FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA DÚVIDAS: 03/11/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

Aula: Dúvidas

Lista 3 - 1 - d): Prove que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < n \ , \ \forall \, n \geq 3 \ , \ n \in \mathbb{N}.$$

Sol.: Por indução, vejamos: considere

$$P(n): \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < n.$$

Temos:

(1) Para $n=3$:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} < 3$$

Logo, $P(3)$ é verdade.

(II) Por indução, sup. que $P(k)$ vale, $k \geq 3$, ou seja,

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < k.$$

Agora, note que:

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$< k\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$= k + 1$$

Assim, $\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} < k+1$,

ou seja, $P(k+1)$ é verdade. Portanto, o princípio de indução finita garante o afirmado. $\square$

Lista 4 - 5 - b)

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\chi_{Q}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

b) $\chi_{\mathbb{Q}}(0{,}333\ldots) = \chi_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$.

f) $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = 0$, pois $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Lista 3 - 2 - a) Provar que

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Sol: Vamos usar indução. Considere

$$P(n):\ 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(I) $P(1)$ é verdade, pois

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1.$$

(II) Suponha $P(k)$ verdade, ou seja,

$$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Então:

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \underbrace{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k+1\right)}(k+1).$$

Vamos agora observar que

$$\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right) = \left(\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)}$$

Note que

$$\frac{((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(2k^2+3k+4k+6)}{6}$$

$$= \boxed{\frac{2k^2+7k+6}{6}}$$

Então,

$$\frac{k(2k+1)}{6} + k+1 = \frac{((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

Logo:

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \left(\frac{k\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)\right)(k+1)$$

$$= \frac{((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}\cdot(k+1)$$

$$= \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6},$$

ou seja, $P(k+1)$ é verdade. Portanto, pela TIF, temos $P(n)$ válido para todo $n \geq 1$.

$\square$