Fundamentos Elementares de Matemática

Avaliação 2 - Turma 2

(Uma solu ão)

QUESTÃO 1

Para usar indução, considere a sentença aberta:

$$P(n):\ \frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+2)(n+3)}=\frac{n}{3n+9}.$$

Temos $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{(1+2)\cdot(1+3)}=\frac{1}{12}$, ou seja,

$$P(1):\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{(1+1)(1+2)}$$

é verdade! Suponha agora que vale $P(k)$, isto é, vale a igualdade:

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{k}{3k+9}.$$

Então, somando $\frac{1}{((k+1)+2)((k+1)+3)}$ nos dois lados temos

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{((k+1)+2)((k+1)+3)}=\frac{k}{3k+9}+\frac{1}{((k+1)+2)((k+1)+3)}.$$

Agora observe que:

$$\frac{k}{3k+9}+\frac{1}{((k+1)+2)((k+1)+3)}=\frac{k}{3k+9}+\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\frac{k(k+3)(k+4)+3(k+3)}{3(k+3)(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{k(k+4)+3}{3(k+3)(k+4)}=\frac{k^2+4k+3}{3(k+3)(k+4)}=\frac{(k+1)(k+3)}{3(k+3)(k+4)}$$

$$=\frac{k+1}{3(k+4)}=\frac{k+1}{3(k+1)+9}$$

Logo: $$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\frac{1}{((k+1)+2)((k+1)+3)}=\frac{k+1}{3(k+1)+9},$$

e $P(K+1)$ é verdade. Portanto, por indução finita temos a prova. $\square$

QUESTÃO 2

Vamos provar as inclusões:

"$\subset$": $\forall x, x=(a,b) \in A\times(B\cup C) \Rightarrow a \in A$ e $b \in B\cup C$

$\Rightarrow a \in A$ e $(b \in B$ ou $b \in C)$

$\Rightarrow (a \in A$ e $b \in B)$ ou $(a \in A$ e $b \in C)$

$\Rightarrow x \in A\times B$ ou $b \in A \times C$

$\Rightarrow x \in (A\times B)\cup(A\times C)$.

Logo, é verdade que $\forall x$, $x \in A\times(B\cup C) \Rightarrow x \in (A\times B)\cup(A\times C)$, ou seja, $A\times(B\cup C) \subset (A\times B)\cup(A\times C)$.

"$\supset$": $\forall x, x=(a,b) \in (A\times B)\cup(A\times C) \Rightarrow x \in A\times B$ ou $x \in A\times C$

$\Rightarrow (a \in A$ e $b \in B)$ ou $(a \in A$ e $b \in C)$

$\Rightarrow a \in A$ e $(b \in B$ ou $b \in C)$

$\Rightarrow a \in A$ e $b \in B\cup C$

$\Rightarrow (a,b) \in A\times(B\cup C)$.

Logo, é verdade que $\forall x$, $x \in (A\times B)\cup(A\times C) \Rightarrow x \in A\times(B\cup C)$, ou seja, $(A\times B)\cup(A\times C) \subset A\times(B\cup C)$.

$\square$

QUESTÃO 3

Temos $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1-\frac{1}{1} < x < 0\} = (-2, 0)$

$A_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1-\frac{1}{2} < x < 0\} = (-\frac{3}{2}, 0)$

$A_3 = \{x \in \mathbb{R} : -1-\frac{1}{3} < x < 0\} = (-\frac{4}{3}, 0)$

$A_4 = \{x \in \mathbb{R} : -1-\frac{1}{4} < x < 0\} = (-\frac{5}{4}, 0)$

a) $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1$, pois $A_2 \subset A_1$, devido a $-2 < -\frac{3}{2}$, e $A_3 \subset A_1$ visto que $-2 < -\frac{4}{3}$. $\square$

b) $\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = A_4$, pois $A_4 \subset A_1$, devido a $-2 < -\frac{5}{4}$, $A_4 \subset A_2$, visto que $-\frac{3}{2} < -\frac{5}{4}$, $A_4 \subset A_3$ devido $-\frac{4}{3} < -\frac{5}{4}$. □

c) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (-2, 0)$ (note que $(-2,0) = A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$)

De fato: "$\subset$": $\forall x,\ x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow x \in A_K$, para algum K, $\Rightarrow x \in A_K \subset A_1$

$\Rightarrow x \in A_1 = (-2, 0)$

"$\supset$": $\forall y,\ y \in (-2, 0) \Rightarrow y \in A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. □

d) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [-1, 0)$ (note que $\lim_{n \to \infty} -1 - \frac{1}{n} = -1$)

De fato: "$\subset$": $\forall x,\ x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow x \in A_i$, para todo i,

$\Rightarrow 0 < x < -1 - \frac{1}{i}$, para todo i,

$\Rightarrow 0 < x \leq \lim_{i \to \infty} -1 - \frac{1}{i} = -1$

$\Rightarrow x \in [-1, 0)$

"$\supset$": $\forall y,\ y \in [-1, 0) \Rightarrow -1 < y \leq 0 \Rightarrow -1 - \frac{1}{i} < y < 0$, para todo i,

$\Rightarrow y \in A_i$, para todo i,

$\Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. □

QUESTÃO 4

Dizemos que $aRb \Leftrightarrow a - b$ é múltiplo de 5.

