

# Árvores - balanceamento

**João Paulo Dias de Almeida**  
jp.dias.almeida@gmail.com

---

Universidade Federal de Sergipe

# O que vamos aprender hoje?

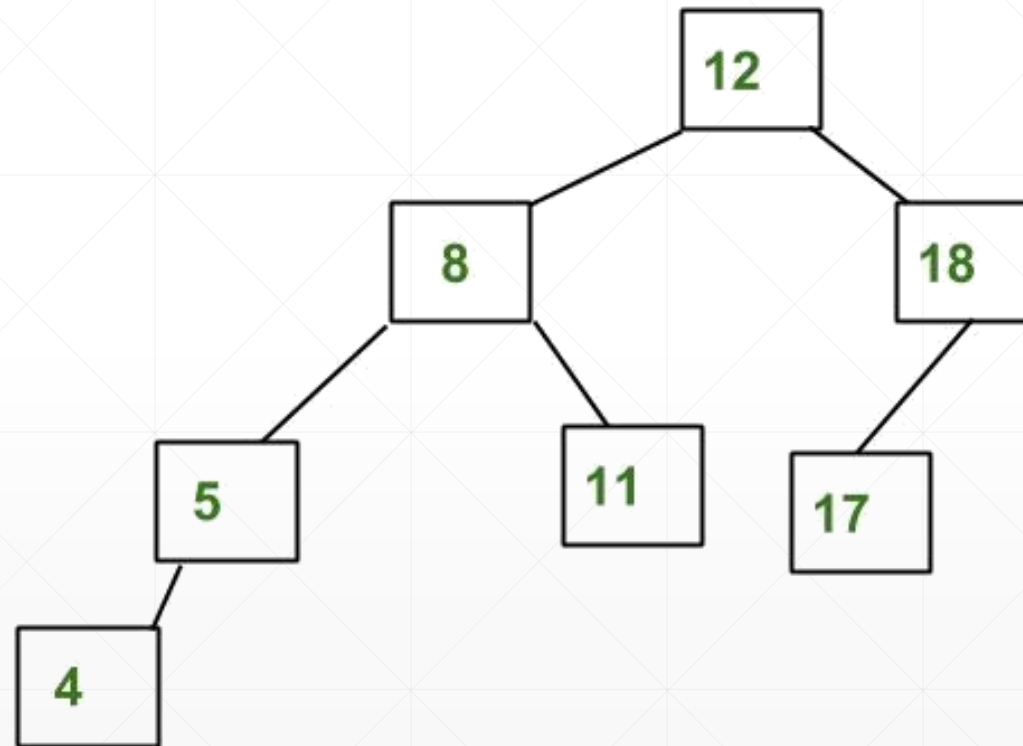
- Identificar uma árvore não balanceada
- Entender o algoritmo de balanceamento de uma árvore
- Calcular o fator de balanceamento
- Implementar uma árvore AVL



