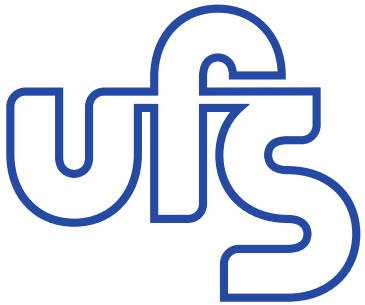
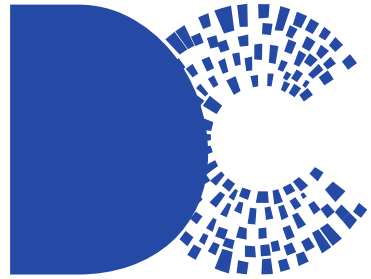


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE



DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

Aritmética binária

Arquitetura de Computadores

Bruno Prado

Departamento de Computação / UFS

Introdução

- Como é feita a representação numérica?
  - Bases numéricas
    - 2 (binário)
    - 10 (decimal)
    - 16 (hexadecimal)

$$Número = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \times N^i$$

$$\begin{aligned} 33_{10} &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^0 = 100001_2 \\ &= 3 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 33_{10} \\ &= 2 \times 16^1 + 1 \times 16^0 = 21_{16} \end{aligned}$$

Introdução

- Como o sinal dos números binários é implementado?
  - Sinal e magnitude
  - Complemento a 1 e 2

Introdução

- Como o sinal dos números binários é implementado?
  - Sinal e magnitude
  - Complemento a 1 e 2
- De que maneira as principais operações aritméticas em formato binário são implementadas?
  - Adição
  - Subtração
  - Multiplicação
  - Divisão

Introdução

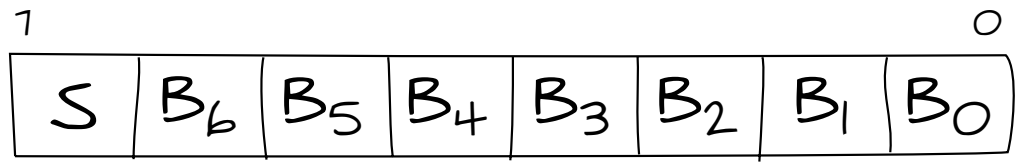
- Quais são os menores e maiores números que podem ser representados pela arquitetura?
  - Capacidade de armazenamento
  - Conceitos de *overflow* e *underflow*

Introdução

- Quais são os menores e maiores números que podem ser representados pela arquitetura?
  - Capacidade de armazenamento
  - Conceitos de *overflow* e *underflow*
- E as frações e os números reais?
  - Padrão IEEE 754

Representação do sinal

- Métodos para representação de sinal em números
  - Sinal e magnitude
  - Complemento a 1
  - Complemento a 2

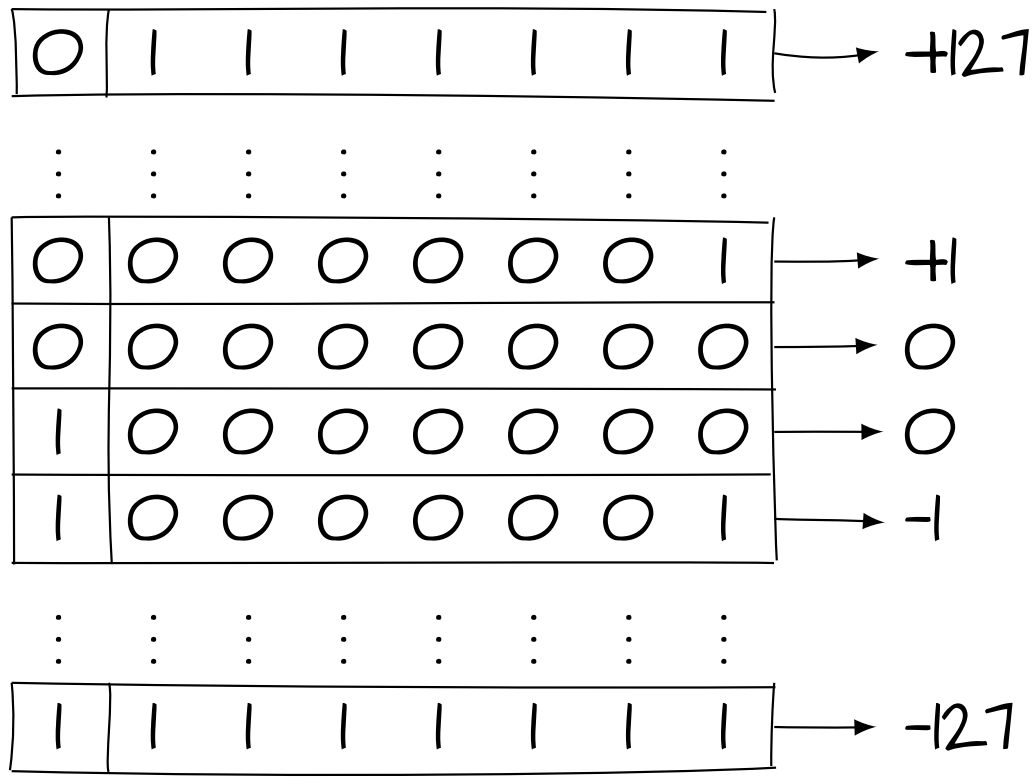


1 bit de sinal + 7 bits de dados

- Sinal e representatividade
  - $+ \leftrightarrow S = 0$ e 2^7 valores
  - $- \leftrightarrow S = 1$ e 2^7 valores

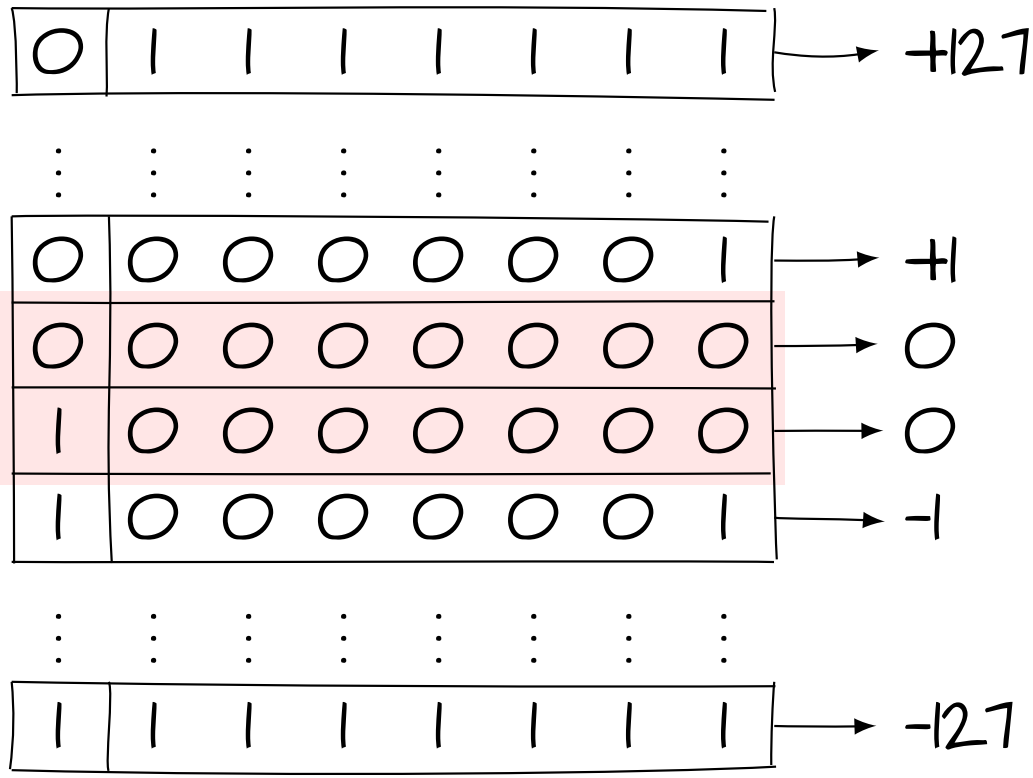
Representação do sinal

- Método de sinal e magnitude (8 bits)
  - Primeiro bit indica o sinal e demais bits a magnitude



