SCHELETRO DISCRETO E TEMPI DI ASSORBIMENTO E DI SOGGIORNO IN STATI PER UNA CATENA DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

1. Fatti generali

Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e a valori in uno spazio discreto e numerabile I. Sia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtrazione naturale di $(X_t)_{t\geq 0}$; cioè, $\mathcal{F}_t$ è la σ-algebra generata dal processo fino al tempo t: $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \mid s \leq t)$. Poniamo inoltre $\mathcal{F}_\infty := \sigma(X_t \mid t \geq 0) \equiv \sigma(\mathcal{F}_t \mid t \geq 0)$.

Introduciamo la *successione dei tempi di salto*

$$U_0 = 0$$

$$U_{n+1} = \begin{cases} \inf\{t \geq U_n \mid X_t \neq X_{U_n}\} & \text{se } U_n < +\infty \\ +\infty & \text{se } U_n = +\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } n \geq 0\,.$$

Ricordiamo che un *tempo d'arresto* per il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ è una variabile aleatoria T a valori in $[0, +\infty]$ tale che $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$. Abbiamo allora il fatto seguente.

Proposition 1. *Supponiamo che $(X_t)_{t\geq 0}$ sia un processo a traiettorie regolari, cioè che per ogni $\omega \in \Omega$ la mappa $t \mapsto X_t(\omega)$ sia continua da destra e con limite da sinistra. Allora ciascun tempo di salto U_n è un tempo d'arresto per $(X_t)_{t\geq 0}$.*

Proof. Per ogni $t > 0$,

$$\begin{aligned}\{U_n \leq t\} &= \bigcup_{s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t} \{X_0 \neq X_{s_1},\, X_{s_1} \neq X_{s_2},\, \ldots,\, X_{s_{n-1}} \neq X_{s_n}\} \\ &= \bigcup_{s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t,\ s_i \in \mathbb{Q} \cup \{t\}} \{X_0 \neq X_{s_1},\, X_{s_1} \neq X_{s_2},\, \ldots,\, X_{s_{n-1}} \neq X_{s_n}\}\,,\end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla regolarità delle traiettorie del processo e dal fatto che l'insieme $\mathbb{Q} \cup \{t\}$ è denso nell'intervallo $[0, t]$. Poichè $\{X_0 \neq X_{s_1},\, X_{s_1} \neq X_{s_2},\, \ldots,\, X_{s_{n-1}} \neq X_{s_n}\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq t$ e nella seconda uguaglianza abbiamo un'unione numerabile di tali eventi, segue che $\{U_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. □

Se T è un tempo d'arresto, è facile verificare che l'insieme $\{T < \infty\}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{F}_\infty$ generata dal processo; infatti,

$$\{T < \infty\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{T \leq k\} \in \sigma(\mathcal{F}_k \mid k \in \mathbb{N}) \subset \sigma(\mathcal{F}_t \mid t \geq 0)\,.$$

Nel seguito, avremo bisogno anche del seguente risultato un po' più tecnico.

Lemma 1. *Supponiamo che $(X_t)_{t\geq 0}$ sia un processo a traiettorie regolari, e che T sia un suo tempo d'arresto. Allora per ogni $k \in I$ l'insieme $\{T < \infty,\, X_T = k\}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{F}_\infty$; in particolare, $\{T < \infty,\, X_T = k\}$ è misurabile.*

Proof. Per ogni $n \geq 0$, introduciamo la variabile aleatoria T_n a valori *discreti* in $[0, +\infty]$

$$T_n = \sum_{k \geq 0} (k+1) 2^{-n} \, \mathbb{1}_{(k2^{-n},\,(k+1)2^{-n}]}(T) + \infty \, \mathbb{1}_{\{T=+\infty\}} \,.$$

