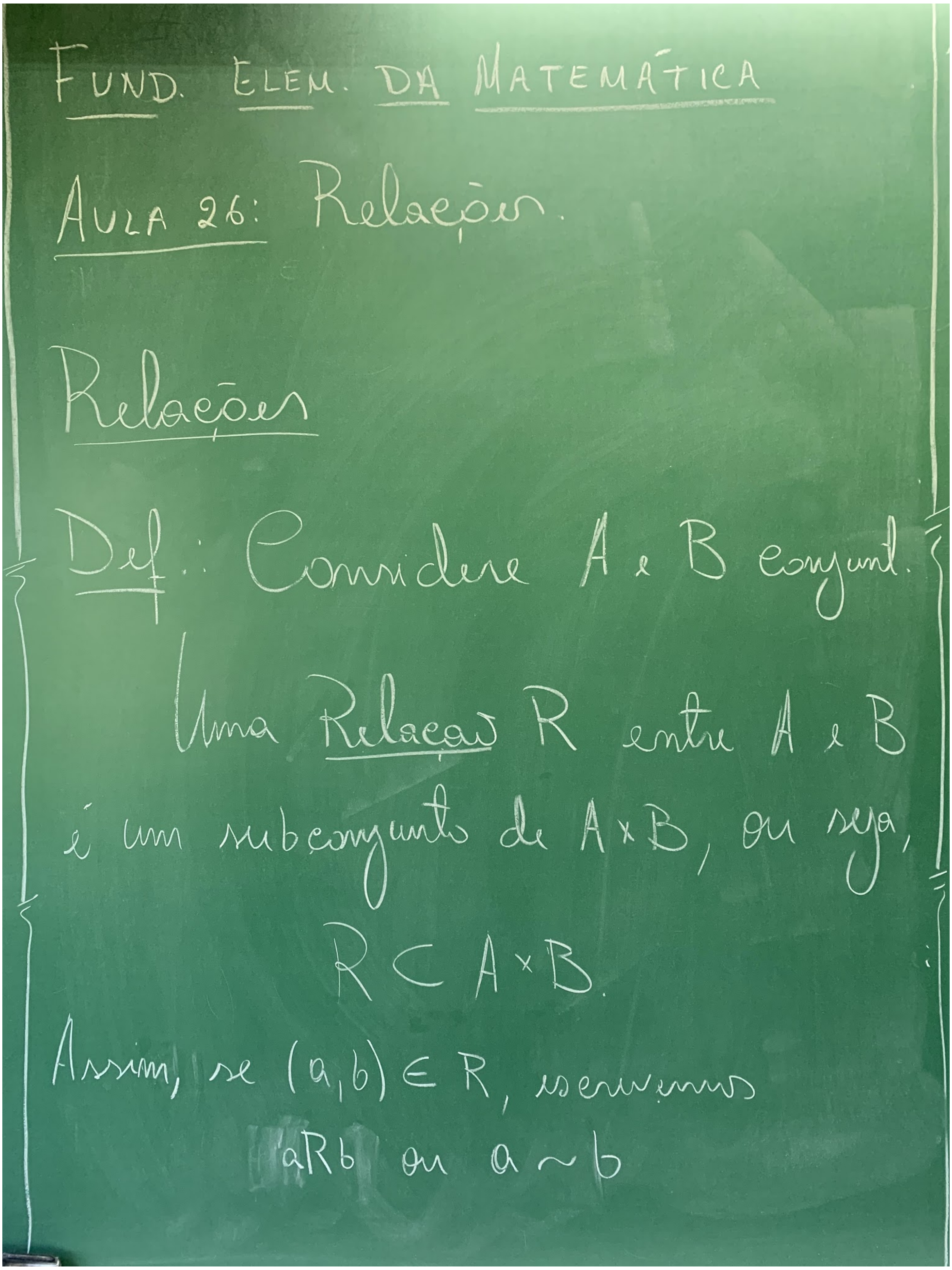
FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 26: 06/10/22)



FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 26: Relações.

Relações

Def.: Considere A e B conjunt.

Uma Relação R entre A e B é um subconjunto de $A \times B$, ou seja,

$$R \subset A \times B.$$

Assim, se $(a,b) \in R$, escrevemos

aRb ou $a \sim b$

para expressar que a e b estão relacionados.

