FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 27: 18/10/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 27: Relações de Equivalências

Relação Reflexiva

Def.: Dados A um conj. e R uma relação em A, dizemos que R é Reflexiva quando

$$xRx,$$

para qualquer $x \in A$.

Ex.: $A = \{a, b, c\}$. A relação

$$R_1 = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$$

é uma relação Reflexiva. De fato:

* $a R_1 a$ pois $(a,a) \in R_1$
* $b R_1 b$ pois $(b,b) \in R_1$
* $c R_1 c$ pois $(c,c) \in R_1$.

No entanto, note que

$$R_2 = \{(a,a),(a,c)\}$$

não é uma relação reflexiva pois

$$b \not\!R_2\, b \quad \text{pois} \quad (b,b) \notin R_2.$$

Relação Simétrica

Def.: Seja R uma relação em A. Dizemos que R é Simétrica quan-

$$aRb \Rightarrow bRa,$$

ou seja, $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$.

Ex.: $R_1 = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$

é uma relação Simétrica. Por exemplo:

* $aR_1a \Rightarrow aR_1a$
* $aR_1c \Rightarrow cR_1a$
* $bR_1b \Rightarrow bR_1b$
* $cR_1a \Rightarrow aR_1c$
* $cR_1c \Rightarrow cR_1c$

Por outro lado, a relação

$$R_2 = \{(a,a),(a,c)\}$$

não é simétrica pois aR_2c porém $c \not R_2 a$, ou seja, $(c,a)\notin R_2$.

Relação Transitiva

Def.: Considere R uma relação em A.

Dizemos que R é Transitiva quando

$$xRy \text{ e } yRz \Rightarrow xRz.$$

Ex.: $R_1 = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$

é uma relação Transitiva.

Por exemplo:

* aR_1a e $aR_1c \Rightarrow aR_1c$
* aR_1c e $cR_1a \Rightarrow aR_1a$

No entanto, a relação

$$R_3 = \{(a,c),(b,c),(c,b)\}$$

não é uma relação transitiva, pois

$* \quad bR_3c$ e $cR_3b \not\Rightarrow bR_3b$

Relações de Equivalência

Def.: Dada R uma relação em A, dizemos que R é uma Rel. de Equivalência em A quando for Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

Ex.: Considere em $\mathbb{Z}$ a seguinte relação

$$aRb \Leftrightarrow b-a \text{ é múltiplo de } 3.$$

Por exemplo:

* $6 \, R \, 3$ pois $3-6 = -3 = (-1)\cdot 3$
* $7 \, R \, 16$ " $16-7 = 9 = 3\cdot 3$

R é reflexiva

Note que dada $x \in \mathbb{Z}$ qualquer temos sempre

$$x \, R \, x \quad \text{pois} \quad x - x = 0 = 0\cdot 3.$$

R é Simétrica

Para provar, considere

$$a \, R \, b.$$

Isto significa

$$b - a = k\cdot 3 \, , \; k \in \mathbb{Z}.$$

$$\hookrightarrow \; -k\cdot 3 = a - b$$

$$a - b = (-k)\cdot 3$$

e assim

$$bRa.$$

<u>Conclusão</u>: $aRb \Rightarrow bRa$.

<u>R é Transitiva</u>

Considere xRy e yRz. Então:

* $xRy \iff y - x = m \cdot 3, \ m \in \mathbb{Z}$

* $yRz \iff z - y = M 3, \ M \in \mathbb{Z}$

↳ $\cancel{y} - x + z - \cancel{y} = m \cdot 3 + M \cdot 3$

↳ $z - x = (m + M) \cdot 3,$

e isto significa que

$$xRz.$$

Conclusão: xRy e $yRz \Rightarrow xRz$.

Portanto, R é uma Rel. de Equivalência

Classes de Equivalência

Def.: Dada R uma relação de equivalência em A e $x \in A$, o conjunto

$$\{y \in A : yRx\}$$

é chamado de Classe de Equivalência de x e é denotado por $[x]$ ou $\bar{x}$, ou seja,

$$[x] = \{y \in A : yRx\}.$$

Ex.: Considere em $\mathbb{Z}$ a relação

$$aRb \iff b - a = k \cdot 3, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Quem é $[5]$?

Note que para encontrar $[5]$ devemos ver que $yR5$ significa

$$5 - y = k \cdot 3, \; k \in \mathbb{Z}.$$

$\hookrightarrow$ $y = -k3 + 5, \; k \in \mathbb{Z}$

* $k = 2 \implies y = -1$
* $k = 1 \implies y = 2$
* $k = 0 \implies y = 5$
* $k = -1 \implies y = 8$
* $k = -2 \implies y = 11$

Podemos então intuir que

$$[5] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$$

Da mesma forma, temos

$$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

$$[1] = \{\ldots, -8, -5, -2, 1, \boxed{4}, 7, 10, 13, \ldots\}$$

$$[2] = \{\ldots, -7, -4, -1, 2, \boxed{5}, 8, 11, 14, \ldots\}$$

Veja que:

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2]$$

e

$$[0] \cap [1] = \emptyset$$

$$[0] \cap [2] = \emptyset$$

$$[1] \cap [2] = \emptyset.$$