Representação do sinal

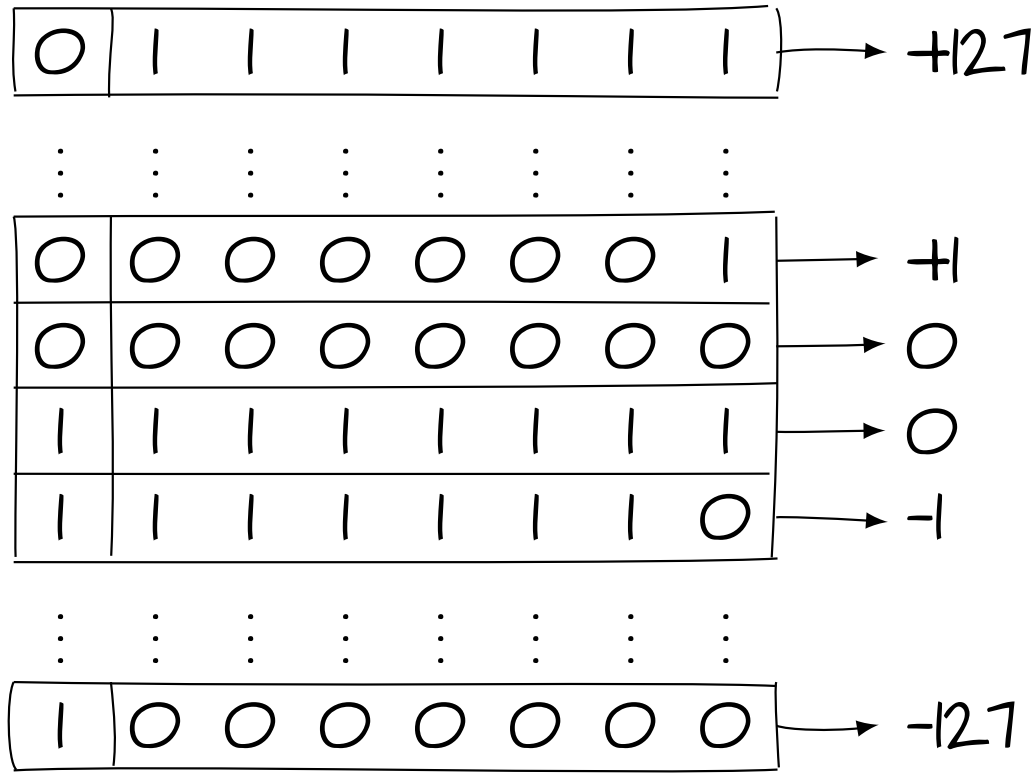
- Método de sinal e magnitude (8 bits)
  - Primeiro bit indica o sinal e demais bits a magnitude



Duas representações para o valor 0

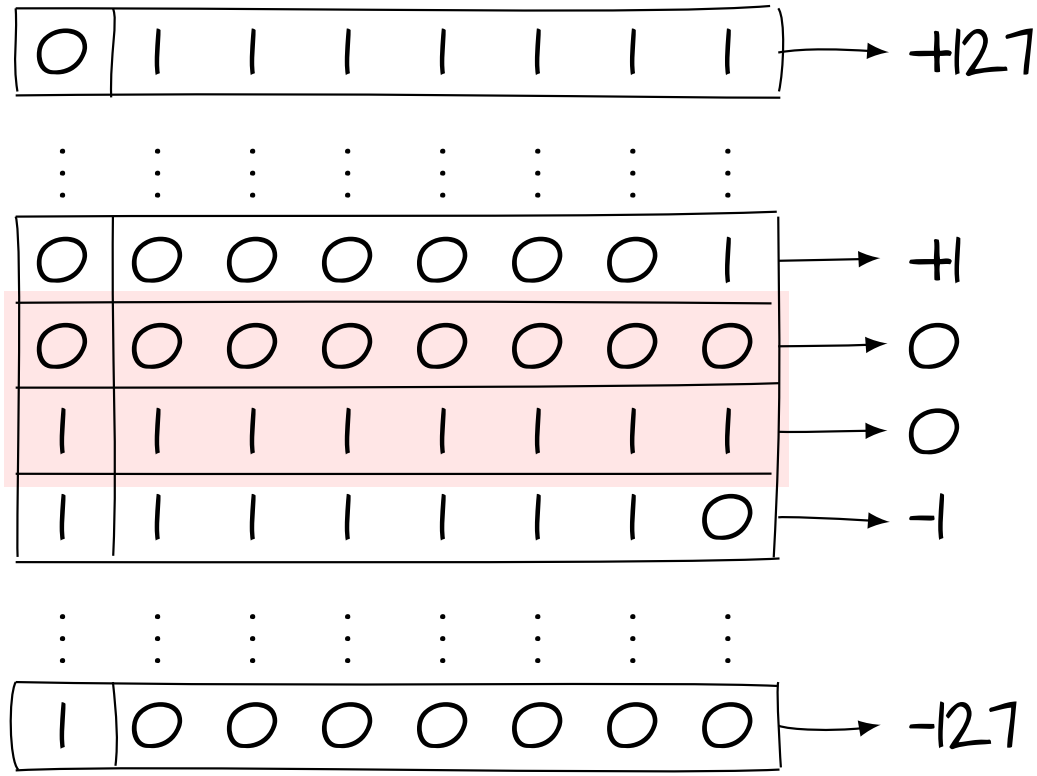
Representação do sinal

- Método de complemento a 1 (8 bits)
  - O valor de sinal oposto é o complemento bit a bit



Representação do sinal

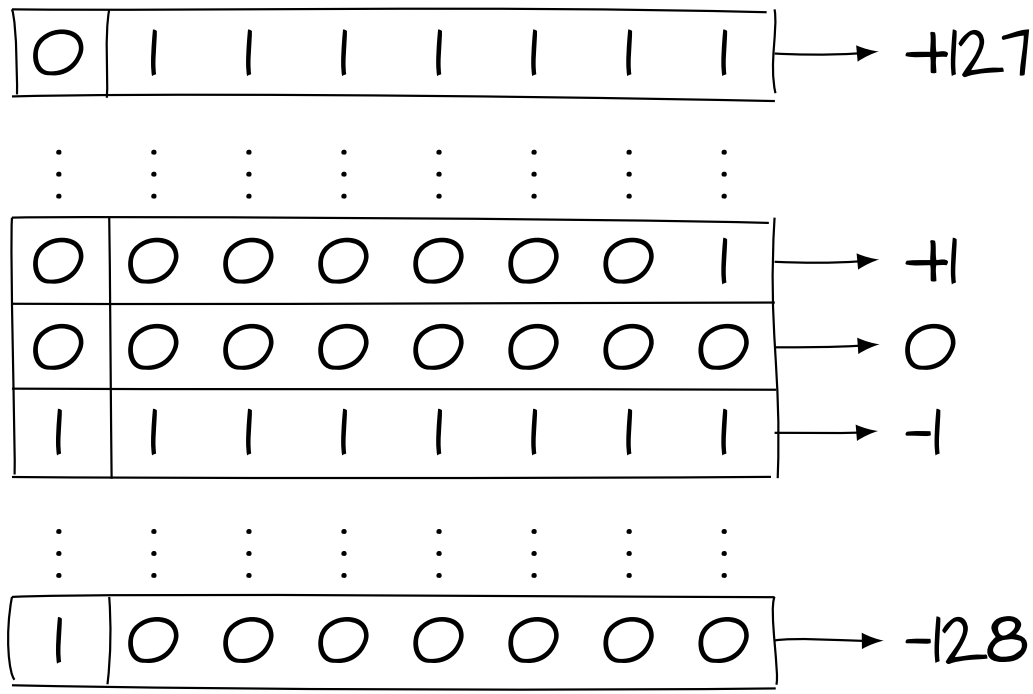
- Método de complemento a 1 (8 bits)
  - O valor de sinal oposto é o complemento bit a bit



