicos de $P_1, P_2, \ldots, P_n$, é possível organizar em forma de tabela todos os possíveis casos em que a proposição $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ tem exatamente valor lógico verdadeiro - que na tabela é representado apenas pela letra V - e exatamente todas as possibilidades com valor lógico falso - que é representado na tabela apenas pela letra F. Tal tabela é chamada de **Tabela Verdade** de $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. O número de linhas e colunas da tabela depende do número de conectivos lógicos e de n que constituem a proposição $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$.

Observação 1.7.6 (**Número de Linhas de Tabela Verdade**).

O número de linhas da Tabela Verdade de uma proposição $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ é

$$2^n.$$

O referido número de linhas ser 2^n é devido a cada proposição P_i, que compõem $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, ter apenas e somente duas possibilidades de valor lógico, V ou F, e que são distintas. Uma explicação é que, como são n proposições que constituem $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, a quantidade de atribuir V e F às proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$ é igual ao arranjo com repetição de n, tomados 2 a 2, ou seja, 2^n. Quando tivermos estudando sobre Indução Finita poderemos apresentar uma prova rigorosa para este fato.

A construção de uma tabela verdade de uma proposição $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ segue então os seguintes passos (algoritmo):

Passo 1: Iniciamos com uma tabela formada por $2^n + 1$ linhas e n colunas, onde a 1^a linha (até a n-ésima coluna) é preenchida com as proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Veja o exemplo da Tabela 1.10, para o caso $n = 3$.

Passo 2: Na tabela incial construída no Passo 1, seguimos os seguintes procedimentos (veja o exemplo para $n = 3$ na Tabela 1.11.):

Coluna de P_1: preencha na coluna de P_1, a partir da linha 2, a primeira metade das linhas de V e a metade seguinte de F, ou seja, a partir da linha 2, preencha as $2^n/2 = 2^{n-1}$ linhas de V e as 2^{n-1} linhas seguintes de F.

P_1	P_2	P_3

Tabela 1.10: Construção de Tabelas Verdade - Passo 1, para $n = 3$

Coluna de P_2: preencha na coluna de P_2, a partir da linha 2, o primeiro quarto das linhas de V, o quarto seguinte de F, o quarto seguinte de V e, finalmente, o quarto seguinte de F, ou seja, a partir da linha 2, preencha as $2^n/2^2 = 2^{n-2}$ linhas de V, as 2^{n-2} linhas seguintes de F, as 2^{n-2} linhas seguintes de V e as 2^{n-2} linhas seguintes de F.

Coluna de P_3: preencha na coluna de P_3, a partir da linha 2, as $2^n/2^3 = 2^{n-3}$ linhas de V, as 2^{n-3} linhas seguintes de F, as 2^{n-3} linhas seguintes de V, as 2^{n-3} linhas seguintes de F, e assim por diante até finalmente as últimas 2^{n-3} linhas preenchidas de F.

Segue-se esses procedimentos de preenchimentos das colunas até chegar a última, a coluna de P_n, que terá as 2^n linhas preenchidas por V e F se alternando linha a linha.

P_1	P_2	P_3
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Tabela 1.11: Construção de Tabelas Verdade - Passo 2, para $n = 3$

Passo 3: A partir da tabela construída no Passo 2, vamos adicionando novas colunas à direita (a partir da coluna de P_n) para as proposições compostas que juntas constituem a proposição $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, até que se chegue finalmente em $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Veja a Tabela 1.12.

P_1	P_2	P_3	$Q(P_1, P_2)$	$\cdots$	$P(P_1, P_2, P_3)$
V	V	V		$\cdots$	
V	V	F		$\cdots$	
V	F	V		$\cdots$	
V	F	F		$\cdots$	
F	V	V		$\cdots$	
F	V	F		$\cdots$	
F	F	V		$\cdots$	
F	F	F		$\cdots$	

Tabela 1.12: Construção de Tabelas Verdade - Passo 3, para $n = 3$

Exemplo 1.7.7. *A proposição*

$$\boxed{P \wedge (\sim Q),}$$

formada pela conjunção das proposições P e $\sim Q$, tem como Tabela Verdade a Tabela 1.13, formatada com o passo a passo da construção.

P	Q	$\sim Q$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Tabela 1.13: Tabela Verdade da proposição $P \wedge (\sim Q)$.

Exemplo 1.7.8. *A proposição*

$$\boxed{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

é constituída pelas 3 proposições P, Q e R, com 2 conectivos. Seguindo o passo a passo da construção, temos a Tabela 1.14, a Tabela Verdade da proposição $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

1.8 Equivalências Lógicas, Tautologias e Contradições

Iniciamos esta seção por formalizar através de uma definição a notação que já fazemos uso desde a definição de proposição - veja a Notação 1.3.2. Denotemos por

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad \text{e} \qquad S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

proposições compostas constituídas pelas proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Tabela 1.14: Tabela Verdade da proposição $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Equivalências Lógicas

Definição 1.8.1 (Equivalência Lógica).

Diz-se que duas proposições $R(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ e $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ são Logicamente Equivalentes[a] *quando possuem os mesmos valores lógicos, e representamos por*

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n) \equiv S(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

[a]Também é comum usar como expressões sinônimas: "*Equivalência Lógica*" e "*Equivalentes Logicamente*".

A forma certamente mais prática e simples para verificar que proposições são logicamente equivalentes é construir a tabela verdade e conferir se as colunas com os possíveis valores lógicos de $R(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ e $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ são iguais.

Exemplo 1.8.2. *Considere P uma proposição. Vale a equivalência lógica*

$$\boxed{\sim (\sim P) \equiv P.}$$

Note que é natural a negação da negação da proposição P ser a própria P. De fato, por exemplo, pela definição, para $\sim (\sim P)$ ser verdadeiro, *faz-se necessário que $(\sim P)$ seja falso, e essa por sua vez, requer P* verdadeiro. *Portanto, $\sim (\sim P) \equiv P$. Veja*

P	$\sim P$	$\sim (\sim P)$
V	F	V
F	V	F

Tabela 1.15: Tabela Verdade de $\sim (\sim P)$.

a Tabela 1.15. Observe que a coluna de $\sim (\sim P)$ tem exatamente os mesmos valores lógicos da coluna de P.

Exemplo 1.8.3. (Leis de De Morgan) *Dadas proposições P e Q, temos as seguintes equivalências lógicas para conjunção e disjunção:*

$$\boxed{\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q) \qquad e \qquad \sim (P \vee Q) \equiv (\sim P) \wedge (\sim Q).}$$

Vamos verificar a primeira equivalência lógica; a segunda segue de forma análoga. Para verificarmos que de fato as duas proposições

$$\sim (P \wedge Q) \qquad e \qquad (\sim P) \vee (\sim Q),$$

são logicamente equivalentes, precisamos comparar os possíveis valores lógicos de cada uma e verificar se as possibilidades são de fato iguais. Para tanto, construímos então as tabelas verdade de $\sim (P \wedge Q)$ *e* $(\sim P) \vee (\sim Q)$ *- veja as Tabelas 1.16 e 1.17, respectivamente. Conferindo linha a linha as colunas de* $\sim (P \wedge Q)$ *e* $(\sim P) \vee (\sim Q)$

P	Q	$P \wedge Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$	$\sim (P \wedge Q)$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Tabela 1.16: Tabela com os valores lógicos de $\sim (P \wedge Q)$.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P) \vee (\sim Q)$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Tabela 1.17: Tabela com os valores lógicos de $(\sim P) \vee (\sim Q)$.

nas Tabelas 1.16 e 1.17, respectivamente, concluímos portanto que

$$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P) \vee (\sim Q).$$

Vamos fixar mais o entendimento de como podemos utilizar as leis de De Morgan de forma prática:

Exemplo 1.8.4. *Sejam as proposições:*

"P: João foi à feira" $\qquad$ *e* $\qquad$ *"Q: Maria foi passear de avião".*

Podemos formar a conjunção "$P \wedge Q$*",*

"João foi à feira e *Maria foi passear de avião".*

Fazendo a negação de "$P \wedge Q$*" utilizando as Leis de De Morgan, temos:*

"$(\sim P) \vee (\sim Q)$*",*

ou seja,

$$\text{“}\underbrace{\textit{João} \text{ não } \textit{foi à feira}}_{(\sim P)} \text{ ou } \underbrace{\textit{Maria} \text{ não } \textit{foi passear de avião}}_{(\sim Q)}\text{”.}$$

Observação 1.8.5. *As Leis de De Morgan, nos diz basicamente que:*

(I) Negar que duas proposições são verdadeiras ao mesmo tempo, equivale a afirmar que uma ao menos é falsa.

(II) Negar que pelo menos uma de duas proposições é verdadeira, equivale a afirmar que ambas são falsas.

De forma intuitiva, as Leis de De Morgan exprimem que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

No Exemplo 1.8.3 fizemos a verificação das Leis de De Morgan construindo separadamente duas tabelas (Tabelas 1.16 e 1.17). No entanto, em muitas situações é bem mais prático construir os possíveis valores lógicos das proprosição compostas que se deseja verificar uma equivalência lógica numa mesma tabela.

Exemplo 1.8.6. (**Negação da Condicional**) *Dadas proposições P e Q, temos válida da seguinte equivalência lógica:*

$$\boxed{\sim (P \to Q) \equiv P \wedge (\sim Q).} \tag{1.22}$$

Para verificar (1.22) *construímos a Tabela 1.18, onde nas duas últimas colunas estão*

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$\sim (P \to Q)$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Tabela 1.18: Verificação de (1.22)

dispostos os possíveis valores lógicos para $\sim (P \to Q)$ e $P \wedge (\sim Q)$, respectivamente.