Ex.: $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Temos:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

São relações entre A e B:

$$R_1 = \{(a,1),(b,3)\} \subset A \times B$$

e

$$R_2 = \{(a,1),(b,2),(a,3)\} \subset A \times B.$$

Ex.: Considere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Temos a relação

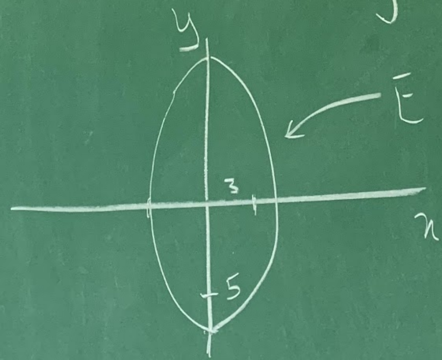
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 0\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Note que:

* $(1,2) \notin R$, pois $1+3 \neq 0$
* $(-1,1) \in R$
* $(0,0) \in R$
* $(12,-12) \in R$

Ex.: No conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ temos a relação:

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \right\}$$



Note que: $0 \not\ast 1$ pois $\frac{0^2}{9} + \frac{1^2}{25} \neq 1$.

Por outro lado: $3 \sim 0$, pois $\frac{3^2}{9} + \frac{0^2}{25} = 1$

Def. (Relação Inversa): Dados A e B conj. e R uma relação entre A e B, definimos a Relação Inversa de R, representada por R^{-1}, por

$$R^{-1} = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in R\}$$

Ex.: $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$

Temos a relação

$$R = \{(a,1), (b,2), (a,3)\}$$

e sua inversa:

$$R^{-1} = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$$

Def. (Composição de Relações): Considere

* R uma relação entre A e B
* S " " " B e C.

A Relação Composta entre R e S, representada por $S \circ R$, é definida por:

$$S \circ R = \left\{ (a,c) \in A \times C : \exists\, b \in B \text{ tq } \begin{array}{l} (a,b) \in A \times R \\ \text{e } (b,c) \in B \times C \end{array} \right\}$$

Ex.: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{p,q,r,s\}$

e $C = \{x,y,z\}$.

Temos as relações

$$R = \{(1,p),(1,q),(2,q),(3,r),(4,s)\} \subset A \times B$$

e

$$S = \{(p,x),(q,x),(q,y),(s,z)\} \subset B \times C.$$

Note que:

* $(1,p) \in R$ e $(p,x) \in S$

$(1,x) \in S \circ R$, pois existe $p \in B$ tq $(1,p) \in R$ e $(p,x) \in S$.

Assim:

$$S \circ R = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(4,z)\}$$

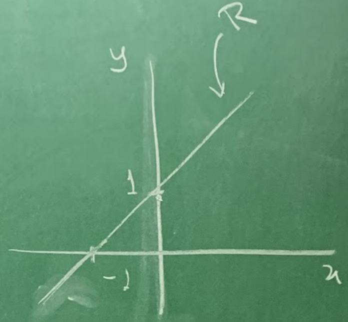
Ex.: Podemos ter relações tais que

$R \circ S$ e $S \circ R$.

Porém, nem sempre vale a igualdade:

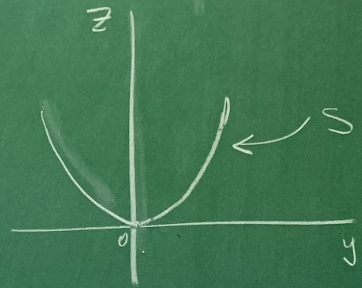
$$R \circ S = S \circ R.$$

De fato, considere



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x + 1\}$$

e



$$S = \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = y^2\}$$

As compostas são:

$$R \circ S = \left\{ (\alpha, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } \begin{array}{l} (\alpha, \beta) \in S \\ \text{e } (\beta, \gamma) \in R \end{array} \right\}$$

$$= \{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } \beta = \alpha^2 \text{ e } \gamma = \beta + 1\}$$

$$= \{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tq } \gamma = \alpha^2 + 1\}$$

$$= \{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \gamma = \alpha^2 + 1\}$$

Logo:

$$R \circ S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \underbrace{y = x^2 + 1}\}$$

Agora, do mesmo modo podemos obter

$$S \circ R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \underbrace{y = (x+1)^2}\}.$$

Conclusão: $R \circ S \neq S \circ R$.

(Composição não é Comutativa!)

Teorema: Considere A, B, C e D conj.

* R é uma relação entre A e B
* S " " " " B e C
* T " " " " C e D

Sempre vale:

(i) $(R^{-1})^{-1} = R$

(ii) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

(iii) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

<u>Prova</u>: Exercício! (Usem as Definições!)