R é reflexiva: aRa pois $a - a = 0 = 5 \cdot 0$, ou seja, zero é múltiplo de 5.

R é simétrica: $aRb \Leftrightarrow a - b = 5K$, $K \in \mathbb{Z}$. Então, $b - a = 5(-K) = l$, onde $l = -K \in \mathbb{Z}$.

Mas $b - a = 5l \Leftrightarrow bRa$.

R é transitiva: Suponha aRb e $bRc \Leftrightarrow a - b = m$ e $b - c = n$, com $m, n \in \mathbb{Z}$.
Somando as 2 igualdades, temos

$$a - b + b - c = 5m + 5n \Rightarrow a - c = 5(m+n) = 5r,$$

onde $r = m + n \in \mathbb{Z}$. Mas $a - c = 5r \Leftrightarrow aRc$. Logo:

$$aRb \text{ e } bRc \Rightarrow aRc.$$

classe $[3]_R$: Temos $[3]_R = \{a \in \mathbb{Z} : aR3\}$. como $aR3 \Leftrightarrow a - 3 = 5K$, $K \in \mathbb{Z}$, então

$a = 5k+3$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$[3]_R = \{a \in \mathbb{Z} : aR\ \} = \{a \in \mathbb{Z} : a = 5k+3, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$= \{\dots -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$$

$\square$

QUESTÃO 5

a) Lembremos que

$$f^{-1}([-1,0]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-1,0]\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x \in [-1,0]\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2+2x \leq 0\}$$

Agora observe que $-1 \leq x^2+2x \leq 0 \iff -1 \leq x^2+2x$ e $x^2+2x \leq 0$.

Então: $0 \leq x^2+2x+1$ e $x^2+2x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (x+1)^2$ e $x(x+2) \leq 0$

Note que $(x+1)^2 \geq 0$ não nos diz nada. No entanto,

$$x(x+2) \leq 0 \iff \underbrace{x \leq 0 \text{ e } x+2 \geq 0} \text{ ou } \underbrace{x \geq 0 \text{ e } x+2 \leq 0}$$
$$\iff \underbrace{x \leq 0 \text{ e } x \geq -2} \text{ ou } \underbrace{x \geq 0 \text{ e } x \leq -2}$$

Veja que $x \geq 0$ e $x \leq -2$ não faz sentido. Então resta:

$$-2 \leq x \leq 0$$

Portanto, $-1 \leq x^2+2x \leq 0 \iff -2 \leq x \leq 0$ e temos que

$$f^{-1}([-1,0]) = [-2,0].$$

$\square$

b) Lembremos que $f([0,1]) = \{f(x) : x \in [0,1]\} = \{f(x) : 0 \leq x \leq 1\}$.

Então, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2$ e $0 \leq x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq x^2 + 2x \leq 1 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 3.$$

$$\Rightarrow f(x) \in [0,3]$$

Além disso, note que

$$z = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow z+1 = (x+1)^2 \Rightarrow \sqrt{(z+1)} = |x+1| = x+1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{z+1} - 1$$

com $\sqrt{z+1} - 1 \in [0,1]$ sempre que $0 \leq z \leq 3$.

Vamos provar então que $f([0,1]) = [0,3]$.

"$\subset$": $\forall y, y \in f([0,1]) \Rightarrow y = f(x), x \in [0,1] \Rightarrow y = f(x) \in [0,3]$

e assim $f([0,1]) \subset [0,3]$.

"$\supset$" $\forall z, z \in [0,3] \Rightarrow 0 \leq z \leq 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{z+1} - 1 \leq 1$

$$\Rightarrow f(\sqrt{z+1} - 1) \in f([0,1])$$

$$\Rightarrow (\sqrt{z+1} - 1)^2 + 2(\sqrt{z+1} - 1) \in f([0,1])$$

$$\Rightarrow z+1 - \cancel{2\sqrt{z+1}} + 1 + \cancel{2\sqrt{z+1}} - 2 \in f([0,1])$$

$$\Rightarrow z \in f([0,1])$$

Portanto, $f([0,1]) = [0,3]$.