Propriedades sobre os conectivos lógicos são muitas. No próximo exemplo apresentamos algumas das principais propriedades que envolvem conjunção e disjunção.

Exemplo 1.8.7 (**Algumas Propriedades Básicas dos Conectivos**). *Dadas proposições P, Q e R, são válidas as seguintes equivalência lógicas:*

a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ *(Comutatividade da Conjunção);*

b) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ *(Comutatividade da Disjunção);*

c) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ *(Associatividade da Conjunção);*

d) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ *(Associatividade da Disjunção);*

e) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *(Distributividade);*

f) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Faremos a tabela verdade para verificar apenas a equivalência lógica do item e), pois os demais são verificados de forma similar - os demais itens ficam como exercícios práticos para o leitor. Seguindo o passo a passo, construímos a Tabela 1.19, que apresenta as colunas com todos os possíveis valores lógicos de $P \wedge (Q \vee R)$ *e* $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$*, garantindo então a validade da equivalência lógica do item e), conforme se verifica linha a linha.*

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Tabela 1.19: Verificação do item *e)*.

Exemplo 1.8.8 (**Condicional e Contrapositiva**). *Uma equivalência lógica que merece destaque é a equivalência entre uma condicional* $P \to Q$ *e sua* contrapositiva*:* $(\sim Q) \to (\sim P)$. *Simbolicamente, temos*

$$\boxed{(P \to Q) \equiv (\sim Q) \to (\sim P).} \tag{1.23}$$

A comprovação da equivalência lógica pode ser observada na Tabela 1.20.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$(\sim Q) \to (\sim P)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.20: Verificação de (1.23).

Exemplo 1.8.9 (Implicação e Inversa). *Dadas proposições P e Q, temos que as proposições*

$$P \to Q \qquad e \qquad (\sim P) \to (\sim Q),$$

não são equivalentes logicamente. De fato, a Tabela 1.21 mostra que as proposições possuem valores lógicos diferentes.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$(\sim P) \to (\sim Q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.21: Valores lógicos de $P \to Q$ e $(\sim P) \to (\sim Q)$.

Exemplo 1.8.10 (Bicondicional). *Dadas proposições P e Q, é válida a equivalência lógica que envolve a bicondicional como logicamente equivalente a conjunção de condicionais:*

$$\boxed{(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \to Q) \land (Q \to P)).} \tag{1.24}$$

A Tabela 1.22 mostra a validade de equivalência lógica (1.24).

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \to Q) \land (Q \to P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Tabela 1.22: Verificação de (1.24).

Exemplo 1.8.11 (Negação da Bicondicional). *Temos a negação da bicondicional através de equivalência lógica. De fato:*

$$\boxed{\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \land \sim Q) \ \lor (Q \land \sim P)).} \tag{1.25}$$

Para garantir que esta equivalência de fato é válida podemos construir a tabela verdade (fica como exercício para o leitor a comprovação da equivalência lógica através da tabela verdade). No entanto, é também possível concluir tal validade observando os seguintes argumentos: por (1.24), vale a equivalência lógica

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \to Q) \land (Q \to P)). \tag{1.26}$$

Vimos também em (1.22) que são válidas as negações:

$$\sim (P \to Q) \equiv (P \wedge \sim Q) \qquad e \qquad \sim (Q \to P) \equiv (Q \wedge \sim P). \tag{1.27}$$

Com as Leis de De Morgan (Exemplo 1.8.3), a negação de (1.26) é:

$$\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv (\sim (P \to Q) \vee \sim (Q \to P)).$$

Juntando essa equivalência lógica às equivalências de (1.27), concluímos válida a equivalência lógica:

$$\sim (P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge \sim Q) \ \vee (Q \wedge \sim P)).$$

Portanto, a negação de $(P \leftrightarrow Q)$ pode ser considerada como em (1.25).

Tautologias

Definição 1.8.12 (Tautologia).

Diz-se que uma proposição composta $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ é uma Tautologia[a] *quando seu valor lógico é* ***sempre verdade****, independentemente dos valores lógicos de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.*

[a] É comum o uso das expressões "*Proposição Tautológica*" e "*Proposição Logicamente Verdadeira*" como sinônimas de Tautologia.

Exemplo 1.8.13. *Considere P uma proposição. A proposição*

$$\boxed{P \ \vee (\sim P)}$$

é uma Tautologia. De fato, a Tabela 1.23 mostra que a coluna com os valores lógicos de $P \ \vee (\sim P)$ é constituída apenas do valor lógico V, indepedente dos valores lógicos das proposições P e $\sim P$.

P	$\sim P$	$P \ \vee (\sim P)$
V	F	V
V	F	V
F	V	V
F	V	V

Tabela 1.23: Tabela com valores lógicos de $P \ \vee (\sim P)$.

Exemplo 1.8.14 (Silogismo Hipotético ou "Transitividade"). *Dadas proposições P, Q e R, a proposição*

$$\text{“}S : se\ (P \to Q)\ e\ (Q \to R),\ então\ (P \to R)\text{”}$$

é uma tautologia. Para garantir que temos de fato uma tautologia, construímos a tabela verdade da proposição S. Seguindo o passo a passo da construção chegamos à Tabela 1.24, que mostra de fato a coluna com os valores lógicos de S preenchida apenas com V.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$	$P \to R$	S
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tabela 1.24: Tabela com valores lógicos de $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$.

Contradições

Podemos pensar uma contradição como sendo a negação de uma tautologia. Precisamente, temos:

Definição 1.8.15 (Contradição).

Diz-se que uma proposição composta $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ é uma Contradição[a] *quando seu valor lógico é **sempre falso**, independentemente dos valores lógicos de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.*

[a] Usa-se como sinônimas de contradição as expressões "*Contra-tautologia*", "*Proposição Contra-válida*" e "*Proposição Logicamente Falsa*".

Exemplo 1.8.16. *Considere uma proposição P. A proposição*

$$\boxed{P \wedge (\sim P)}$$

é uma Contradição. De fato, a Tabela 1.25 mostra a Tabela Verdade da proposição

P	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
V	F	F
V	F	F
F	V	F
F	V	F

Tabela 1.25: Tabela com valores lógicos de $P \wedge (\sim P)$.

$P \wedge (\sim P)$, e na coluna dos valores lógicos da referida proposição verificamos que há apenas o valor lógico F.

Observação 1.8.17. *Conforme já comentado, uma contradição é a negação de uma tautologia, bem como uma tautologia é a negação de uma contradição. As proposições*

$$\boxed{P \ \vee (\sim P) \qquad e \qquad P \ \wedge (\sim P)}$$

ilustram de forma bem elementar essa dualidade entre tautologia e contadição. Com efeito, note que as Leis de De Morgan (veja Exemplo 1.8.3) nos garentem que

$$\boxed{\sim [P \ \vee (\sim P)] \equiv [(\sim P) \wedge P] \qquad e \qquad \sim [P \ \wedge (\sim P)] \equiv [(\sim P) \vee P],}$$ [11]

ou seja, temos exatamente que a negação da tautologia do Exemplo 1.8.13 é a contradição do Exemplo 1.8.16, e vice-versa.

Exemplo 1.8.18. *Considere proposições P e Q. A proposição*

$$\boxed{((P \wedge (\sim Q)) \leftrightarrow (P \to Q).}$$

é uma contradição. A Tabela 1.26 demonstra que de fato temos uma contradição.

P	Q	$\sim Q$	$P \wedge (\sim Q)$	$P \to Q$	$((P \wedge (\sim Q)) \leftrightarrow (P \to Q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Tabela 1.26: Exemplo de contradição

Observação 1.8.19. *Costuma-se chamar na literatura de* **Contingência** *as proposições compostas $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ que não são tautologias nem contradições. São exemplos de contingências as proposições compostas por P e Q:*

$$\boxed{P \vee Q \qquad e \qquad P \ \wedge (\sim Q).}$$

Veja as Tabelas 1.6 e 1.18.

1.9 Implicações e Equivalências Lógicas

Esta seção iniciamos por destacar os motivos de existir dela. Já desde a Observação 1.6.29, chamou-se a atenção para o fato de a proposição condicional $P \to Q$ não

[11] Deve-se observar que a cunjunção e a disjunção são comutativas, isto é, valem as equivalências lógicas $(R \wedge S) \equiv (S \wedge R)$ e $(R \vee S) \equiv (S \vee R)$, o que significa dizer que a ordem das proposições que compõem a conjunção e a disjunção não altera o valor lógico.

pressupor qualquer relação causal entre as proposições P e Q. Ainda na mesma observação, destacou-se o fato de que mesmo na condição de P ser falsa, ainda assim teremos a condicional $P \to Q$ verdadeira, independetemente do valor lógico de Q ser falso o verdade (veja a Tabela 1.8).

A existência desta seção está na característica da proposição condicional

$$\text{“}P \to Q\text{”},$$

afasta-se completamente do uso ordinário dedutivo de interesse do

“Se P então Q”.

De fato, a condicional “$P \to Q$” **não afirma** que a consequente Q se **deduz** ou é **consequência** do antecedente P. Reforçando o que já fora dito, por exemplo, a condicional do item c) do Exemplo 1.6.28:

“Se 2 é um número ímpar, então Brasília é a capital do Brasil”,

é verdadeira (pois P é falsa e Q é verdadeira), porém qual o sentido e interesse em se ter uma proposição como esta? Mais ainda, o fato de a condicional no item d) do Exemplo 1.6.28:

$$\text{“}0 = 1 \to 1 = 1\text{”},$$

ser verdadeira, pode induzir a gente a imaginar, ao menos num primeiro momento, que uma verdade auto-evidente como “$1 = 1''$ **se deduz** do fato de

$$\text{“}0 = 1\text{”},$$

algo completamente sem sentido e equivocado.

