Fundamentos Elementares de Matemática

Avaliação Rep - Turmas 1 e 2

(Uma solu ão)

QUESTÃO 1

Vamos considerar 2 casos: n par e n ímpar.

Caso n par: neste caso, n é da forma $n = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo,
$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 5 &= (2k)^2 + 3(2k) + 5 \\ &= 4k^2 + 2\cdot 3k + 4 + 1 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 2) + 1 \\ &= 2s + 1, \end{aligned}$$

onde $s = 2k^2 + 3k + 2$. Então $n^2 + 3n + 5 = 2s + 1$ é um número ímpar.

Caso n ímpar: neste caso, n é da forma $n = 2l + 1$, com $l \in \mathbb{Z}$.

Assim:
$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 5 &= (2l+1)^2 + 3(2l+1) + 5 \\ &= 4l^2 + 2\cdot 2l + 1 + 2\cdot 3l + 3 + 5 \\ &= 2\cdot 2l^2 + 2\cdot 2l + 2\cdot 3l + 9 \\ &= 2\cdot 2l^2 + 2\cdot 5l + 8 + 1 \\ &= 2\cdot(2l^2 + 5l + 4) + 1 \\ &= 2\cdot t + 1, \end{aligned}$$

onde $t = 2l^2 + 5l + 4 \in \mathbb{Z}$. Então, também neste caso temos

$$n^2 + 3n + 5$$

um número ímpar.

Portanto, em todo caso, $n^3 + 3n + 5$ é um número ímpar.

$\square$

QUESTÃO 2

Vamos provar as inclusões:

"$\subset$": $\forall x, x=(a,b) \in A\times(B\setminus C) \Rightarrow a \in A$ e $b \in B\setminus C$

$\Rightarrow a \in A$ e $(b \in B$ e $b \notin C)$

$\Rightarrow (a \in A$ e $b \in B)$ e $(a \in A$ e $b \notin C)$

$\Rightarrow x \in A\times B$ e $b \notin A\times C$

$\Rightarrow x \in (A\times B)\setminus(A\times C)$.

Logo, é verdade que $\forall x$, $x \in A\times(B\setminus C) \Rightarrow x \in (A\times B)\setminus(A\times C)$, ou seja, $A\times(B\setminus C) \subset (A\times B)\setminus(A\times C)$.

"$\supset$": $\forall x, x=(a,b) \in (A\times B)\setminus(A\times C) \Rightarrow x \in A\times B$ e $x \notin A\times C$

$\Rightarrow (a \in A$ e $b \in B)$ e $(a \in A$ e $b \notin C)$

$\Rightarrow a \in A$ e $(b \in B$ e $b \notin C)$

$\Rightarrow a \in A$ e $b \in B\setminus C$

$\Rightarrow (a,b) \in A\times(B\setminus C)$.

Logo, é verdade que $\forall x$, $x \in (A\times B)\setminus(A\times C) \Rightarrow x \in A\times(B\setminus C)$, ou seja, $(A\times B)\setminus(A\times C) \subset A\times(B\setminus C)$.

$\square$

QUESTÃO 3

a) Vamos aplicar a contrapositiva:

Se a não é par então a é ímpar, ou seja, $a = 2k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Logo: $a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 2\cdot 2k + 1^2 = 2(2k^2+2k)+1 = 2\ell+1$,

onde $\ell = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$, ou seja, a^2 é ímpar.

Portanto, pela contrapositiva, temos o resultado provado.

$\square$

b) Usando o método da contrapositiva no item a) temos:

Se b é ímpar então b^2 é ímpar. Então, $b^2 = 2k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, $3b^2 = 6k+3 = 2(3k+1)+1 = 2\ell+1$,

onde $\ell = 3k+1 \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$b \text{ ímpar} \Rightarrow 3b^2 \text{ ímpar}.$$

Portanto, pela contrapositiva temos provado o item b). $\square$

c) Suponha que $\sqrt{6}$ é racional. Então, $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e $mdc(a,b) = 1$. Logo:

$$6 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2\cdot(3b^2) = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ é par} \overset{\text{item a)}}{\Rightarrow} a \text{ é par}.$$

Assim: $a = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$2(3\cdot b^2) = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2\ell,$$

onde $\ell = 2k^2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $3b^2$ é par. Pelo item b), temos b par. Mas assim

$$mdc(a,b) \geq 2,$$

o que é uma contradição, pois $mdc(a,b) = 1$.