È immediato verificare che la successione di variabili aleatorie $(T_n)_{n \geq 0}$ è decrescente e converge da sopra a T: cioè, per ogni $\omega \in \Omega$, $T_n(\omega) \downarrow T(\omega)$ per $n \to \infty$. Perciò, per la regolarità delle traiettorie, per ogni $j \in I$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{1}_{\{T_n < +\infty,\, Y_{T_n} = j\}} = \mathbb{1}_{\{T < +\infty,\, Y_T = j\}} \,.$$

Ora, ogni insieme $\{T_n < +\infty,\, Y_{T_n} = j\}$ è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile: infatti,

$$\begin{aligned} \{T_n < +\infty,\, Y_{T_n} = j\} &= \bigcup_{k \geq 0} \{T_n = k2^{-n},\, Y_{k2^{-n}} = j\} \\ &= \bigcup_{k \geq 0} \{T \in ((k-1)2^{-n},\, k2^{-n}],\, Y_{k2^{-n}} = j\} \,, \end{aligned}$$

e ogni evento $\{T \in ((k-1)2^{-n},\, k2^{-n}],\, Y_{k2^{-n}} = j\}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}}$ (perché?). Perciò, anche il limite $\mathbb{1}_{\{T<+\infty,\, Y_T = j\}}$ è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile, concludendo così la dimostrazione. □

A partire dal processo $(X_t)_{t \geq 0}$ e dalla successione dei suoi tempi di salto $(U_n)_{n \geq 0}$, costruiamo il processo a tempo discreto $(Y_n^X)_{n \geq 0}$, dato da

$$Y_n^X = \begin{cases} X_{U_n} & \text{se } U_n < +\infty \\ Y_{n-1}^X & \text{se } U_n = +\infty \end{cases} \qquad \text{per ogni } n \geq 0 \,.$$

Osserviamo che lo spazio degli stati di $(Y_n^X)_{n \geq 0}$ è lo stesso di $(X_t)_{t \geq 0}$. Inoltre, $Y_0^X \equiv X_0$. Notiamo inoltre che, se $(X_t)_{t \geq 0}$ è a traiettorie regolari, allora, per ogni $n \geq 0$, Y_n^X è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile come conseguenza del Lemma 1. Infatti, chiaramente $Y_0^X = X_0$ è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile; d'altra parte, se Y_n è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile, allora

$$\{Y_{n+1} = k\} = \{U_{n+1} = +\infty,\, Y_n = k\} \cup \{U_{n+1} < +\infty,\, X_{U_{n+1}} = k\} \,,$$

e sia l'evento $\{U_{n+1} = +\infty\}$ sia $\{U_{n+1} < +\infty,\, X_{U_{n+1}}\} = k$ sono $\mathcal{F}_\infty$-misurabili per il Lemma 1. La $\mathcal{F}_\infty$-misurabilità di Y_n per ogni $n \geq 0$ segue allora per induzione.

Il processo $(Y_n^X)_{n \geq 0}$ si chiama *scheletro discreto* del processo a tempo continuo $(X_t)_{t \geq 0}$. Nella sezione seguente vedremo che, se $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov a tempo continuo, allora $(Y_n^X)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov a tempo discreto e ne determineremo le probabilità di transizione a partire da quelle di $(X_t)_{t \geq 0}$.

2. Lo scheletro discreto di una catena di Markov a tempo continuo

Da qui in avanti, ci restringeremo al caso in cui $(X_t)_{t \geq 0}$ è una catena di Markov omogenea e a tempo continuo, con stato iniziale $X_0 = i_0$, e denoteremo con Q la sua matrice dei tassi di transizione. Supporremo inoltre una volta per tutte che il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ sia a traiettorie regolari, in modo che valgano i due risultati enunciati nella sezione precedente. Essendo in più $(X_t)_{t \geq 0}$ una catena di Markov, vale anche la seguente *proprietà di Markov forte*.

