6

Speranza condizionale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato fissato e $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$. La speranza condizionale di una variabile aleatoria X rispetto alla σ-algebra $\mathcal{G}$ fornisce una valutazione ragionevole della speranza della variabile aleatoria X supponendo di conoscere l'informazione data dagli eventi della σ-algebra $\mathcal{G}$.

Definizione 6.1 *Sia X una variabile aleatoria reale integrabile. Si chiama* versione della speranza condizionale *di X rispetto alla σ-algebra $\mathcal{G}$ ogni variabile aleatoria reale integrabile V, misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{G}$ tale che*

$$\int_G X d\mathbb{P} = \int_G V d\mathbb{P} \tag{6.1}$$

per ogni insieme $G \in \mathcal{G}$.

La variabile aleatoria V che verifica (6.1) è essenzialmente unica. Infatti, se V' è un'altra variabile aleatoria reale integrabile con la stessa proprietà, allora

$$\mathbb{E}[1_G V] = \mathbb{E}[1_G V']$$

per ogni $G \in \mathcal{G}$ e quindi, essendo V e V' $\mathcal{G}$-misurabili, risulta $\mathbb{P}\{V \neq V'\} = 0$.

Ogni versione della speranza condizionale di V rispetto a $\mathcal{G}$ si denota $\mathbb{E}[V|\mathcal{G}]$.

Per sviluppare l'intuizione sulla speranza condizionale consideriamo alcuni esempi.

Esempio 6.1 Nel caso particolare in cui $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ si può prendere $V = X$ mentre, nel caso particolare in cui $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, poiché ogni variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile è quasi certamente costante, basterà prendere $V = \mathbb{E}[X]$.

Esempio 6.2 Siano X, Y due variabili aleatorie reali indipendenti con X integrabile e sia $\mathcal{G}$ la σ-algebra $\sigma(Y)$ generata da Y. Si ha allora $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)] = \mathbb{E}[X]$. In questo caso la speranza condizionale di X rispetto a Y si denota anche con $\mathbb{E}[X|Y]$.

Esempio 6.3 Siano $X_1, \ldots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti con legge di Bernoulli $B(1, p)$ e sia $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Partendo dal calcolo della probabilità condizionata

$$\mathbb{P}\{\, X_\ell = 1 \mid S_n = k \,\} = \frac{k}{n}$$

per ogni $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ si trova

$$\mathbb{E}[X_\ell | S_n] = \frac{S_n}{n}.$$

6.1 Speranza condizionale di variabili aleatorie integrabili

La speranza condizionale di una variabile aleatoria integrabile esiste sempre. Si dimostra infatti il seguente

Teorema 6.2 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, $\mathcal{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathcal{F}$. Per ogni variabile aleatoria reale estesa X integrabile esiste $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.*

Dimostrazione. Si può supporre che X sia non negativa. Infatti, se così non fosse, basterebbe decomporre X nella differenza $X^+ - X^-$, mostrare l'esistenza di $\mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}]$ e $\mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$ e porre $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^+|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^-|\mathcal{G}]$.

Supponendo quindi X non negativa, chiamiamo Q la misura su $\mathcal{G}$ definita da

$$Q(G) = \int_G X d\mathbb{P}$$

e chiamiamo P la restrizione di $\mathbb{P}$ alla σ-algebra $\mathcal{G}$. È chiaro che Q è assolutamente continua rispetto a P quindi, per il Teorema di Radon-Nikodym, esiste una V non negativa e misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{G}$ tale che

$$Q(G) = \int_G V d\mathbb{P}.$$

La conclusione segue dalle identità

$$\int_G X d\mathbb{P} = Q(G) = \int_G V d\mathbb{P}. \qquad \square$$

La dimostrazione precedente, una semplice applicazione del teorema di Radon-Nikodym, non è costruttiva cioè non fornisce un metodo per calcolare effettivamente $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. Mostreremo quindi il metodo di calcolo in due casi particolari notevoli.

Proposizione 6.3 *Supponiamo che $\mathcal{G}$ sia la σ-algebra $\sigma(X_1)$ generata da una variabile aleatoria reale X_1 e che X_1 e X_2 abbiano densità congiunta f rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Siano f_1 e f_2 le densità marginali di X_1 e X_2 rispettivamente e $g(\cdot|x_1)$*

$$g(x_2|x_1) = \begin{cases} f(x_1, x_2)/f_1(x_1) & \text{se } f_1(x_1) > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

la densità condizionata di X_2 rispetto a X_1. Si ha allora

$$\mathbb{E}[X_2 \mid \sigma(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} x_2 g(x_2|X_1) dx_2.$$

Analogamente, se X_1, X_2 sono variabili aleatorie con densità discreta p, allora, dette p_1 e p_2 le densità marginali di X_1 e X_2 e q la densità condizionata di X_2 rispetto a X_1

$$q(x_2|x_1) = \mathbb{P}\{X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1\}$$

(definita per le x_1 tali che $\mathbb{P}\{X_1 = x_1\} > 0$) si ha

$$\mathbb{E}[X_2 \mid \sigma(X_1)] = \sum_{x_2} x_2 q(x_2|X_1).$$

Proposizione 6.4 *Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una catena di Markov con insieme degli stati E e matrice di transizione T. Per ogni funzione $f : E \to \mathbb{R}$ limitata si ha*

$$\mathbb{E}\left[\, f(X_{n+1}) \mid \sigma\{X_n, \dots, X_0\}\,\right] = (Tf)(X_n).$$

6.2 Proprietà di monotonia e proiettività

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato fissato e $\mathcal{G}$ una sotto σ-algebra di $\mathcal{F}$.

