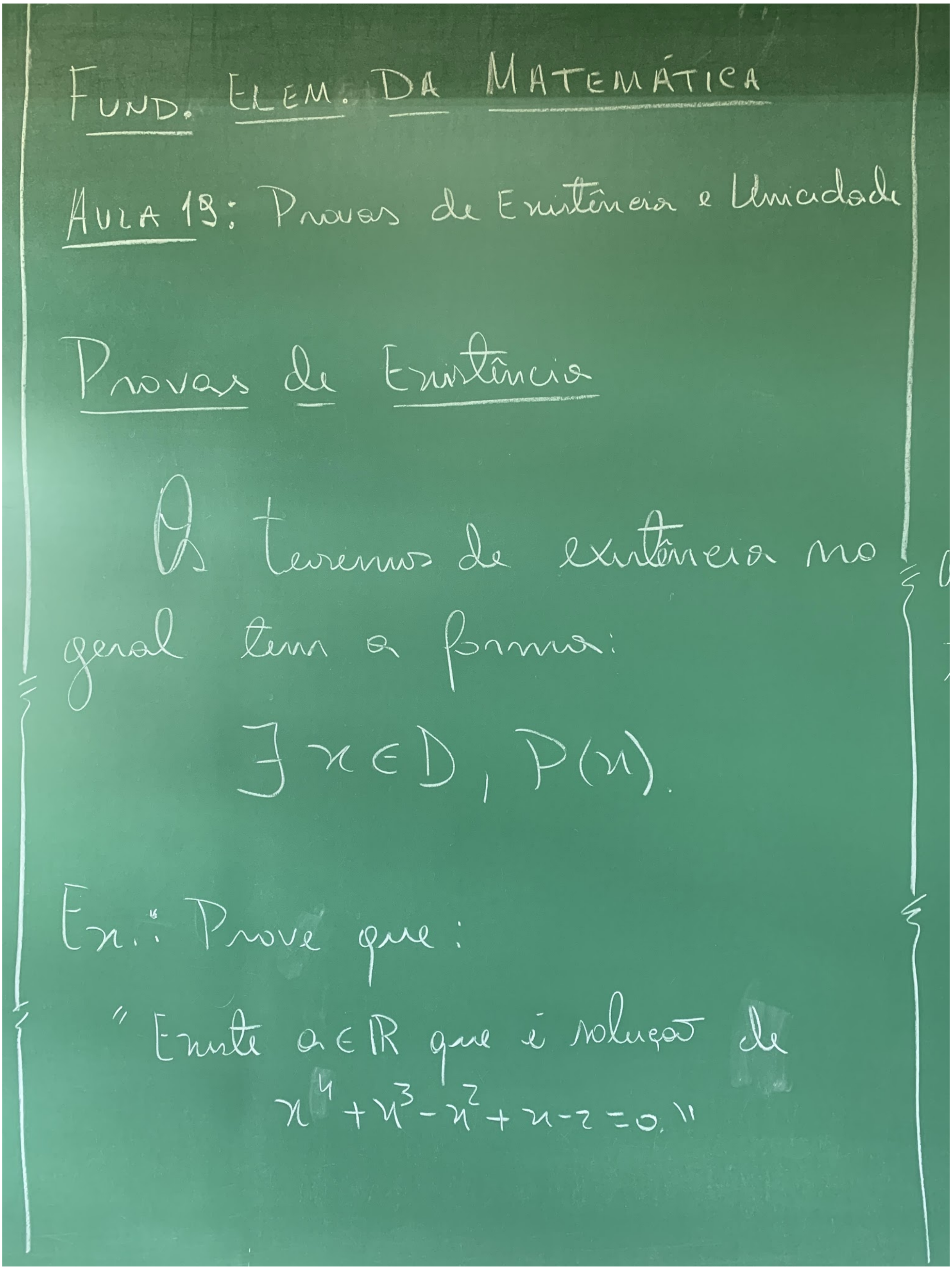
FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 19: 13/09/22)



FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 19: Provas de Existência e Unicidade

Provas de Existência

Os teoremas de existência no geral tem a forma:

$$\exists x \in D, P(x).$$

Ex.: Prove que:

"Existe $a \in \mathbb{R}$ que é solução de

$$x^4+x^3-x^2+x-2=0."$$

Uma prova para este tipo de afirmação, é simplesmente observar que $a = 1$ é tal que

$$1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 0.$$

Quando não se consegue exibir um elemento que mostra uma existência, a saída é usar os métodos de prova para provar a existência que não se consegue exibir.