Theorem 1. *Fissato $i \in I$, supponiamo $\mathbb{P}_{i_0}(T < +\infty\,,\, X_T = i) \neq 0$, e sia $\mathbb{Q}_i$ la probabilità condizionata $\mathbb{Q}_i(A) = \mathbb{P}_{i_0}(A \mid T < +\infty\,,\, X_T = i)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. Allora,* rispetto alla probabilità condizionata $\mathbb{Q}_i$,

(i) i due processi $(X_{T+t})_{t \geq 0}$ e $(X_{T \wedge t})_{t \geq 0}$ sono indipendenti;

(ii) il processo $(X_{T+t})_{t\geq 0}$ è una catena di Markov a tempo continuo con stato iniziale $X_T = i$ e con la stessa matrice di transizione di $(X_t)_{t\geq 0}$.

In altre parole,

(i) le due σ-algebre $\sigma(\{T < +\infty,\ X_{T+t}\} \mid t \geq 0)$ e $\sigma(X_{T\wedge t} \mid t \geq 0)$ sono indipendenti *condizionatamente all'evento* $\{T < +\infty\,,\ X_T = i\}$;

(ii) il processo $(X_{T+t})_{t\geq 0}$ *sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}_i)$ è una catena di Markov con le stesse probabilità di transizione $p_{h,k}(t)$ di $(X_t)_{t\geq 0}$, cambia però il suo stato iniziale $X_T = i$.

Lo scheletro discreto di una catena di Markov omogenea a tempo continuo è a sua volta una catena di Markov omogenea a tempo discreto. Abbiamo cioè il fatto seguente.

Proposition 2. *Il processo $(Y_n^X)_{n\geq 0}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{i_0})$ è una catena di Markov omogenea a tempo discreto con*

- *lo stesso spazio degli stati di $(X_t)_{t\geq 0}$;*
- *stato iniziale $Y_0^X = X_0 = i_0$;*
- *matrice di transizione*

$$p_{i,j} = \begin{cases} -q_{i,j}/q_{i,i} & \text{se } q_{i,i} \neq 0\,,\ j \neq i \\ 0 & \text{se } q_{i,i} \neq 0\,,\ j = i \\ \delta_{i,j} & \text{se } q_{i,i} = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Proof. Verificheremo che

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_1\right) = \\ &= \mathbb{P}_{i_1}\left(Y_{n-1}^X = i_n,\, Y_{n-2}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_2\right) p_{i_0,i_1} \end{aligned} \tag{2}$$

con $p_{i,j}$ dati da (1). Ciò sarà sufficiente a mostrare che $(Y_n^X)_{n\geq 0}$ è una catena di Markov omogenea con matrice di transizione (1) (per induzione, esercizio!).

Se $q_{i_0,i_0} = 0$, allora $\mathbb{P}_{i_0}(U_1 < +\infty) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = k\right) = \delta_{i_0,k}$, e quindi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_1\right) = \\ &= \delta_{i_0,i_1}\delta_{i_0,i_2} \ldots \delta_{i_0,i_n} \\ &= \mathbb{P}_{i_1}\left(Y_{n-1}^X = i_n,\, Y_{n-2}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_2\right) p_{i_0,i_1}\,, \end{aligned}$$

con $p_{i_0,i_1} = \delta_{i_0,i_1}$ come in (1).

Se invece $q_{i_0,i_0} \neq 0$, allora $U_1 \sim \mathcal{E}(-q_{i_0,i_0}) \Rightarrow \mathbb{P}_{i_0}(U_1 < +\infty) = 1$, e inoltre $\mathbb{P}_{i_0}(X_{U_1} = k) = (1 - \delta_{i_0,k})(-q_{i_0,k}/q_{i_0,i_0})$. Se $i_1 = i_0$, abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_1\right) = 0 \\ &= \mathbb{P}_{i_1}\left(Y_{n-1}^X = i_n,\, Y_{n-2}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_2\right) p_{i_0,i_1}\,, \end{aligned}$$

con $p_{i_0,i_1} = 0$. Nel caso in cui $i_1 \neq i_0$, abbiamo d'altra parte

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_1\right) = \\ &\quad = \mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_2^X = i_2 \mid X_{U_1} = i_1\right) \mathbb{P}_{i_0}\left(X_{U_1} = i_1\right) . \end{aligned}$$

