UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – DMA

DISCIPLINA: Fundamentos Elementares da Matemática
TURMAS: 01 e 02 — PERÍODO: 2022-1
PROFESSOR: J. Anderson Valença Cardoso — DATA: 26/10/2022

Lista de Exercícios 4

EXERCÍCIOS SOBRE CONJUNTOS

1. Reescreva cada conjunto a seguir apresentando o mesmo com seus elementos em lista, conforme exemplo:

$$A = \{m \in \mathbb{Z} : -3 \leq m < 4\} \qquad \text{pode ser reescrito por} \qquad A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

   (a) $B = \{n \in \mathbb{Z} : n^2 < 15\}$
   (b) $C = \{l \in \mathbb{N} : l^3 \leq 100\}$
   (c) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0\}$
   (d) $E = \{y \in \mathbb{Z} : y^2 - y \leq 0\}$.

2. Represente por especificação cada conjunto a seguir, conforme exemplo:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \qquad \text{pode ser representado por} \qquad A = \{m \in \mathbb{Z} : -2 \leq m \leq 3\}.$$

   (a) $B = \{-1, -2, -3, -4, -5, \cdots\}$
   (b) $C = \{1, 2, 3, 4, \cdots, 10\}$
   (c) $D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$
   (d) $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \cdots, 31\}$.

3. É comum se escrever a especificação de conjunto $\{x \in D : P(x)\}$ na ordem invertida $\{P(x) : x \in D\}$, e até omitindo informações que não comprometam o entendimento. Por exemplo, o conjunto $A = \{y \in \mathbb{Z} : y = 2x \text{ e } x \in \mathbb{Z}\}$ é representado por

$$A = \{y = 2x : x \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{ou} \qquad A = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}, \tag{1}$$

   sendo a última representação ainda mais comum seu uso. Note que o conjunto A pode ser apresentado por listagem de seus elementos:

$$A = \{\cdots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}. \tag{2}$$

   Em cada conjunto a seguir, apresente o mesmo por listagem de seus elementos, conforme exemplo (2).

   (a) $B = \{5n : n \in \mathbb{N}\}$
   (b) $C = \{3l - 1 : l \in \mathbb{Z}\}$
   (c) $D = \{-2j + 1 : j \in \mathbb{Z}\}$
   (d) $E = \{2k - 3 : k \in \mathbb{Z}\}$.

4. Representar cada conjunto a seguir na forma (1):

   (a) $A = \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, , \cdots\}$
   (b) $C = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$
   (c) $D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$
   (d) $E = \{1, 8, 27, 64, 125, \cdots\}$.

5. Considere o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \subset \mathbb{N}$. Determine os conjuntos:

$$B = \{x \in A : x = y + z \ \text{ e } \ y, z \in A\} \quad \text{e} \quad C = \{x \in B : x + y \in B \ \text{ para algum } \ y \in A\}.$$

6. Encontre os conjuntos a seguir que são iguais (Justifique com uma prova):

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 = 0\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 - 1 = 0\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 15 \geq 0\}$
   (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 4 < 0\}$
   (e) $E = \{-1, 1\}$
   (f) $F = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 4\}$
   (g) $E = \{-1, 2\}$
   (h) $G = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -5 \text{ ou } x \geq 3\}$.

7. Dado um conjunto A, chamamos de *Conjunto das Partes* de A o conjunto formado por todos os subconjuntos de A, e o denotamos por $\mathcal{P}(A)$, ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

   (a) Dado $B = \{a, b, c\}$, determine todos os elementos de $\mathcal{P}(B)$;
   (b) Justifique as igualdades $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ e $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
   (c) Determine os elementos dos conjuntos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ e $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$;
   (d) É verdade que $\varnothing \subset \mathcal{P}(A)$, para todo conjunto A? Justique sua resposta!
   (e) É verdade que $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(A)$, para todo conjunto A? Justique sua resposta!
   (f) É verdade que $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$, para todo conjunto A? Justique sua resposta!
   (g) Considere A e B conjuntos. É verdade que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Justique sua resposta!
   (h) Considere A e B conjuntos. É verdade que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Justique sua resposta!