1.9.1 Implicações Lógicas

Apresentadas estas considerações sobre a Condicional, que mostram a mesma não possuir características dedutivas, precisamos ajustar os conceitos para que sejamos capazes de fazer inferências e tenhamos ferramentas que auxiliem tomadas de decisões corretas. Dito isto, esta seção será desenvolvida e pautada com foco no uso do

“Se P então Q”

no sentido estritamente dedutivo, isto é, queremos usá-lo apenas quando Q se **deduz** ou é **consequência** de P. Por exemplo,

“Se Maria tem irmão então Maria não é filha única”.

Neste caso, passamos a estudar o conceito de Implicação.

Definição 1.9.1 (Implicação).

Diremos que uma proposição P implica logicamente *uma proposição Q (ou simplesmente P* implica *Q), representada por*

$$P \Rightarrow Q,$$

quando Q é verdadeira sempre que P é verdadeira.[a]

[a] A notação $P \Rightarrow Q$ é também lida comumente por "se P então Q".

Exemplo 1.9.2. *Exemplos de implicações:*

a) Considere as proposições

"P: Pedro é sergipano" e *"Q: Pedro é brasileiro".*

A proposição P implica Q é a proposição

"$P \Rightarrow Q$: Se *Pedro é sergipano,* então *Pedro é brasileiro".*

A implicação é verdadeira, de acordo com a Definição 1.9.1, pois Pedro será brasileiro, sempre que Pedro for sergipano.

b) Considere as proposições

"R: João trabalha bastante" e *"T: João é rico".*

A proposição R implica T é a proposição

"$R \Rightarrow T$: Se *João trabalha bastante,* então *João é rico".*

A implicação é falsa, pois João pode trabalhar bastante, e ainda assim não ser rico, visto que para ser rico depende de vários fatores, inclusive o tipo de trabalho que João exerce.

c) Considere as proposições

"S: Amanhã não irá chover" e *"K: Maria irá à praia".*

A proposição S implica K é a proposição

"$S \Rightarrow K$: Se *amanhã não chover,* então *Maria irá à praia".*

Observe que, no caso de $S \Rightarrow K$ verdadeira, concluímos que Maria irá à praia se não chover amanhã.

Notação 1.9.3. *A implicação é expressa de diversas formas, variando de texto para texto. Usaremos aqui as mais comuns: dadas proposições P e Q, expressaremos $P \Rightarrow Q$ também por*

"P implica Q", "se P então Q", "se P, então Q",

"P é condição suficiente para Q" ou "Q é condição necessária para P".

*Além disso, P é chamada de **Hipótese** (ou **Premissa**) e Q chamada de **Tese** (ou **Conclusão**).*

Observação 1.9.4. *Não é raro as pessoas confundirem* "necessário" *com* "suficiente". *Geralmente os alunos têm mais facilidade de usar corretamente a palavra* "suficiente" *do que a palavra* "necessário", *provavelmente porque "suficiente" é sinônimo de "bastante". Talvez isso também tenha a ver com o fato de que uma condição suficiente é geralmente mais forte do que a conclusão que se quer chegar. Por exemplo, para que um polígono seja um retângulo é suficiente que seja um quadrado. Por outro lado, uma condição necessária é, em geral, mais fraca do que a conclusão desejada. Assim, por exemplo, para que um polígono seja um quadrado, é necessário que seja um retângulo, mas esta propriedade somente não assegura que o polígono seja um quadrado (para mais detalhes, consulte [6, p.11]).*

Exemplo 1.9.5. *Com a implicação podemos destacar algumas propriedades básicas da equivalência lógica. Considere as proposições $R(P_1, P_2, \ldots, P_n), S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ e $T(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. São propriedades da Equivalência Lógica:*

☞ $R \equiv R$,

☞ $R \equiv S \quad \Rightarrow \quad S \equiv R$,

☞ $(R \equiv S \;\text{ e }\; S \equiv T) \quad \Rightarrow \quad R \equiv T$,

respectivamente chamadas de Reflexiva, Simétrica e Transitiva. Estas são propriedades com verificações elementares: note, no segundo caso, que S terá mesmo valor lógico que R sempre que R tenha o mesmo valor lógico que S. No terceiro caso, é imediato que R terá mesmo valor lógico que T sempre que R tenha o mesmo valor lógico que S e S tenha o mesmo valor lógico que T.

Definição 1.9.6 (Contrapositiva).

Dadas proposições P e Q, chamamos de Contrapositiva *da implicação $P \Rightarrow Q$, a proposição*

$$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P).$$

Exemplo 1.9.7. *Considere as proposições*

$$\text{“}P\text{: eu sou sergipano”} \quad \text{e} \quad \text{“}Q\text{: eu sou brasileiro”.}$$

Temos a implicação

$$\text{“}P \Rightarrow Q\text{: Se eu sou sergipano, então eu sou brasileiro”.}$$

A Contrapositiva da implicação “$P \Rightarrow Q$”, é a proposição

$$\text{“}(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)\text{: Se eu não sou brasileiro, então eu não sou sergipano”.}$$

Definição 1.9.8 (Inversa de uma Implicação).

Dadas proposições P e Q, chamamos de Inversa *da implicação $P \Rightarrow Q$, a proposição*

$$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q).$$

Exemplo 1.9.9. *Considere as proposições*

$$\text{“}P\text{: eu sou sergipano”} \quad \text{e} \quad \text{“}Q\text{: eu sou brasileiro”.}$$

Temos a implicação

$$\text{“}P \Rightarrow Q\text{: Se eu sou sergipano, então eu sou brasileiro”.}$$

A Inversa da implicação “$P \Rightarrow Q$”, é a proposição

$$\text{“}(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)\text{: Se eu não sou sergipano, então eu não sou brasileiro”.}$$

Observação 1.9.10. *Note que a contrapositiva e a inversa de proposições são proposições bem distintas. Observe que, enquanto no Exemplo 1.9.7 temos a contrapositiva verdadeira, no Exemplo 1.9.9 a inversa é falsa.*

Definição 1.9.11 (Recíproca de uma Implicação).

Dadas duas proposições P e Q, considere a implicação $P \Rightarrow Q$. A proposição

$$Q \Rightarrow P,$$

é chamada Recíproca *da implicação $P \Rightarrow Q$.*

Exemplo 1.9.12. *Considere mais uma vez as proposições*

$$\text{“}P\text{: eu sou sergipano”} \quad \text{e} \quad \text{“}Q\text{: eu sou brasileiro”.}$$

Temos a implicação

$$\text{“}P \Rightarrow Q\text{: Se } \textit{eu sou sergipano,} \text{ então } \textit{eu sou brasileiro”,}$$

cuja Recíproca é

$$\text{“}Q \Rightarrow P\text{: Se } \textit{eu sou brasileiro,} \text{ então } \textit{eu sou sergipano”.}$$

Observação 1.9.13. *É importante observar que o fato de uma implicação $P \Rightarrow Q$ ser uma proposição verdadeira, não garante que sua recíproca também seja verdadeira, conforme mostra o Exemplo 1.9.12.*

Implicação de Sentenças Abertas

Considere A um conjunto e sejam $P(x)$ e $Q(x)$ sentenças abertas em A. Dado $a \in A$, tem-se $P(a)$ e $Q(a)$ proposições que permitem constituir a implicação de $P(a)$ e $Q(a)$ dada por

$$P(a) \Rightarrow Q(a).$$

Podemos assim definir a implicação de sentenças abertas:

Definição 1.9.14 (Implicação de Sentenças Abertas).

Considere A um conjunto e sejam $P(x)$ e $Q(x)$ sentenças abertas em A. Diz-se que a sentença aberta $P(x)$ Implica Logicamente *a sentença aberta $Q(x)$, representada por*

$$P(x) \Rightarrow Q(x),$$

quando a implicação $P(a) \Rightarrow Q(a)$ é verdadeira, para cada $a \in A$; e diz-se que Não Implica Logicamente, *caso contrário.*

Por simplicidade usamos mais constantemente apenas as palavras “Implica” e “Implicação” em detrimento da expressão “Implica Logicamente”.

Observação 1.9.15. *Como nos casos de conjunções e disjunções, poderíamos considerar duas sentenças abertas com variáveis livres e domínios distintos. Porém, esse caso recairia na situação de “condicional aberta”, que não é de tanto interesse no que se segue aqui.*

Exemplo 1.9.16. *Seja C o conjunto de todos os elementos da natureza e as sentenças abertas*

$$\text{“}P(x)\text{ : } \textit{O x é um ser vivo”} \qquad \text{e} \qquad \text{“}Q(x)\text{: } \textit{O x é mortal”,}$$

cujo domínio da variável livre x é o conjunto C. Com essas sentenças abertas, observe que podemos compor uma nova sentença aberta em C, como segue:

$$\text{“}P(x) \Rightarrow Q(x)\text{ : Se } \textit{o x é um ser vivo,} \text{ então } \textit{o x é mortal”.}$$

Note por exemplo que:

- ➢ $P(humano) \Rightarrow Q(humano)$
- ➢ $P(animal) \Rightarrow Q(animal)$
- ➢ $P(vegetal) \Rightarrow Q(vegetal)$

são implicações verdadeiras.