Notiamo che $Y_n^{\tilde{X}} = Y_{n+1}^X$ per $n \geq 0$ è lo scheletro discreto del processo $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dato da

$$\tilde{X}_t = X_{U_1+t}$$

Per la proprietà di Markov forte, abbiamo quindi

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_2^X = i_2 \mid X_{U_1} = i_1\right) = \\ &\quad = \mathbb{P}_{i_0}\left(Y_{n-1}^{\tilde{X}} = i_n,\, Y_{n-2}^{\tilde{X}} = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^{\tilde{X}} = i_2 \mid X_{U_1} = i_1\right) \\ &\quad = \mathbb{P}_{i_1}\left(Y_{n-1}^X = i_n,\, Y_{n-2}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_2\right).\end{aligned}$$

Abbiamo inoltre già visto che

$$\mathbb{P}_{i_0}\left(X_{U_1} = i_1\right) = -q_{i_0,i_1}/q_{i_0,i_0}\,.$$

Pertanto, anche in questo caso concludiamo che

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{i_0}\left(Y_n^X = i_n,\, Y_{n-1}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_1\right) = \\ &\quad = \mathbb{P}_{i_1}\left(Y_{n-1}^X = i_n,\, Y_{n-2}^X = i_{n-1},\, \ldots,\, Y_1^X = i_2\right) p_{i_0,i_1}\,,\end{aligned}$$

con p_{i_0,i_1} dato da (1). □

Per mezzo della proposizione precedente, si possono estendere al caso di catene di Markov a tempo continuo molti dei risultati già noti per quelle a tempo discreto: p. es., la classificazione degli stati di una catena di Markov a tempo continuo è quella che si ottiene dal suo scheletro discreto; le probabilità di assorbimento in classi ricorrenti sono le stesse dello scheletro discreto.

3. Calcolo del valor medio e della funzione generatrice dei momenti del tempo di soggiorno in un insieme di stati per una catena di Markov a tempo continuo

Sia $A \subset I$ un insieme di stati, e sia

$$T_A = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_t \in A\}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(X_t)\,\mathrm{d}t$$

il *tempo di soggiorno* nell'insieme A. Il prossimo lemma implica in particolare che T_A è una variabile aleatoria, ma in realtà ci dice qualcosa di più.

Lemma 2. *La funzione $T_A : \Omega \to [0, +\infty]$ è misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_\infty$.*

Proof. Notiamo che T_A è il limite p.p. della successione di funzioni $(T_M)_{M \geq 0}$, con

$$T_M = \int_0^M \mathbb{1}_A(X_t)\,\mathrm{d}t\,.$$

È pertanto sufficiente dimostrare che ciascuna funzione T_M è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile. Per farlo, notiamo anzitutto che, per ogni $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_A(X_t(\omega)) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_A\left(X_{(k+1)2^{-N}}(\omega)\right) \mathbb{1}_{[k2^{-N},\,(k+1)2^{-N})}(t)\,,$$

dove la convergenza è in $L^1([0, M], \mathrm{d}t)$ (attenzione: nell'espressione precedente, limite e somma *non* si possono scambiare!). Infatti,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_A\left(X_{(k+1)2^{-N}}(\omega)\right) \mathbb{1}_{[k2^{-N},\,(k+1)2^{-N})}(t) = \mathbb{1}_A\left(X_{(\lfloor t2^N \rfloor+1)2^{-N}}(\omega)\right),$$

dove $\lfloor t2^N \rfloor$ è la parte intera di $t2^N$. Ora, poiché $(\lfloor t2^N \rfloor + 1)2^{-N} \downarrow t$ per $N \to \infty$ e per la continuità da destra delle traiettorie,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{1}_A \left(X_{(\lfloor t2^N \rfloor+1)2^{-N}}(\omega) \right) = \mathbb{1}_A(X_t(\omega)) \qquad \forall t \in [0, M] .$$