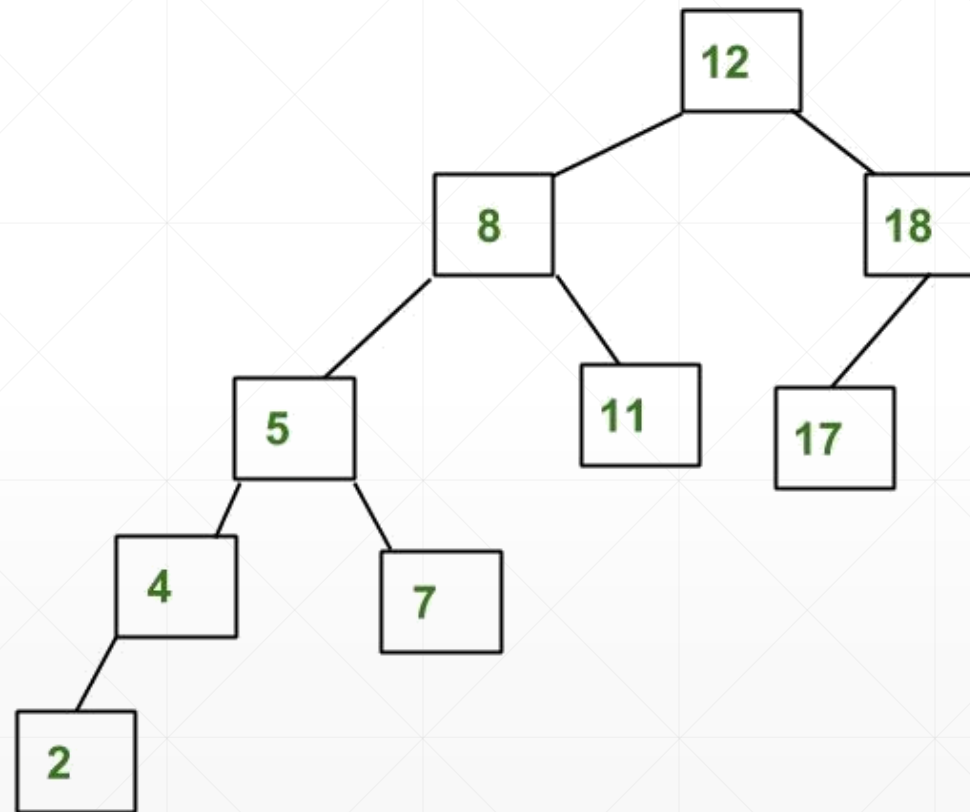
# Introdução

- Uma Árvore Binária de Busca (BST) é considerada balanceada quando as diferenças de altura entre as subárvores da esquerda e direita **são no máximo 1**
  - A altura de um nó corresponde a altura de sua subárvore esquerda menos a altura de sua subárvore direita
    - diferença  $\leq 1$
- AVL: é uma árvore BST auto-balanceável
  - Nome em homenagem aos inventores desta estrutura
  - Adelson-Velsky e Landis

# Está balanceada?



# Está balanceada?



# Por que usar?

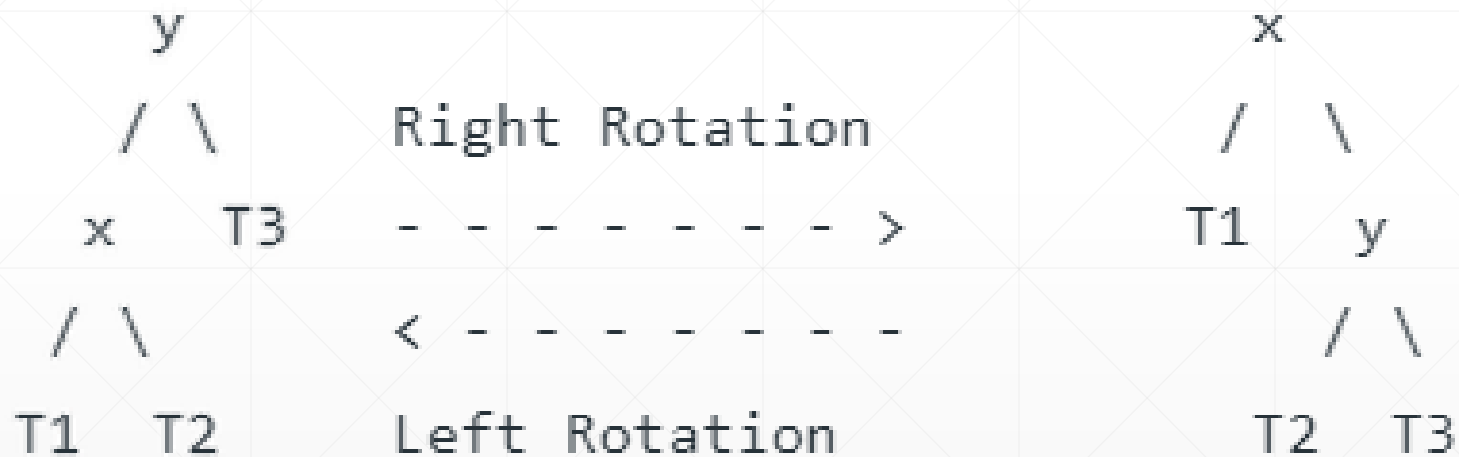
- As operações básicas em uma BST possuem um custo  $O(h)$ 
  - Desde que a árvore esteja **balanceada**
  - Caso contrário, pode chegar a  $O(n)$
- Utilizando o algoritmo de balanceamento da árvore garantimos que as operações serão executadas em  $O(\log n)$ 
  - A altura da árvore **nunca** será  $n$

# Inserção

- Durante a inserção, vamos garantir que a árvore continue balanceada
  - Precisamos fazer isso e manter as características de uma BST
- Solução: vamos aplicar uma rotação nos nós da árvore

