UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMA

DISCIPLINA: Fundamentos Elementares de Matemática
TURMAS: 01 e 02 PERÍODO: 2022-1
PROFESSOR: J. Anderson Valença Cardoso DATA: 28/07/2022

Lista de Exercícios 1

1. Estude os axiomas de Euclides da Geometria e identifique os conceitos primitivos usados. Faça o mesmo com os principais axiomas da teoria de conjuntos (Exemplo: Axiomas de Extensão, Especificação, etc).

2. Defina cada conceito a seguir e identique na definição os conceitos primitivos e axiomas usados:

   (a) Número Par,
   (b) Número Ímpar,
   (c) Número Primo,
   (d) Retas Paralelas,
   (e) Retas Perpendiculares,
   (f) Triângulo Regular,
   (g) Triângulo Isósceles.

3. Considere os conjuntos a seguir e determine todos os seus subconjuntos:

   (a) $A = \{0\}$,
   (b) $B = \{a, b\}$,
   (c) $C = \{0, 1, 2\}$,
   (d) $D = \{a_1, a_2, \{a_1, a_3\}\}$.

4. Considere os conjuntos $A = \{d\}, B = \{c, d\}, C = \{a, b, c\}, D = \{a, b, d\}, E = \{a, b, \{c\}, \{c, d\}\}$ e $F = \{a, b, \{d\}\}$. Explique por que cada um dos seguintes itens são verdadeiros:

   (a) $A \in F$,
   (b) $A \not\subset E$,
   (c) $C \not\subset E$,
   (d) $B \in E$,
   (e) $A \subset B$,
   (f) $A \notin E$,
   (g) $C \neq D$,
   (h) $B \not\subset C$,
   (i) $D \neq F$.

5. Determine os subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que valem as seguintes igualdades de pares ordenados:

   (a) $(10, x^2 + 12) = (2y, 7x)$,
   (b) $(0, xy) = (y^2 + 1, 2)$,
   (c) $(y+1, 2x+1) = (x+2, y+2)$.

6. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, e\}$ e $C = \{3, 4\}$. Determine:

   (a) $A \times B$,
   (b) $B \times A$,
   (c) $A \times C$,
   (d) $C \times A$,
   (e) $B \times C$,
   (f) $C \times B$,
   (g) $A \times B \times C$,
   (h) $B \times A \times C$,
   (i) $C \times A \times B$.

   É $A \times B = B \times A$? E $B \times C = C \times B$?

7. Determine quais itens são e quais não são proposições ou sentenças abertas e justique (no caso das proposições, diga seus valores lógicos):

(a) Este é um número primo.

(b) Todo número par é múltiplo de 3.

(c) O Brasil é o maior país das Américas.

(d) Existe número par múltiplo de 3.

(e) $1 + 1 = 2$?

(f) $1 + 1 = 2$!

(g) $1 + 1 = 3$.

(h) Multiplique $2x$ por 4.

(i) Se $x^2 = 2$ então $x \notin \mathbb{N}$.

(j) $x^2 - 4 = 0$.

(k) Existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $x < 4$ e $x^2 > 10$.

(l) Existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a^2 > 36$ e $a \leq 8$.

(m) 2004 não é múltiplo de x.

(n) A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

8. Escreva cada conjunto a seguir na forma de especificação de conjunto, destacando a senteça aberta usada:

(a) $P = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$,

(b) $I = \{1, 3, 5, 7, ...\}$,

(c) $M = \{0, 5, 10, 15, ...\}$,

(d) $N = \{7, 9, 11, 13, 15, ...\}$.

9. Determine todas as triplas ordenadas (x, y, z) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que:

(a) $x + y + z + 1 = 0$,

(b) $x + y + z = 0$,

(c) $x + y + z = 1$,

(d) $x + y + z \leq 1$,

(e) $x + y + z = 2$,

(f) $x + y + z \leq 2$.

10. Reescreva as frases a seguir usando (explicitando) quanticadores, sentenças abertas e seus domínios.

(a) "Cada pessoa tem uma mãe."

(b) "Todo triângulo equilátero é equiângulo."

(c) "Pelo menos uma das letras da palavra *Banana* é uma vogal."

(d) "Os diâmetros de uma circunferência se intersectam num ponto."

(e) "Cada número primo diferente de dois é ímpar."

(f) "Há um número primo diferente de dois que é par."

(g) "Existe pelo menos um número primo diferente de dois que é ímpar."

11. Determine e justique o valor lógico e reescreva em palavras cada uma das seguintes afirmações:

(a) $\exists\, x \in \mathbb{N};\ x^2 = x$.

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N};\ n + 1 \geq 2$.

(c) $\exists\, x \in \mathbb{N};\ x^2 + 5 = 2x$.

(d) $\exists\, x \in \mathbb{N};\ x^2 + 6 = 5x$.

