FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 5: 19/07/22)

FUND. ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

AULA 5: Quantificadores.

Quantificadores Universais

Como motivação, consideremos

A o conj. de todos os seres humanos

e

"$P(x)$: x depende de água para viver",

onde x representa cada pessoa de A.

Então, para transformar $P(x)$ numa prop., pode-se usar a estrutura:

"<u>Para todo x de A</u>, <u>x depende de água para viver</u>".

De forma geral:

<u>Def.</u> (Quantificador Universal):

Dado um conj. A e $P(x)$ uma sentença aberta em A, a afirmação

"Para todo x no conj. A, $P(x)$",

representada também por

$$\forall\, x \in A;\ P(x),$$

é verdadeira quando $P(x)$ for sempre <u>VERDADE</u> ao substitui-se a variavel x por qualquer elemento de A; e FALSA se <u>existir</u>

ao menos um elemento em A que torna $P(x)$ falsa quando a variável é substituída por esse elemento.

Notação: Usa-se também as notações:

- $\forall x \in A,\ P(x)$
- $P(x),\ \forall x \in A$

Ex. 1: $A = \{AL, BA, CE, MA, PB, PI, PE, RN, SE\}$

e $P(x)$: x é um estado do Brasil.

↳ "Para todo x em A, x é um estado do Brasil"

→ $P(AL)$ verdade

→ $P(BA)$ verdade

→ $P(CE)$ verd

⋮

→ $P(SE)$ verd.

↳ "x é um estado do Brasil, $\forall x \in A$".

$\rightarrow$ $P(x)$, $\forall x \in A$.

Ex. 2: Considere $\mathbb{N}$ e a sentença aberta

$$P(x): x+5 \geq 7.$$

Como o quantificador universal, temos a prop.

$$\forall x \in \mathbb{N},\ x+5 \geq 7. \quad (*)$$

Note que esta prop. é falsa pois considerando $x=1$, temos que

$$1+5 \geq 7$$

é uma prop falsa, ou seja, $P(1)$ é falsa.

Portanto, conforme a definição de Quant. universal, a prop. $(*)$ é falsa.

Ex.: Considere $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e a sent. aberta

$$P(x,y):\ (x+y)^2 \geq x^2+y^2.$$

Podemos então produzir a prop.:

"Para todo $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(x+y)^2 \geq x^2+y^2$" (★)

Esta é uma prop. verd. pois sabemos

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq x^2+y^2.$$

sempre para valores quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$.

É comum escrevermos (★) também como

"$\forall\, x,y \in \mathbb{N},\ (x+y)^2 \geq x^2+y^2$"

e

"$(x+y)^2 \geq x^2+y^2,\ \forall\, x,y \in \mathbb{N}$."

Quantificador Existencial

Como motivação, considere $\mathbb{N}$ e a sentença aberta

$$\text{“}Q(x):\ x^2 \geq 100\text{”}.$$

Observe que podemos formular a prop.

$$\text{“Existe } x \text{ em } \mathbb{N} \text{ tal que } x^2 \geq 100\text{”}$$

Note que esta é uma afirmação verda-deira pois

$$11^2 = 121 \geq 100.$$

Então, isto motiva a seguinte definição:

Def. (Quantificador Existencial): Dado B um conj. e $Q(y)$ uma sentença ab.

a afirmação

"Existe y em B tal que $Q(y)$"

que denotaremos por

$$\exists\, y \in B ;\ Q(y), \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Quantificador} \\ \text{Existencial} \end{array} \right.$$

é VERDADEIRA quando existir ao menos um elemento de B que, ao subst. a variável y, torna $Q(y)$ verdade;

e é FALSA quando não existir elemento em B que torne $Q(y)$ verdade.

Notações: Usa-se também as notações:

- $\exists\, y \in B,\ Q(y)$
- $\exists\, y,\ Q(y)$.

Ex1 Considere $\mathbb{N}$ e

$$P(x):\ x^2 + 5x = 24.$$

Pode-se construir a prop. existencial

"Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x^2 + 5x = 24$",

que também podemos simbolicamente escrever

"$\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 + 5x = 24$".

Note que esta é uma prop. verdade pois

$$\underset{\uparrow\, x}{3}^2 + 5 \cdot \underset{\uparrow\, x}{3} = 24,$$

ou seja, $P(3)$ é verdade. Portanto, conforme a definição de Quant. Existencial, temos uma prop. verdadeira.

Ex. 2: Considere

$$C = \{\text{Manaus}, \text{Cuiabá}, \text{Vitória}\},$$

$$D = \{\text{Aracaju}, \text{Recife}\}$$

e

"$P(x_1, x_2)$: x_1 e x_2 estão numa mesma região do Brasil".

Podemos neste caso, formar a prop.

$$\exists (x_1, x_2) \in C \times D,\ P(x_1, x_2). \qquad (**)$$

Ela é falsa, pois:

→ P(Manaus, Aracaju) falso

→ P(Manaus, Recife) "

→ P(Cuiabá, Aracaju) "

⋮

→ P(Vitória, Recife) "

Portanto, conforme a definição Quant. Existencial, a prop. (**) é falsa.