La speranza condizionale ha molte proprietà analoghe a quelle della speranza

Proposizione 6.5 *La speranza condizionale ha le proprietà seguenti:*

1. *(linearità) se X, Y sono due variabili aleatorie integrabili e $a, b \in \mathbb{R}$ allora*
$$\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}],$$
2. *(normalizzazione) se $X = x$ è una variabile aleatoria costante allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = x$,*
3. *(positività) se X è una variabile aleatoria positiva e integrabile allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ è positiva,*
4. *(monotonia) se X, Y sono due variabili aleatorie integrabili tali che $\mathbb{P}\{X \geq Y\} = 1$ allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$.*

Dimostrazione. Verifichiamo la prima proprietà. La variabile aleatoria $a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ è evidentemente $\mathcal{G}$-misurabile. Per ogni $G \in \mathcal{G}$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_G (a\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}])\, d\mathbb{P} &= a\int_G \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b\int_G \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\
&= a\int_G X d\mathbb{P} + b\int_G Y d\mathbb{P} \\
&= \int_G (aX + bY)\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Quindi la speranza condizionale è lineare.

Le altre proprietà si dimostrano in modo analogo. □

Anche la dimostrazione delle due proprietà seguenti è solo un esercizio sulla definizione di speranza condizionale.

Teorema 6.6 *Sia X una variabile aleatoria integrabile e siano $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ due sotto σ-algebre di $\mathcal{F}$ tali che $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Si Ha allora*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big|\mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}]$$

Teorema 6.7 *Sia X una variabile aleatoria integrabile. Per ogni variabile aleatoria V che sia $\mathcal{G}$-misurabile e limitata si ha*

$$\mathbb{E}[VX \mid \mathcal{G}] = V\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

Osserviamo infine che se X è indipendente dalla σ-algebra $\mathcal{G}$ (e, naturalmente, integrabile) ovvero

$$\mathbb{P}(\{X \in A\} \cap G) = \mathbb{P}(\{X \in A\}) \cdot \mathbb{P}(G) \tag{6.2}$$

per ogni A boreliano e $G \in \mathcal{G}$, allora

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]. \tag{6.3}$$

Infatti dalla (6.2) segue subito che

$$\int_G f(X) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{P}(G) = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \int_G d\mathbb{P}$$

per ogni funzione f semplice. Con un tipico procedimento di teoria dell'integrazione la formula precedente si estende alle funzioni f positive e poi a quelle tali che $f(X)$ sia integrabile. Se X è integrabile, basterà per trovare la (6.2).

6.3 Diseguaglianza di Jensen

La diseguaglianza di Jensen si enuncia e si dimostra in modo analogo a quella per la speranza.

Proposizione 6.8 *Sia X una variabile aleatoria reale integrabile e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Supponiamo che anche la variabile aleatoria $\varphi(X)$ sia integrabile. Si ha allora*

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{G}]$$

Indichiamo con $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(1 \leq p < \infty)$ lo spazio vettoriale delle variabili aleatorie X tali che $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.

Proposizione 6.9 *Se $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ allora $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Dimostrazione. Basta applicare la diseguaglianza di Jensen prendendo la funzione convessa $\varphi(x) = |x|^p$. □

Il Teorema 6.7 si può generalizzare un pò come segue

Proposizione 6.10 *Sia X una variabile aleatoria e V una variabile aleatoria $\mathcal{G}$-misurabile. Supponiamo che $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ e che $\mathbb{E}[|V|^q] < \infty$ con p, q numeri reali maggiori di 1 tali che $1/p + 1/q = 1$. Si ha allora*

$$\mathbb{E}[\, VX \mid \mathcal{G}\,] = V\mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,]$$

Dimostrazione. (Cenno) Decomponendo $V = V^+ - V^-$ si vede che basta dimostrare la proposizione nel caso in cui V sia inoltre non negativa.

Per ogni $n \geq 1$ la variabile aleatoria $V_n = (V \wedge n)$ è limitata, dunque

$$\mathbb{E}[\, V_n X \mid \mathcal{G}\,] = V_n \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,]$$

grazie al Teorema 6.7. La conclusione segue facendo tendere n all'infinito. □

6.4 Speranza condizionale e stima

La Proposizione 6.9 assicura, in particolare, che la speranza condizionale di una variabile aleatoria X di quadrato integrabile ha anch'essa quadrato integrabile.

Si può anzi vedere che la speranza condizionale di X rispetto a una sotto σ-algebra $\mathcal{G}$ di $\mathcal{F}$ è la migliore approssimazione di X con una variabile aleatoria $\mathcal{G}$ misurabile, di quadrato integrabile, nel senso seguente

Teorema 6.11 *Per ogni variabile aleatoria Z, $\mathcal{G}$-misurabile, di quadrato integrabile, si ha*

$$\mathbb{E}\left[|X - Z|^2\right] = \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,]|^2\right] + \mathbb{E}\left[|\mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,] - Z|^2\right].$$

In particolare

$$\min_{Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})} \mathbb{E}\left[|X - Z|^2\right] = \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,]|^2\right].$$

Dimostrazione. Scriviamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X - Z|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left((X - \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,]) - (\mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,] - Z)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,])^2\right] + \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,] - Z)^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,])(\mathbb{E}[\, X \mid \mathcal{G}\,] - Z)\right].\end{aligned}$$

Utilizzando le proprietà della speranza condizionale si verifica che l'ultimo termine della somma precedente è nullo. □