Duas representações para o valor 0

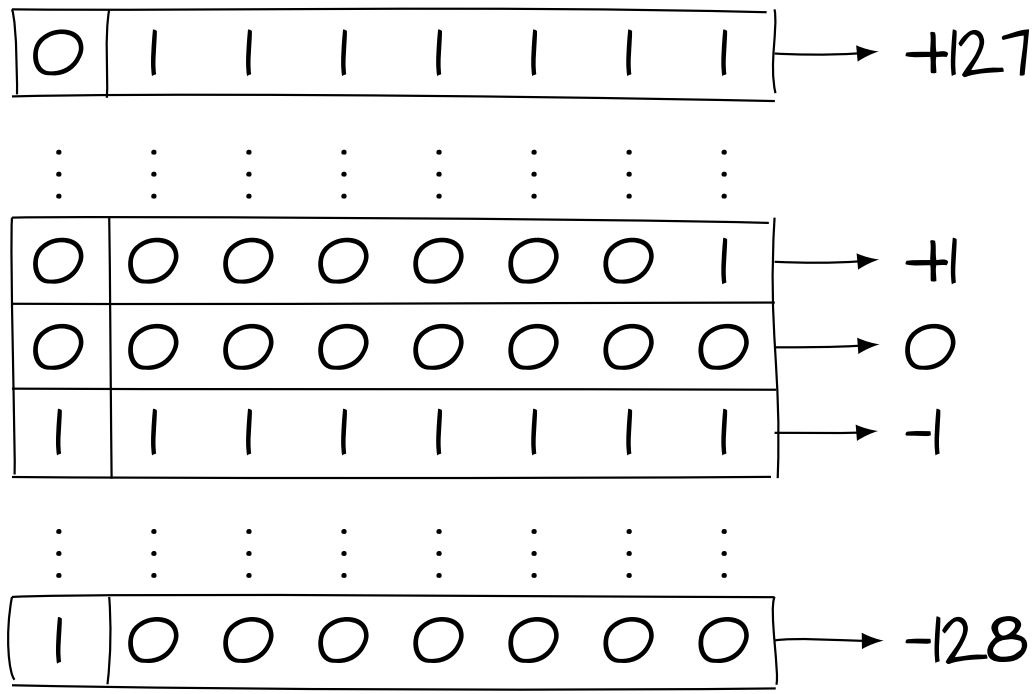
Representação do sinal

- Método de complemento a 2 (8 bits)
  - O valor de sinal oposto é o complemento bit a bit + 1



Representação do sinal

- Método de complemento a 2 (8 bits)
  - O valor de sinal oposto é o complemento bit a bit + 1



$2^7 = 128$ valores negativos e positivos

Operações sem sinal

- Adição binária de 8 bits
  - $A = 200_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 = 11001000_2$
  - $B = 25_{10} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 00011001_2$
  - $R = A + B = 225_{10} = 11100001_2$

A_i	B_i	R_i	C_i
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Operações sem sinal

- Adição binária de 8 bits
  - $A = 200_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 = 11001000_2$
  - $B = 25_{10} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 00011001_2$
  - $R = A + B = 225_{10} = 11100001_2$

A_i	B_i	R_i	C_i
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ +\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

A adição de números com n bits pode gerar um resultado com até n + 1 bits

Operações sem sinal

- Subtração binária de 8 bits
  - $A = 200_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 = 11001000_2$
  - $B = 25_{10} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 00011001_2$
  - $R = A - B = 175_{10} = 10101111_2$

A_i	B_i	R_i	C_i
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ -\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Operações sem sinal

- Subtração binária de 8 bits
  - $A = 200_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^3 = 11001000_2$
  - $B = 25_{10} = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 00011001_2$
  - $R = A - B = 175_{10} = 10101111_2$

A_i	B_i	R_i	C_i
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ -\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

A subtração de números com n bits pode gerar um resultado com até n + 1 bits

Operações sem sinal

- Multiplicação binária de 8 bits
  - $A = 11_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 00001011_2$
  - $B = 13_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 00001101_2$
  - $R = A \times B = 143_{10} = 10001111_2$

A_i	B_i	R_i
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

```
          1 0 1 1
        × 1 1 0 1
        ---------
          1 0 1 1
        0 0 0 0
      + 1 0 1 1
      -----------
    1 0 0 0 1 1 1 1
```

Operações sem sinal

- Multiplicação binária de 8 bits
  - $A = 11_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 00001011_2$
  - $B = 13_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 00001101_2$
  - $R = A \times B = 143_{10} = 10001111_2$

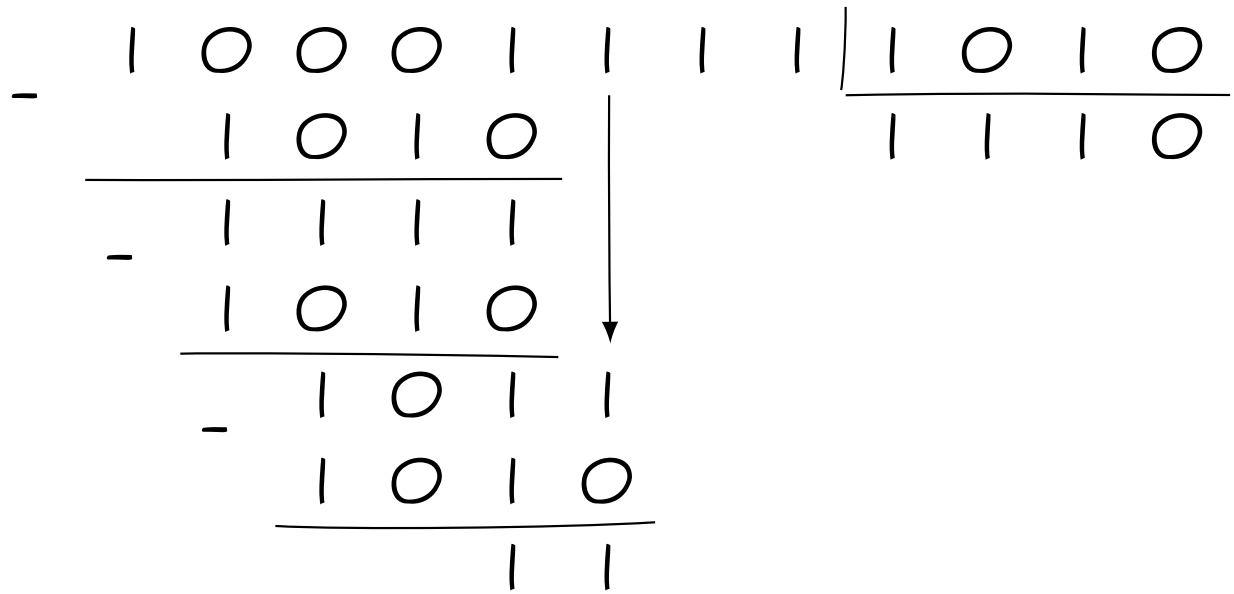
A_i	B_i	R_i
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

```
          1 0 1 1
        × 1 1 0 1
        ---------
          1 0 1 1
      0 0 0 0
    + 1 0 1 1
    ---------
  1 0 1 1
---------------
1 0 0 0 1 1 1 1
```

A multiplicação de números com n bits necessita de até 2n bits para armazenar o resultado