Inoltre,

$$\left| \mathbb{1}_A \left(X_{(\lfloor t2^N \rfloor+1)2^{-N}}(\omega) \right) \right| \le 1 \qquad \forall t \in [0, M],\ N \in \mathbb{N} .$$

Poiché $1 \in L^1([0, M], \mathrm{d}t)$, il teorema della convergenza dominata implica allora

$$\begin{aligned}
\int_0^M \mathbb{1}_A(X_t(\omega))\, \mathrm{d}t &= \lim_{N\to\infty} \int_0^M \mathbb{1}_A \left(X_{(\lfloor t2^N \rfloor+1)2^{-N}}(\omega) \right) \mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^M \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_A \left(X_{(k+1)2^{-N}}(\omega) \right) \mathbb{1}_{[k2^{-N}\,,\,(k+1)2^{-N})}(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to\infty} 2^{-N} \sum_{k=0}^{M2^N-1} \mathbb{1}_A \left(X_{(k+1)2^{-N}}(\omega) \right) ,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema della convergenza monotona per scambiare somma e integrale. In altre parole,

$$T_A = \lim_{N\to\infty} 2^{-N} \sum_{k=0}^{M2^N-1} \mathbb{1}_A \left(X_{(k+1)2^{-N}} \right) \qquad \text{p.p.},$$

e, poiché ciascuna funzione $\mathbb{1}_A \left(X_{(k+1)2^{-N}} \right)$ è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile, segue che anche il limite T_A è $\mathcal{F}_\infty$-misurabile. □

Osserviamo che $T_{\{i\}} < \infty$ q.c. per ogni stato $i \in \mathcal{T}$, dove $\mathcal{T}$ è l'insieme di tutti gli stati transienti della catena. Di conseguenza, $T_A < \infty$ q.c. ogniqualvolta $A \subset \mathcal{T}$ e $|A| < \infty$. In tal caso, ha senso definire la funzione generatrice dei momenti di T_A quando lo stato iniziale è un qualunque $i_0 \in I$:

$$m_{i_0}(z) = \mathbb{E}_{i_0} \left[\mathrm{e}^{-zT_A} \right] \qquad \forall z \ge 0 .$$

Notiamo che m_{i_0} è la *trasformata di Laplace* della legge di probabilità di T_A. La distribuzione di probabilità di T_A è dunque la trasformata di Laplace inversa di m_{i_0}. Inoltre, la conoscenza della funzione m_{i_0} permette di ricavare tutti i momenti della variabile aleatoria T_A mediante derivazioni successive:

$$\mathbb{E}_{i_0} \left[T_A^k \right] = (-1)^k \lim_{z\to 0+} \frac{\mathrm{d}^k m_{i_0}(z)}{\mathrm{d}z^k} .$$

Inoltre, possiamo definire il *tempo medio di soggiorno* in A della catena partendo dallo stato iniziale $i_0 \in I$ come

$$k_{i_0} = \mathbb{E}_{i_0} [T_A] .$$

Osserviamo tuttavia che, affinché $k_{i_0} < \infty$, non basta che $A \subset \mathcal{T}$ e $|A| < \infty$. Se però in più $|I| < \infty$, allora $k_i < \infty$ per ogni $i \in I$. Alla fine di questa sezione dimostreremo i due fatti seguenti.

