UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMA

DISCIPLINA: Fundamentos Elementares de Matemática
TURMAS: 01 e 02 PERÍODO: 2022-1
PROFESSOR: J. Anderson Valença Cardoso DATA: 09/08/2021

Lista de Exercícios 2

1. Suponha que José gosta de feijão, não gosta de arroz, não gosta de macarrão e adora farinha. Determine e justique quais das seguintes setenças são verdadeiras e quais são falsas:

   (a) Se José gosta de feijão, então gosta de macarrão;

   (b) José gosta de macarrão se, e somente se, ele gosta de arroz;

   (c) José gosta de arroz e farinha se ele gosta de feijão;

   (d) Se José gosta de macarrão então ele gosta de farinha, ou José gosta de macarrão se, e somente se, ele gosta de arroz;

   (e) Para José gostar de feijão e macarrão é necessário e suciente que ele goste de arroz ou farinha.

2. Maria sempre come pelo menos um dos seguintes alimentos em seu café da manhã: cereal, pão ou iogurte. Na segunda-feira ela é especialmente seletiva. Se ela come cereal e pão, ela também come iogurte. Se ela come pão ou iogurte, então come cereal. Ela nunca come ambos cereal e iogurte. Ela sempre come pão ou cereal. Determine e justique o que Maria come na segunda-feira.

3. Brincando, quatro rapazes esconderam a bolsa do amigo Jugurta. Ao entrar na sala de aula, irritado, Jugurta os pergunta: "Qual dos espertinhos escondeu minha bolsa?" "Eu não fui!", respondeu Tomás. "Foi o Tchê!", garantiu Marcelo. "Foi o Lord!", disse o Tchê. "O Marcelo está mentindo!", retrucou o Lord. Apenas um dos amigos mentiu e somente um deles escondeu a bolsa. Determine e justique quem escondeu a bolsa do Jugurta.

4. Três professores, Antônio, Júlio e Marco, ensinam apenas uma disciplina dentre as de Lógica, Cálculo e Análise. Certa ocasião, foram abordados por uma aluna caloura querendo saber qual deles era seu professor de Lógica. Para a aluna já começar treinando o raciocínio lógico, combinaram que cada um diria uma frase, mas apenas uma das frases era verdadeira. Com isso a aluna deveria deduzir quem era o professor que procurava. Júlio disse "Marco é o professor de Cálculo"; Antônio respondeu "Júlio não é o professor de Cálculo"; e Marco disse "Antônio não é o professor de Análise". Determine e justique quem é o professor de lógica.

5. (AFTN 1996 ESAF) José quer ir ao cinema assistir ao filme "Fogo contra fogo", mas não tem certeza se o mesmo está sendo exibido. Seus amigos, Maria, Luís e Júlio têm opiniões discordantes sobre se o filme está ou não em cartaz. Se Maria estiver certa, então Júlio está enganado. Se Júlio estiver enganado, então Luís está enganado. Se Luís estiver enganado, então o filme não esta sendo exibido. Ora, ou o filme está sendo exibido ou José não irá ao cinema. Entretanto, sabe-se que Maria está certa. Logo:

   (a) o filme está sendo exibido;

   (b) Luís e Júlio não estão enganados;

(c) Júlio está enganado, mas Luís não;
(d) José Não irá ao cinema.

Justique sua resposta!

6. (Assistente de Chancelaria MRE 2004 ESAF) No final de semana, Chiquita não foi ao parque. Ora, sabe-se que sempre que Didi estuda, Didi é aprovado. Sabe-se também que nos nais de semana, ou Dadá vai à missa ou vai visitar tia Célia. Sempre que Dadá vai visitar tia Célia, Chiquita vai ao parque, e sempre que Dadá vai à missa, Didi estuda. Então, no nal de semana,

   (a) Dadá foi à missa e Didi foi aprovado;
   (b) Didi não foi aprovado e Dadá não foi visitar tia Célia;
   (c) Didi não estudou e Didi foi aprovado;
   (d) Didi estudou e Chiquita foi ao parque;
   (e) Dadá não foi à missa e Didi não foi aprovado.

   Justique sua resposta!

7. Considere as armações "$P : \sqrt{2}$ é racional" e "$Q : \frac{1}{3}$ é racional". Escreva cada afirmação a seguir em palavras e determine os valores lógicos.

   (a) $P \Rightarrow Q$;
   (b) $Q \Rightarrow P$ (Recíproca da primeira);
   (c) $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ (Inversa da primeira);
   (d) $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ (Contrapositiva da primeira).