Exemplo 1.9.17. *Considere as sentenças abertas*

$$\text{“}P(x) : x \textit{ divide } 12\text{”} \qquad e \qquad \text{“}Q(x)\text{: } x \textit{ divide } 45\text{”},$$

cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$*. Podemos agora compor uma nova sentença aberta em* $\mathbb{N}$*:*

$$\text{“}P(x) \Rightarrow Q(x) : \text{Se } x \textit{ divide } 12, \text{ então } x \textit{ divide } 45\text{”}.$$

Observe, por exemplo, na Tabela 1.27 valores lógicos de alguns valores de x*.*

Valor de x	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \Rightarrow Q(x)$
1	V	V	V
2	V	F	F
5	F	V	V
6	V	F	F
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.27: Valores lógicos de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ em $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.9.18. *Considere o conjunto* $\mathbb{N}$ *e as sentenças abertas*

$$\text{“}R(x,y) : (x+y)^2 = 2xy\text{ ”} \qquad e \qquad \text{“}S(x,y)\text{: } x = 0 \textit{ e } y = 0,$$

cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. Como mostraremos à frente, a sentença aberta* $S(x,y)$ *é verdadeira sempre que a sentença aberta* $R(x,y)$ *for verdadeira, e assim temos a implicação*

$$\text{“}R(x,y) \Rightarrow S(x,y) : \text{Se } (x+y)^2 = 2xy, \text{ então } x = 0 \textit{ e } y = 0\text{”},$$

verdadeira em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*.*

Exemplo 1.9.19 (Subconjunto). *Usando os conceitos de quantificador universal e implicação lógica, podemos reescrever a definição de subconjunto (Definição 1.2.16) simbolicamente como segue: A é subconjunto de B quando*

$$\forall\, x, (x \in A \Rightarrow x \in B) \tag{1.28}$$

é uma proposição verdadeira. Além disso, admitamos que C é um conjunto e $P(x)$ e $Q(x)$ sentenças abertas em C. Usando especificação de conjuntos (ver Seção 1.4), obtemos os conjuntos

$$E = \{x \in C : P(x)\} \qquad e \qquad F = \{x \in C : Q(x)\}.$$

Dessa forma, a seguinte implicação

$$\text{“Se } \forall\, x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x), \text{ então } E \subset F\text{”},$$

é verdadeira. A validade da implicação será vista com mais detalhes na seção à frente sobre métodos de prova.

Observação 1.9.20. *Note que para um conjunto A não ser subconjunto de um conjunto B, é necessário existir $a \in A$ tal que $a \notin B$. Isso também pode ser entendido como a negação de (1.28):*

$$\exists\, x, (x \in A \wedge x \notin B). \tag{1.29}$$

Denotamos esse fato por $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$.[12]

Como exemplo, consideremos P o conjunto de todos os países. E sejam as sentenças abertas

“$S(x)$: x é um país da América Latina” e “$T(x)$: x é um país da América do Sul”.

Note que

$$\{x \in P : S(x)\} \not\subset \{x \in P : T(x)\},$$

pois, por exemplo, a proposição

$$S(\textit{México}) \wedge \sim T(\textit{México})$$

é verdadeira, isto é, o país México pertence ao conjunto dos países da América Latina, porém não pertence ao conjunto dos países da América do Sul.

1.9.2 Relação entre Condicional e Implicação

Há uma fundamental e importante relação entre a Condicional e a Implicação. A saber: dadas proposições $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ e $Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, é válida a seguinte relação: **a Implicação Lógica**

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad \Rightarrow \quad Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

é verdadeira sempre que a Condicional

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad \rightarrow \quad Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

[12] Quando $A \not\subset B$, dizemos que “A não está contido em B”, e quando escrevemos a notação $B \not\supset A$, geralmente lemos “B não contém A”.

for uma tautologia, e vice-versa. Em escrita mais simbólica, denotamos esta relação por

$$\boxed{[P \Rightarrow Q] \;\equiv\; [(P \rightarrow Q) \text{ é tautologia}].} \tag{1.30}$$

Uma justificativa para a relação 1.30 é a seguinte: quando $P \Rightarrow Q$ é verdade, isso significa que Q é verdade sempre que P é verdade. Assim, a segunda linha da tabela de verdade da condicional $P \rightarrow Q$ (Tabela 1.8) não acontece. Como qualquer outra linha da tabela de $P \rightarrow Q$ é verdade, resta então $P \rightarrow Q$ ser sempre verdade, uma tautologia. Por outro lado, no caso de a condicional $P \rightarrow Q$ ser uma tautologia, isso significa que a segunda linha da sua tabela verdade (Tabela 1.8) não acontece, e restam três outras opções, todas verdadeiras. Dentre elas, a primeira (linha) opção garante que Q é verdade sempre que P é verdade, ou seja, isso garante exatamente a definição de $P \Rightarrow Q$.

Exemplo 1.9.21 (Regra "Modus Ponens"). *Dadas proposições R e S, é válida a implicação:*

$$[(R \rightarrow S) \wedge R] \;\Rightarrow S.$$

De fato, para garantir que a implicação é verdade, usamos a relação 1.30 entre implicação e condicional. Observe que se verificarmos que

$$[(R \rightarrow S) \wedge R] \;\rightarrow S \tag{1.31}$$

é uma tautologia, pela relação 1.30 teremos o desejado. Construindo a tabela verdade de (1.31)*, que apresentamos na Tabela 1.28, vemos que esta é de fato uma proposição tautológica. Portanto, temos a validade da implicação.*

R	S	$R \rightarrow S$	$(R \rightarrow S) \wedge S$	$[(R \rightarrow S) \wedge R] \rightarrow S$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Tabela 1.28: Tabela com valores lógicos de $[(R \rightarrow S) \wedge R] \rightarrow S$.

Observação 1.9.22. *A relação 1.30 fornece clareza na diferença entre os conceitos (símbolos) :*

$$\boxed{\rightarrow \quad e \quad \Rightarrow .}$$

Note que enquanto o primeiro é um ***conectivo lógico****, que produz uma nova proposição a partir de outras duas, o segundo expressa uma* ***propriedade*** *da proposição produzida pelo primeiro (de ser uma tautologia), ou ainda, uma* ***relação*** *entre duas proposições.*

Exemplo 1.9.23 (Transitividade da Implicação). *Dadas proposições P, Q e R, vale a implicação:*

$$\boxed{\textit{Se} \quad P \Rightarrow Q \quad \textit{e} \quad Q \Rightarrow R, \quad \textit{então} \quad P \Rightarrow R,}$$

ou escrita simbolicamente:

$$\boxed{(P \Rightarrow Q \quad \wedge \quad Q \Rightarrow R) \qquad \Rightarrow \qquad (P \Rightarrow R).} \tag{1.32}$$

A garantia que a implicação de fato é válida, decorre de forma simples a partir da definição de implicação (Definição 1.9.1), juntamente com a relação (1.30)*. Com efeito, quando $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ são verdadeiras, isso significa que $P \to Q$ e $Q \to R$ são tautologias. Então, as $2^{\underline{a}}$ linhas das tabelas verdade de $P \to Q$ e $Q \to R$ não*

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Q	R	$Q \to R$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	R	$P \to R$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

(1.33)

acontecem (veja tabelas em (1.33)*). Mas assim a $2^{\underline{a}}$ linha da tabela de $P \to R$ também não poderá acontecer, o que significa justamente $P \to R$ ser uma tautologia. A relação* (1.30) *agora garante que $P \Rightarrow R$ vale. Sendo assim, temos a conclusão de que $P \Rightarrow R$ vale sempre que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ ambas valem. Portanto, vale* (1.32)*.*

1.9.3 Bi-implicação

Conforme destaques já anteriores, nosso interesse será exclusivo na caraterística dedutiva da implicação, de modo que uma implicação juntamente à sua recíproca compõem o que designaremos inicialmente por *Bi-implicação*. O uso da palavra "inicialmente" se explica pelo fato de que logo na sequência veremos que a Bi-implicação é, de fato, uma equivalência lógica. Introduz-se a Bi-implicação precisamente nos seguintes termos:

Definição 1.9.24 (Bi-implicação).

> *Diz-se que a proposição P* Bi-implica *a proposição Q quando as implicações: $P \Rightarrow Q$, e sua recíproca $Q \Rightarrow P$; são ambas verdadeiras. Para designar tal conceito, usaremos a notação*
> $$P \Leftrightarrow Q.$$

Notação 1.9.25. *A notação $P \Leftrightarrow Q$ continua sendo comumente lida por "P* se, e somente se, *Q". Quando P bi-implica Q, é comum dizer que P equivale a Q ou P e Q são equivalentes - o motivo para isso ficará claro logo à frente. Outras formas comuns de leitura para "$P \Leftrightarrow Q$" são:*

"P é condição suficiente e necessária para Q"

e

"Q é condição necessária e suficiente para P".

Exemplo 1.9.26. *Exemplos de bi-implicações:*

a) Considere as proposições

"P: O homem é um ser vivo" *e* *"Q: O homem é mortal".*

A proposição P bi-implica Q, é a proposição

"$P \Leftrightarrow Q$: O homem é um ser vivo se, e somente se, *o homem é mortal".*

A bi-implicação é verdadeira, pois

"$P \Rightarrow Q$: Se *o homem é um ser vivo,* então *o homem é mortal"*

e

"$Q \Rightarrow P$: Se *o homem é mortal,* então *o homem é um ser vivo";*

são duas implicações verdadeiras.

b) Considere as proposições

"R: O polígono é um quadrado" *e* *"T: O polígono é um retângulo".*

A proposição R bi-implica T, é a proposição

"$R \Leftrightarrow T$: O polígono é um quadrado se, e somente se, *o polígono é um retângulo".*

A bi-implicação é falsa, pois

"$R \Rightarrow T$: Se *o polígono é um quadrado,* então *é um retângulo"*

é uma implicação verdadeira, porém a implicação

"$T \Rightarrow R$: Se *o polígono é um retângulo,* então *é um quadrado"*

é uma implicação falsa.