Proposition 3. *Sia $A \subset \mathcal{T}$, con $|A| < \infty$. La successione delle funzioni generatrici dei momenti $(m_i)_{i\in I}$ della variabile aleatoria T_A è una soluzione del sistema*

$$\begin{cases}
m_i(z) = 1 & \text{se } i \in \mathcal{C} := \mathcal{T}^c \\
m_i(z) = \frac{1}{z - q_{i,i}} \sum_{j\ne i} q_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in A \\
m_i(z) = -\frac{1}{q_{i,i}} \sum_{j\ne i} q_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A
\end{cases} .$$

Proposition 4. *Sia $|I| < \infty$ e $A \subset \mathcal{T}$, con $|A| < \infty$. Allora la successione $(k_i)_{i\in I}$ dei tempi medi di soggiorno in A è una soluzione del sistema*

$$\begin{cases} k_i = 0 & \text{se } i \in \mathcal{C} \\ k_i = -\frac{1}{q_{i,i}}\left(1 + \sum_{j\neq i} q_{i,j}k_j\right) & \text{se } i \in A \\ k_i = -\frac{1}{q_{i,i}}\sum_{j\neq i} q_{i,j}k_j & \text{se } i \in \mathcal{T}\setminus A \end{cases}.$$

Notiamo che, se $i \in \mathcal{T}$, allora necessariamente $q_{i,i} < 0$, e dunque i denominatori nelle espressioni precedenti non si annullano.

Per dimostrare le Proposizioni 3 e 4 faremo uso del fatto seguente, che è di per sé di interesse.

Proposition 5. *Sia $U = U_1$ il tempo del primo salto di $(X_t)_{t\geq 0}$. Allora, se $q_{i,i} \neq 0$,*

$$\mathbb{P}_i(U > t,\, X_U = j) = \mathbb{P}_i(U > t)\,\mathbb{P}_i(X_U = j) \qquad \forall t \geq 0,\, j \in I\,. \tag{3}$$

In altre parole, se $X_0 = i$ q.c., il tempo del primo salto e lo stato d'arrivo del primo salto sono indipendenti.

Proof. Per ogni $t \geq 0$ e $j \in I$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(U > t,\, X_U = j) &= \mathbb{P}_i(U > t,\, X_U = j,\, X_t = i) \\ &= \mathbb{P}_i(U > t,\, X'_{U'} = j \mid X_t = i)\,\mathbb{P}_i(X_t = i)\,,\end{aligned}$$

dove $(X'_s)_{s\geq 0}$ è la catena di Markov fatta ripartire al tempo t:

$$X'_s = X_{t+s} \qquad \forall s \geq 0$$

e U' è il suo tempo del primo salto:

$$U' = \inf\{s \geq 0 \mid X'_s \neq X'_0\} = \inf\{s \geq 0 \mid X_{t+s} \neq X_t\}\,.$$

Sappiamo che U è un tempo di arresto per $(X_t)_{t\geq 0}$, perciò

$$\{U > t\} = \{U \leq t\}^c \in \sigma(X_s \mid s \leq t)\,.$$

Per il Lemma 1, abbiamo d'altra parte

$$\{X'_{U'} = j\} \in \sigma(X'_s \mid s \geq 0)\,.$$

Quindi, per la proprietà di Markov *debole*,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_i(U > t,\, X'_{U'} = j \mid X_t = i) &= \mathbb{P}_i(U > t \mid X_t = i)\,\mathbb{P}_i(X'_{U'} = j \mid X_t = i) \\ &= \mathbb{P}_i(U > t \mid X_t = i)\,\mathbb{P}_i(X_U = j) \\ &= \frac{\mathbb{P}_i(U > t)}{\mathbb{P}_i(X_t = i)}\mathbb{P}_i(X_U = j)\end{aligned}$$

da cui segue infine (3). □

Dimostrazione della Proposizione 3. Se $i \in \mathcal{C}$, abbiamo $\mathbb{P}_i(T_A = 0) = 1$, dunque $m_i(z) = \mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-z0}\right] = 1$ per ogni $z \geq 0$. Se invece $i \in \mathcal{T}$, allora $\mathbb{P}_i(U < \infty) = 1$, e possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}T_A &= \int_0^U \mathbb{1}_A(X_t)\,\mathrm{d}t + \int_U^{+\infty} \mathbb{1}_A(X_t)\,\mathrm{d}t \\ &= U\,\mathbb{1}_A(X_0) + \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Il secondo termine della somma precedente non è altro che il tempo di soggiorno in A del processo $(X_{U+t})_{t\geq 0}$, e dunque è misurabile rispetto alla σ-algebra $\sigma(X_{U+t} \mid$