Portanto, $\sqrt{6}$ é irracional. $\square$

QUESTÃO 4

Para usar indução, considere a sentença aberta:

$$P(n):\ 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Temos $1\cdot 3 = 3$ e $\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} = 3$, ou seja,

$$P(1):\ 1\cdot 3 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+7)}{6}$$

é verdade! Suponha agora que vale $P(K)$, isto é, vale a igualdade:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \dots + K(K+2) = \frac{K(K+1)(2K+7)}{6}.$$

Então, somando $(K+1)((K+1)+2)$ nos dois lados temos

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \dots + K(K+2) + (K+1)((K+1)+2) = \frac{K(K+1)(2K+7)}{6} + (K+1)((K+1)+2).$$

Agora observe que:

$$\begin{aligned}
\frac{K(K+1)(2K+7)}{6} + (K+1)((K+1)+2) &= (K+1)\left[\frac{K(2K+7)}{6} + (K+3)\right] \\
&= (K+1)\left[\frac{K(2K+7)+6K+18}{6}\right] \\
&= (K+1)\left[\frac{2K^2+7K+6K+18}{6}\right] \\
&= (K+1)\left[\frac{2K^2+13K+18}{6}\right] \\
&= (K+1)\frac{(K+2)(2K+9)}{6} \\
&= \frac{(K+1)((K+1)+1)(2(K+1)+7)}{6}
\end{aligned}$$

Logo:

$$1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \dots + K(K+2) + (K+1)((K+1)+2) = \frac{(K+1)((K+1)+1)(2(K+1)+7)}{6}$$

e $P(K+1)$ é verdade. Portanto, por indução finita temos a prova. $\square$

QUESTÃO 5

* f é injetiva: Pra provar, vamos supor que tenhamos $x_1, x_2 \in [2,3)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$. Então:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1-2}{3-x_1} = \frac{x_2-2}{3-x_2} \Rightarrow (x_1-2)(3-x_2) = (3-x_1)(x_2-2)$$

$$\Rightarrow 3x_1 - \cancel{x_1x_2} - \cancel{2\cdot 3} + 2x_2 = 3x_2 - \cancel{3\cdot 2} - \cancel{x_1x_2} + 2x_1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Portanto, f é injetiva. $\square$

* <u>f é sobrejetiva</u>: Considere $y \in [0,\infty)$. Então, considerando o número $x = \frac{3y+2}{y+1}$ temos:

$$2 \leq \frac{3y+2}{y+1} \quad \text{e} \quad \frac{3y+2}{y+1} \leq 3$$

pois $0 \leq y$ implica

$$2y+2 \leq y+2y+2 = 3y+2 \Rightarrow 2 \leq \frac{3y+2}{y+1}$$

e $$3y+2 \leq 3y+3 = 3(y+1) \Rightarrow \frac{3y+2}{y+1} \leq 3.$$

Agora, veja que

$$f(x) = f\left(\frac{3y+2}{y+1}\right) = \frac{\left(\frac{3y+2}{y+1}\right) - 2}{3 - \left(\frac{3y+2}{y+1}\right)} = \frac{\frac{3y+2-2(y+1)}{y+1}}{\frac{\quad}{y+1}}$$

$$= \frac{3y+2-2(y+1)}{3(y+1)-(3y+2)} = \frac{3y+2-2y-2}{3y+3-3y-2} = \frac{y}{1} = y.$$

Portanto, cada $y \in [0,\infty)$ existe sempre $x = \frac{3y+2}{y+1}$ tal que

$$f(x) = y.$$

Logo, f é sobrejetiva. $\square$

* <u>Função Inversa</u>: Precisamos encontrar $f^{-1}: [0,\infty) \to [2,3)$ tal que

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in [2,3).$$

Então, fazendo $f(x) = y$ vamos encontrar x a partir de

$$\frac{x-2}{3-x} = y.$$

Logo: $x - 2 = y(3-x) = 3y - yx \Rightarrow -2 - 3y = -x - yx = -(1+y)x$

$$\Rightarrow x = \frac{-(2+3y)}{-(1+y)} = \frac{3y+2}{y+1}$$

Assim, $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+2}{y+1}$. Note que mostramos acima

que $\quad f(f^{-1}(y)) = f\left(\dfrac{3y+2}{y+1}\right) = y$

e calculando $f^{-1}(f(x))$ obtemos

$$f^{-1}(f(y)) = f^{-1}\left(\frac{x-2}{3-x}\right) = x.$$

Portanto, $f^{-1}(y) = \dfrac{3y+2}{y+1}$ é a inversa de f.

$\square$