Bi-implicação de Sentenças Abertas

Considere A um conjunto e sejam $P(x)$ e $Q(x)$ sentenças abertas em A. Diz-se que a sentença aberta $P(x)$ equivale a sentença aberta $Q(x)$, representada por

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x),$$

sempre que ambas as implicações: $P(a) \Rightarrow Q(a)$, e sua recíproca $Q(a) \Rightarrow P(a)$; são verdadeiras, para cada $a \in A$.

Exemplo 1.9.27. *Seja C o conjunto de todos os elementos da natureza, e as sentenças abertas*

$$\text{“}P(x) : \textit{O } x \textit{ é um ser vivo”} \qquad e \qquad \text{“}Q(x) : \textit{O } x \textit{ é mortal”},$$

cujo domínio da variável livre x é o conjunto C. Com essas sentenças abertas, note que podemos compor uma nova sentença aberta em C, como segue:

$$\text{“}P(x) \Leftrightarrow Q(x) : \textit{O } x \textit{ é um ser vivo} \text{ se, e somente se, } \textit{é mortal”.}$$

Observe por exemplo que:

$$P(humano) \Leftrightarrow Q(humano), \quad P(animal) \Leftrightarrow Q(animal),$$

$$P(vegetal) \Leftrightarrow Q(vegetal), \ldots,$$

são bi-implicações verdadeiras.

Aproveitando o Exemplo 1.9.27 e usando especificação de conjuntos (ver Seção 1.4), obtemos os conjuntos

$$A = \{x \in C : P(x)\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in C : Q(x)\}.$$

Dessa forma, podemos observar que a seguinte bi-implicação

$$\text{“}[\forall\, x \in C, P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \text{ se, e somente se, } A \subset B \text{ e } B \subset A\text{”},$$

é verdadeira[13] (sempre que “um elemento da natureza for um ser vivo, será também um mortal”; e “sempre que um elemento da natureza for um mortal, será também um ser vivo”).

[13] A veracidde da bi-implicação será vista com mais detalhes na parte sobre métodos de prova.

1.9.4 Bi-implicação e Equivalência Lógica

Finalizamos o presente capítulo fazendo destaque da relação entre os três tipos de "equivalências" que estudamos até aqui: bicondicional, equivalência lógica e bi-implicação.

Por ser estabelecida a partir da implicação, e esta equivaler logicamente à condicional tautológica, é de esperar uma relação análoga a (1.30), e ela de fato acontece. Dadas proposições $P(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ e $Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, é válida a seguinte relação: **a Bi-implicação**

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad \Leftrightarrow \quad Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

é verdadeira sempre que a Bicondicional

$$P(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad \leftrightarrow \quad Q(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

for uma tautologia, e vice-versa. Como no caso da implicação, vamos representar tal relação escrevendo:

$$\boxed{[P \Leftrightarrow Q] \;\equiv\; [(P \leftrightarrow Q) \text{ é tautologia}].} \tag{1.34}$$

Esta relação se estabelece pelo fato de $P \Leftrightarrow Q$ ser verdade, significar que Q é verdade sempre que P é verdade e também P é verdade sempre que Q é verdade. Assim, temos P e Q são ambas verdades ou ambas falsas, o que garante $P \leftrightarrow Q$ sempre verdade, ou seja, uma tautologia. E vice-versa.

Observação 1.9.28. *Observação semelhante à Observação 1.9.22 deve ser feita acerca da diferença entre os conceitos (símbolos)*

$$\boxed{\leftrightarrow \qquad e \qquad \Leftrightarrow}$$

pois, novamente, enquanto o primeiro é um ***conectivo lógico****, que produz uma nova proposição a partir de outras duas, o segundo expressa uma* ***propriedade*** *da proposição produzida pelo primeiro, ou ainda, uma* ***relação*** *entre duas proposições.*

A relação (1.34) nos leva ao entendimento de que Equivalência Lógica (representada por $\equiv$) e Bi-implicação (representado por $\Leftrightarrow$) são na verdade um só conceito. De fato, note que $P \equiv Q$ representa que as proposições P e Q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e isto significa que $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia. Assim a relação (1.34) nos garante $P \Leftrightarrow Q$, e vice-versa. Podemos então escrever simbolicamente:

$$\boxed{(P \equiv Q) \qquad \Leftrightarrow \qquad (P \Leftrightarrow Q).}$$

Notação 1.9.29. *Não é comum nas ciências exatas, em particular na matemática, o uso do termo "Bi-implicação", e isso se deve provavelmente ao que acabamos de* *destacar. Quase que exclusivamente fazemos uso da Bi-implicação a mencionando como* ***Equivalência Lógica*** *e usando a notação*

$$\Leftrightarrow$$

mais comumente, e muito raramente é usada a notação $\equiv$ *no sentido de "se, e somente se".*

Destacamos propriedades básicas da equivalência, que já apresentamos no Exemplo 1.9.5. Considere as proposições

$$R(P_1, P_2, \ldots, P_n), \quad S(P_1, P_2, \ldots, P_n) \quad \text{e} \quad T(P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

As propriedades Reflexiva, Simétrica e Transitiva da Equivalência são, repectivamente:

☞ $R \Leftrightarrow R,$

☞ $R \Leftrightarrow S \quad \Rightarrow \quad S \Leftrightarrow R,$

☞ $(R \Leftrightarrow S \quad \text{e} \quad S \Leftrightarrow T) \quad \Rightarrow \quad R \Leftrightarrow T.$

Finalizamos a seção com uma equivalência lógica de enorme importância nas ciências exatas, e que se destaca por ser a base de um dos métodos de prova que permite elaborar provas simples de afirmações que, sem a contrapositiva, sequer teriam clareza se seriam possíveis de serem demonstradas.

Exemplo 1.9.30 (Implicação e sua Contrapositiva). *Conforme veremos, a base para o método de prova que será chamado de método da contrapositiva, é a seguinte equivalência entre duas proposições* P *e* Q *dadas:*

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \qquad \Leftrightarrow \qquad [(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)].} \tag{1.35}$$

A tautologia apresentada na Tabela 1.29 garante a equivalência lógica

$$(P \rightarrow Q) \qquad \Leftrightarrow \qquad [(\sim Q) \rightarrow (\sim P)].$$

Então, em particular, vale a equivalência (1.35).

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$(\sim Q) \to (\sim P)$	$(P \to Q) \leftrightarrow [(\sim Q) \to (\sim P)]$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabela 1.29: Verificação de (1.35).

Capítulo 2

Teoremas e Técnicas de Prova

A construção e o desenvolvimento de uma teoria matemática começa com a adoção de conceitos Primitivos e Axiomas (ou *Postulados*). A partir dos termos primitivos e axiomas, passamos a definir novos conceitos e construir afirmações que se tornam *Conjecturas* e possivelmente *Teoremas*.

2.1 Conjecturas e Teoremas

Definição 2.1.1 (Conjectura).

Entende-se por Conjectura uma afirmação que acreditamos ser verdadeira, geralmente com base em evidência ou intuição, cuja falsidade ou veracidade ainda não foi possível comprovar.

Exemplo 2.1.2. *Exemplos de Conjecturas:*

a) Existe vida fora do planeta terra;

b) Existe vida após a morte.

Exemplo 2.1.3. *Exemplos de Conjecturas na matemática:*

a) *A afirmação*

"Qualquer número par maior do que 2 pode ser escrito como soma de dois números primos".

Para ilustrar a afirmação e ajudar no entendimento, observe por exemplo:

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 5 + 5, \quad 12 = 5 + 7, \cdots .$$

Apesar de simples, não se engane! A afirmação é uma Conjectura do ano 1742 *conhecida como* **Conjectura de Goldbach**. *Quem determinar a falsidade ou veracidade desta conjectura, embolsa 1 milhão de dólares* (*imagino que existam maneiras mais fácies de ser milionário!*).

b) *A afirmação*

> *"Se $n > 2$ então a equação*
> $$x^n + y^n = z^n$$
> *não tem solução inteira positiva (natural)"*

até o ano de 1995 era conhecida como a famosa **Conjectura de Fermat**, *quando foi comprovada pelo matemático inglês* **Andrew Wiles** *a veracidade da mesma.*

2.1.1 Teoremas

Talvez uma das concepções mais gerais do que seja um teorema é a seguinte:

Definição 2.1.4 (Teorema).

> *Entende-se por Teorema uma afirmação verdadeira construída a partir dos termos primitivos, axiomas e outras afirmações verdadeiras.*

Exemplo 2.1.5. *Exemplos de Teoremas:*

a) ***Teorema de Pitágoras:***

Se $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo, com catetos de comprimentos a e b e hipotenusa de comprimento c, então $c^2 = a^2 + b^2$.

b) ***Teorema**: Se n^2 é par, então n é par.*

Os teoremas quase sempre são proposições implicativas, conforme o exemplo anterior. Porém, podem ser apresentados sem estarem explicitamente nessa forma.