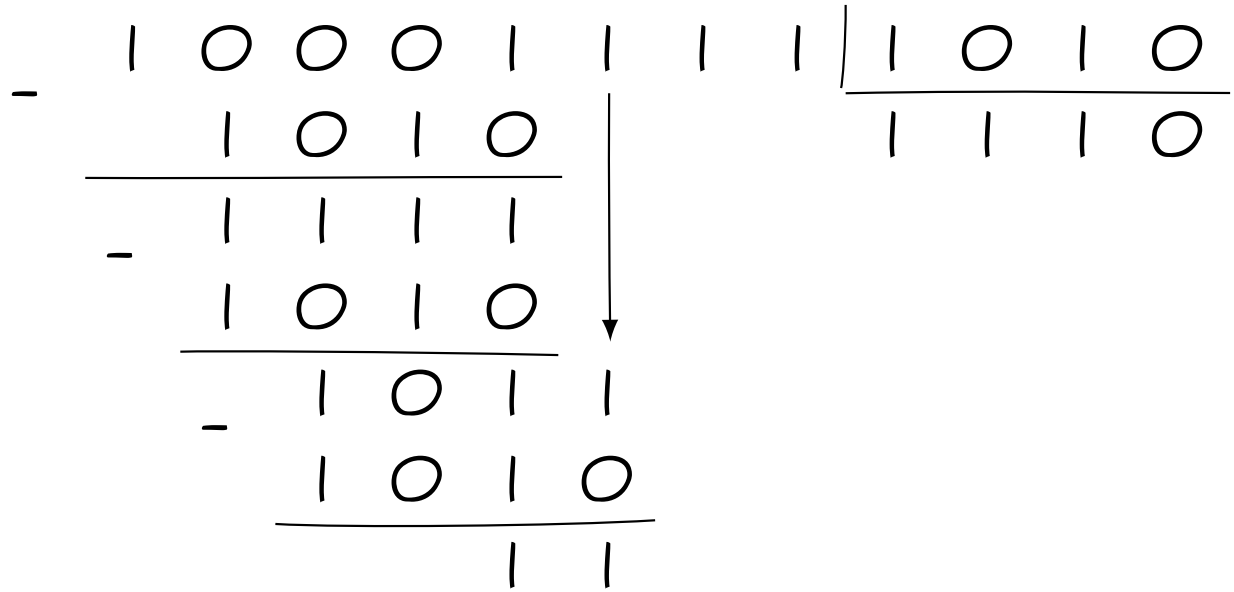
Operações sem sinal

- Divisão binária de 8 bits
  - $A = 143_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 10001111_2$
  - $B = 10_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 00001010_2$
  - $Q = A \div B = 14_{10} = 00001110_2$
  - $R = A \bmod B = 3_{10} = 00000011_2$



Operações sem sinal

- Divisão binária de 8 bits
  - $A = 143_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 10001111_2$
  - $B = 10_{10} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 = 00001010_2$
  - $Q = A \div B = 14_{10} = 00001110_2$
  - $R = A \bmod B = 3_{10} = 00000011_2$



A divisão de números com n bits necessita de até n bits para o quociente e o resto

Operações com sinal

- Adição/subtração binária de 8 bits
  - Método de sinal e magnitude
    - $A = -72_{10} = 11001000_2$
    - $B = +25_{10} = 00011001_2$
    - $R = A + B = -(|A| - |B|) = -47_{10} = 10101111_2$

$$
\begin{array}{r}
 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
-\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
\hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

É feito o ajuste do sinal de acordo com o resultado obtido pela magnitude

Operações com sinal

- Adição/subtração binária de 8 bits
  - Método de complemento a 1
    - $A = -72_{10} = 10110111_2$
    - $B = +25_{10} = 00011001_2$
    - $R = A + B = -47_{10} = 11010000_2$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

O bit de sinal é calculado como dado

Operações com sinal

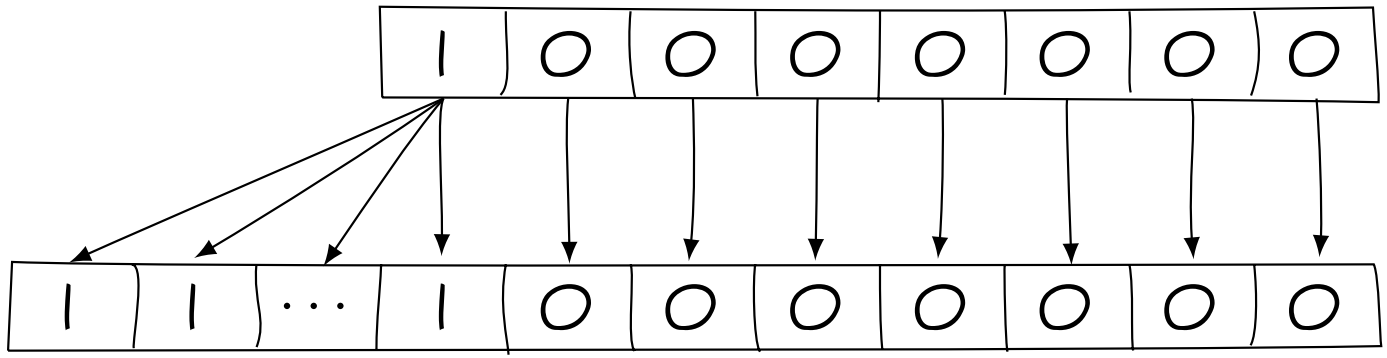
- Adição/subtração binária de 8 bits
  - Método de complemento a 2
    - $A = -72_{10} = 10111000_2$
    - $B = +25_{10} = 00011001_2$
    - $R = A + B = -47_{10} = 11010001_2$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Uma única representação para zero

Operações com sinal

- Extensão de sinal dos números
  - Codificação em complemento a 2
    - $A[8] = 10000000_2 = -128_{10}$
    - $B[32] = 1111 \cdots 111110000000_2 = -128_{10}$

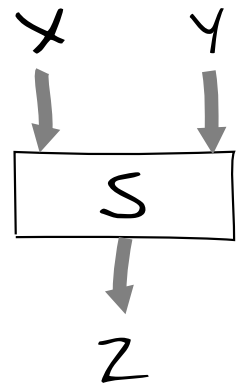


$A = B$

Implementação

- Como implementar de forma escalável e com portas lógicas as operações de adição e de subtração?
  - Método de complemento a 2

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

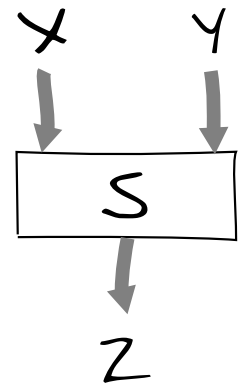


$$Z = X + Y = X \text{ xor } Y$$

Implementação

- Como implementar de forma escalável e com portas lógicas as operações de adição e de subtração?
  - Método de complemento a 2

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



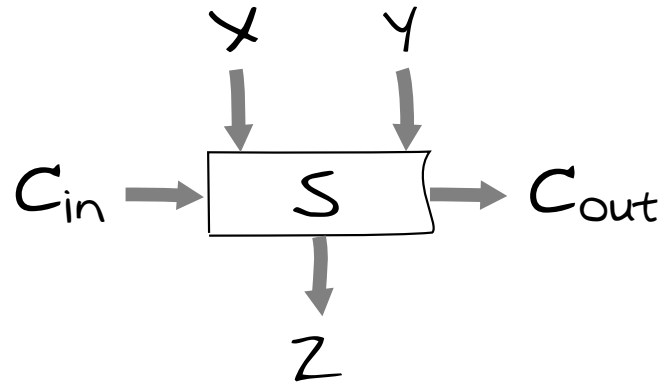
$$Z = X + Y = X \text{ xor } Y$$

Como fazer o "vai a um" (carry)?

