FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 24: 29/09/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 24: Famílias de Conjuntos

Complementar de um Conjunto

Dados conjuntos E e F, a diferença entre eles é:

$$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\}.$$

Ex.: $A = \{1, 2, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$

↳ $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$

Def.: Dados conj. E e F, quando

$$F \subset E,$$

a diferença $E \setminus F$ é chamada de Complementar de F em E; e representamos por

$$\complement_E(F) \quad \text{ou} \quad F^c_E$$

Ex.: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{2,4,6\}$

e $B = \{1,3,5\}$.

Então: $\complement_E(A) = E \setminus A = \{1,3,5\}$

$$B^c_E = E \setminus B = \{2,4,6\}.$$

$$E^c_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus E = \{0,7,8,9,\dots\}$$

$$= \{x \in \mathbb{N} : x = 0 \text{ ou } x \geq 7\}$$

Teorema: Sejam A, B e E conj. com

$$\underbrace{A \subset E \text{ e } B \subset E}_{A,B \subset E}.$$

Sempre vale:

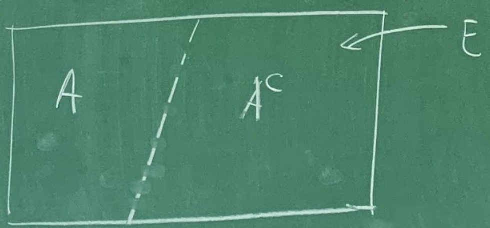
(a) $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus A = \emptyset$

(b) $\underbrace{A \cap B = \emptyset}_{\text{são disjuntos}} \Rightarrow A \setminus B = A$ e $B \setminus A = B$

(c) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(e) $A \cup A^c = E$ e $A \cap A^c = \emptyset$



(f) $(A^c)^c = A$

(g) $A \subset B \iff B^c \subset A^c$

Prova de (d): Para provar devemos garantir que

$$\forall x,\ x \in (A \cap B)^c \iff x \in A^c \cup B^c$$

é sempre verdade. Para isto, temos:

$$\forall x,\ x \in (A \cap B)^c = E \setminus (A \cap B)$$

$$\iff x \in E \text{ e } x \notin A \cap B$$

$$\iff x \in E \text{ e } (x \notin A \text{ ou } x \notin B)$$

$$\iff (x \in E \text{ e } x \notin A) \text{ ou } (x \in E \text{ e } x \notin B)$$

$$\iff x \in E \setminus A \text{ ou } x \in E \setminus B$$

$$\iff x \in A^c \text{ ou } x \in B^c$$

$$\iff x \in A^c \cup B^c$$

Portanto, vale a igualdade

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

$\square$

Indexação de Conjuntos

Como motivação, note que

$$A \cup B \cup C = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\}$$

e

$$A \cup B \cup C \cup D = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C \text{ ou } x \in D\}.$$

Para seguir fazendo uniões de mais conjuntos, precisamos de indexação.

Assim, para $n \geq 2$, e conjuntos

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1} \text{ e } A_n,$$

de modo que podemos então considerar

$$\bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i,\ 1 \leq i \leq n\}$$

Por exemplo: $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ e $A_4 = D$,

então

$$\bigcup_{i\in\{1,2,3,4\}} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

$$= A \cup B \cup C \cup D$$

De modo geral, dado um conjunto

$$I$$

que chamaremos de Conj. de Índices,

chamaremos de <u>Família</u>, o conjunto

$$\{A_i : i \in I\}$$

de conjunto A_i, que também é representado por

$$\{A_i\}_{i\in I}.$$

Ex.: $I = \{1, 2, 3\}$ e $A_1 = \{5, 6\}$, $A_2 = \{2, \pi\}$ e $A_3 = \mathbb{N}$.

Então:
$$\{A_i\}_{i \in I} = \{A_1, A_2, A_3\}$$
$$= \{\{5, 6\}, \{2, \pi\}, \mathbb{N}\}.$$

Ex.: $J = \{\sqrt{2}, \pi, \frac{1}{2}, 100\}$ e

$B_{\sqrt{2}} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B_\pi = \{1, 3, 4\}$

$B_{\frac{1}{2}} = \{1, 2, 3\}$ e $B_{100} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$

$\hookrightarrow \{B_j\}_{j \in J} = \{B_{\sqrt{2}}, B_\pi, B_{1/2}, B_{100}\}$

Agora, dada uma família
$$\{A_i\}_{i \in I}$$

a União de todos os elementos da família é dada por

$$\{x : x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\},$$

que representamos por $\bigcup_{i \in I} A_i$, ou seja,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}.$$

Ex.: $\bigcup_{j \in J} B_j = B_{\sqrt{2}} \cup B_{\pi} \cup B_{1/2} \cup B_{100}$

Ex.: Considere $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ e

$$A_i = \{i, i+1\}$$

$\hookrightarrow \{A_i\}_{i \in N}$

$A_1 = \{1, 2\}$

$A_2 = \{2, 3\}$

$\vdots$

$A_n = \{n, n+1\}$

$$\bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \uparrow \\ \{1,\dots,n\}}} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\}$$

Ex.: Considere $\mathbb{R}$ o conj. dos números reais e

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : -\alpha < x < \alpha\}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$. Note que

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow S_\alpha = \emptyset \quad \left(\begin{array}{l}\text{veja que} \\ \alpha < 0 \Rightarrow 0 < x < 0\end{array}\right)$$

Temos a família:

$$\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}.$$

Além disso:

$$\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} S_\alpha \overset{?}{=} \mathbb{R} \qquad \square$$

Vamos provar a igualdade:

* $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha \subset \mathbb{R}$

Neste caso, note que

$$\forall z\,,\ z\in\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha \Rightarrow z\in S_{\alpha_0} \text{ para algum } \alpha_0\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow z\in\mathbb{R}, \text{ pois } S_{\alpha_0}\subset\mathbb{R}.$$

$\hookrightarrow \forall z,\ z\in\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha \Rightarrow z\in\mathbb{R}$,

ou seja, temos $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha \subset\mathbb{R}$.

(**) $\mathbb{R}\subset\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha$.

Neste caso: $\forall y,\ y\in\mathbb{R} \Rightarrow -(|y|+1)<y<|y|+1$

$$\Rightarrow y\in S_{|y|+1}\Rightarrow y\in\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha$$

Portanto, $\mathbb{R}\subset\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} S_\alpha$.