Ex.: Prove que:

"Existem x, y números irracionais tais que x^y é um número racional"

Para elaborar uma prova para esta afirmação, vamos considerar que

$$\sqrt{2}$$

é um número irracional. Além disso, devemos observar que

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

é um número real.

Prova: Vamos separar a prova em 2 casos: o caso em que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja racional e o caso em que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja irracional.

Caso 1: $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja racional.

Neste caso, basta considerar

$$x = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}$$

que são irracionais e então

$$x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

é racional.

<u>Caso 2:</u> $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja irracional.

Neste agora, vamos precisar considerar

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}.$$

Veja assim então que:

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^{2}$$

$$= 2$$

Então, neste caso também temos

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{2}$$

números irracionais tais que

$$x^y = 2.$$

Portanto, em todo caso vale a afirmação feita. $\blacksquare$

Provas de Unicidade

Os métodos de prova são também usados para provas de unicidade.

Ex.: Prove que:

"Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe um <u>único</u> $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot b = 1$."

<u>Prova da Existência</u>: Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, basta considerar $b = \frac{1}{a}$.

Isto garante a existência do b.

<u>Prova da Unicidade</u>: Pra garantir a unicidade, suponha que existam $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \cdot x = 1 \quad \text{e} \quad a \cdot y = 1.$$

Assim,

$$x = x \cdot 1 = x(a \cdot y) = (x a) \cdot y = (\underline{a \cdot x}) y = 1 \cdot y = y.$$

Portanto, não há mais de um número conforme afirmado. $\blacksquare$

Ex. (Uso de Contradição): Prove que:

"Existe um único $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n \leq 1$."

<u>Prova da Existência</u>: O número $n = 1$ satisfaz $0 < 1 \leq 1$, o que prova a existência.

<u>Prova da Unicidade</u>: Para usar o método da contradição, vamos supor que existe $m \in \mathbb{N}$ com $m \neq 1$ e $\underline{0 < m < 1}$.

Agora vamos considerar o conj.

$$S = \{ l \in \mathbb{N} ;\ 0 < l \leq 1 \} \subset \mathbb{N}.$$

Note que $1, m \in S$ e assim $S \neq \emptyset$.

Nesta situação S tem um menor elemento, que vamos denotar por K.

(Princípio da Boa Ordem - P.B.O.)

Logo,

$$0 < K \leq m < 1.$$

Assim, $0 < K < 1$ e então

$$0 < K^2 < K,$$

o que é uma contradição, pois K é o menor elemento de S e K^2 está pertencendo a S. Se temos uma contradição, então não pode existir um $m \neq 1$ em S.

Portanto, temos a garantia da afirmação ser verdadeira. $\boxtimes$

Ex. (Existência Exata): Prove que:

"Existem exatamente 2 números reais que satisfazem a igualdade:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0."$$

Prova: A existência de duas soluções é garantida pois

$$x = 1 \text{ e } x = -2$$

são soluções:

$$1^4+1^3-1^2+1-2=0$$

e $$(-2)^4+(-2)^3-(-2)^2+(-2)-2=0.$$

Com essa solução podemos então concluir que

$$x^4+x^3-x^2+x-2=(x-1)(x+2)\underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0}.$$

Note que $x^2+1\geq 1$ e assim

$$x^4+x^3-x^2+x-2$$

só se anula quando

$$x=1 \quad \text{ou} \quad x=-2.$$

Portanto, conclui-se que existem apenas 2 soluções conforme afirmado.

JA