Exemplo 2.1.6. *Exemplo de teorema não apresentado em forma implicativa.*

> ***Teorema**: A soma de dois números ímpares é um número par.*

Quando um teorema não está apresentado (enunciado) na forma implicativa, em geral, é possível reescrevê-lo de modo equivalente na forma de implicação.

Exemplo 2.1.7. *Podemos reescrever o teorema do Exemplo 2.1.6 de modo equivalente na forma implicativa:*

> ***Teorema**: Se m e n são números ímpares, então $m + n$ é um número par.*

Pode-se apresentar (enunciar) um teorema de várias formas conforme o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.8. *Considere o seguinte teorema apresetado em uma primeira forma:*

> ***Teorema** (1^a Forma): A soma de dois números pares m e n é um número par.*

Este teorema pode ser apresentado de diversas outras formas a exemplo de:

> ***Teorema** (2^a Forma): Se m e n são dois números naturais pares, então $m + n$ é par.*

e

> ***Teorema** (3^a Forma): Sejam m e n numéros naturais. Se m e n são pares, então $m + n$ é par.*

Ressaltamos, porém, que sempre devemos procurar apresentá-lo na forma que melhor destaque (deixando claro) o que é Hipótese e o que é Tese; que no presente exemplo são

Hipóteses: *m e n são pares.*

Tese: *$m + n$ é par.*

Observe que a segunda forma deixa claro que temos uma proposição da forma:

$$\boxed{\forall\ m, n \in \mathbb{N}, [(m \text{ é par}) \wedge (n \text{ é par})] \Rightarrow (m + n \text{ é par}).}$$

Essa forma esclarece também que a informação de que m e n são naturais não faz parte da hipótese da implicação, mas que são as variáveis no domínio $\mathbb{N}$ das sentenças abertas

$$P(m, n) : (m \text{ é par}) \wedge (n \text{ é par}) \qquad \text{e} \qquad Q(m, n) : m + n \text{ é par}.$$

Observação 2.1.9. *Note que a maneira de apresentar (enunciar ou redigir) um teorema depende de uma opção pessoal. Porém, é importante um teorema ter um enunciado claro e preciso, de preferência em forma de implicação, no qual a hipótese e a tese fiquem claramente apresentadas.*

2.1.2 Teoremas da Forma “se, e somente se,”

Para facilitar o entendimento de teoremas que têm a forma “se, e somente se,”, consideremos os seguintes teoremas:

Teorema: Todo número natural terminado 0 ou 5 é múltiplo de 5.

e

Teorema: Todo número natural múltiplo de 5 termina em 0 ou 5.

Note que, embora não estejam enunciados na forma de implicação, o primeiro teorema é uma afirmação da forma $P \Rightarrow Q$ e o segundo uma afirmação da forma $Q \Rightarrow P$. Motivados pelo Exemplo 1.9.26, podemos enunciar os dois teoremas anteriores como duas sentenças equivalentes formando um único teorema, da seguinte maneira:

Teorema: Um número natural termina em 0 ou 5 se, e somente se, é múltiplo de 5.

Desse modo, esse teorema é uma afirmação da forma $P \Leftrightarrow Q$, sendo que $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ são ambos teoremas válidos.

Conforme já frisado na Definição 2.1.4, chama-se de teorema uma afirmação verdadeira construída de outras afirmações conhecidamente verdadeiras. Desse modo, quando enuncia-se um teorema da forma

$$\boxed{P \Leftrightarrow Q,}$$

ou seja, “P se, e somente se, Q” e demais formas equivalentes de escrita, tem-se apresentado dois teoremas: o teorema $P \Rightarrow Q$ e o teorema *recíproco* $Q \Rightarrow P$.

Mais geralmente, é muito comum em matemática teoremas com uma afirmação envolvendo a equivalência de três ou mais proposições, ou seja, teoremas da forma, por exemplo,

$$\boxed{P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3,} \tag{2.1}$$

mesmo as vezes não estando apresentado dessa forma explicitamente. Nesse caso, o que se tem de fato são os três teoremas

$$\boxed{P_1 \Leftrightarrow P_2, \qquad P_2 \Leftrightarrow P_3 \qquad \text{e} \qquad P_1 \Leftrightarrow P_3.} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1.10. *Um exemplo de teorema com três afirmações equivalentes é o seguinte:*

***Teorema**: Para cada n natural, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) n é ímpar;

b) n^2 é ímpar;

c) $n^2 - 2n + 1$ é par.

Observação 2.1.11. *Foi considerada três proposições (2.1) apenas por simplicidade. De modo similar, poderíamos apresentá-la com quatro ou mais proposições.*

2.1.3 Generalição de um Teorema

Suponhamos que temos dois teoremas denotados por Teorema 1 e Teorema 2. Dizemos que o Teorema 2 *Generaliza* o Teorema 1 quando o Teorema 1 é um caso particular do Teorema 2.

Exemplo 2.1.12. *Consideremos os seguintes teoremas:*

***Teorema 1**: A soma dos ângulos internos de um triângulo isósceles é $180°$.*

***Teorema 2**: A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.*

Embora as teses dos dois teoremas sejam a mesma: a soma dos ângulos internos é $180°$; observe que a hipótese do Teorema 1: o triângulo é isósceles, é um caso particular da hipótese do Teorema 2: um triângulo (qualquer). Portanto, o Teorema 2 generaliza o Teorema 1.

2.1.4 Lemas e Corolários

Usualmente alguns teoremas são chamados por outros nomes. Dependendo do contexto, para não fazer uso excessivo da palavra "teorema", que aparece com muita frequência nos textos matemáticos, faz-se uso de outras palavras consideradas sinônimas, a exemplo de: *Proposição, Lema e Corolário.* Podemos descrever cada uma delas em termos básicos como sendo:

- **Proposição:** é comum o uso do termo *Proposição* para denotar um teorema que não tem muita importância no contexto em que está inserido, sendo um fato com poucas consequências naquele contexto.

- **Lema:** um *Lema* é um termo usado para denotar um teorema que é visto como um teorema auxiliar, ou preparatório, que será utilizado na demonstração de outro teorema.

- **Corolário:** um *Corolário* é o termo usado para denotar um teorema que é obtido como consequência, relativamante direta, de um teorema recém demonstrado.

2.2 Métodos de Prova

Num contexto amplo, uma prova é uma explicação (explanação) dos motivos que faz uma afirmação ser aceita como verdadeira. Em termos da lógica formal aplicada às ciências exatas, uma prova de que uma proposição T é deduzida de uma outra proposição H é uma cadeia de agumentações lógicas, válidas, para concluir os resultados apresentados em T. Nesse processo, H é chamada de *Hipótese* e T chama-se *Tese* ou *Conclusão*. Infelizmente não existem procedimentos ou algoritmos gerais de como se faz provas. Mas existem métodos (ou técnicas) que auxiliam e podem ser empregados.

2.2.1 Método Direto

O ***Método Direto*** de prova é um dos mais simples e mais usados não somente na matemática, mas também em ciências aplicadas a exemplo da computação. O método direto para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em supor que a hipótese H é verdadeira e, usando uma sequência de proposicões que são consequências lógicas das anteriores, concluir a tese T. Geralmente, as sequências lógicas possuem a forma

$$\boxed{H \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3, \ \cdots, \ P_{k-1} \Rightarrow P_k \quad \text{e} \quad P_k \Rightarrow T,} \tag{2.3}$$

onde cada P_i é uma proposição verdadeira e todas as implicações também são verdadeiras.

Observação 2.2.1. *Note que, obtida uma sequência da forma* (2.3)*, temos garantida a implicação $H \Rightarrow T$ verdadeira pela transitividade (Exemplo 1.9.23 - veja também o Silogismo Hipotético no Exemplo 1.8.14).*

Exemplo 2.2.2. *Podemos escrever uma prova para uma afirmação como no seguinte exemplo:*

> ***Teorema:*** *Se $m, n \in \mathbb{N}$ são números pares, então $m+n$ é par.*

Observe que o teorema tem a forma

"Se m e n são números pares, então $m+n$ é par, para todo $m, n \in \mathbb{N}$,"

ou ainda,

"$\forall\ m, n \in \mathbb{N}, \quad m$ e n números pares $\quad \Rightarrow \quad m + n$ par."

Entendido o deve ser provado, podemos escrever a prova.

Prova: *Temos as proposições*

H_1 : *m é par. (Hipótese.)*

H_2 : *n é par. (Hipótese.)*

Q_1 : *Existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2r$. (Definicão de número par - Definição 1.2.8.)*

Q_2 : *Existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2s$. (Definicão de número par.)*

P_2 : *$m + n = 2(r + s)$. (Soma de números naturais).*

P_3 : *Existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $m + n = 2t$. (Existe $t = r + s \in \mathbb{N}$.)*

T : *$m + n = 2t$ é par. (Definição de número par.)*

de modo que

$$H_1 \wedge H_2 \Rightarrow Q_1 \wedge Q_2, \quad Q_1 \wedge Q_2 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3 \quad e \quad P_3 \Rightarrow T.$$

Portanto, temos uma prova direta para o teorema.

Na prática, uma prova não é escrita nos moldes que acabamos de apresentar; separando e destacando explitamente cada proposição e a seguência lógica. Em geral, após identificada uma sequência lógica para uma prova, reescrevemos a mesma de forma textual. No presente caso, a sequência lógica anterior pode ser usada como rascunho para escrever uma prova normalmente escrita, por exemplo, da seguinte forma:

Prova: *Suponha que m e n são pares. Por definição de número par, existem números naturais r e s tais que $m = 2r$ e $n = 2s$. Logo*

$$m + n = 2r + 2s = 2(r + s).$$

Então, existe um número natural $t = (r + s)$ tal que

$$m + n = 2t.$$

Assim, pela definição, $m + n$ é par. Portanto, tem-se uma prova para o teorema.