# Rotação: demonstração

- Considere que a árvore abaixo está ordenada





# AVL: algoritmo

- Cada nó deve possuir um atributo indicando o seu fator de balanceamento (ou altura)

$$F_b = h_{esq} - h_{dir}$$

1. Execute a inserção normal do nó na BST
2. Verifique se a árvore está desbalanceada
  1. Caso positivo, execute a rotação adequada
  2. Caso negativo, não faça nada

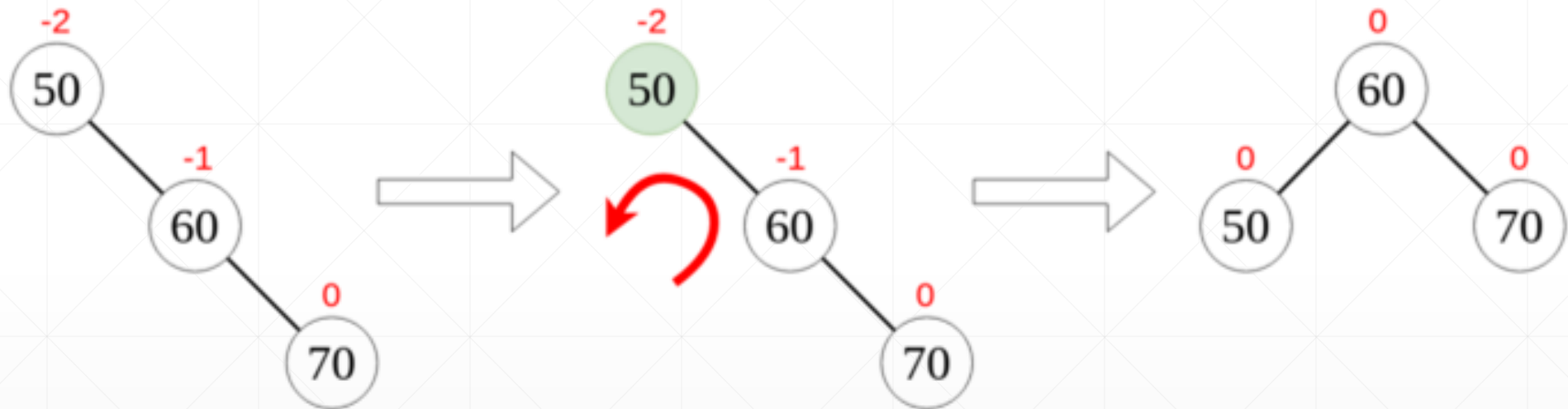
# Rotações

- Podemos dividir as rotações em dois tipos:
  - Simples  
O **nó desbalanceado** e seu **filho** estão no **mesmo sentido da inclinação**
  - Duplas  
O **nó desbalanceado** e seu **filho** estão no **sentido inverso da inclinação**
- A rotação dupla equivale a duas rotações simples