Implementação

- Como implementar de forma escalável e com portas lógicas as operações de adição e de subtração?
  - Método de complemento a 2

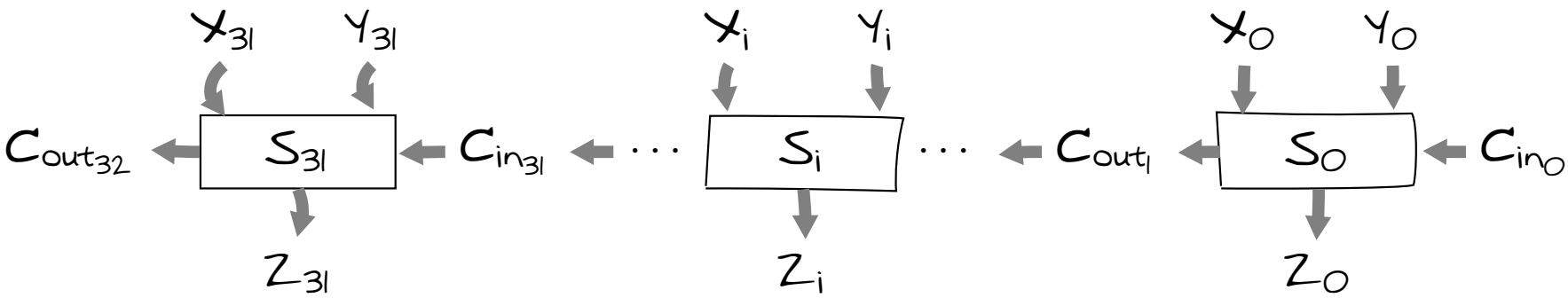
X	Y	C_{in}	Z	C_{out}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1



$$Z = X + Y + C_{in} = X \text{ xor } Y \text{ xor } C_{in}$$
$$C_{out} = (X \text{ and } Y) \text{ xor } (C_{in} \text{ and } (X \text{ xor } Y))$$

Implementação

- Como implementar de forma escalável e com portas lógicas as operações de adição e de subtração?
  - Método de complemento a 2



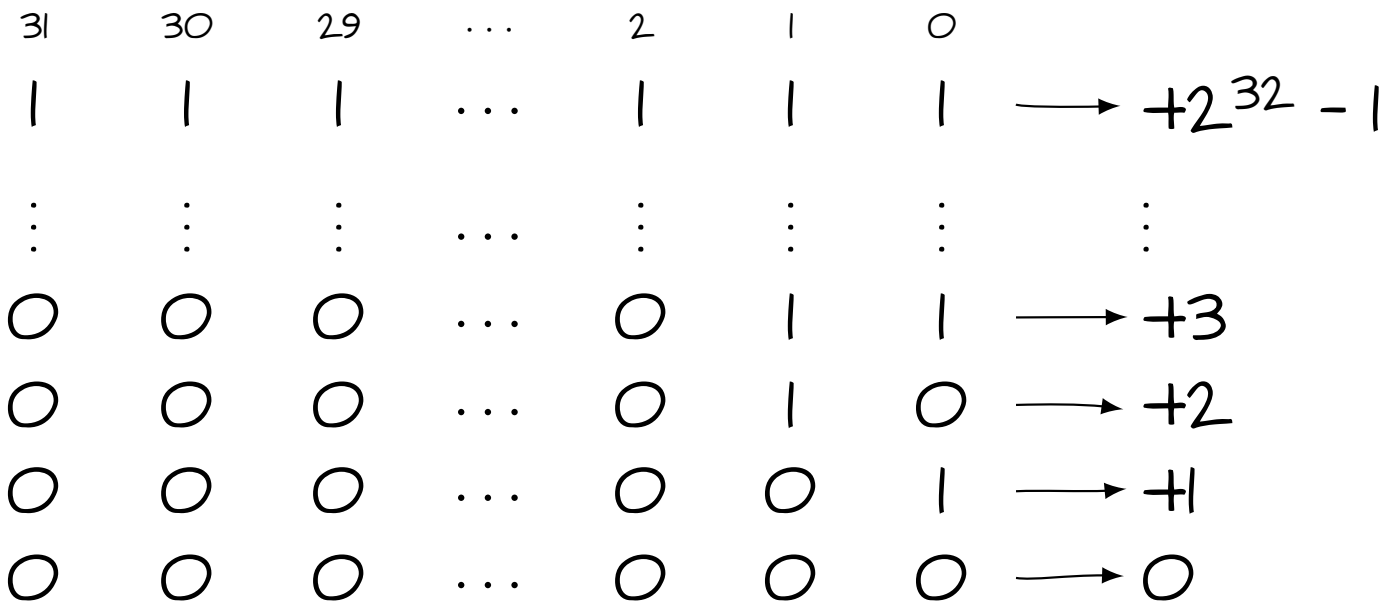
Z[32] = X[32] + Y[32]

Exemplo

- Considerando o método de codificação de complemento a 2 e capacidade de armazenamento de 8 bits, realize as operações abaixo passo a passo em codificação binária
  - $4 + 8 + 16 + 32$
  - $5 - 3 + 8 - 13$
  - $2 \times 3 \times 4 \times -5$

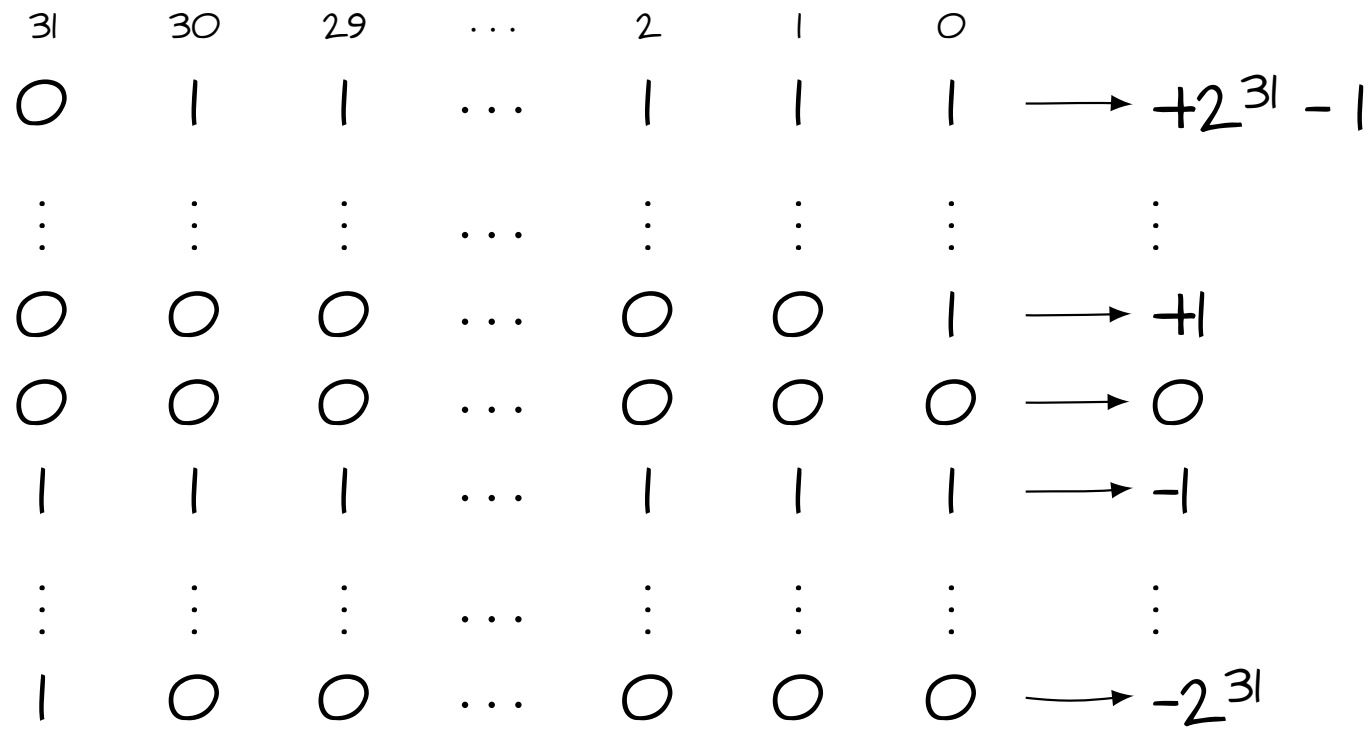
Limites numéricos

- Quais são os limites para os números inteiros?
  - Capacidade de 32 bits (sem sinal)