Técnica "Para frente - para trás"

No método direto, muitas vezes não é simples identificar diretamente uma sequência de implicações lógicas que inicia da hipótese H e chega à tese T, como foi simplesmente identificada no Exemplo 2.2.2. Para ajudar nesses casos, existe um procedimento chamado "**para frente-para trás**". Esse procedimento basicamente consiste em construir uma sequência lógica "para frente"

$$H \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3, \ \cdots, \ P_{k-1} \Rightarrow P_m,$$

e uma sequência lógica "para trás"

$$Q_n \Rightarrow Q_{n-1}, \ \cdots, \ Q_3 \Rightarrow Q_2, \quad Q_2 \Rightarrow Q_1, \quad Q_1 \Rightarrow T,$$

onde P_i e Q_j são proposições verdadeiras e todas as implicações também são verdadeiras. Agora, resta buscar encontrar uma implicação verdadeira da forma

$$P_i \Rightarrow Q_j,$$

pois assim teremos a sequência lógica

$$\begin{array}{l} H \Rightarrow P_1, \ P_1 \Rightarrow P_2, \cdots, P_{i-1} \Rightarrow P_i, \\ \qquad\qquad P_i \Rightarrow Q_j, \\ \qquad\qquad\qquad Q_j \Rightarrow Q_{j-1}, \cdots, Q_2 \Rightarrow Q_1, \ Q_1 \Rightarrow T, \end{array}$$

que é suficiente para provar que $H \Rightarrow T$, conforme Observação 2.2.1.

Exemplo 2.2.3. *Prove que:*

Se o triângulo retângulo ABC, com lados de comprimento a e b e hipotenusa de comprimento c, tem área igual a $c^2/4$, então o triângulo ABC é isósceles.

Antes de começar a escrever a prova, precisamos primeiro identificar as informações importantes do enunciado, a exemplo da hipótese e da tese (conclusão).

Hipóteses:

H_1 : *o triângulo ABC é retângulo.*

H_2 : *o triângulo ABC tem área igual a $c^2/4$.*

Tese:

$T:$ *o triângulo ABC é isósceles.*

Iniciando das hipóteses, temos as proposições:

$P_1: \dfrac{ab}{2} = \dfrac{c^2}{4}$. *(Obtida do cálculo da área de triângulo satisfazendo H_1 e H_2.)*

$P_2: c^2 = a^2 + b^2$. *(Obtida de H_1 pelo Teorema de Pitágoras.)*

$P_3: 2ab = a^2 + b^2$. *(Obtida de P_1 e P_2.)*

$P_4: (a-b)^2 = 0$ *(Obtida de P_3 completando o quadrado.)*

"Retornando" da tese temos as proposições

$Q_1: a = b$. *(uma condição para um triângulo ser isósceles é ter lados iguais.)*

$Q_2: a - b = 0$. *(Uma proposição que implica Q_1.)*

$Q_3: (a-b)^2 = 0$. *(Uma proposição que implica Q_2.)*

Observe que temos

$$\boxed{(H_1 \wedge H_2) \Rightarrow (P_1 \wedge P_2), \quad (P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3, \quad P_3 \Rightarrow P_4}$$

e

$$\boxed{Q_3 \Rightarrow Q_2, \quad Q_2 \Rightarrow Q_1, \quad Q_1 \Rightarrow T.}$$

Agora, note que $P_4 \Rightarrow Q_2$. Então,

$$\boxed{(H_1 \wedge H_2) \Rightarrow (P_1 \wedge P_2), \quad (P_1 \wedge P_2) \Rightarrow P_3, \quad P_3 \Rightarrow P_4, \quad Q_2 \Rightarrow Q_1 \quad e \quad Q_1 \Rightarrow T.}$$

Portanto,

$$\boxed{(H_1 \wedge H_2) \Rightarrow T.}$$

Conforme já mencionado, na prática, todo esse processo é escrito de forma textual como, por exemplo:

Prova: *Pelas hipóteses e pela fórmula de área de um triângulo retângulo, temos que*

$$\frac{ab}{2} = \frac{c^2}{4}. \tag{2.4}$$

Como por hipótese o triângulo é retângulo, o Teorema de Pitágoras garante que

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) *na expressão* (2.4)*, obtemos*

$$2ab = a^2 + b^2.$$

Então, $(a-b)^2 = 0$. *Isto implica* $a - b = 0$. *Logo,* $a = b$ *e o triângulo* ABC *é isósceles. Portanto, temos uma prova da afirmação.*

Exemplo 2.2.4. *Provar que:*

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Se* a *divide* b *e* b *divide* c*, então* a *divide* c.

Antes de buscar uma prova para uma afirmação, o primeiro passo deve ser o entendimento sobre o que deve ser provado. Para tanto, até reescrever a afirmação pode ajudar. Neste exemplo, podemos reescrever a afirmação, por exemplo, na forma:

$$\text{“} \forall a, b, c \in \mathbb{N};\ a \text{ divide } b \text{ e } b \text{ divide } c \quad \Rightarrow \quad a \text{ divide } c.\text{”}$$

O passo seguinte, antes de iniciar a escrita da prova, é identificar o que é hipótese e o que é tese (conclusão). Neste caso:

Hipóteses:	***Tese:***
H_1 : *a divide b.*	T : *a divide c.*
H_2 : *b divide c.*	

Agora, faremos as deduções que servirão para escrever a prova:

1. *Pela hipótese* H_1*,* a *divide* b. *Significa dizer que existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $b = ak$.
2. *Pela hipótese* H_2*,* b *divide* c. *Significa dizer que existe* $l \in \mathbb{N}$ *tal que* $c = bl$.
3. *Por 1 e 2, podemos substituir a primeira expressão na segunda para obter*
$$c = bl = (ak)l = a(kl).$$
4. *Por 3, temos que existe* $m = kl \in \mathbb{N}$ *tal que* $c = ma$.
5. *Por 4, temos garantida a definição de que* a *divide* c.

Finalmente, podemos escrever a prova:

__Prova:__ Pelas hipóteses, temos que existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = bk \qquad e \qquad b = cl.$$

Então,

$$a = bk = (cl)k = c(lk).$$

Assim, existe $m = lk \in \mathbb{N}$ tal que $a = cm$. Logo, pela definição, a divide b. Portanto, temos uma prova da afirmação.

2.2.2 Método da Contrapositiva

O ***Método da Contrapositiva*** para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em provar que $\sim T \Rightarrow \sim H$. Para provar que $\sim T \Rightarrow \sim H$ podemos, por exemplo, usar o método direto. Como o próprio nome faz referência, o presente método é baseado na contrapositiva, e a garantia que, provado $\sim T \Rightarrow \sim H$, temos a prova que $H \Rightarrow T$, deve-se à equivalência (1.35).

Observação 2.2.5. *O uso da Contrapositiva com quantificadores requer atenção. Observe que as contrapositivas de*

$$\forall\ x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x) \qquad e \qquad \exists\ y \in D, P(y) \Rightarrow Q(y) \tag{2.6}$$

são, respectivamente,

$$\forall\ x \in D, \sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x) \qquad e \qquad \exists\ y \in D, \sim Q(y) \Rightarrow \sim P(y). \tag{2.7}$$

Para facilitar o entendimento (e o convencimento) de que a contrapositiva (2.7) mantém o mesmo quantificador da implicação, observe por exemplo que, se D possui dois elementos, digamos $D = \{x_1, x_2\}$, então a contrapositiva de $P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)$ é $\sim Q(x_1) \Rightarrow \sim P(x_1)$. Logo,

$$\begin{aligned} [\forall\ x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x)] &\equiv [(P(x_1) \Rightarrow Q(x_1)) \wedge (P(x_2) \Rightarrow Q(x_2))] \\ &\equiv [(\sim Q(x_1) \Rightarrow \sim P(x_1)) \wedge (\sim Q(x_2) \Rightarrow \sim P(x_2))] \\ &\equiv [\forall\ x \in D, \sim Q(x) \Rightarrow \sim P(x)]. \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.6. *Seja n um número natural. Prove que:*

$$\boxed{\text{Se } n^2 \text{ é par, então } n \text{ é par.}}$$

Como nos exemplos anteriores, devemos deixar claro a afirmação a ser provada. Neste caso, podemos reescrevê-la na forma, por exemplo:

$$\text{“}\forall\ n \in \mathbb{N},\ n^2 \text{ par} \ \Rightarrow\ n \text{ é par”}.$$

Assim, a hipótese e a tese (conclusão) são:

Hipóteses: *H* : n^2 *é par.*

Tese: *T* : *n é par.*

Observe que, à primeira vista, não é claro se podemos usar o método direto para provar nossa afirmação (sugerimos ao leitor fazer algumas tentativas de usar o método direto). Porém, usando a contrapositiva fica absolutamente mais fácil elaborar uma prova. De fato, observe que devemos provar que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ H \Rightarrow T. \tag{2.8}$$

Agora, note que a contrapositiva de (2.8) *é*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sim T \Rightarrow \sim H. \tag{2.9}$$

Então, provado que (2.9) *é verdade, a contrapositiva da implicação garante que* (2.8) *também é verdade e, portanto, é uma prova para a afirmação.*

O passo agora é fazer as deduções necessárias, primeiramente observando que

$\sim T$: *n é ímpar.* $\sim H$: n^2 *é ímpar.*

Agora, faremos as deduções que servirão para escrever a prova:

1. *Por* $\sim T$, *n é ímpar. Então, temos que existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = 2k + 1$.
2. *Por 1, temos que*
$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$
3. *Por 2, existe* $l = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ *tal que* $n^2 = 2l + 1$.
4. *Por 3, temos que* n^2 *é ímpar.*

Então, temos

$$\sim T \Rightarrow \sim H.$$

Agora, com todas essas informações podemos escrever a prova:

> ***Prova:*** *Usaremos a Contrapositiva. Suponha que n é ímpar. Então, existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = 2k + 1$. *Assim,*
>
> $$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2(2k) + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$
>
> *Logo, existe* $l = (2k^2 + 2k) \in \mathbb{N}$ *tal que* $n^2 = 2l + 1$. *Portanto,* n^2 *é um número ímpar. Usando a contrapositiva temos uma prova da afirmação.*

Exemplo 2.2.7. *Sejam m e n números naturais positivos. Prove que:*

$$\boxed{\text{Se } n > m, \text{ então } (m+1)n > m(n+1).}$$

Podemos reescrever afirmação na forma:

$$\text{“}\forall\ m,n \in \mathbb{N}^*;\ \ n > m\ \ \Rightarrow\ \ (m+1)n > m(n+1)\text{”,}$$

Assim, a hipótese e a tese (conclusão) são:

Hipóteses:		**Tese:**
$H : n > m$	*e*	$T : (m+1)n > m(n+1).$

O leitor perceberá que este exemplo é bastante básico e é possível fazer uma prova usando o método direto. Porém, faremos uso da contrapositiva para ilustrar sua prática. Com efeito, precisa-se provar a proposição da forma

$$\forall\ m,n \in D;\ H \Rightarrow T. \tag{2.10}$$

A contrapositiva de (2.10) *é*

$$\forall\ m,n \in D;\ \sim T\ \Rightarrow \sim H. \tag{2.11}$$

Observemos que

$$\sim T : (m+1)n \leq m(n+1) \qquad e \qquad \sim H : n \leq m.$$

Para obter as deduções que servirão para escrever uma prova, note que:

$$(m+1)n \leq m(n+1) \quad \Rightarrow \quad mn+n \leq mn+m \quad \Rightarrow \quad n \leq m.$$

Então, temos

$$\sim T \Rightarrow \sim H,$$

que basicamente é (2.11)*. Com essas informações podemos finalmente escrever uma prova:*

> ***Prova:*** *Usaremos a Contrapositiva. Suponha que*
>
> $$(m+1)n \leq m(n+1),$$
>
> *para todos números naturais positivos m e n. Então,*
>
> $$(m+1)n \leq m(n+1) \quad \Rightarrow \quad mn+n \leq mn+m \quad \Rightarrow \quad n \leq m.$$
>
> *Portanto, pela contrapositiva temos uma prova da afirmação.*

2.2.3 Método da Contradição

O Método da Contradição é também bastante conhecido por Método de Redução ao Absurdo ou Prova por Absurdo. Como a própria nomenclatura indica, o método está relacionado à contradição introduzida na Seção 1.8.

O ***Método da Contradição*** para provar que uma implicação $H \Rightarrow T$ é verdadeira, consiste em supor que $H \wedge (\sim T)$ é verdadeira e, usando uma sequência de proposicões que são consequências lógicas das anteriores, obter uma proposição R falsa. Em termos simbólicos, devemos obter

$$H \wedge (\sim T) \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3, \cdots, P_{k-1} \Rightarrow P_k \quad \text{e} \quad P_k \Rightarrow R, \tag{2.12}$$

onde $H \wedge (\sim T)$ é assumida verdadeira, cada P_i é uma proposição verdadeira, R é uma proposição falsa e todas as implicações são verdadeiras.

Observação 2.2.8. *O método da contradição é baseado na seguinte análise: se H é verdadeira, R é falsa e a implicação*

$$H \wedge (\sim T) \Rightarrow R$$

é verdadeira, resta para $\sim T$ apenas a alternativa de ser falsa e, portanto, T é verdadeira. Assim, temos uma prova para $H \Rightarrow T$.

Exemplo 2.2.9. *Escreva uma prova para a afirmação:*

"A soma de um número racional com um irracional é um número irracional."

Como já fizemos nos exemplos anteriores, para facilitar o entendimento em relação ao que descrevemos sobre o método, vamos colocar a afirmação na forma condicional: observe que afirmação é sobre números racionais e irracionais. Logo, o domínio da sentença aberta é deve ser $\mathbb{R}$, de modo que podemos reescrever a afirmação na forma:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R};\ x \text{ é racional e } y \text{ é irracional} \quad \Rightarrow \quad x + y \text{ é irracional.}$$

Assim, temos:

Hipóteses:	***Tese:***
$H_1 : x$ *é racional.*	$T : x + y$ *é irracional.*
$H_2 : y$ *é irracional.*	

Agora, faremos as deduções que servirão para escrever a prova. Note que:

P_1**:** $x = \dfrac{a}{b}$*, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. (Por H_1.)*

P_2**:** $x + y$ *é racional. (Por $\sim T$.)*

P_3**:** $x + y = \dfrac{c}{d}$*, onde $c, d \in \mathbb{Z}$ com $d \neq 0$. (Por P_2.)*

P_4: $\dfrac{a}{b} + y = \dfrac{c}{d}$. *(Por P_1 e P_3.)*

P_5: $y = \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{bc - ad}{bd}$. *(Por P_4.)*

R: *y é racional. (Por P_5.)*

Então, temos

$$[(H_1 \wedge H_2) \wedge (\sim T)] \Rightarrow (P_1 \wedge P_2), \quad (P_1 \wedge P_2) \Rightarrow (P_1 \wedge P_3), \quad (P_1 \wedge P_3) \Rightarrow P_4,$$

$$P_4 \Rightarrow P_5 \quad e \quad P_5 \Rightarrow R,$$

onde R é falsa. Portanto, temos uma contradição e concluímos que $x+y$ é irracional.

Agora, com todas essas informações podemos escrever a prova:

> ***Prova:*** *A prova é por contradição. Suponha que x é racional, y é irracional e $x + y$ é racional. Então,*
>
> $$x = \frac{a}{b} \quad e \quad x + y = \frac{c}{d},$$
>
> *onde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Assim, substituindo a primeira igualdade na segunda, obtemos*
>
> $$y = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}.$$
>
> *Desse modo, y é um número racional, o que é uma contradição. Portanto, temos uma prova que $x + y$ é irracional.*

O método da contradição é muito usado quando se precisa provar que uma proposições simples possui valor lógico verdadeiro. Nesse caso, nega-se a afirmação e, por dedução, busca-se uma afirmação sabidamente falsa, ou seja, uma contradição.

Exemplo 2.2.10. *Prove que:*

"$\sqrt{2}$ não é um número racional".

Para provar a afirmação pelo método da contradição, temos as deduções que servirão para escrever a prova: suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Então,

P_1: $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, *onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ *(o* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ *é para garantir qua a fração é irredutível; por exmplo, não é da forma $\frac{12}{4}$).*

P_2: $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

P_3: $2b^2 = a^2$.

P_4: *a^2 é um número par.*

P_5: *a é par. (Pelo Exemplo 2.2.6.)*

P_6: *existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.*

P_6: $2b^2 = (2k)^2 = 2^2k^2$.

P_7: $b^2 = 2k^2$.

P_8: *b^2 é par.*

P_9: *b é par. (Pelo Exemplo 2.2.6.)*

P_{10}: *2 divide a e 2 divide b.*

P_{11}: $\mathrm{mdc}(a, b) \geq 2$.

Agora podemos escrever a prova:

> ***Prova:*** *A prova é por contradição. Suponha que $\sqrt{2}$ é racional. Então, existe uma fração irredutível, ou seja, $\frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, tal que*
> $$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$
> *Assim,*
> $$2b^2 = a^2.$$
> *Logo, a^2 é par. Agora, pelo Exemplo 2.2.6, temos que a é par. Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$. Assim,*
> $$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2k^2.$$
> *Logo, b^2 é par e, novamente pelo Exemplo 2.2.6, b também é par. Desse modo, temos que 2 divide a e 2 divide b. Então $\mathrm{mdc}(a, b) \geq 2$, que é uma contradição. Sendo assim, $\sqrt{2}$ não pode ser racional e, portanto, é irracional. Temos assim uma prova da afirmação.*

Referências Bibliográficas

[1] Alencar Filho, E. de, *Iniciação à Lógica Matemática*, Editora Nobel, (2002). pages 25

[2] Alencar Filho, E. de, *Teoria Elementar dos Conjuntos*, Editora Nobel, (1974). pages 10

[3] Dante, L. R., *Matemática: Contexto & Aplicações* - volume 1 - Editora Ática, 1ª Ed. - 1ª impressão (2010). pages

[4] Halmos, P. R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos* - Editora Ciência Moderna (2001). pages 19, 26

[5] Iezzi, G., Murakami, C., *Conjuntos e Funções*, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar - Volume 1. Editora Atual, 8ª Ed.(2004). pages

[6] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A matemática do ensino médio - volume 1* - Editora SBM, 10ª Ed.(2012). pages 50, 68

[7] Maio, W. de, *Fundamentos de Matemática* , Editora LTC (2009). pages

[8] Morais Filho, D. C. de, *Um Convite à Matemática*, Editora Fábrica de Ensino, 3ª Ed.(2010). pages 11, 47