FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 7: 26/07/22)

FUNDAM. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 7: Conjunção

Negação de Sentenças Abertas

Def (Neg. de Sentença Aberta): Dada $P(x)$ uma sent. aberta em A, a Negação de $P(x)$, representada por

"$\sim P(x)$",

é a sentença aberta em A tal que

$\sim P(a)$,

é a negação de $P(a)$, para cada $a \in A$.

Ex. a) Considere H o conj. de todos os seres humanos e

"$P(x)$: x tem menos de 21 anos".

A negação de $P(x)$ é:

"$\sim P(x)$: x não tem menos de 21 anos".

b) Considere $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$

e "$R(x, y) : x \geq y$",

sent. aberta em $A \times B$. Temos:

→ $R(1,2) : 1 \geq 2$ (falso)

→ $R(3,2) : 3 \geq 2$ (verd)

↳ → $\sim R(1,2) : 1 < 2$ (verd)

→ $\sim R(3,2) : 3 < 2$ (falso)

No geral:

"$\sim R(x,y) : x < y$",

Negações de Quantificadores

Como motivação, considere a prop.:

"Todos os alunos de Cálculo estão na sala." (*)

Note que assumindo que esta prop. é verdade a negação dela deve ser falsa.

A negação dela é:

"Existe ao menos um aluno de cálculo que não está na sala".

De forma simbólica, considerando D o

conjunto dos alunos de Cálculo e

"P(x): x está na sala de aula"

podemos representa (*) por

$$\forall x \in D, P(x).$$

e sua negação

$$\exists x \in D, \sim P(x).$$

Então:

$$\sim\left[\forall x \in D, P(x)\right] \equiv \left[\exists x \in D, \sim P(x)\right]$$

Segundo motivação análoga:

$$\sim\left[\exists x \in D, Q(x)\right] \equiv \left[\forall x \in D, \sim Q(x)\right].$$

Ex. a) Considere $\mathbb{N}$ e a sent. aberta

$$S(x): x+1 > 2.$$

$\hookrightarrow$ $\underline{\forall x \in \mathbb{N}, S(x)}$

$$\forall x \in \mathbb{N}, \ x+1 > 2$$

A negação:

$$\sim[\forall x \in \mathbb{N}, x+1>2] \equiv [\exists x \in \mathbb{N}, \sim(x+1>2)]$$

Note que

$$\sim(x+1>2) \equiv (x+1 \leq 2)$$

$\hookrightarrow \sim[\forall x \in \mathbb{N}, x+1>2] \equiv [\exists x \in \mathbb{N}, x+1 \leq 2]$

b) Vamos encontrar a negação da prop.

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}}, \underbrace{xy > 0}.$$

$$\sim \left[\forall (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad P(x,y)\right]$$

$$\equiv \exists (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad x \cdot y \leq 0$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, \quad x \cdot y \leq 0$$

De forma geral, a negação de quant. iguais, em 2 variáveis, é sempre da forma:

$\rightarrow \sim\left[\forall x \in A, \forall y \in B, P(x,y)\right]$

$$\equiv \left[\exists x \in A, \exists y \in B, \sim P(x,y)\right]$$

$\rightarrow \sim\left[\exists x \in A, y \in B, P(x,y)\right]$

$$\equiv \left[\forall x \in A, \forall y \in B, \sim P(x,y)\right]$$

A negação de 2 quant. diferentes em 2 variáveis, segue a forma:

$\rightarrow \sim [\forall x \in A, \exists y \in B, P(x,y)]$

$$\equiv [\exists x \in A, \forall y \in B, \sim P(x,y)]$$

$\rightarrow \sim [\exists x \in A, \forall y \in B, P(x,y)]$

$$\equiv [\forall x \in A, \exists y \in B, \sim P(x,y)].$$

Ex.: Vamos negar a prop.:

$$\text{“} \forall x, \varepsilon \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y + \varepsilon \text{”}$$

Note que esta também se escreve como:

$$\text{“} \forall x \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x < y + \varepsilon \text{”}.$$

$$\hookrightarrow \sim[\forall x\in\mathbb{N}, \forall \varepsilon\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N}, x<y+\varepsilon]$$

$$\equiv \exists x\in\mathbb{N}, \sim[\forall \varepsilon\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N}, x<y+\varepsilon]$$

$$\equiv \exists x\in\mathbb{N}, \exists \varepsilon\in\mathbb{N}, \sim[\exists y\in\mathbb{N}, x<y+\varepsilon]$$

$$\equiv \exists x\in\mathbb{N}, \exists \varepsilon\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N}, \sim[x<y+\varepsilon]$$

$$\equiv \exists x\in\mathbb{N}, \exists \varepsilon\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N}, x\geq y+\varepsilon.$$

Conclusão: devemos ter o cuidado de verificar se a prop. obtida é de fato a negação da prop. inicial e, em suma, como é o caso, temos:

$$\sim[\forall x, \varepsilon\in\mathbb{N}, \exists y\in\mathbb{N}, x<y+\varepsilon]$$

$$\equiv \underbrace{\exists x,\varepsilon\in\mathbb{N}, \forall y\in\mathbb{N}, x\geq y+\varepsilon}.$$

Conjunção

Def. (Conjunção): Chama-se Conjunção de duas prop. P e Q, a prop. representada por

$$P \wedge Q,$$

cujo valor lógico é verdadeiro quando ambos P e Q são verd. e falsa caso contrário.

Ex.: P: João gosta de feijão

Q: João gosta de arroz.

$P \wedge Q$: João gosta de feijão e arroz.

Tabela verdade

P	Q	$P \land Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Def. (Conjunção de Sentença Abertas): Dados sent. abertos $P(x)$ em A e $Q(y)$ em B, a Conjunção de $P(x)$ e $Q(y)$, representada por

$$P(x) \land Q(y),$$

é a sentença aberta em $A \times B$ tal que

$$P(a) \wedge Q(b),$$

para cada $a \in A$ e $b \in B$.

Ex. 1: Considere $\mathbb{N}$ e

$$P(x): x > 2 \quad \text{e} \quad Q(x): x \leq 6.$$

Observe que:

$$P(x) \wedge Q(x): 2 < x \leq 6.$$

Note que:

→ $P(1): 1 > 2$ (falsa)

→ $Q(1): 1 \leq 6$ (verd)

↳ $P(1) \wedge Q(1)$ (falsa)

Ex.2: Considere

$$R(x,y): 2x+y=8$$

$$S(x,y): 5x+3y=21$$

sentenças abertas em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Temos

$$R(x,y)\wedge S(x,y): 2x+y=8 \text{ e } 5x+3y=21$$

$\to R(1,6): 2\cdot 1+6=8$ (verd.)

$\to S(1,6): 5\cdot 1+3\cdot 6=21$ (falso)

$R(1,6)\wedge S(1,6)$ (falso!)