$t \geq 0)$ in conseguenza del Lemma 2. Il primo termine, invece, è $\sigma(X_{U\wedge t} \mid t \geq 0)$-misurabile, in quanto

$$\{U > s\} = \{X_{U\wedge s} = X_0\} \in \sigma(X_{U\wedge t} \mid t \geq 0) \qquad \forall s \geq 0\,.$$

Per la proprietà di Markov forte, i due termini della somma sono indipendenti condizionatamente all'evento $\{X_U = j\}$, se j è tale che $\mathbb{P}_i\left(X_U = j\right) \neq 0$. Perciò,

$$\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zT_A} \mid X_U = j\right] = \mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zU\mathbb{1}_A(X_0)} \mid X_U = j\right]\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-z\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t} \mid X_U = j\right].$$

Ancora per la proprietà di Markov forte,

$$\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-z\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t} \mid X_U = j\right] = \mathbb{E}_j\left[\mathrm{e}^{-zT_A}\right],$$

mentre

$$\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zU\,\mathbb{1}_A(X_0)} \mid X_U = j\right] = \begin{cases} \mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zU0} \mid X_U = j\right] = 1 & \text{se } i \notin A \\ \mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zU} \mid X_U = j\right] = \mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zU}\right] = \frac{-q_{i,i}}{z-q_{i,i}} & \text{se } i \in A \end{cases}$$

dove nel secondo caso abbiamo usato l'indipendenza di U e X_U, e il fatto che $U \sim \mathcal{E}(-q_{i,i})$. Per la formula delle probabilità totali,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zT_A}\right] &= \sum_{j\neq i}\mathbb{E}_i\left[\mathrm{e}^{-zT_A} \mid X_U = j\right]\mathbb{P}_i\left(X_U = j\right) \\ &= \sum_{j\neq i}\left(-\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}}\right) \times \begin{cases} \mathbb{E}_j\left[\mathrm{e}^{-zT_A}\right] & \text{se } i \notin A \\ \frac{-q_{i,i}}{z-q_{i,i}}\mathbb{E}_j\left[\mathrm{e}^{-zT_A}\right] & \text{se } i \in A \end{cases}\end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la proposizione. □

Dimostrazione della Proposizione 4. Come nel caso precedente, $k_i = 0$ per ogni $i \in \mathcal{C}$ è banale. Se $i \in \mathcal{T}$, invece, possiamo ancora spezzare T_A nella somma

$$T_A = U\,\mathbb{1}_A(X_0) + \int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t\,,$$

così che

$$\mathbb{E}_i\left[T_A\right] = \mathbb{E}_i\left[U\,\mathbb{1}_A(X_0)\right] + \mathbb{E}_i\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t\right]. \tag{4}$$

Poiché $U \sim \mathcal{E}(-q_{i,i})$,

$$\mathbb{E}_i\left[U\,\mathbb{1}_A(X_0)\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } i \notin A \\ \frac{1}{-q_{i,i}} & \text{se } i \in A \end{cases}.$$

Inoltre, per la formula delle probabilità totali e per la proprietà di Markov forte,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t\right] &= \sum_{j\neq i}\mathbb{E}_i\left[\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_A(X_{U+t})\,\mathrm{d}t \mid X_U = j\right]\mathbb{P}_i\left(X_U = j\right) \\ &= \sum_{j\neq i}\left(-\frac{q_{i,j}}{q_{i,i}}\right)\mathbb{E}_j\left[T_A\right].\end{aligned}$$

La proposizione segue combinando queste due espressioni nell'equazione (4). □