8. Em certos casos, é conveniente admitir que todos os elementos dos conjuntos que nos interessam, pertencem a um conjunto, que chamamos de Conjunto Universo (ou Universo do Discurso) e denotamos por $\mathcal{U}$[1]. Se $A \subset \mathcal{U}$, então definimos o Complemento (ou Complementar) de A em $\mathcal{U}$, como sendo o conjunto $\mathcal{U} \setminus A$, que se denota por A^c, ou seja, $A^c = \mathcal{U} \setminus A$. Considere

$$\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 29, 30\}$$

   e determine o conjunto complementar de cada conjunto a seguir:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 9\}$;
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 30\}$;
   (c) $C = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 20 \text{ e } x \text{ é primo}\}$;
   (d) $D = \{x \in \mathbb{N} : (x - 1)(x - 35)^3 = 0\}$.

9. Faça uma prova para cada item:

   (a) $A \setminus B = A \cap B^c$;
   (b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
   (c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{e} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   (d) Se $A \subset C$ e $B \subset D$, então $A \times B \subset C \times D$;
   (e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \quad \text{e} \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
   (f) $(A \cap B) \times (C \cap D) \subset A \times C \quad \text{e} \quad (A \cap B) \times (C \cap D) \subset B \times D$.

10. Determine e justique as Uniões e Interseções de cada itens:

[1] Não se pode admitir que um Conjunto Universo exista sempre, devido ao Paradoxo de Bertrand Russel (1872-1970). Busque mais informações a respeito nos livros e internet (cuidado com a internet!).

(a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{7},\sqrt{2}\}} A_i$ (c) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i$ (e) $\displaystyle\bigcap_{i\in\{0,1,2,\ldots,l\}} A_i$

(b) $\displaystyle\bigcup_{i\in\{0,1,2,\ldots,l\}} A_i$ (d) $\displaystyle\bigcap_{i\in\{\frac{1}{2},\frac{1}{7},\sqrt{2}\}} A_i$ (f) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{R}} A_i$

considerando em cada item $(a),(b),(c),(d),(e)$ e (f) as seguintes situções:

(a) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : -i < x < i\}$

(b) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < i\}$

(c) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : x < i\}$

(d) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : x \geq i\}$

(e) $A_i = \{i\}$

(f) $A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : -\frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \leq x < \frac{i}{\sqrt{1+i^2}}\right\}$.

11. É comum, quando o conjunto de índices é, por exemplo, das formas $\{0,1,2,\ldots,l\}$ ou $\mathbb{N}$, que representemos

$$\bigcup_{i\in\{1,2,\ldots,l\}} A_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$$

também por

$$\bigcup_{i=1}^{l} A_i \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Determine e justique as Uniões e Interseções de cada itens:

(a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ (c) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (e) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_i$

(b) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ (d) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} A_i$ (f) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

considerando em cada item $(a),(b),(c),(d),(e)$ e (f) as seguintes situações:

(a) $A_1 = \{-1,0,1\},\ A_2 = \{-2,-1,0,1,2\},\ldots, A_n = \{-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n\}$;

(b) $A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2,3\},\ldots, A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$;

(c) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$, $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{2}\right\}, \ldots, A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{n}\right\}$;

(d) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 - \frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\right\}$;

(e) $A_n = \{x \in \mathbb{R} : -n < x < n\}$.

EXERCÍCIOS SOBRE RELAÇÕES

1. Considere $A = \{a, b, c\}$. Determine uma relação em $A \times A$ que seja:

(a) reflexiva, não simétrica, não transitiva;

(b) não reflexiva, simétrica, não transitiva;

(c) não reflexiva, não simétrica, transitiva;

(d) reflexiva, simétrica, não transitiva;

(e) reflexiva, não simétrica, transitiva;

(f) não reflexiva, simétrica, transitiva;

(g) não reflexiva, não simétrica, não transitiva;

(h) reflexiva, simétrica, transitiva.

2. Determine e justique (com uma prova) quais as relações são de equivalência ou não, e quando possível encontre suas classes de equivalência:

   (a) A relação: aRb significa b é múltiplo de a, no conjunto $\mathbb{Z}$;
   (b) A relação: xRy significa $x^2 = y^2$, no conjunto $\mathbb{R}$;
   (c) A relação: xRy significa $x^2 < y^2$, no conjunto $\mathbb{R}$;
   (d) A relação: xRy significa $|x| = |y|$, no conjunto $\mathbb{R}$;
   (e) A relação: xRy significa $|x - y| \leq 1$, no conjunto $\mathbb{R}$;
   (f) A relação: aRb significa $a - b \in \mathbb{Z}$, no conjunto $\mathbb{Z}$;
   (g) A relação: xRy significa "*x é casada com y*", no conjunto A formado por todas as pessoas na terra;
   (h) A relação: xRy significa "*x tem mesma idade de y*", no conjunto A formado por todas as pessoas na terra.

