FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 4: 14/07/22)

FUND. ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

AULA 4: Sentenças Abertas e Especificações de Conjuntos.

Sentenças Abertas

Como motivação, considere a proposição

"P: João é aluno da UFS".

Agora observe a sentença:

"P(Ele): Ele é aluno da UFS"

Se denotarmos pela letra x a "variável" "Ele", podemos então escrever:

"$P(x)$: x é aluno da UFS",

onde x representa elementos do conj. de pessoas.

<u>Def.</u> (Sentença Aberta): Dizemos que uma frase (ou expressão) é uma <u>Sentença aberta</u> quando ela está subordinada a pelo menos uma variável que fica livre e não permite atribuição de valor lógico à mesma, mas que será uma Proposição quando suas variáveis são substituídas por objetos específicos.

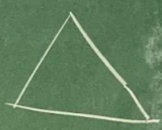
<u>Ex.</u>: a) "O polígono tem exatamente 4 lados".

Note neste caso que considerando "polígono" uma variável, temos de fato

"P(x): o x tem exatamente 4 lados"

uma sentença aberta. Note que

→ P(triângulo) é uma prop. falsa.



→ P(retângulo) é uma prop. verd.

b) $x^2 + 5x > 14$.

Note que esta desigualdade torna-se sentença aberta quando x é substituído por número naturais

→ $x = 1$ torna a prop. falsa

→ $x = 4$ " " " verd.

Notação: Denotaremos uma sentença aberta em uma variável x por $P(x)$.

Def.: Dizemos que $P(x)$ é uma sentença aberta num conjunto A quando $P(x)$ torna-se uma prop. (verd. ou falsa) todas as vezes que se substitui a variável livre x por qualquer elemento de A.

Destacamos:

→ O conj. A é dito o Domínio da variável "x".

→ Se $\underline{\underline{a}} \in A$ torna $P(a)$ uma prop. verdadeira, dizemos que $\underline{\underline{a}}$ satisfaz (ou verifica) $P(x)$.

Ex.: "$P(x): x^2+5x > 14$" é uma sent. aberta no domínio $\mathbb{N}$.

Por exemplo:

→ "$P(4): 4^2+5.4 > 14$" é uma prop. verd.

→ "$P(2): 2^2+5\cdot 2 > 14$" é uma prop. falsa.

Def.: Dizemos que $P(x_1, x_2)$ é uma sentença aberta num conjunto $A \times B$ quando $p(x_1, x_2)$ torna-se uma prop. (verd. ou falsa) todas as vezes que se substituir as variáveis livres x_1 por qualquer elemento de A e x_2 por qualquer elem. de B.

Destacamos!

→ $A \times B$ é o domínio das variáveis x_1 e x_2.

→ Se $(a,b) \in A \times B$ torna $P(a,b)$ uma prop. verd., dizemos que (a,b) satisfaz (ou verifica) $P(x)$.

Mais geralmente, de modo análogo, temos sentenças abertas com n variáveis $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$:

$$P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

com domínio $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$.

Ex.: Considere $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e a sentença aberta

"$Q(x,y,z): x + 2y + 3z \leq 15$".

Temos, por exemplo:

→ $Q(3,2,1): 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \leq 15$ (prop. verd)

→ $Q(3,3,3): 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \leq 15$ (Prop. falsa)

Obs.: Para uma sentença aberta $P(x)$ num conj A, apenas 3 possibilidades acontece:

(I) $P(x)$ verdade para todo $x \in A$.
(Cond. ou propriedade Universal)

Ex.: "$P(x)$: x é mortal" e A o conj. de todos os seres humanos, temos então $P(x)$ uma cond. universal.

(II) $P(x)$ verdade para Algum $x \in A$.
(Cond. ou propried. possível)

Ex.: "$P(x)$: x possui graduação" e A o conjunto de todos estudantes.

(III) $P(x)$ verdade para NENHUM $x \in A$.
(Cond. impossível)

Ex.: "$P(x)$: x é imortal" e A o conj. de todos os seres humanos.

Especificação de Conjunto

Como motivação, considere A o conj. de todos os homens e a sentença aberta

"$P(x)$: x é casado".

Podemos representar o conjunto dos casados usando a especificação:

$$\{x \in A : \underline{x \text{ é casado}}\}$$

De modo geral, para cada conj. A e cada sentença aberta $P(x)$ com domínio A, pode-se obter um conj. B cujos elementos são exatamente aqueles elementos $a \in A$ tais que

$$P(a)$$

é verdadeira. O conj. B é representado por

$$B = \{x \in A : P(x)\} \text{ ou } B = \{x : P(x)\}.$$

Ex: A é o conj. de estudantes da UFS e

"$P(x)$: x é Sergipano".

Podemos especificar o conjunto dos estudantes da UFS Sergipano por

$$\{x \in A : x \text{ é Sergipano}\}$$

Ex. (Conjunto Vazio):

Em palavras simples, "o conjunto vazio é o conj. que não possui elementos". No entanto, no nosso estudo, o conj. vazio é um conj. definido por especificação. Para tanto, considere A um conj. e a sentença aberta

$$\text{"}P(x) : x \neq x\text{"}.$$

Dessa forma, podemos definir o conjunto vazio como sendo

$$\emptyset_A = \{x \in A : x \neq x\}.$$

$$B ?,\ \emptyset_B \Rightarrow \emptyset_A = \emptyset_B$$

Ex.: $\mathbb{N}$ e "$P(x): x^2+5x \leq 14$"

↳ $P(0): 0^2+5.0 \leq 14$ (verd)

→ $P(1): 1^2+5.1 \leq 14$ (verd)

→ $P(2)$ (verd)

→ $P(3)$ falso

→ $P(4)$ falso

$\vdots$

↳ $\{x \in \mathbb{N} : P(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : x^2+5x \leq 14\}$

$= \{0, 1, 2\}$.

Mais geralmente, se considerarmos o prod. cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \text{ e } P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

temos o conj. especificado

$$\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n : P(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$$

Ex.: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e

"$P(x,y,z): x+y+z=1$".

$\hookrightarrow$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : P(x,y,z)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x+y+z=1\}$$

Note que:

- $\rightarrow$ $P(0,0,0): 0+0+0=1$ (falso)
- $\rightarrow$ $P(1,0,0)$ (verd)
- $\rightarrow$ $P(0,1,0)$ (verd)
- $\rightarrow$ $P(0,0,1)$ (verd)

Portanto:

$$\{(x,y,z)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+y+z=1\}$$
$$=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$