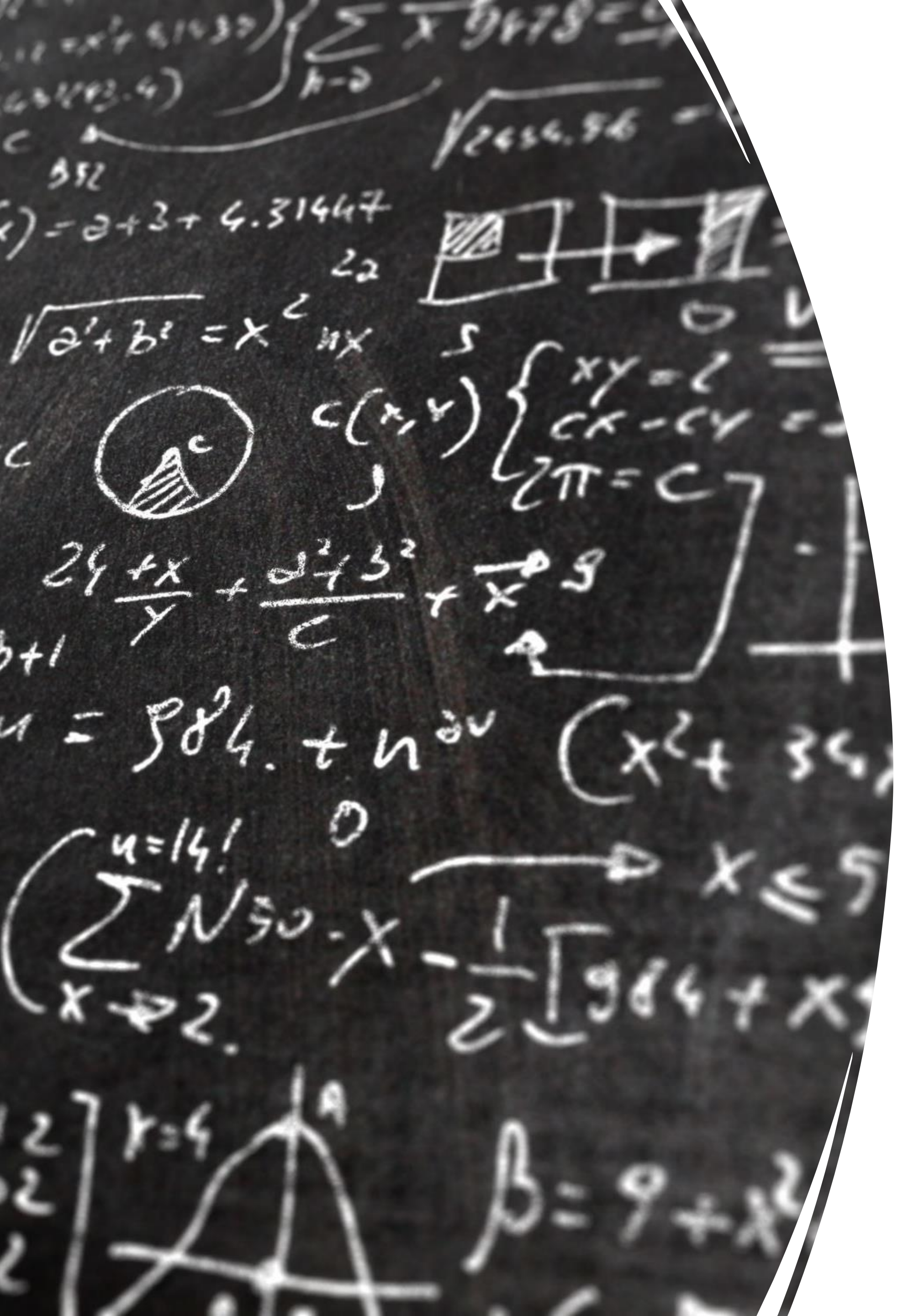

Matemática

Aula VIII: Limite e Derivadas – Parte II

Data: 10/05/2024

Derivadas

Regras de Derivação: Suponha que k uma constante qualquer e que $f\ e\ g$ são funções deriváveis em $x = x_0$. Então:

$a)\ (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$

$b)\ (kf)'(x_0) = k.f'(x_0);$

$c)\ (f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$

$d)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2};$

$e)\ (f(x)^n)' = nf(x_0)^{n-1}f'(x_0)\ \rightarrow Regra\ da\ Cadeia$

Derivadas

Exemplo: Calcule a derivada das seguintes funções:

$a)\ f(x) = (x^2 + 3x - 1)(x^4 - 8x);$

$b)\ f(x) = \frac{x-2}{x+1};$

$c)\ f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^5$

Derivadas

Derivabilidade e Continuidade: A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $p = 0$. Entretanto, esta função é contínua em $p = 0$.

