FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 13: 16/08/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 13: Conjecturas e Teoremas.

Conjecturas

Def. (Conjectura): Entende-se por Conjectura uma afirmação que acreditamos ser verdade, geralmente com base em evidências, cuja falsidade ou veracidade ainda não foi possível comprovar.

Ex. a) Existe vida fora da Terra.

b) Existe vida após a morte.

Ex (Conjectura de Goldbach 1742):

$4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$,

$10 = 3+7$, $12 = 5+7$, ...

"Qualquer número par maior do que 2, pode ser escrito como soma de dois números primos"

Ex. (Conjectura de Fermat):

" Se $n > 2$, então

$$x^n + y^n = z^n,$$

não tem solução natural."

Em 1995, o matemático Andrew Wiles provou que a afirmação é verdadeira.

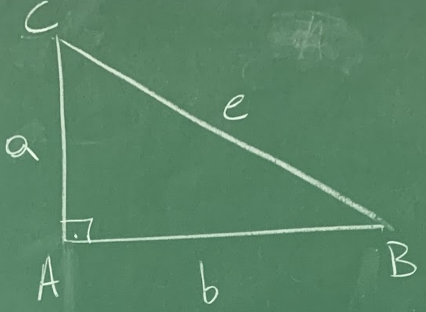
Teoremas

Def. (Teorema): Entende-se por

Teorema uma afirmação constituída a partir de conceitos primitivos, axiomas e outras afirmações verdadeiras.

Ex. a) Teorema de Pitágoras

"Se ΔABC é um triângulo retângulo, com catetos a e b e hipotenusa c, então $c^2 = a^2 + b^2$."



b) Teorema: Se n^2 é par então n é par.

Teoremas em geral podem ser reescritos

Por exemplo, o anterior também pode ser escrito na seguinte forma:

Teorema: n^2 é par $\Rightarrow$ n é par.

Devemos observar também que nem sempre

teoremas estão apresentados de modo explícito na forma de condicional.

Ex. **Teorema**: A soma de dois números ímpares é um número par.

No entanto, podemos reescrever tentando uma forma que melhor explicite o teorema como uma implicação. Por exemplo:

Teorema: Se m e n são ímpares, então $m+n$ é um número par.

Ou ainda, simbolicamente:

Teorema: m e n ímpares $\Rightarrow$ $m+n$ par.

O objetivo é sempre buscar evidenciar o que são hipóteses e que são teses.

Por exemplo, no caso anterior,

<u>Hipoteses</u>: m é ímpar
n é ímpar

<u>Tese</u> : $m+n$ é par.

Note que o teorema anterior inclusive pode ser enunciado também como:

<u>Teorema</u>:

$$\forall\, m,n \in \mathbb{N},\ [(m \text{ é ímpar}) \wedge (n \text{ é ímpar})] \Rightarrow (m+n \text{ é par})$$

Teoremas da Forma "se, e somente se".

Para facilitar o entendimento, comecemos com os teoremas:

Teorema: Todo número natural terminado em 0 ou 5 é múltiplo de 5.

Teorema: Todo número natural múltiplo de 5 é terminado em 0 ou 5.

Note que podemos escrever esses dois teoremas em apenas um:

Teorema: Um número natural é terminado em 0 ou 5 se, e somente se, é múltiplo de 5.

Nós usamos neste caso, uma bi-implicação.

No entanto, há teoremas que apresenta mais equivalências. Por exemplo, no caso de exerc vemos

$$P_1 \iff P_2 \iff P_3$$

estamos representando as implicações

$$P_1 \iff P_2 \,, \quad P_2 \iff P_3 \ \text{ e } \ P_1 \iff P_3 .$$

Na prática, isto se justifica para apresentar teoremas como, por exemplo:

Ex.: Teorema: Para cada n natural, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) n é ímpar;

$\Updownarrow$

b) n^2 é ímpar;

$\Updownarrow$

c) $n^2 - 2n + 1$ é par.

Generalização de um Teorema

Teorema 1: A soma dos ângulos internos de um triângulo isósceles é 180°.

e

Teorema 2: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

O Teorema 2 generaliza o Teorema 1.

Outros nomenclaturas para Teoremas.

Proposição: é uma palavra usada como sinônimo de Teorema, quando este estiver num contexto menos importante.

Lema: é a palavra usada como sinônimo de Teorema e que é usada no contexto em que o teorema é uma afirmação auxiliar.

Corolário: é a palavra usada como sinônimo de Teorema e é usado no contexto para uma afirmação quase que imediata, como consequência de um teorema.

Nos exemplos de Generalização de Teoremas, o Teorema 1 é um Corolário do Teorema 2.