FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 15: 23/08/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 15: Métodos da Contrapositiva e Contradição

Método da Contrapositiva

O Método da Contrapositiva para provar uma implicação

$$H \Rightarrow T,$$

consiste em provar que

$$\sim T \Longrightarrow \sim H$$

é verdadeira. No caso que envolve quantificadores, precisamos de maior atenção. De fato, Observe que

$$\left[\forall x\in D,\ \underbrace{P(x)\Rightarrow Q(x)}\right] \equiv \left[\forall x\in D,\ \underbrace{\sim Q(x)\Rightarrow \sim P(x)}\right]$$

pois

$$\left[P(x)\Rightarrow Q(x)\right] \equiv \left[\sim Q(x)\Rightarrow \sim P(x)\right]$$

Contrapositiva.

Considerando essa equival., provar que

$$\forall x\in D,\ P(x)\Rightarrow Q(x)$$

é verdade, é o mesmo então que provar

que $$\forall x\in D,\ \sim Q(x)\Rightarrow \sim P(x),$$

é verdade.

Ex.: Considere $n\in\mathbb{N}$. Prove que:

"Se $\underbrace{n^2 \text{ é par}}_{H}$, então $\underbrace{n \text{ é par}}_{T}$"

Note que podemos reescrever a afirmação na forma:

$$\text{"}\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{n^2 \text{ é par}}_{P(n)} \Rightarrow \underbrace{n \text{ é par}}_{Q(n)}\text{"}$$

Usando a contrapositiva, podemos escrever de modo equivalente:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\sim(n \text{ é par})}_{\sim T} \Rightarrow \underbrace{\sim(n^2 \text{ é par})}_{\sim H}$$

$$\hookrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n \text{ é ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ é ímpar}.$$

Para provar esta última implicação, temos:

Hipóteses: $(\sim T)$: n é ímpar

Tese : $(\sim H)$: n^2 é ímpar

Passo a passo da dedução:

$(\sim T)$: n é ímpar

P_1 : $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

P_2 : $n^2 = (2k+1)^2$

P_3 : $n^2 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}+1$

P_4 : $n^2 = 2\ell+1$, $\ell = 2k^2+2k$

$(\sim H)$: n^2 é ímpar.

Então, note que

$$(\sim T) \Rightarrow P_1, \quad P_1 \Rightarrow P_2, \quad P_2 \Rightarrow P_3,$$

$$P_3 \Rightarrow P_4 \text{ e } P_4 \Rightarrow (\sim H).$$

Logo,

$$(\sim T) \Rightarrow (\sim H)$$

é uma implicação verdadeira. Portanto, pela equiv. da contrapositiva, a implic.

$$H \Rightarrow T$$

é verdadeira, de modo que a afirmação

"$\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 é par $\Rightarrow$ n é par",

ou seja,

"Se n^2 é par, então n é par."

Método da Contradição

O Método da Contradição para provar que uma implicação

$$H \Rightarrow T$$

é verdadeira, consiste em supor que

$$H \wedge (\sim T)$$

e construir uma sequência de prop. tal que

$$H \wedge (\sim T) \Rightarrow P_1, \; P_1 \Rightarrow P_2, \ldots, P_{k-1} \Rightarrow P_k.$$

e

$$P_k \Rightarrow R,$$

sendo este R sabidamente falsa.

Ex.: Prove que:

"A soma de um número racional com outro irracional é um número irracional."

Por exemplo: $\frac{3}{2}$ é racional

$\sqrt{2}$ é irracional (Último Ex. resolvido do material)

$\hookrightarrow \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ é irracional

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2} = \frac{a}{b} \iff \sqrt{2} = \frac{a}{b} - \frac{3}{2} = \frac{2a-3b}{2b}$$

Podemos reescrever a afirmação na forma:

"$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \left.\begin{array}{l} x \text{ é racional} \\ y \text{ é irracional} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \text{ irracional}$$"

Hipóteses:

H_1: x é racional e H_2: y é irracional

Tese:

T : $x + y$ é irracional.

Pelo Método da Contradição, precisamos admitir

$$\left(\underbrace{H_1 \wedge H_2}_{H}\right) \wedge (\sim T)$$

verdadeira, ou seja,

$$H_1, \quad H_2 \quad \text{e} \quad \sim T$$

são verdade. Agora, façamos as deduções:

P_1: $x = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

P_2: $x + y = \frac{c}{d}$, $c, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$.

P_3: $\dfrac{a}{b} + y = \dfrac{c}{d}$

P_4: $y = \dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}$

P_5: $y = \dfrac{b \cdot c - a d}{b \cdot d}$

R : y é racional

Note agora que temos

$$(M_1 \wedge M_2) \wedge (\sim T) \Longrightarrow P_1 \wedge P_2,$$

$$P_1 \wedge P_2 \Longrightarrow P_3, \quad P_3 \Longrightarrow P_4,$$

$$P_4 \Longrightarrow P_5, \quad P \Longrightarrow R$$

Falsa.

Portanto, pelo Método da Contradição,

conclui-se que

$$\sim T$$

é falso, ou seja, T é verdadeira e temos

garantida a implicação

$$H \Rightarrow T.$$

Neste caso, temos provado que

"$\forall x, y \in \mathbb{R}$, x é racional e y é irracional

$$\Longrightarrow x+y \text{ é irracional},$$

conforme afirmado.