FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 11: 09/08/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 11: Implicação Lógica

Implicação Lógica

Conforme vimos, a condicional possui características que se afasta do uso dedutivo. Por exemplo:

"Se 2 é ímpar, então Brasília é a capital do Brasil"

Mais ainda, note que a condicional

$$(0=1) \longrightarrow (1=1)$$

é verdadeira neste caso, porém esta é uma situação também não dedutiva

Feitas estas considerações, motivamos a definição:

<u>Def.</u> (Implicação Lógica): Dizemos que uma prop P Implica Logicamente uma prop. Q, representada por

$$P \Rightarrow Q,$$

quando Q for verdadeira sempre que P é verdadeira.

<u>Ex.</u>: a) P: Pedro é Sergipano

Q: Pedro é Brasileiro.

$P \Rightarrow Q$: Se Pedro é Sergipano, então Pedro é Brasileiro.

Note que $P \Rightarrow Q$ é verdade, pois cumpre a definição.

b) R: João trabalha muito.

S: João é rico.

↳ $R \Rightarrow S$: Se João trabalha muito, então João é rico.

Temos $R \Rightarrow S$ uma prop. falsa!

c) Se Maria tem irmão, então não é filha única.

Prop verdadeira.

Notação: Lemos em geral $P \Rightarrow Q$, como:

"P implica Q"

"Se P então Q"

"P é condição *suficiente* para Q"

"Q é " *necessária* " P "

É comum chamar-se P de Hipótese (ou Premissa) e Q de Tese (ou conclusão)

Def. (Contrapositiva): Dadas prop. P e Q, chamamos de *Contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$, a prop.

$$\boxed{(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)}$$

Ex.: P: Pedro é Sergipano

Q: Pedro é Brasileiro

↳ $P \Rightarrow Q$: Se Pedro é Serg. então Pedro é Brasileiro

↳ $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$: Se Pedro não é Brasileiro, então Pedro não é Sergipano.

Def. (Inversa de uma Implicação): Dados prop. P e Q, chamamos de <u>Inversa de</u> $P \Rightarrow Q$ a prop.

$$\boxed{(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)}.$$

Ex.: P: Pedro é Sergipano

Q: " " Brasileiro

$(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$: Se Pedro não é Sergipano então Pedro não é Brasileiro.

Note que neste caso $(\sim P) \Rightarrow (\sim Q)$ é falsa, pois se Pedro for baiano, por exemplo, então

$\sim P$ é verdade e $\sim Q$ é Falsa.

Def. (Recíproca): Considere P, Q e $P \Rightarrow Q$ prop. A prop.

$$Q \Rightarrow P$$

é chamada de recíproca de $P \Rightarrow Q$.

Ex.: P: Pedro é Sergipano

Q: " " Brasileiro

$P \Rightarrow Q$: Se Pedro é Sergip., então Pedro é Brasileiro

e a recíproca:

$Q \Rightarrow P$: Se Pedro é Brasileiro, então Pedro é Sergipano.

Neste caso, $P \Rightarrow Q$ é verd. enquanto $Q \Rightarrow P$ é falso.

<u>Def.</u> (Implicação de Sentenças Abertas): Dadas sentenças $P(x)$ e $Q(x)$ abertas no conj. A.

dizemos que $P(x)$ Implica Logicamente $Q(x)$, representado por

$$P(x) \Rightarrow Q(x),$$

quando $P(a) \Rightarrow Q(a)$ é verdadeira para qualquer $a \in A$. Caso contrário, diz-se que $P(x)$ Não implica logicamente $Q(x)$.

Ex.: Considere C o conj. de todas as pessoas e

$P(x)$: x é vivo e $Q(x)$: x é mortal.

Temos

$$P(x) \Rightarrow Q(x)$$

uma implicação verdadeira pois a prop.

$$\forall a \in C, P(a) \Rightarrow Q(a)$$

é verdadeira.

Ex.: Considere $\mathbb{N}$ e

$R(x)$: x divide 12 e $S(x)$: x divide 45.

A implicação

$$R(x) \Rightarrow S(x)$$

é falsa, pois para $x = 2$, temos

$R(2)$: 2 divide 12 (verd).

e $S(2)$: 2 divide 45 (falso)

↳ $R(2) \Rightarrow S(2)$ é uma prop. falsa

Portanto, $\forall x \in \mathbb{N}$, $R(x) \Rightarrow S(x)$

é falso e assim $P(x)$ não implica $Q(x)$.

Ex. (Subconj.): Considere conj. A e B. Definimos que

$$A \subset B$$

quando cada $x \in A$ é também $x \in B$. Com implicações, podemos redefinir o conceito agora por: $A \subset B$ quando

$$\boxed{\forall x,\ \underbrace{x \in A}_{P(x)} \Rightarrow \underbrace{x \in B}_{Q(x)}}$$

é uma prop. verd.

De forma mais geral, conside $P(x)$ e $Q(x)$ sent. abertas num conj. C. Por especif. de conj., temos os conj.

$$\{x \in C : P(x)\} \quad \text{e} \quad \{x \in C : Q(x)\}.$$

Agora, se $P(x) \Rightarrow Q(x)$, então

$$\{x \in C : P(x)\} \subset \{x \in C : Q(x)\}.$$

Observe que quando A não é subconj. de B, que representamos por $A \not\subset B$, então a prop.

$$\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$$

é falsa. Logo, sua negação é verdadeira, ou seja,

$$\left[\exists x,\ \sim(x \in A \Rightarrow x \in B)\right] \equiv \underbrace{\sim \underbrace{\left[\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B\right]}_{F}}_{V}$$

$$\exists x,\ x \in A \wedge \left(\sim(x \in B)\right) \equiv$$

$$\exists x,\ x \in A \wedge x \notin B$$

$$\sim(P \to Q) \equiv P \wedge (\sim Q)$$

<u>Conclusão:</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subset B:\ \forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B \\ A \not\subset B:\ \exists x,\ x \in A \wedge x \notin B \end{array}}$$

Ex.: Considere $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e

$$R(x,y):\ (x+y)^2 = 2xy \quad \text{e} \quad S(x,y):\ x=0 \text{ e } y=0.$$

Note que

$$R(x,y) \Rightarrow S(x,y):\ \text{Se } (x+y)^2 = 2xy \text{ então } x=0 \text{ e } y=0.$$

ou

$$(x+y)^2 = 2xy \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0.$$

Esta é uma prop. verd. pois

$$x^2 + \cancel{2xy} + y^2 = (x+y)^2 \underset{R(x,y)}{=} \cancel{2xy}.$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x=0 \text{ e } y=0.$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : R(x,y)\} \subset \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : S(x,y)\} = \{(0,0)\}$$

$$\hookrightarrow \{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x+y)^2 = 2xy\} \subset \{(0,0)\}.$$