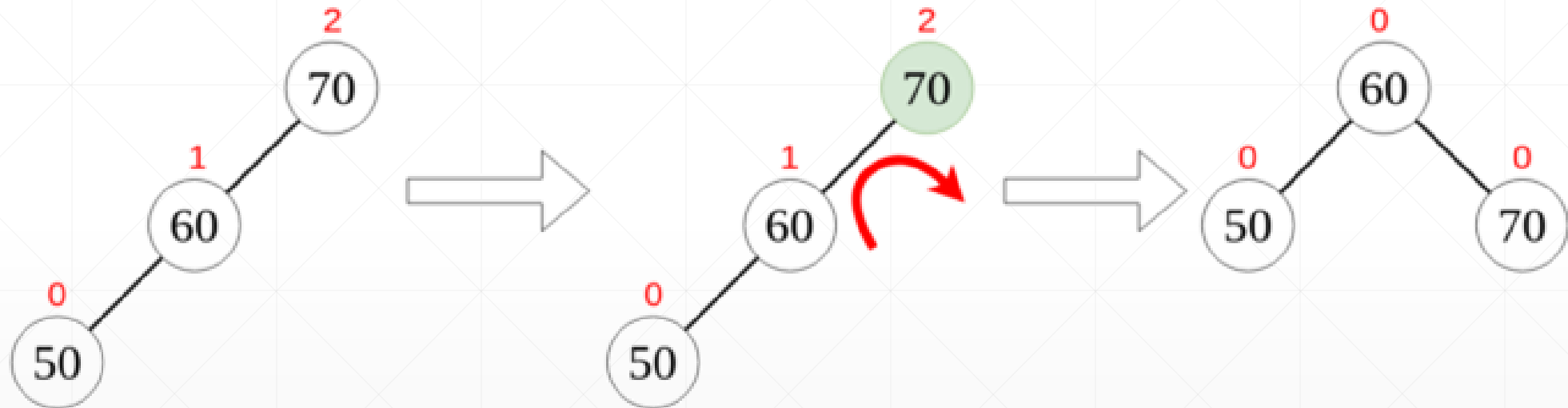
# Rotações simples

- Existem duas rotações simples e duas rotações duplas
  - Simples:
    - Rotação única à esquerda
    - Rotação única à direita
  - Duplas:
    - Rotação esquerda direita
    - Rotação direita esquerda

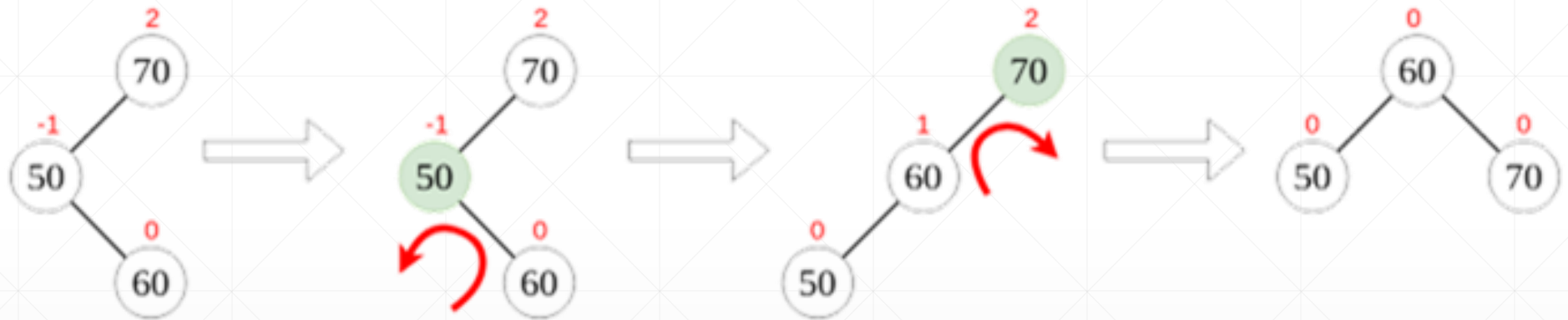
# Rotação simples à esquerda (RR)



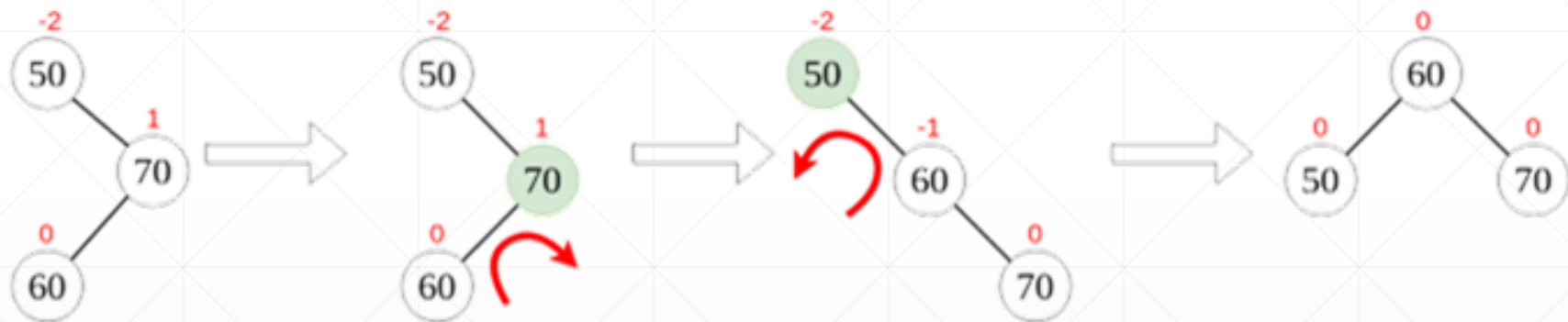
# Rotação simples à direita (LL)



