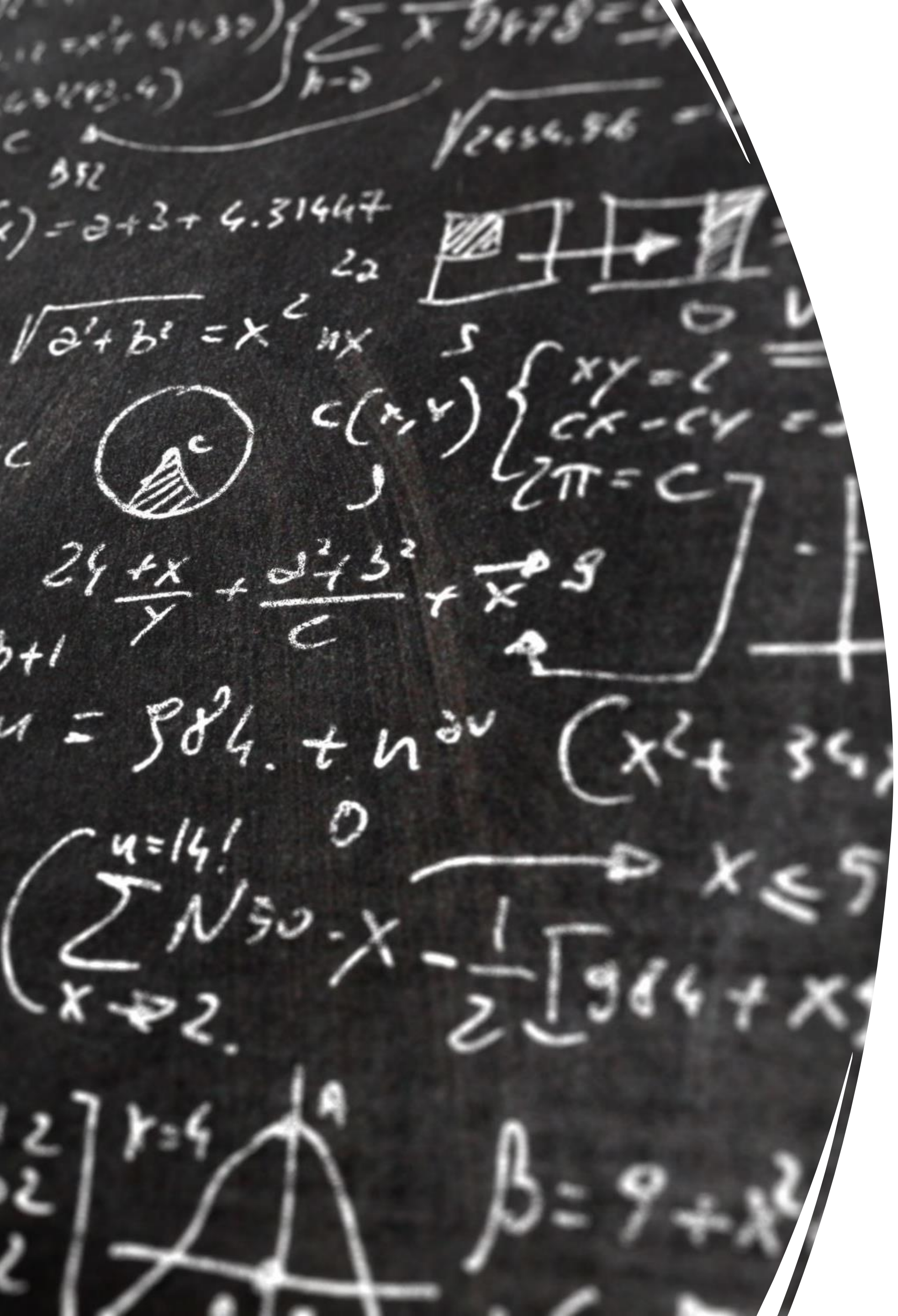

Matemática

Aula X: Função Inversa e Funções Exponencial e Logaritmo

Data: 21/05/2024

Exponenciais e Logaritmos

- **Funções Exponenciais**

Utilizada para modelar o crescimento de uma dada variável econômica ou financeira ao longo do tempo, com a variável independente t aparecendo como um *expoente*