3. Defina a relação $(a, b)R(p, q)$ como sendo $a + q = b + p$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   (a) Mostre que esta é uma relação de equivalência.
   (b) Encontre as classes de equivalência $[(1, 1)]_R, [(1, 2)]_R$ e $[(2, 1)]_R$;

4. Verifique que a relação: *aRb significa $b - a$ é múltiplo de* 4, no conjunto $\mathbb{Z}$, é uma relação de equivalência. Encontre as classes de equivalência $[a]_R$ e obtenha uma partição para o conjunto $\mathbb{Z}$.

EXERCÍCIOS SOBRE FUNÇÕES

1. Estude os domínios e contra-domínios e verifique quais definições a seguir são de funções iguais ou diferentes (justifique suas respostas):

   (a) $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x + 3}$ e $g(y) = 3 - y$;
   (b) $f(x) = \sqrt{2 - x}$ e $g(y) = \sqrt{2 - y}$;
   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ e $g(y) = y$;
   (d) $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(y) = y$.

2. Considere $f : A \to B$ uma função dada. Prove que todo subconjunto g de f dá origem a uma nova função, com $Dom(g) \subset Dom(f)$.

3. Considere $f : A \to B$ uma função dada. Prove que se a relação $f \subset A \times A$ é uma relação reflexiva em A, então f é a função identidade $Id_A : A \to A$.

4. Se $f : [0, 1] \to [0, 1]$ é uma função e a relação $f \subset [0, 1] \times [0, 1]$ é simétrica, qual é a regra que define f?

5. Determine os seguintes valores da função característica:

   (a) $\chi_{\mathbb{Q}}(2)$;
   (b) $\chi_{\mathbb{Q}}(0,333333\ldots)$;
   (c) $\chi_{\mathbb{Q}}(2,123123\ldots)$;
   (d) $\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{8})$;
   (e) $\chi_{\mathbb{Q}}(1/2)$;
   (f) $\chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{\pi})$.

6. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

   Determine:

(a) $f(\{1,2,3,4,5\})$
(b) $f^{-1}(\{4\})$
(c) $f^{-1}(\{1,2,3,4,5\})$
(d) $f(\{2k : k \in \mathbb{N}\})$

7. Considere $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Faça uma prova para cada item a seguir:

   (a) $A \subset f^{-1}(f(A))$;
   (b) $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$;
   (c) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$;
   (d) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

8. Considere $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Encontre contra-exemplos para cada afirmação a seguir:

   (a) Se $B \neq \varnothing$ então $f^{-1}(B) = \varnothing$;
   (b) $A = f^{-1}(f(A))$;
   (c) $f(f^{-1}(B)) = B$;
   (d) $f(X) = Y$.

9. Determine e justifique (com provas) quais funções a seguir são injetivas, sobrejetivas e/ou bijetivas. Para a funções bijetivas encontre sua inversa.

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(x) = (x, x)$;
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$;
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos(x)$;
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$;
   (e) $f : [2, 3) \to [0, \infty)$ tal que $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$;
   (f) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f((x, y)) = xy$.

10. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$. Determine os conjuntos $f([1, 3])$ e $f^{-1}([-1, 1])$.

11. Considere $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Determine oconjunto $f^{-1}(\mathbb{R})$.

12. Encontre uma bijeção entre o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o conjunto de todos os números naturais ímpares.

13. Considere $f : A \to B$ uma função e $f^{-1} : B \to A$ sua inversa. Faça uma prova para as igualdades: $f \circ f^{-1} = Id_B$ e $f^{-1} \circ f = Id_A$

14. Considere $f : A \to B$ uma função e suponha que existam funções $g, h : B \to A$ tais que $g \circ f = Id_A$ e $f \circ h = Id_B$. Faça uma prova para as igualdades: $g = h = f^{-1}$.

15. Faça uma prova para a afirmação: a composta de funções injetoras ainda é uma função injetora.

16. Faça uma prova para a afirmação: a composta de funções sobrejetoras ainda é uma função sobrejetora.

17. Considere $f : A \to B$ funções bijetoras. Prove que $f \circ g$ é uma função bijetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bons Estudos!