FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 10: 04/08/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 10: Tautologia e Contradição

Equivalências Lógicas (Mais exemplos)

Ex. (Neg. da Condicional): Dados prop. P e Q,

temos:

$$\sim(P \to Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$$

P	Q	$P \to Q$	$\sim(P \to Q)$	$\sim Q$	$P \wedge (\sim Q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

$\equiv$

Ex. (Contrapositiva): Dados prop. P e Q temos definida a condicional

$$P \to Q.$$

Definimos a Contrapositiva de $P \to Q$, como sendo

$$(\sim Q) \to (\sim P).$$

Temos:

$$[(\sim Q) \to (\sim P)] \equiv [P \to Q]$$

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$(\sim Q) \to (\sim P)$	$P \to Q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

$\equiv$

Ex.: (Inversão): Dados prop. P, Q e

$$P \to Q,$$

a prop.

$$(\sim P) \to (\sim Q)$$

é chamada de Inversão e

$$\left[(\sim P) \to (\sim Q)\right] \not\equiv (P \to Q)$$

Não logicamente equivalente

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P)\to(\sim Q)$	$P \to Q$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$\not\equiv$

Ex. (Bicondicional): Dadas prop. P e Q, temos:

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)).$$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$\equiv$

Negação do Bicondicional

$$\sim(P \leftrightarrow Q) \equiv ((P \wedge (\sim Q)) \vee (Q \wedge (\sim P)))$$

Note que

$$(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

$$\begin{aligned} \sim (P \leftrightarrow Q) &\equiv \sim \big((P \to Q) \wedge (Q \to P)\big) \\ &\equiv \big(\underbrace{\sim (P \to Q)}\big) \vee \big(\sim (Q \to P)\big) \\ &\equiv \big(P \wedge (\sim Q)\big) \vee \big(Q \wedge (\sim P)\big) \end{aligned}$$

Tautologia

Def (Tautologia): Diz-se que uma Prop. composta $S(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ é uma <u>Tautologia</u> quando seu valor lógico é sempre Verdade, independentemente dos valores lógicos de $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Ex. Considere P uma prop. Temos que a prop.

$$P \vee (\sim P)$$

é uma Tautologia.

P	$\sim P$	$P \vee (\sim P)$
V	F	V
F	V	V

Tautologia.

Ex. (Transitividade): Dados prop. P, Q e R, a prop

S: Se $(P \to Q)$ e $(Q \to R)$, então $(P \to R)$,

ou seja,

$$\underbrace{\big((P \to Q) \wedge (Q \to R)\big) \to (P \to R)}_{S}$$

é uma tautologia.

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$	$P \to R$	$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Contradição

Def. (Contradição): Diz-se que uma Prop. comp. $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$ é uma Contradição quando seu valor lógico é sempre <u>Falso</u>, independente de $P_1, P_2, \dots, P_n$

Ex.: Dada P uma prop. Temos

$$P \wedge (\sim P)$$

é uma contradição.

P	$\sim P$	$P \wedge (\sim P)$
V	F	F
F	V	F

Note:

$$\sim\big(P \vee (\sim P)\big) \equiv \underline{P \wedge (\sim P)}$$

$$\sim\big(P \wedge (\sim P)\big) \equiv P \vee (\sim P)$$

Ex. Dados prop. P e Q, temos

$$\big(P \wedge (\sim Q)\big) \leftrightarrow (P \to Q)$$

uma contradição.

P	Q	$\sim Q$	$P \wedge (\sim Q)$	$P \to Q$	$(P \wedge (\sim Q)) \leftrightarrow (P \to Q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Contradição