12. Escreva em palavras cada proposição a seguir e determine os valores lógicos de cada uma. (Sugestão: use exemplos.)

(a) $\forall\, y \in \mathbb{N}, \exists\, x \in \mathbb{N}$ tal que $y^2 = x$.

(b) $\exists\, x \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, y \in \mathbb{N}$ temos $y^2 = x$.

(c) $\exists\, x \in \mathbb{N}$ e $\exists\, y \in \mathbb{N}$ tais que $y^2 = x$.

(d) $\forall\, x \in \mathbb{N}, \forall\, y \in \mathbb{N}$ temos $y^2 = x$.

(e) $\exists\, x \in \mathbb{N}$ e $\exists\, y \in \mathbb{N}$ tais que $x^2 + y^2 = 25$.

(f) $\forall\, x \in \mathbb{N}, \exists\, y \in \mathbb{N}$ tal que $x + y = 1$.

(g) $\forall\, x \in \mathbb{N}$ e $\forall\, y \in \mathbb{N}$, existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $2z = x + y$.

13. Considere a sentença aberta $P(A) : A \subset \{1, 2, 3\}$ com variável A e domínio $D = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ (conjunto das partes de $\{1, 2, 3\}$). Determine:

(a) todos os conjuntos $A \in D$ para os quais $P(A)$ é verdadeira;

(b) todos os conjuntos $A \in D$ para os quais $P(A)$ é falsa;

(c) todos os conjuntos $A \in D$ para os quais $A \cap \{1, 2, 3\} = \varnothing$.

14. Considere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e as sentenças abertas "$P(A) : A \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$" e "$Q(A) : A \neq \varnothing$" com domínio $D = \mathcal{P}(S)$ (conjunto das partes de S). Determine:

    (a) todos os conjuntos $A \in D$ tais que $P(A) \wedge Q(A)$ é verdadeira;

    (b) todos os conjuntos $A \in D$ tais que $P(A) \vee (\sim Q(A))$ é verdadeira;

    (c) todos os conjuntos $A \in D$ tais que $(\sim P(A)) \wedge (\sim (Q(A))$ é verdadeira.

15. Determine a negação das seguintes sentenças com quantificadores:

    (a) Para cada número racional r, o número $1/r$ é racional;

    (b) Existe um número racional r tal que $r^2 = 2$.

16. Determine e justifique o valor lógico e reescreva em palavras (a exemplo do Exercício 15) cada uma das seguintes afirmações:

    (a) $\exists\, x \in \mathbb{R};\ x^2 - x = 0$.

    (b) $\forall\, n \in \mathbb{N};\ n + 1 \geq 2$.

    (c) $\forall\, x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x^2} = x$.

    (d) $\exists\, x \in \mathbb{Q};\ 3x^2 - 27 = 0$.

17. A afirmação

    "Para cada inteiro m, $m \leq 1$ ou $m^2 \leq 4$"

    pode ser expressa usando quantificadores e conectivos como

    "$\forall m \in \mathbb{Z}; m \leq 1$ ou $m^2 \geq 4$",

    ou ainda,

    "$\forall m \in \mathbb{Z}; (m \leq 1) \vee (m^2 \geq 4)$".

    Faça o mesmo para as afirmações abaixo. Faça também a negação de cada uma.

    (a) Existem inteiros a e b tais que $ab < 0$ e $a + b > 0$.

    (b) Para todos os números reais x e y, $x \neq y$ implica que $x^2 + y^2 > 0$.

    (c) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.

    (d) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.

    (e) Existe x tal que x^2 é par e divisível por 3.

    (f) Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo.

    (g) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.

    (h) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

    (i) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

    (j) Para todo ε, existe δ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(a))| < \varepsilon$.

18. Em cada uma das senteças abertas $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ dadas a seguir, com o domínio de ambas a váriáveis sendo $\mathbb{Z}$, determine o valor lógico de $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$ para os valores de x e y dados:

    (a) "$P(x, y) : x^2 - y^2 = 0$" e "$Q(x, y) : x = y$", com $(x, y) \in \{(1, -1), (3, 4), (5, 5)\}$;

(b) "$P(x,y): x^2+y^2=1$" e "$Q(x,y): x+y=1$", com $(x,y) \in \{(1,-1),(-3,4),(0,-1),(1,0)\}$.

19. Considere as sentenças abertas

$$\text{“}P(n): \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{é par”} \quad \text{e} \quad \text{“}Q(n): 2^{n-2}+3^{n-2}+6^{n-2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}\text{”},$$

com domínio $\mathbb{N}$. Determine três elementos a, b e c em $\mathbb{N}$ tais que $P(a) \Rightarrow Q(a)$ é falso, $Q(b) \Rightarrow P(b)$ é falso e $P(c) \Leftrightarrow Q(c)$ é verdade.

Bons Estudos!