Limites numéricos

- Quais são os limites para os números inteiros?
  - Complemento a 2 com 32 bits (com sinal)

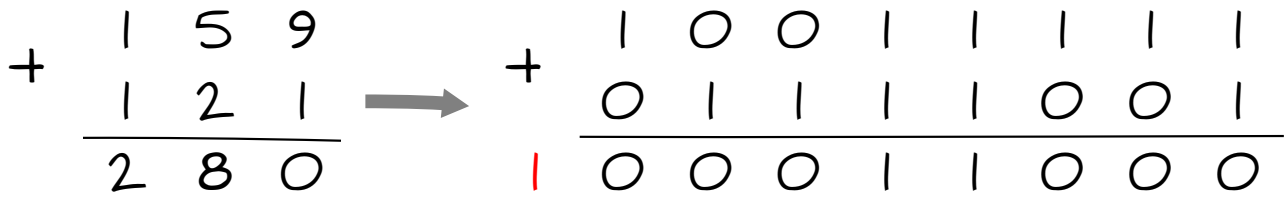


Limites numéricos

- O que acontece quando a capacidade de armazenamento do hardware é extrapolado?

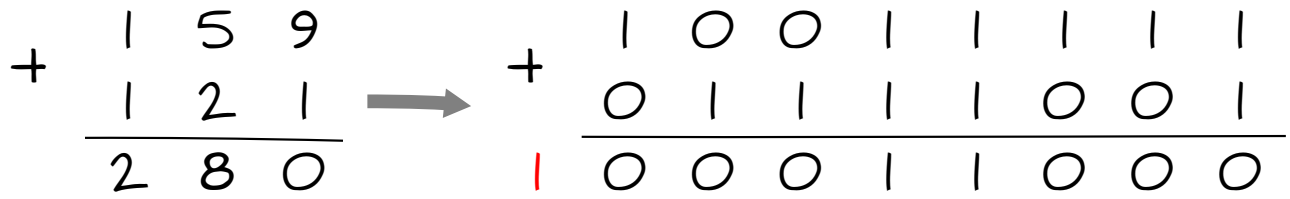
Limites numéricos

- O que acontece quando a capacidade de armazenamento do hardware é extrapolado?
  - Capacidade de 8 bits
    - Sem sinal: é gerado um bit excedente (*carry*)

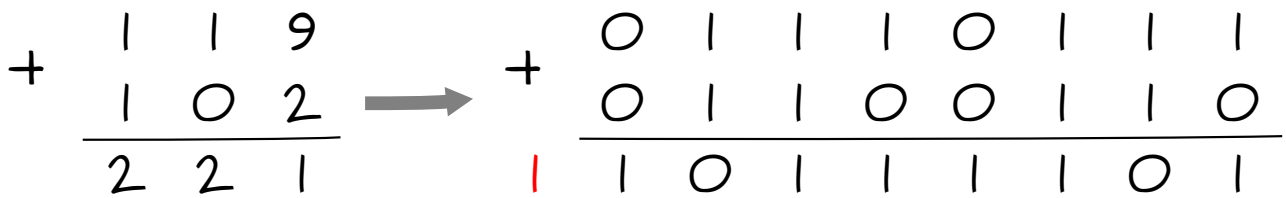


Limites numéricos

- O que acontece quando a capacidade de armazenamento do hardware é extrapolado?
  - Capacidade de 8 bits
    - Sem sinal: é gerado um bit excedente (*carry*)

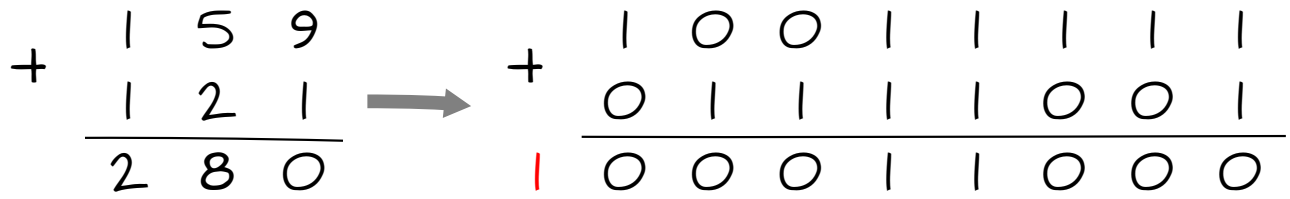


    - Com sinal: ocorre quando o sinal do resultado é diferente para operandos que possuem o mesmo sinal

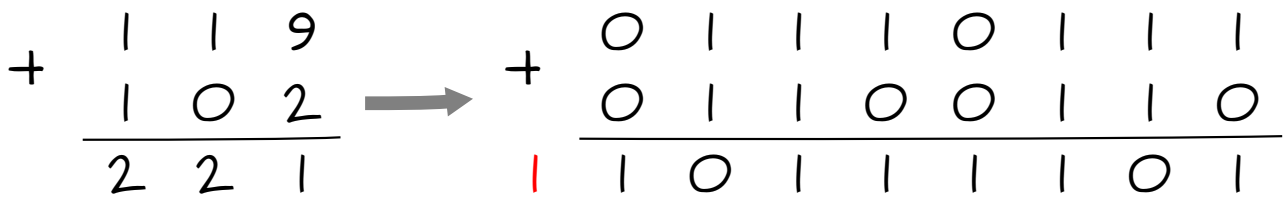


Limites numéricos

- O que acontece quando a capacidade de armazenamento do hardware é extrapolado?
  - Capacidade de 8 bits
    - Sem sinal: é gerado um bit excedente (*carry*)



    - Com sinal: ocorre quando o sinal do resultado é diferente para operandos que possuem o mesmo sinal



↑ Overflow

↓ Underflow

Números reais

- Como representar os números reais?

Números reais

- Como representar os números reais?
  - Ponto fixo (notação Q)
    - Hardware padrão
    - Operações com números inteiros

Números reais

- Como representar os números reais?
  - Ponto fixo (notação Q)
    - Hardware padrão
    - Operações com números inteiros
  - Ponto flutuante (IEEE 754)
    - Hardware dedicado
    - Operações especializadas

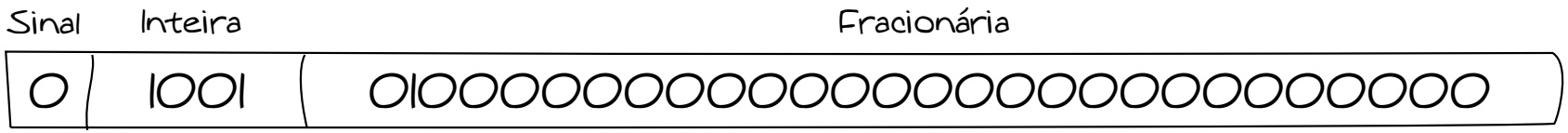
Números reais

- Como representar os números reais?
  - Ponto fixo (notação Q)
    - Hardware padrão
    - Operações com números inteiros
  - Ponto flutuante (IEEE 754)
    - Hardware dedicado
    - Operações especializadas
  - Precisão arbitrária
    - Emulação por software
    - Números inteiros ou reais

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Definição da parte inteira e fracionária (32 bits)

$$
\begin{aligned}
Q4.27 &= 9,25_{10} \\
&= 9_{10} + 0,25_{10} \\
&= 1001_2 + 0,01_2
\end{aligned}
$$



Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

$$9,25_{10} = \left(2^3 + \underline{1}\right) + 0,25_{10}$$

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

$$9,25_{10} = \left(2^3 + 2^0\right) + 0,25_{10}$$

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

$$9,25_{10} = 1001_2 + 0,25_{10}$$

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

$$9,25_{10} = 1001_2 + (2^{-2} + \underline{0})$$

Números reais

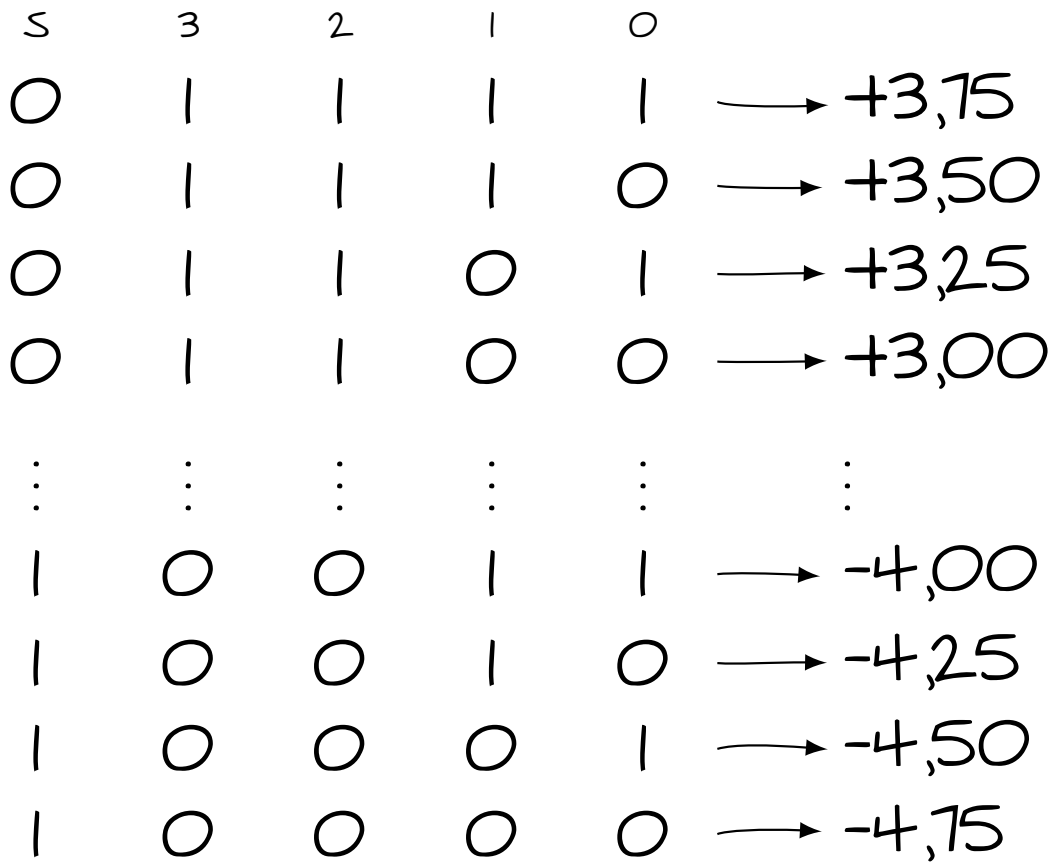
- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Entendendo a codificação binária fracionária

$$9,25_{10} = 9_{10} + 0,25_{10}$$

$$9,25_{10} = 1001_2 + 0,01_2$$

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  - Representatividade um número Q2.2

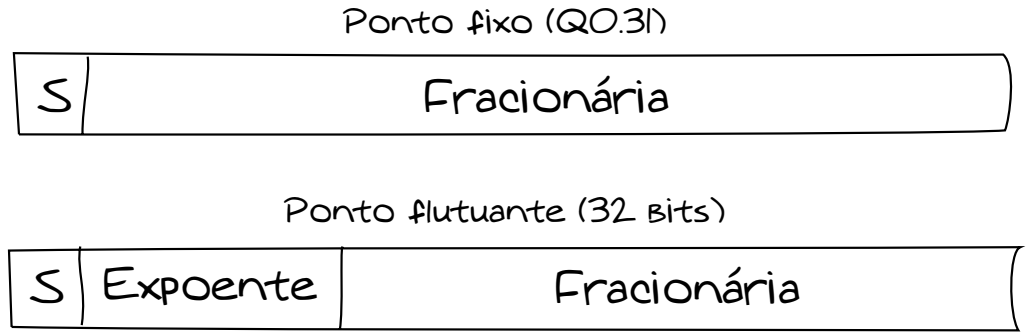


Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  ✓ São utilizados componentes de aritmética inteira que permitem operações mais rápidas e simples

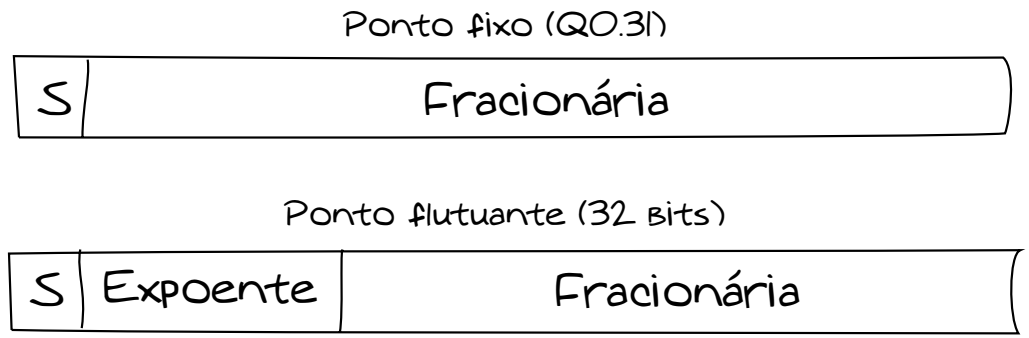
Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  ✓ São utilizados componentes de aritmética inteira que permitem operações mais rápidas e simples
  ✓ Maior precisão da parte fracionária com mesma quantidade de bits



Números reais

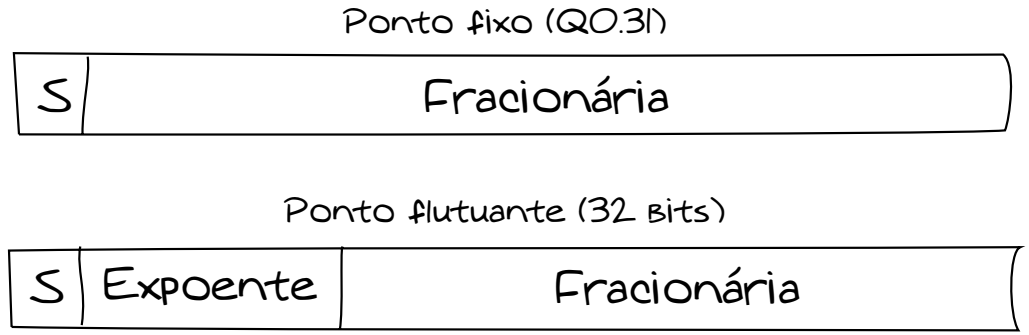
- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  ✓ São utilizados componentes de aritmética inteira que permitem operações mais rápidas e simples
  ✓ Maior precisão da parte fracionária com mesma quantidade de bits



