FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 30: 27/10/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 30: Funções Bijetiva

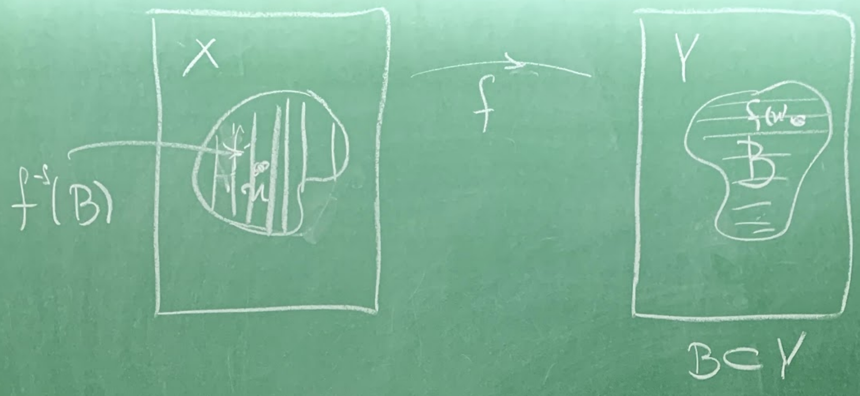
Imagem Inversa

Def.: Sejam $f: X \to Y$ uma função e $B \subset Y$. A Imagem Inversa de B por f é o conjunto

$$\{x \in X : f(x) \in B\} \subset X,$$

que é denotado por $f^{-1}(B)$, ou seja,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$



Ex.: Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=3x+2.$$

Para $B=[1,7]\subset\mathbb{R}$, quem é

$$f^{-1}([1,7])=?$$

Note que $\underline{x\in f^{-1}([1,7]) \iff f(x)\in[1,7]}$

$\iff 1\le f(x)\le 7 \iff 1\le f(x)$ e $f(x)\le 7$

$\iff 1\le 3x+2$ e $3x+2\le 7$

$\implies -\frac{1}{3}\le x$ e $x\le \frac{5}{3} \iff -\frac{1}{3}\le x\le\frac{5}{3}$

$\iff x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

<u>Conclusão</u>: $f^{-1}([1,7]) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

<u>Obs.</u>: Regra fundamental:

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B}$$

<u>Teorema</u>: Sejam $f : X \to Y$ uma função e $B_1, B_2 \subset Y$. Então:

(i) $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(ii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(iii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(iv) $f^{-1}(B_2 \setminus B_1) = f^{-1}(B_2) \setminus f^{-1}(B_1)$

(v) $f^{-1}(Y \setminus B_1) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B_1) = X \setminus f^{-1}(B_1)$

Prova de (i): Suponha $B_1 \subset B_2$. Então:

$$x \in \underline{f^{-1}(B_1)} \iff f(x) \in B_1 \subset B_2$$

$$\Rightarrow f(x) \in B_2 \iff x \in \underline{f^{-1}(B_2)}$$

<u>Conclusão</u> $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. $\square$

Mais geralmente:

<u>Teorema</u>: Sejam $f: X \to Y$ uma função e $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma coleção de subconj. de Y. Então:

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$;

(ii) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$.

Prova: Mesmos argumentos do item (i) do Teorema anterior.

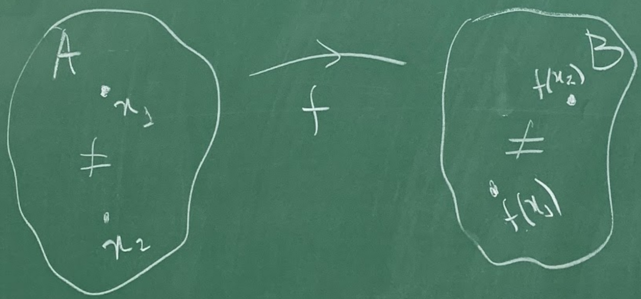
Funções Injetivas

Def.: Dizemos que $f: A \to B$ é Injetiva quando:

$$f(x_1)=f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Note que, equivalentemente, com a contrapositiva, temos

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$



Ex.: A função $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2$$

é injetiva. De fato:

$$f(x_1)=f(x_2) \implies x_1^2 = x_2^2 \implies |x_1| = |x_2| \implies x_1 = x_2.$$

Ex.: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2,$$

não injetiva pois $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

$$x_1 \neq x_2 \implies f(-1) = f(1).$$

Funções Sobrejetivas

Def.: Dizemos que uma função $f: X \to Y$ é Sobrejetiva quando

$$Im(f) = Y.$$

Note, no geral, que $Im(f) = f(X) \subset Y$. Para garantir $Y \subset Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X, f(x) = y\}$, deve-se ter:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ com } f(x) = y.$$

Logo:

$$\boxed{Im(f) = Y \iff \forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = y.}$$

<u>Ex.:</u> A função $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ definida por

$$g(x) = x^2$$

é sobrejetiva. De fato:

$\forall\, y \in [0,\infty)$, considere $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$

tal que

$$f(x) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y,$$

ou seja, $\mathrm{Im}(f) = Y$, e g é sobrejetiva.

Ex.: A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. por

$$h(x) = x^2$$

não é sobrejetiva. De fato: para $y = -1 \in \mathbb{R}$

não existe $x \in \mathbb{R}$ tq

$$h(x) = x^2 = -1.$$

Funções Bijetivas

Def.: Dizemos que $f: X \to Y$ é **Bijetiva** quando for injetiva e Sobrejetiva.

Ex.: A função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def. por

$$p(x) = x^3$$

é bijetiva. De fato:

* p é injetiva:

$$p(x_1) = p(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

* P é sobrejiva:

$\forall\, y \in \mathbb{R}$, considere $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ de modo que $P(x) = p(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$.

Conclusão: p é bijetiva.

Teorema: Seja $f: A \to B$ uma função.

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \iff f \text{ é injetiva}$$

Prova: Estudem no material e complementem.

$\square$