FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

AVALIAÇÃO 1

Turma 2

Uma Resolução

QUESTÃO 1

Uma Solução:

Vamos os conceitos de lógica para solucionar o problema. Pode-se verificar de imediato 4 proposições:

T: "Eu não fui"

afirmada por Tomás.

M: "Foi o Tchê"

afirmada por Marcelo.

TC: "Foi o Lord"

afirmada por Tchê. Além disso

L: "Marcelo está mentindo"

afirmou o Lord.

Note que:

$$L \equiv \sim M.$$

Vamos agora analisar os casos considerando que apenas uma das proposições é falsa:

Caso 1: T falsa.

Este caso não é possível pois assim 2 colegas teriam escondido (Tomás e Tchê, pois M é verdade, neste caso).

Caso 2: M falsa.

Neste caso temos T, Tc e L verdadeiras e concluímos de Tc que foi o Lord o único que escondeu.

Caso 3: Tc falsa.

Neste caso M e L seriam verdadeiras e isso não pode pois $L \equiv \sim M$.

Caso 4: L falsa.

Neste caso temos M e Tc verdadeiras, porém isso implica que 2 colegas esconderam (o Tchê e o Lord), o que não é possível.

Estudados todos os possíveis casos, chegamos a conclusão que escondeu a bolsa foi o Lord.

$\square$

QUESTÃO 2

Uma Solução:

(a) Conforme estudamos, vamos reescrever

$$\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall y \in \mathbb{N} \text{ temos } y^2 \geq x$$

como

$$\exists x \in \mathbb{N};\ \forall y \in \mathbb{N},\ y^2 \geq x.$$

$$\sim [\exists x \in \mathbb{N};\ \forall y \in \mathbb{N},\ y^2 \geq x]$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{N}; \sim [\forall y \in \mathbb{N},\ y^2 \geq x]$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{N};\ \exists y \in \mathbb{N}, \sim [y^2 \geq x]$$

$$\equiv \forall x \in \mathbb{N};\ \exists y \in \mathbb{N},\ y^2 < x.$$

Conclusão: a negação buscada é

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } y^2 < x.}$$

Valor lógico falso pois não existe $y \in \mathbb{N}$ quando $x = 0$.

(b) Para obter a negação do item (b):

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tal que } xy < 1$$

procedemos como antes e reescrevemos:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N};\ xy < 1.$$

Então:

$$\sim\left[\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N};\ xy < 1\right]$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}, \sim\left[\exists y \in \mathbb{N};\ xy < 1\right]$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}; \sim\left[xy < 1\right]$$

$$\equiv \exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N};\ xy \geq 1$$

Conclusão: a negação buscada é

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall y \in \mathbb{N},\ xy \geq 1.}$$

Valor lógico Falso, pois para $y=0$ não vale $xy \geq 1$. $\square$

QUESTÃO 3

Uma solução:

Uma solução para esta questão é simplesmente construção de Tabela Verdade.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

P	Q	R	$\sim R$	$P \wedge (\sim R)$	$\sim Q$	$P \wedge (\sim R) \to (\sim Q)$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

Conclusão: as Tabelas Verdade de $(P \wedge Q) \to R$ e $P \wedge (\sim R) \to (\sim Q)$ são iguais, logo é uma equivalência lógica. $\square$

QUESTÃO 4

(a)

Este item pode-se escrever uma prova usando o método direto. Vejamos:

Se $15n$ é par, então ele é da forma

$$15n = 2k$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim podemos escrever que

$$9n + 6m = 2k$$

e temos

$$9n = 2k - 6m = 2(k - 3m).$$

Dessa forma, temos um número $t = k - 3m \in \mathbb{Z}$ e então

$$9n = 2 \cdot t.$$

Assim, portanto, $9n$ é um número par, conforme afirmado. Assim, temos uma prova para o item.

$$\square$$

(b)

Como temos uma afirmação do tipo "se, e somente se", precisamos prova 2 implicações "$\Rightarrow$" e "$\Leftarrow$":

Prova de "$\Rightarrow$": Devemos provar que

$$m+1 \text{ é ímpar} \Rightarrow m^2 \text{ é par}.$$

Para isto, veja que: se $m+1$ é ímpar então

$$m + 1 = 2k + 1,$$

para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$m = 2k.$$

Assim,

$$m^2 = (2k)^2 = 2(2 \cdot k^2) = 2l,$$

onde $l = 2k^2$, e então m^2 é par, como precisavamos concluir.

Prova de "$\Leftarrow$": agora precisamos provar que

$$m^2 \text{ é par} \Rightarrow m+1 \text{ é ímpar}. \qquad (\star)$$

Para isto, vamos usar o método da contrapositiva, ou seja, vamos mostrar que

$$m+1 \text{ é par} \Rightarrow m^2 \text{ é ímpar}. \qquad (\star\star)$$

Vejamos: se $m+1$ é par, então $m+1 = 2n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, $m = 2n-1$ e temos

$$m^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 2 \cdot 2n + 1^2 = 2(2n^2 - 2n) + 1 = 2r + 1,$$

onde $r = 2n^2 - 2n \in \mathbb{Z}$, e assim m^2 é ímpar, provando assim a implicação $(\star\star)$, que garante a validade $(\star)$.

$\square$

(c)

Uma Solução:

Vamos fazer uma prova usando o método da contradição. Vejamos:

Suponha que $\sqrt[3]{2}$ é racional. Então, deve existir números $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, tal que

$$\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}.$$

Como $\frac{a}{b}$ é uma fração, podemos assumir que ela é irredutível, ou seja, b não divide a, e assim tem-se

$$mdc(a, b) = 1.$$

Agora, temos $2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$. $\Rightarrow 2b^3 = a^3$.

Então, a^3 é par. Precisamos concluir agora que a é par e fazemos isto com a contrapositiva: Se a não é par, então é ímpar, ou seja, seria

$$a = 2k+1.$$

Assim,

$$a^3 = (2k+1)^3 = (2k+1)(2k+1)^2$$
$$= (2k+1)(4k^2+4k+1)$$
$$= 8k^3 + 8k^2 + 2k + 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$$

e então com o número $t = 4k^3 + 6k^2 + 3k \in \mathbb{Z}$, temos

$$a^3 = 2t+1$$

que neste caso é um número ímpar. Logo, pela contrapositiva

$$a^3 \text{ par} \Rightarrow a \text{ é par}.$$

Mas assim, $a = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Então

$$2 \cdot b^3 = a^3 = (2k)^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot k^3 \Rightarrow b^3 = 2\cdot 2k^3.$$

Logo, para $l = 2k^3$ temos $b^3 = 2l$, ou seja, b^3 é par. Como já mostramos, podemos concluir que b é par, ou seja, $b = 2n$ com $n \in \mathbb{Z}$

e $n \neq 0$. Mas assim 2 divide

$$a = 2l \quad \text{e} \quad b = 2n,$$

o que é uma contradição pois consideramos $mdc(a,b) = 1$.

Portanto, pelo método da contradição provamos que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

$\square$