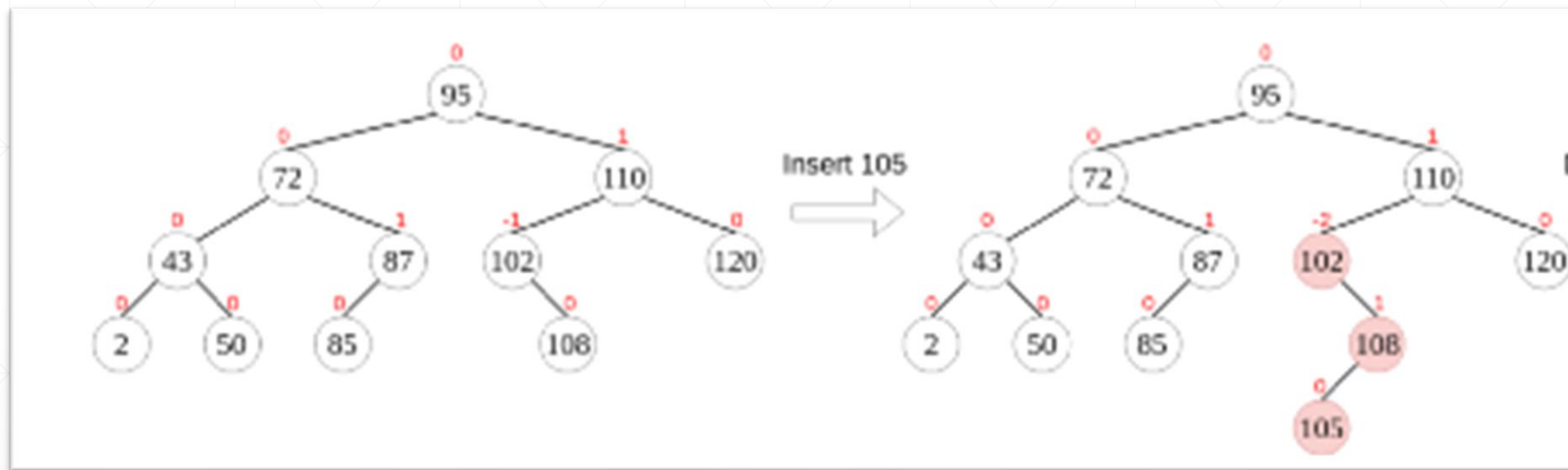
# Rotação esquerda direita (LR)



