## COMPUTATIONAL STATISTICS

### Simulating Statistical Models

- Impariamo a campionare da $\mathcal{U}([0,1])$.
  $\to$ *Uniform Pseudo RNG* (Chp. 1)
- Campioniamo da qualsiasi distribuzione (univariata, multivariata, processo gaussiano) partendo da una sequenza iid $\mathcal{U}([0,1])$.
  $\to$ *Random Variable Generation* (Chp. 2)
- Impariamo a parametrizzare l'aleatorietà di un sistema stocastico (caso finito-dim. e caso infinito-dim. (random fields)).
  $\to$ *Random Inputs Parametrization* (Chp. 3)

Da ora diamo per scontato di poter campionare da qualsiasi distribuzione (univariata, multivariata, infinito-dimensionale) e di saper parametrizzare gli input di qualsiasi sistema stocastico.

- Impariamo a stimare il valore atteso $\mu$ di una variabile (o vettore) aleatoria con il metodo Monte Carlo.
  $\to$ *Monte Carlo Methods* (Chp. 4)

Lo stimatore $\widehat{\mu}$ del metodo Monte Carlo è tale che:

$$|\mu - \widehat{\mu}| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{N}}$$

- Non possiamo ridurre $1/\sqrt{N}$, questa è la velocità di convergenza. (Monte Carlo non è in grado di fare meglio)
- Come possiamo ridurre $\widehat{\sigma}$?
  $\to$ *Variance Reduction Techniques* (Chp. 5)
- Come possiamo migliorare la costruzione di $\widehat{\mu}$? (Cambiare $1/\sqrt{N}$?)
  É possibile scegliere dei punti secondo regole adeguate in modo da ottenere una velocità di convergenza pari a $\log(N)^{d-1}/\sqrt{N}$.
  Tuttavia, i punti non saranno più random/aleatori, bensì scelti con schemi/criteri deterministici.
  $\to$ *Quasi-Monte Carlo Formulas* (Chp. 6)
- Infine, è possibile ottimizzare ulteriormente la stima combinando diverse soluzioni di Monte Carlo.
  $\to$ *Multi-Fidelity/Multi-Level Monte Carlo* (Chp. 8)

### Forward Uncertainty Quantification and Sensitivity Analysis

Parliamo ora di Sensitivity Analysis. Dato un modello a più input, vogliamo poter dire quanta incertezza genera nell'output ciascun input.
$\to$ *Sensitivity Analysis* (Chp. 7)

- Partiamo da *Local Methods* (derivate, scatterplot, screening (Morris)), che però non esplorano adeguatamente lo spazio degli input.
- Passiamo allora ai *Global Methods*, ovvero *Variance-Based Sensitivity Analysis*, introducendo i *Sobol' indeces* (first order/total effects).
- I *Sobol' indeces* prevedono il calcolo di momenti (medie/varianze), usiamo i metodi Quasi Monte Carlo su *Sobol sequences* per risparmiare a livello computazionale, tuttavia è comunque troppo dispendioso. Introduciamo due possibili alternative:
  1. *Moment Independent importance measure*: studiamo direttamente la variazione in distribuzione, senza calcolare momenti particolari (media/varianza): possiamo analizzare la densità ($\delta$-sensitivity measure) o la funzione di ripartizione (PAWN)
  2. sostituiamo il modello originale con un surrogato/emulatore più semplice (*Polynomial Chaos Expansion, Gaussian Process Regression*)

### Inverse Uncertainty Quantification

## 9. Statistical Inverse Problems and Parameter Estimation

- Frequentist approach
- Bayesian vs. frequentist
- Prior, likelihood, posterior
- Cosa fare a partire dalla posterior?
  $\widehat{\theta}_{MAP}$, $\widehat{\theta}_{CM}$, $Cov(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{z})$, $CR_\alpha$, $\pi_{pred}(z_{new}|\boldsymbol{z})$
- Nella pratica nessuno calcola la posterior
  (l'integrale al denominatore è un problema)
  $\to$ MCMC con target distribution $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{z})$
  - Metropolis
  - Metropolis, gaussian proposal, uniform prior
  - Adaptive Metropolis, gaussian proposal, uniform prior
  - Metropolis, gaussian proposal, generic prior
  - Metropolis-Hastings
  - Gibbs-sampling
- Come mai funzionano le MCMC?
  $\to$ Markov Chain theory
  - Markov Chain: definizione, omogenea, stazionaria, periodica/aperiodica, irriducibile
  - Basic limit theorem, reversibility
  - MCMC definition
    $\to$ Ergodic theorem
    $\to$ CLT for Markov Chains
  - MCMC - Metropolis-Hastings revisited

GAUSS

$N(0,1) \to$ AR $\mathcal{E}(1)$ / Box-Muller

$N(\mu,\sigma^2) \to X = \mu + \sigma Z \quad (Z \sim N(0,1))$

$N(\vec{\mu},\Sigma) \to \Sigma = AA^T$

$\vec{X} = \vec{\mu} + A\vec{Z} \quad (\vec{Z} \sim N(\vec{0}, I))$

---

CRUDE MC

$Z \longrightarrow \mu = \mathbb{E}[Z]$

$\vec{Z} = (Z_1, .., Z_m) \longrightarrow \vec{\mu} = \mathbb{E}[\vec{Z}]$

$\vec{Z} = (Z_1, .., Z_m) \to \zeta = f(\mathbb{E}[Z_1], .., \mathbb{E}[Z_m])$