FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 20: 15/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 20: Métodos de Indução

Indução Finita

Muitas afirmações na ciência envolve quantificador universal e tem a forma

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$$

Por exemplo: Dado $n \in \mathbb{N}$, vale:

- $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- Binômio de Newton para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n.$$

Por exemplo, em particular:

$$(a+b)^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{2}{0}}}{a^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{2}{1}}}{2ab} + \underset{\substack{\uparrow \\ \binom{2}{2}}}{b^2}$$

Princípio da Boa Ordem

Como motivação que auxilia o entendimento, consideremos os conj.

$$A = \{4, 5, 8, 9\}, \quad B = \{7, 9, 11, 13, \ldots\}.$$

e

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Podemos destacar duas características desses conjuntos: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e $C \neq \emptyset$ e

$$4, \quad 7 \quad e \quad 2$$

são respectivamente os menores elementos de A, B e C.

<u>Def.</u> (<u>Elemento Mínimo</u>): Seja $S \in \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$. Dizemos que $m \in \mathbb{N}$ é um Menor Elemento de S quando

$$m \leq x, \ \forall\, x \in S.$$

<u>Teorema (P.B.O)</u>: Seja $S \subset \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$. Então, S <u>possui</u> um Menor Elemento, que representamos por $\min S$, e ele é <u>único</u>.

Prova:

- Prova da Existência: Vamos considerar o conjunto:

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x, \forall x \in S\}.$$

Sabemos que $\underbrace{0 \leq x, \forall x \in S}$.

Logo, $0 \in M$ e $M \neq \emptyset$.

Sendo $S \neq \emptyset$, podemos considerar um $s \in S$.

Agora, sempre temos

$$s+1 > s.$$

Então, $s+1 \notin M$ (se pertencesse $s+1 \leq s$).

Assim: $s+1 \in \mathbb{N}$ e $s+1 \notin M$.

Daí,

$$0 \in M \quad \text{e} \quad M \neq \mathbb{N}.$$

Vejamos a lógica:

$$\underset{(V)}{H_1} \wedge \underset{(F)}{H_2} \Longrightarrow \underset{(F)}{T}$$

- H_1: $0 \in M$
- H_2: $k \in M \Rightarrow k+1 \in M$
- T: $M = \mathbb{N}$.

O Axioma (P5) de Peano diz:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 0 \in M \\ \bullet\ k \in M \Rightarrow k+1 \in M \end{array}\right\} \Longrightarrow M = \mathbb{N}.$$

Então, deve existir $m \in M$ mas que $\underline{m+1 \notin M}$.

Note que $m \in M$ significa

$$m \leq x, \ \forall x \in S.$$

Agora precisamos provar que $m \in S$.
Para isso, vamos usar o mét. da contradição. Vamos imaginar que

$$m \notin S.$$

Então,

$$m < x, \ \forall x \in S.$$

Daí,

$$m + 1 \leq x, \ \forall x \in S,$$

e isso significa que

$$m + 1 \in M,$$

que é uma contradição pois já sabemos que $m+1 \notin M$. Portanto, $m \notin S$ não pode acontecer, e assim deve ser

$$m \in S.$$

Como

$$m \leq x, \ \forall x \in S,$$

então m é o menor elemento de S, e garantimos a existência.

- Prova da Unicidade: Para provar a unicidade imaginemos que tenhamos $m_1 \in S$ e $m_2 \in S$ como menores elementos de S. Então:

$$m_1 \leq \overset{m_2}{x}, \ \forall x \in S$$

e

$$m_2 \leq \overset{m_1}{x}, \ \forall x \in S.$$

Assim:

$$m_1 \leq m_2 \quad \text{e} \quad m_2 \leq m_1.$$

Então: $m_1 = m_2$. Isto prova a unicidade. $\square$

Princípio de Indução Finita

Com o P.B.O. podemos agora provar:

Teorema (P.I.F. – 1ª forma): Considere $P(n)$ uma sentença aberta em $\mathbb{N}$. Se valem as duas condições:

(i) $P(1)$ verdade;

(ii) $P(k)$ verdade $\Rightarrow$ $P(k+1)$ verdade;

então $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Usa o P.B.O. (vejam o material)!

Ex.: Prove, para $n \in \mathbb{N}$, que:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Prova: Vamos aplicar o P.I.F. Considere

$$P(n): 1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Temos:

(I) $P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (verdade)

(II) Vamos assumir que $P(k)$ é verdade, ou seja,

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

é verdade. Assim:

$$\underbrace{1+2+3+\cdots+k}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k+1$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

Então: $1+2+3+\cdots+k+(k+1) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}.$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdade, ou seja,

$$P(k) \text{ verd.} \implies P(k+1) \text{ verd.}$$

Logo, aplicando o P.I.F, temos

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$