# Rotação direita esquerda (RL)

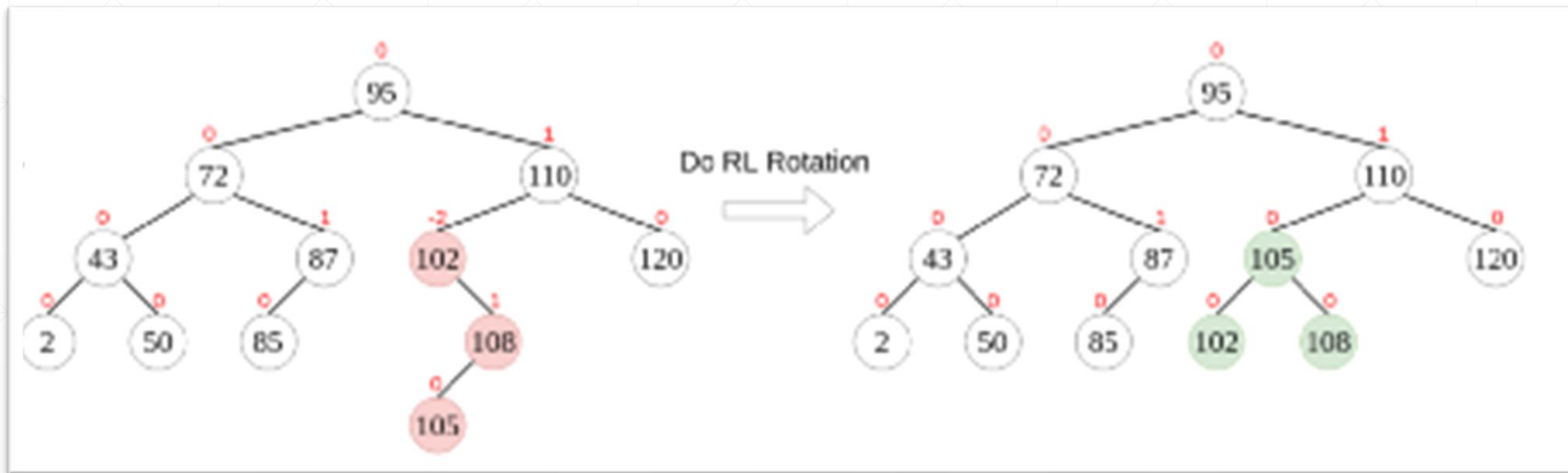


# Inserindo o elemento

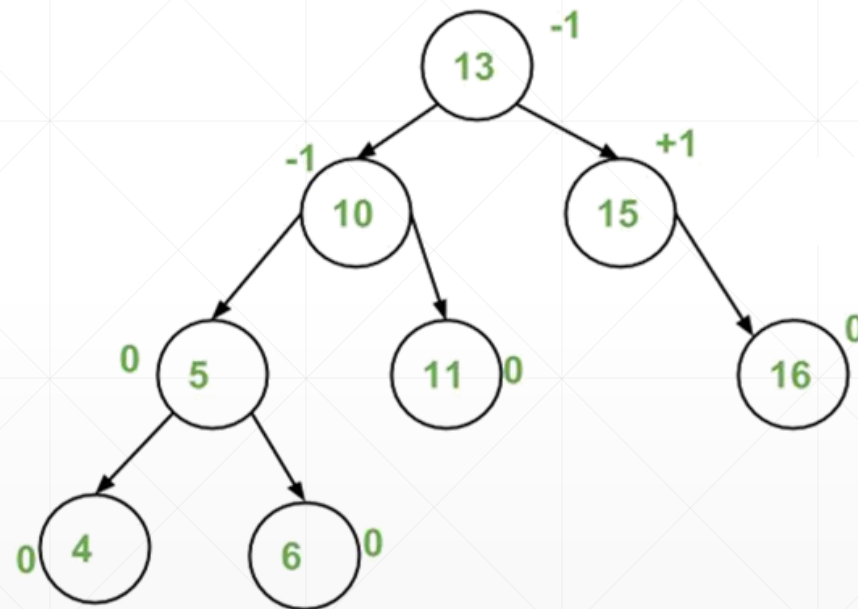




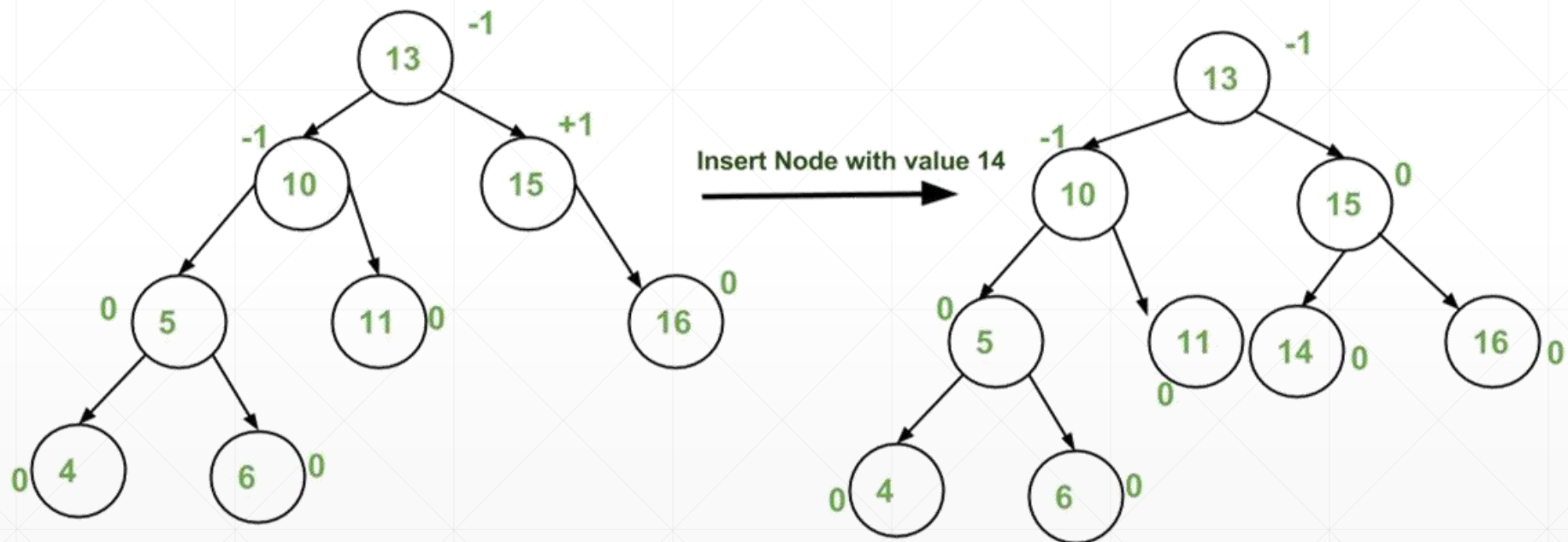
# Inserindo o elemento



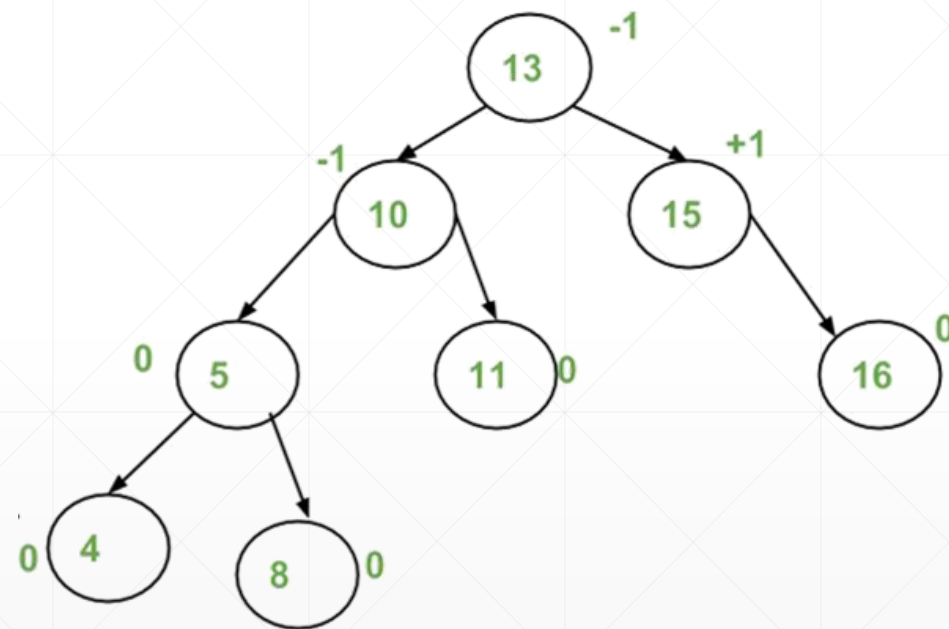
# Insira o nó 14

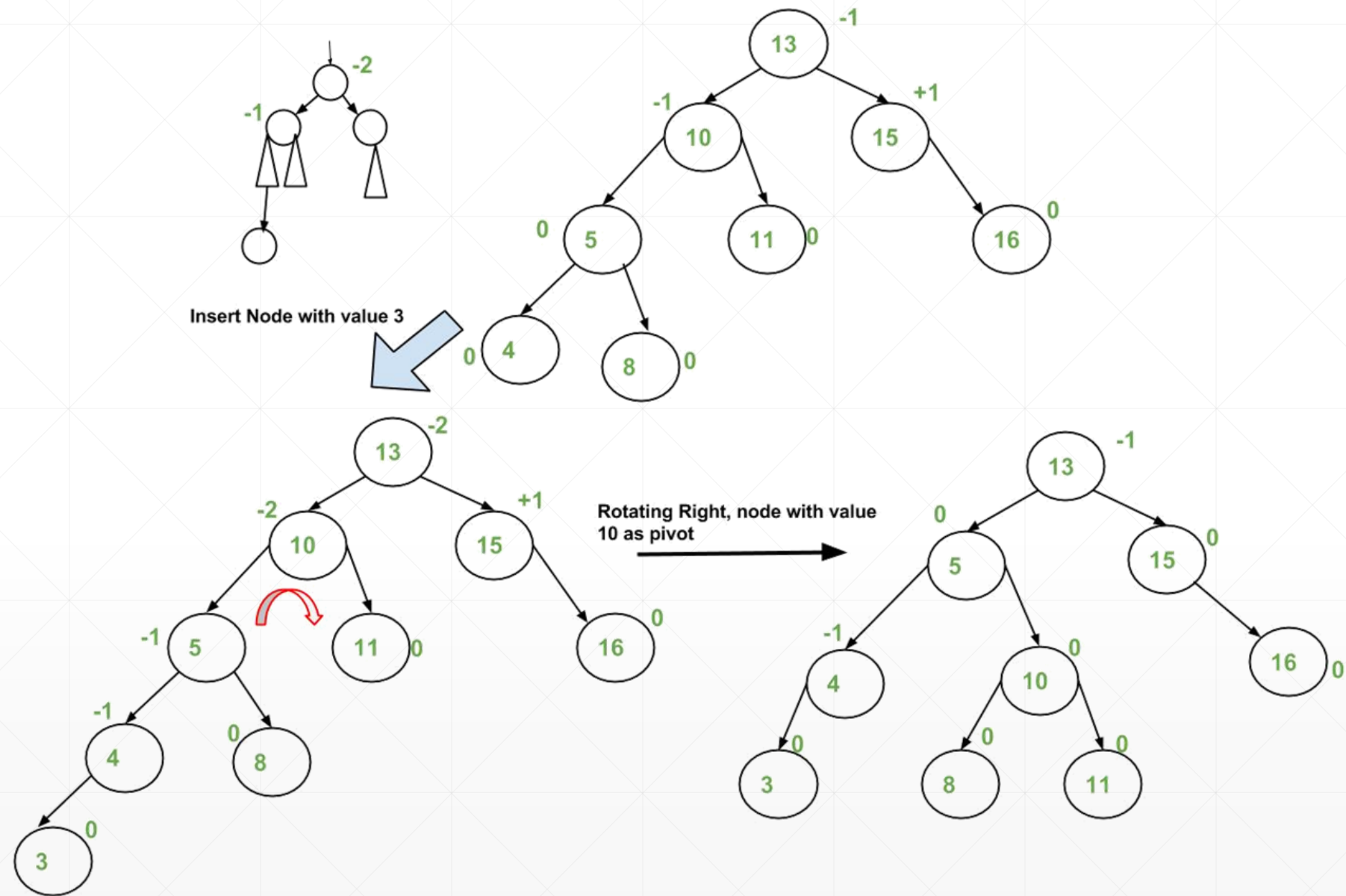


# Insira o nó 14



# Insira o nó 3





# AVL: algoritmo

1. Execute a inserção normal do nó na BST
2. Vamos chamar de nó atual, o ancestral do nó inserido. Atualize a altura do nó atual
3. Calcule o Fator de Balanceamento (FB) do nó atual
