FUNDAMENTOS ELEMENTARES DA MATEMÁTICA

MANUSCRITOS

(AULA 31: 01/11/22)

FUND. ELEM. DA MATEMÁTICA

AULA 31: Funções Inversa e Compostas

Funções Inversas

Dada uma função $f: A \to B$, f é uma relação de $A \times B$, então temos a relação inversa de $f \subset A \times B$ é

$$f^{-1} = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in f\}.$$

Por f ser uma função, é verdade que f^{-1} é uma função?

Teorema: Considere $f: A \to B$ uma função e $f^{-1} \subset B \times A$ a relação inversa de f. Então:

$$\boxed{f^{-1} \text{ é uma função} \iff f \text{ é bijetiva.}}$$

Prova: $(\Leftarrow)$ Sup. que f é bijetiva. Devemos provar então que $f^{-1} \subset B \times A$ é uma função. Vejamos:

(1) Como f é sobrejetiva, então

$$\operatorname{Im}(f) = B.$$

Sendo sempre

$$\operatorname{Dom}(f^{-1}) \subset B,$$

Vamos garantir agora que $B \subset \operatorname{Dom}(f^{-1})$.

De fato, $\underline{b \in B} = \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists\, a \in A$ tal que

$$\underline{f(a)=b} \iff (a,b) \in f.$$

Logo,

$$(b,a) \in f^{-1};$$

e isto significa dizer que

$$b \in \mathrm{Dom}(f^{-1}) = \{v \in B : \exists u \in A, (v,u) \in f^{-1}\}$$

Portanto, $B \subset \mathrm{Dom}(f^{-1})$, ou seja,

$$\mathrm{Dom}(f^{-1}) = B,$$

que prova a 1ª exigência para f^{-1} ser uma função.

(II) Considere $(b, x_1), (b, x_2) \in f^{-1}$.

Então, $(x_1, b) \in f$ e $(x_2, b) \in f$.

Como f é uma função:

$$f(x_1) = b \quad \text{e} \quad f(x_2) = b$$

$$\hookrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Desde que f é injetiva:

$$x_1 = x_2.$$

<u>Conclusão:</u>

$$(b, x_1) \in f^{-1} \text{ e } (b, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ou seja, f^{-1} cumpre a 2ª exigência da definição de função.

$(\Longrightarrow)$ Exercício de leitura no texto.

$\square$

<u>Def.</u>: Uma função Inversa de uma função $f: A \to B$ bijetiva é uma função $f^{-1}: B \to A$ tal que:

$$\boxed{f(a)=b \iff a=f^{-1}(b).}$$

Obs.: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Composições de Funções

Sejam A, B e C conj. funções

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{e} \quad g: B \longrightarrow C.$$

Como relações, temos $f \subset A \times B$, $g \subset B \times C$ e $g \circ f \subset A \times C$ onde

$$g \circ f = \{(a,c) \subset A \times C : \exists\, b \in B, (a,b) \in f \text{ e } (b,c) \in g\}.$$

são relações. Porém, f e g funções, garante $g \circ f$ ser uma função?

Teorema: Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções, então $g \circ f$ é uma função

Ex. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com

$$f(x) = x + 1 \quad e \quad g(y) = y^2.$$

Então: $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Com

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

e

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2) = y^2 + 1.$$

Propriedade Associativa

Considere $f: A \to B$, $g: B \to C$ e $h: C \to D$.

Então: $\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$

Teorema: Considere $f: A \to B$ e as funções identidade $Id_A: A \to A$ e $Id_B: B \to B$ definidas por

$$Id_A(x) = x \quad \text{e} \quad Id_B(y) = y.$$

Então:

i) f é injetiva $\iff \exists\, g: B \to A$ tal que $g \circ f = Id_A$

ii) f é sobrejetiva $\iff \exists\, h: B \to A$ tal que $f \circ h = Id_B$

Prova: Veja Material e Exercícios!

$\square$

Dúvidas

Lista 4: Ex 9 - d): Se $A \subset C$ e $B \subset D$ então

$$(A \times B) \subset (C \times D)$$

Sol.: Lembrando:

"$X \subset Y$" significa: "$\forall x,\ x \in X \Rightarrow x \in Y$".

Vejamos:

$$\forall x,\ x \in (A \times B) \Rightarrow x = (a,b) \in A \times B$$

$$\Rightarrow \quad a \in A \ \text{ e } \ b \in B$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$a \in C \ \text{ e } \ b \in D$$

$$\Rightarrow \quad (a,b) \in (C \times D) \Rightarrow x = (a,b) \in C \times D.$$

Lista 4: Ex. 10-(b)-(b):

$$\bigcup_{i\in\{0,1,2,\dots,l\}} A_i$$

com $A_i = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < i\}$.

Sol.: $i = 0 \Rightarrow A_0 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 0\} = \emptyset$

$i = 1 \Rightarrow A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\} = [0,1)$

$i = 2 \Rightarrow A_2 = \qquad = [0,2)$

$\vdots$

$i = l \Rightarrow A_l = \qquad = [0,l)$

Note que $\emptyset \subset [0,1) \subset [0,2) \subset \dots \subset [0,l)$. Então

$$\bigcup_{i\in\{0,1,2,\dots,l\}} A_i = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_l = [0,l) = A_l.$$