8. Considere P, Q, R e S Proposições. Verifique as seguintes equivalências lógicas:

   (a) Idempotência: $(P \wedge P) \equiv P$ e $(P \vee P) \equiv P$;
   (b) Associatividade:

      i. $[(P \wedge Q) \wedge R] \equiv [P \wedge (Q \wedge R)]$;
      ii. $[(P \vee Q) \vee R] \equiv [P \vee (Q \vee R)]$;
      iii. $[(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R] \equiv [P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)]$.

   (c) Comutatividade:

      i. $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$;
      ii. $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$;
      iii. $(P \Leftrightarrow Q) \equiv (Q \Leftrightarrow P)$.

   (d) Distributividade:
      i. $[P \wedge (Q \vee R)] \equiv [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$;
      ii. $[P \vee (Q \wedge R)] \equiv [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$.

   (e) Leis de De Morgan:

      i. $[\sim (P \wedge Q)] \equiv [(\sim P) \vee (\sim Q)]$;
      ii. $[\sim (P \vee Q)] \equiv [(\sim P) \wedge (\sim Q)]$.

   (f) Leis da Implicação:

      i. $(P \Rightarrow Q) \equiv [(\sim P) \vee Q]$;
      ii. $[\sim (P \Rightarrow Q)] \equiv [P \wedge (\sim Q)]$.

   (g) Lei da Contradição ou Redução ao Absurdo:
      i. $(P \Rightarrow Q) \equiv [(P \wedge (\sim Q)) \Rightarrow F]$, onde F representa proposição falsa qualquer.

9. Dadas proposições P, Q e R, determine e justique quais as proposições a seguir são Tautologias e quais são Contradições:

(a) $[(\sim P) \wedge Q] \wedge [P \vee (\sim Q)]$; (b) $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$.

10. Escreva uma prova para cada uma das afirmações a seguir. Faça o rascunho, reescreva as afirmações quando necessário, e o passo a passo da prova no rascunho como feito em aula.

    (a) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.
    (b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se m é par e n é ímpar, então $m+n$ é ímpar.
    (c) Se x e y são racionais, então $x+y$ é racional.
    (d) Se x e y são racionais, então xy é racional.
    (e) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Se a divide b e b divide a, então $a = b$ ou $a = -b$.
    (f) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se a divide b e a divide c, então a divide $b+c$.
    (g) Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $7n+4$ é par, então n é par.
    (h) Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $5n+6$ é ímpar, então n é ímpar.
    (i) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.
    (j) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se n^3 é par, então n é par.
    (k) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

11. Escreva uma prova para cada uma das afirmações a seguir (reescreva as afirmações, quando necessário, para facilitar o entendimento):

    (a) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Se $x < y$ e $z < 0$, então $xz > yz$.
    (b) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x^4 + y^6 = 0$, então $x = 0$ e $y = 0$.
    (c) Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se $(n+1)^2 - 1$ é par, então n é par.
    (d) $\sqrt[3]{2}$ é irracional.
    (e) Se $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, então $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+2}$.
    (f) Se x é irracional, então $\frac{1}{x}$ é irracional.
    (g) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se x é racional e y é irracional, então xy é irracional.
    (h) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se a não divide bc, então a não divide b.
    (i) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Então $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
    (j) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
    (k) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
    (l) Prove que $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$.
    (m) Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$ temos $n^2 \geq n$.
    (n) Prove que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ temos $|xy| = |x||y|$.
    (o) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, definimos

    $$\min\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq y \\ y, & \text{se } y \leq x \end{cases} \quad \text{e} \quad \max\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y \\ y, & \text{se } y \geq x \end{cases}.$$

    i. Prove que

    $$\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2} \quad \text{e} \quad \max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2};$$

    ii. Prove que $\max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x+y$.

    (p) Prove que m e n são números inteiros ímpares (ambos) se, e somente se, mn é ímpar.

(q) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

   i. n é um número par;
   ii. $n - 1$ é um número ímpar;
   iii. n^2 é um número par.

(r) Seja $n \in \mathbb{N}$. n é par se, e somente se, $7n + 4$ é par.

(s) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Prove que se $a \neq 0$ então existe uma única solução para a equação na variável x: $ax + b = c$.

(t) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que se a e b são ímpares, então existe um único inteiro c tal que $|a - c| = |b - c|$.

Bons Estudos!