FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 25: 04/10/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 25: Interseções Arbitrárias

Comecemos, como motivação, por considerar

$$A\cap B\cap C=\{x : x\in A \text{ e } x\in B \text{ e } x\in C\}$$

e

$$A\cap B\cap C\cap D=\{x : x\in A,\ x\in B,\ x\in C \text{ e } x\in D\}.$$

Para seguir na construção de interseções, precisamos fazer induções. Assim, para $n\geq 2$, consideremos os conjuntos

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ e A_n

de modo que podemos definir

$$\bigcap_{i \in \{1,2,\dots,n\}} A_i = \{x : x \in A_i, \forall i \in \{1,2,\dots,n\}\}.$$

Por exemplo: $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ e $A_4 = D$,

temos
$$\bigcap_{i \in \{1,2,3,4\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3$$
$$= A \cap B \cap C \cap D$$
$$= \{x : x \in A_i, \forall i \in \{1,2,3,4\}\}$$

De modo geral, dado um conjunto I

que chamaremos de conjunto de índices.

Consideramos

$$\{A_i\}_{i\in I}$$

uma família de conjuntos A_i.

A Interseção de todos os elementos de uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ é definida por

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i,\ \forall i \in I\}.$$

Ex.: Considere $I = \{\sqrt{2}, \pi, \frac{1}{2}, 100\}$ e

$$B_{\sqrt{2}} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

$$B_{\pi} = \{1, 3, 4\}, \quad B_{1/2} = \{1, 2, 3\}$$

e

$$B_{100} = \{1, 2, 3, \dots, 100\}.$$

Temos a família

$$\{B_i\}_{i \in I} = \{B_{\sqrt{2}}, B_{\pi}, B_{\frac{1}{2}}, B_{100}\}.$$

Podemos agora considerar a interseção

$$\bigcap_{i \in \{\sqrt{2}, \pi, \frac{1}{2}, 100\}} B_i = B_{\sqrt{2}} \cap B_{\pi} \cap B_{\frac{1}{2}} \cap B_{100}$$

$$\hookrightarrow \bigcap_{i \in \{\sqrt{2}, \pi, \frac{1}{2}, 100\}} B_i = \{1\}$$

Note que a $B_{\pi} \cap B_{1/2} = \{1, 3\}$ mas

$$3 \notin B_{\sqrt{2}}.$$

Portanto, de fato, $\bigcap_{i \in \{\sqrt{2}, \pi, \frac{1}{2}, 100\}} B_i = \{1\}$.

Ex.: Considere $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais,

$$I = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$$

e

$$T_\alpha = (-\alpha, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : -\alpha < x < \alpha\}.$$

0

Note que $\alpha \leq 0 \Rightarrow T_\alpha = \emptyset$. Temos a família:

$$\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

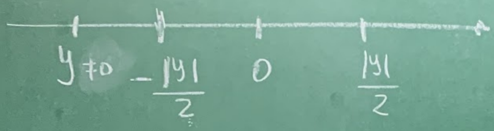
Além disso, temos a interseção:

$$\bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha = \{0\}$$

<u>Prova</u>: Primeiro observe que $-\alpha < 0 < \alpha$, $\forall \alpha \in I$, ou seja, $0 \in T_\alpha$, $\forall \alpha \in I$

$$\Rightarrow 0 \in \bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha \Rightarrow \{0\} \subset \bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha.$$

Agora, dado $y \neq 0$, temos



$$y < -\frac{|y|}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{|y|}{2} < y.$$

Sendo assim, considerando

$$\alpha = \frac{|y|}{2} > 0,$$

obtemos $y \leq -\alpha$ ou $\alpha \leq y$, ou seja,

$$y \notin T_\alpha, \text{ para } \alpha = \frac{|y|}{2}.$$

Assim, $y \notin \bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha$.

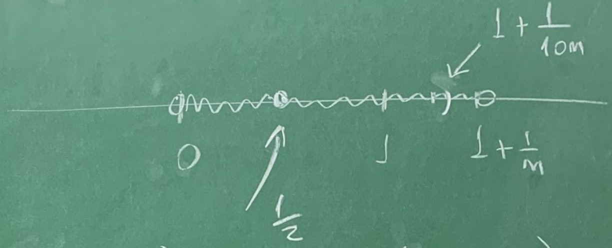
Portanto,

$$\bigcap_{\alpha \in I} T_\alpha = \{0\}.$$

$\square$

Ex.: Considere para cada $n \in \mathbb{N}^*$ o conjunto

$$S_n = \left(0, 1+\frac{1}{n}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1+\frac{1}{n}\right\}.$$



↳ $S_1 = (0, 2)$, $S_2 = \left(0, \frac{3}{2}\right)$, ...

Temos:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S_n = (0, 1]$$

Prova: Devemos provar que vale a prop

$$\forall y,\ y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S_n \iff y \in (0, 1].$$

Para a prova, note que:

$$\forall y,\ y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S_n \iff y \in S_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\iff 0 < y < \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\geq 1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\overset{?}{\iff} 0 < y \leq 1$$

$$\iff y \in (0, 1]$$

Veja que temos

$$\left[\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < y < 1 + \frac{1}{n}\right]$$

$$\equiv \left[0 < y \leq \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1\right]$$

$\square$

Teorema: Sejam $\{A_i\}_{i \in I}$ e B um conj. Sempre vale:

(a) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)$

(b) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$

(c) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$

(d) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

Prova de (b): Vale:

$$\forall y,\ y \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap B \iff y \in \bigcup_{i \in I} A_i \ \text{e}\ y \in B$$

$\Longleftrightarrow \; y \in A_i$, para algum $i \in I$

e $y \in B$

$\Longleftrightarrow \; y \in A_i \cap B$, para algum $i \in I$.

$$\Longleftrightarrow \; y \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)$$

Portanto, temos uma prova para (b).

Exercício: Façam provas para os itens (a), (c) e (d).