Logo, *continuidade não implica derivabilidade*.

Teorema: *Se* f for derivável em p, então f será contínua em p.

Função Derivada e Derivadas de Ordem Superior

Se $f(x)$ é uma função diferenciável, sua derivada $f'(x)$ é outra função de x – que associa a cada ponto x a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em $(x, f(x))$.

Se a função derivada $f'(x)$ for contínua de x, então a função $f(\mathrm{x})$ é **continuamente diferenciável**.

Neste caso, pode-se avaliar se a função derivada $f'(x)$ possui ou não derivada em um ponto qualquer. Se esta existir, ela é denominada **derivada segunda** de f em x_0, e é denotada por:

$$f''(x_0) = d^2 f(x_0)/dx^2$$

Exemplo: Seja $y = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1 \end{cases}$**, determine se a função é continuamente diferenciável e se existe derivadas de ordem superiores.**

Regra da Cadeia Para Derivação de Função Composta

Sejam $y = f(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, onde a $Img \subset D_f$, então a função $h(t) = f\big(g(t)\big)$ é derivável e vale a **regra da cadeia**:

$$h'(t) = f'\big(g(t)\big)g'(t), t \in D_g$$

Regra da Cadeia Para Derivação de Função Composta

Regra da cadeia: $h'(t) = f'\big(g(t)\big)g'(t), t \in D_g$

Exemplo: O comportamento otimizador de uma firma, via de regra, é descrito a partir da função lucro Π, o qual está diretamente associado ao nível de produção y. Já o nível de produção de uma firma está relacionado ao *insumo* trabalho L empregado.

Regra da Cadeia Para Derivação de Função Composta

Regra da cadeia: $h'(t) = f'\big(g(t)\big)g'(t), t \in D_g$

Exemplo:

Logo, $\pi = \Pi(y)$ e $y = f(L)$, onde $Imy \subset D_\pi$, o que resulta em uma associação indireta entre o nível de trabalho e o lucro observado da empresa:

$$\pi(L) = \Pi\big(f(L)\big)$$

Seja $\pi = -y^4 + 6y^2 - 5$ e $f(L) = 5L^{2/3}$, calcule a derivada da função composta:

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Teorema: Suponha que a função f é $\boldsymbol{C^1}$ em x_0**.** Então

(a) Se $f'(x_0) > 0$, existe um intervalo aberto contendo x_0 no qual f é crescente;

(b) Se $f'(x_0) < 0$, existe um intervalo aberto contendo x_0 no qual f é decrescente

Expansão do Teorema: Suponha que a função f é $\boldsymbol{C^1}$ em seu domínio $D \subset \mathbb{R}^1$

(a) Se $f'(x_0) > 0$ no intervlao $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D$, então f é crescente em (a, b)

(b) Se $f'(x_0) < 0$ no intervlao $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D$, então f é decrescente em (a, b)

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Derivada Segunda e a Convexidade

Se a função f for não-linear, além de estabelecer onde ela cresce ou decresce, é necessário estudar também a curvatura da função.

Teorema – Derivada Segunda: Suponha que a função f é $\boldsymbol{C^2}$ em seu domínio $D \subset \mathbb{R}^1$**.** Então

(a) Se $f''(x_0) > 0$ no intervlao $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D$, então f' é crescente em (a, b)

(b) Se $f''(x_0) < 0$ no intervlao $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D,$ então f' é decrescente em (a, b)

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Derivada Segunda e a Convexidade

Função Côncava para cima (Convexa): Reta secante sempre fica acima do gráfico

Em um intervalo I, a função é côncava para cima se, e somente se: $f[(t)a + (1-t)b] \leq tf(a) + (1-t)f(b) \;\; \forall t \in [0,1]$

Função Côncava para baixo (Côncava): Reta secante sempre fica abaixo do gráfico

Em um intervalo I, a função é côncava para cima se, e somente se: $f[(t)a + (1-t)b] \geq atf(a) + (1-t)f(b) \;\; \forall t \in [0,1]$

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Exemplo: Avalie se as seguintes funções são côncavas ou convexas entre os valores $a = 2\ e\ b = 4, e\ tome\ t = \frac{1}{2}$:

$a)\ \ f(x) = x^2$
$b)\ \ f(x) = \sqrt{x}$