  ✗ Representatividade limitada

Números reais

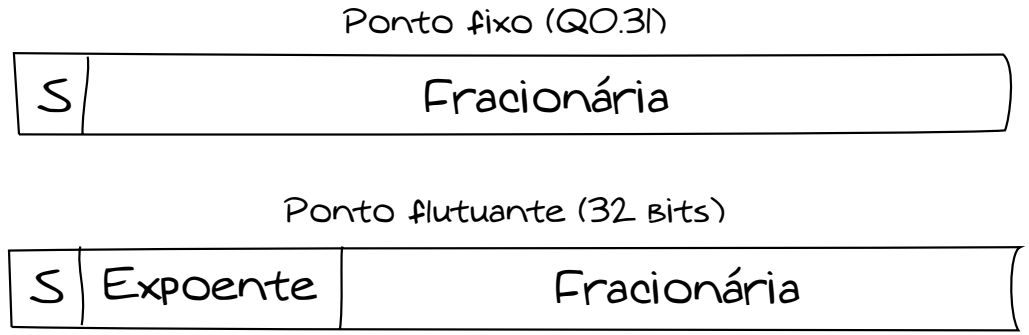
- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  ✓ São utilizados componentes de aritmética inteira que permitem operações mais rápidas e simples
  ✓ Maior precisão da parte fracionária com mesma quantidade de bits



  ✗ Representatividade limitada
  ✗ Problemas com arredondamento e *overflow*

Números reais

- Aritmética de ponto fixo (notação Q)
  ✓ São utilizados componentes de aritmética inteira que permitem operações mais rápidas e simples
  ✓ Maior precisão da parte fracionária com mesma quantidade de bits

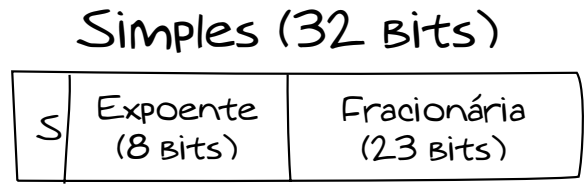


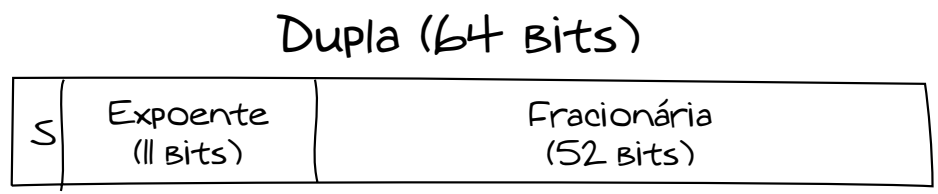
  ✗ Representatividade limitada
  ✗ Problemas com arredondamento e *overflow*

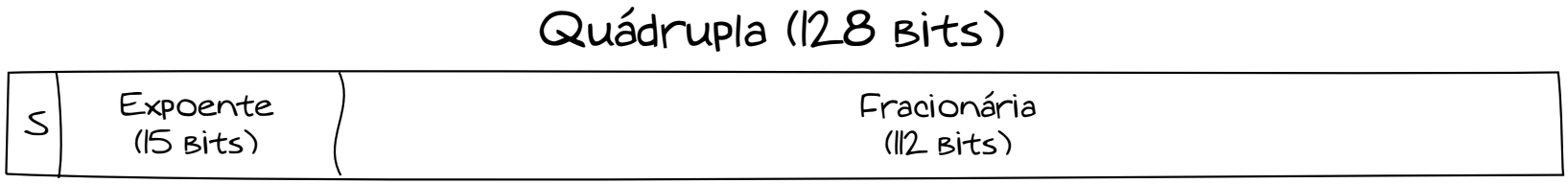
Aplicação principal: sistemas de baixo custo sem unidade de ponto flutuante (FPU)

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante (IEEE 754)
  - Níveis de precisão







Números reais

- Aritmética de ponto flutuante (IEEE 754)
  - Representação dos valores de 32 bits

$$\textbf{float} = (-1)^{Sinal} \left(1 + \sum_{i=0}^{22} B_{22-i} 2^{-i}\right) \times 2^{(Expoente - 127)}$$

$$\begin{aligned}
9,25_{10} &= 9_{10} + 0,25_{10} \\
&= 1001_2 + 0,01000000000000000000_2 \\
&= 1,00101000000000000000000_2 \times 2^3 \\
&= (-1)^0(1_2 + 0,00101000000000000000000_2) \times 2^{(130_{10} - 127_{10})} \\
&= (-1)^0(1_2 + 0,00101000000000000000000_2) \times 2^{(10000010_2 - 127_{10})}
\end{aligned}$$

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante
  - ✓ Maior representatividade de valores

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante
  - ✓ Maior representatividade de valores
  - ✓ Mecanismos de arredondamento e de precisão

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante
  - ✓ Maior representatividade de valores
  - ✓ Mecanismos de arredondamento e de precisão
  - ✗ Hardware dedicado que aumenta o custo e o consumo de potência do sistema

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante
  - ✓ Maior representatividade de valores
  - ✓ Mecanismos de arredondamento e de precisão
  - ✗ Hardware dedicado que aumenta o custo e o consumo de potência do sistema
  - ✗ As operações são mais complexas e demoradas

Números reais

- Aritmética de ponto flutuante
  - ✓ Maior representatividade de valores
  - ✓ Mecanismos de arredondamento e de precisão
  - ✗ Hardware dedicado que aumenta o custo e o consumo de potência do sistema
  - ✗ As operações são mais complexas e demoradas

Aplicação principal: redução do tempo de projeto em sistemas com unidade de ponto flutuante (FPU)

Números reais

- Aritmética de precisão arbitrária
  - Geralmente é utilizada em aplicações com números inteiros com capacidade que depende somente da quantidade de memória disponível, sendo nativamente suportada em linguagens como Python

Números reais

- Aritmética de precisão arbitrária
  - Geralmente é utilizada em aplicações com números inteiros com capacidade que depende somente da quantidade de memória disponível, sendo nativamente suportada em linguagens como Python
  - As linguagens de programação que não suportam diretamente a aritmética de precisão arbitrária, como C/C++, podem utilizar bibliotecas para suportar estas operações (GMP/MPFR)

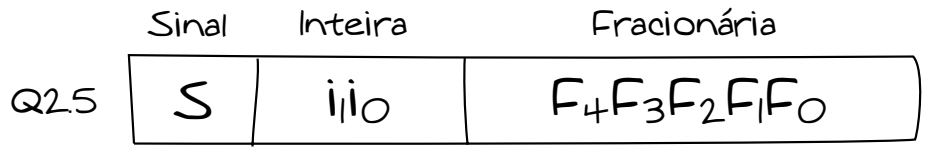
Números reais

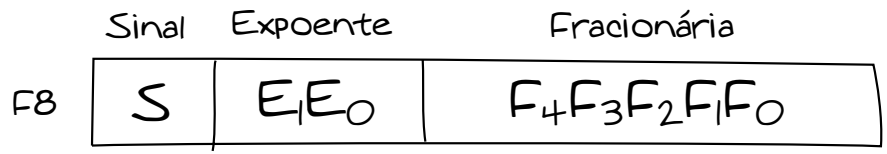
- Aritmética de precisão arbitrária
  - Geralmente é utilizada em aplicações com números inteiros com capacidade que depende somente da quantidade de memória disponível, sendo nativamente suportada em linguagens como Python
  - As linguagens de programação que não suportam diretamente a aritmética de precisão arbitrária, como C/C++, podem utilizar bibliotecas para suportar estas operações (GMP/MPFR)
  - Aplicações
    - Cálculo de constantes matemáticas
    - Criptografia de chave pública
    - Descoberta de números primos
    - ...

Exemplo

- Considerando os métodos de complemento a 2, de ponto fixo *Q*2.5 e de ponto flutuante *F*8 descritas abaixo, converta os números reais $A = 2,71$ e $B = 3,14$ para estas representações numéricas

$$F8 = (-1)^S \left(1 + \sum_{i=0}^{4} B_{4-i} 2^{-i}\right) \times 2^{Expoente}$$





  - Realize a operação $A - B$ para cada representação e compare erro dos resultados obtidos
  - Verifique o que seria necessário para implementar as operações de divisão e de multiplicação