  1. Se  $FB > 1$ , execute **LL** ou **LR**. Para saber qual executar, compare o valor do nó inserido com o da raiz da subárvore **esquerda** ( $key > node.left.key == RL$ )
  2. Se  $FB < -1$ , execute **RR** ou **RL**. Para saber qual executar, compare o valor do nó inserido com o da raiz da subárvore **direita** ( $key < node.right.key == RL$ )

# Exemplo – Àrvore AVL

---

# Referências

- GeeksforGeeks. AVL Tree | Set 1 (Insertion). Disponível em: <https://www.geeksforgeeks.org/avl-tree-set-1-insertion/>. Acessado em: 09/02/2022
- BERTAN, E. Uma breve introdução sobre rotações simples em Árvores AVL. Disponível em: <https://bit.ly/3LltgwZ>. Acessado em: 09/02/2022
- BACKES, A. [ED] Aula 81 - Árvore AVL: Tipos de Rotação. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1HkWqH7L2rU>. Acessado em: 09/02/2022



# Referências

- GeeksforGeeks. AVL Tree | Set 1 (Insertion). Disponível em: <https://www.geeksforgeeks.org/avl-tree-set-1-insertion/>. Acessado em: 09/02/2022
- BERTAN, E. Uma breve introdução sobre rotações simples em Árvores AVL. Disponível em: <https://bit.ly/3LltgwZ>. Acessado em: 09/02/2022
- BACKES, A. [ED] Aula 81 - Árvore AVL: Tipos de Rotação. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1HkWqH7L2rU>. Acessado em: 09/02/2022

# Dúvidas?