Forma **generale**: $\max \; c^T x$
$Ax \leq b$

Forma **standard**: $\min \; c^T x$
$Ax = b \qquad (b \geq 0)$
$x \geq 0$

x_k = quantità di k
y_k = se k c'è $\Rightarrow 1$, altrimenti 0 $\Rightarrow \begin{cases} x_k > 0 \Rightarrow y_k = 1 \\ y_k = 0 \Rightarrow x_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_k \leq M y_k \\ x_k \leq M y_k \end{matrix}$

- al massimo una: $y_1 + \dots + y_n \leq 1$
- almeno una: $y_1 + \dots + y_n \geq 1$
- una e una sola: $y_1 + \dots + y_n = 1$
- $a \Rightarrow b$: $y_a - y_b \leq 0$
- $(a \wedge b) \Rightarrow c$: $y_a + y_b - 1 \leq y_c$
- $(a \vee b) \Rightarrow c$: $y_a + y_b \leq 2 y_c$
- almeno **m** di **n** $\Rightarrow w = 1$: $y_1 + \dots + y_n - m + 1 \leq (n - m + 1) w$

- quantità minima: $\begin{cases} x_k \geq q y_k \\ x_k \leq M y_k \end{cases}$

$\min \max \{p_{ij} x_{ij}\} \Longrightarrow \begin{cases} \min z \\ z \geq p_{ij} x_{ij} \quad \forall i,j \end{cases}$
vincolo di Bottleneck

es. 2 (Bottleneck):
$\max \min \{x_i\} \Rightarrow \begin{cases} \max z \\ z \leq x_i \quad \forall i \end{cases}$

$\min(f(x)) \rightarrow -\max(-f(x))$
$\max(f(x)) \rightarrow -\min(-f(x))$

es. 3 (Bottleneck):
$\min |x| \Rightarrow \begin{cases} \min z \\ z \geq x \\ z \geq -x \end{cases}$

$|x| = \max\{-x, x\}$

$x \leq 0 \rightarrow y = -x, \quad y \geq 0$

x libera $\rightarrow x = x^+ - x^-, \quad x^+, x^- \geq 0$

G $\begin{cases} Ax \geq b \rightarrow -Ax \leq -b \\ Ax = b \rightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases} \end{cases}$

S $\begin{cases} Ax \leq b \longrightarrow Ax + x_s = b \\ Ax \geq b \longrightarrow Ax - x_s = b \end{cases}$

Product of two binary variables:
$z = x \cdot y \qquad x \in \{0,1\}, \; y \in \{0,1\}$
$\Longrightarrow \begin{cases} z \leq x \\ z \leq y \\ z \geq x + y - 1 \end{cases}$

Product of a binary and a continuous variable:
$z = x \cdot y \qquad$ y continuous, $x \in \{0,1\}$
$\Longrightarrow \begin{cases} z \leq M x \\ z \leq y \\ z \geq y - (1-x) M \\ z \geq 0 \end{cases}$

Simplesso:

(1) scrivo le variabili in base in funzione di quelle fuori base

(2) valuto la funzione obiettivo con le var. fuori base

(3) faccio entrare chi può ottimizzare

(4) nuova soluzione

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$z = z_0 + r_N^T x_N \longrightarrow r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$$

- $r_N^T \geq 0$ soluzione ottima
- $\exists j : (r_N)_j < 0$ soluzione non ottima

$$(x_B)_j = \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right)_j = \left(A_B^{-1} b\right)_j - \left(A_B^{-1} A_N x_N\right)_j \geq 0 \quad \forall j \in B$$

Se voglio far entrare x_i con valore ϑ:

$$(x_B)_j = (A_B^{-1} b)_j - (A_B^{-1} A_N)_{ji} \vartheta \geq 0$$

- $(A_B^{-1} A_N)_{ji} > 0 \Longrightarrow \vartheta \leq \dfrac{(A_B^{-1} b)_j}{(A_B^{-1} A_N)_{ji}}$
- $(A_B^{-1} A_N)_{ji} < 0 \Longrightarrow \forall \vartheta$ (ottimo illimitato)

Esce dalla base: $j^* = \arg \min\limits_{\substack{j \in B \\ (A_B^{-1} A_N)_{ji} \geq 0}} \left\{ \dfrac{(A_B^{-1} b)_j}{(A_B^{-1} A_N)_{ji}} \right\}$

Nuova base: $B = B \cup \{i\} \setminus \{j^*\}$

1. Calcolo: $x_B = A_B^{-1} b$, $z = c_B A_B^{-1} b$, $r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
2. Se $r_N^T \geq 0 \Longrightarrow$ soluzione ottima
3. Prendo x_i con $(r_N^T)_i < 0$
4. Se $(A_B^{-1} A_N)_{ji} \leq 0 \quad \forall j \in B \Longrightarrow$ ottimo illimitato
5. Altrimenti $j^* = \arg \min\limits_{\substack{j \in B \\ (A_B^{-1} A_N)_{ji} \geq 0}} \left\{ \dfrac{(A_B^{-1} b)_j}{(A_B^{-1} A_N)_{ji}} \right\}$

$$\boxed{\vartheta \leq \frac{(A_B^{-1} b)_j}{(A_B^{-1} A_N)_{ji}}}$$

6. Si aggiorna la base sostituendo x_{j^*} con x_i e si torna a **1**.