Definição: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer. Existe uma única função f, definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x$ para todo expoente real t;

Essa função é denominada função exponencial de base ***a***

Exponenciais e Logaritmos

Definição: Seja $a > 0$ e $a \neq 1$ um real qualquer. Existe uma única função f, definida e contínua em $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x$ para todo expoente real t;

Essa função é denominada função exponencial de base ***a***

Propriedades:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. Se $a > 1$ e $x < y$, então $a^x < a^y$
5. Se $0 < a < 1$ e $x < y$, então $a^x > a^y$

Exponenciais e Logaritmos

A base e**:** Suponha um investimento de A **unidades monetárias** numa caderneta de poupança. Tome a taxa r de juros simples ao ano remunera o investimento.

Ano 1: $Valor\ na\ Carteira = A + rA = A(1 + r)$
Ano 2: $Valor\ na\ Carteira = A(1 + r) + r[A(1 + r)] = A(1 + r)(1 + r) = A(1 + r)^2$
Ano 2: $Valor\ na\ Carteira = A(1 + r)^2 + r[A(1 + r)^2] = A(1 + r)^2(1 + \mathrm{r}) = A(1 + r)^3$
$\ldots$
Ano t: $Valor\ na\ Carteira = A(1 + r)^{t-1} + r[A(1 + r)^{t-1}] = A(1 + r)^{t-1}(1 + \mathrm{r})^1 = A(1 + r)^t$

Se os juros são creditados n vezes ao ano, então ao final do ano 1, o valor será:

$$A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Exponenciais e Logaritmos

A base e**:** Suponha um investimento de A **unidades monetárias** numa caderneta de poupança. Tome a taxa r de juros simples ao ano remunera o investimento.

Se os juros são creditados n vezes ao ano, então ao final do ano 1, o valor será:

$$A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}$$

Então após t anos, o valor na carteira será:

$$A\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{t}=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Questão: Se $r=1, q$ual o limite do valor na carteira quando $n\to\infty$

Exponenciais e Logaritmos

A base e: $A\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{t} = A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Questão: Qual o limite do valor na carteira quando $n \to \infty$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Se $r = 1$ o valor da carteira será:

$$Ae^{t}$$

Se $r = r_0$, o valor da carteira será: $Ae^{r_0 t}$

Exponenciais e Logaritmos

Funções Logaritmos: Considere uma função exponencial $y = a^x$, com base $a > 1$.

Tal função exponencial é estritamente crescente (portanto, deve existir uma função inversa)

$$g\big(f(x)\big) = x$$

A função $g(.)$ é denominada função logaritmo na base a

$$y = \log_a(x_0) \leftrightarrow a^y = x_0$$

O logaritmo na base a de x_0, é a potência à qual devemos elevar a para obter x_0.

$$Exemplo: y = \log_{10} z \leftrightarrow 10^{\mathrm{y}} = \mathrm{z}$$

Exponenciais e Logaritmos

$$Exemplo: y = \log_{10} z \ \leftrightarrow 10^{\mathrm{y}} = \mathrm{z}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} \rightarrow -1 = \log_{10} \frac{1}{10}$$
$$10^{0} = 1 \rightarrow 0 = \log_{10} 1$$
$$10^{1} = 10 \rightarrow 1 = \log_{10} 10$$
$$10^{2} = 100 \rightarrow \log_{10} 100 = 2$$
$$10^{5} = 100.000 \rightarrow \log_{10} 100.000 = 5$$

Exponenciais e Logaritmos

Propriedades Exponencial:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $a^{-x} = 1/a^x$
3. $\frac{a^x}{a^s} = a^{x-s}$

Propriedades Logaritmo:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$
3. $\log\left(\frac{x}{s}\right) = \log_a(x) - \log_a(s)$
4. Log(1)=0
5. $\log a^s = slog(a)$