

## Lista de Exercícios 2 – Matemática

### Derivadas

Departamento de Economia – CCSA/UFPE

Data: 04/06/2024

Data de Entrega: 18/06/2024

Prof. Cristiano da Silva

1. (Simon & Blume 4.1) Para cada um dos pares de funções  $g$  e  $h$  a seguir, escreva as funções compostas  $g(h(z))$  e  $h(g(x))$  de uma forma tão simples quanto possível. Em cada caso, descreva o domínio da função composta.
  - a)  $g(x) = x^2 + 4$  e  $h(z) = 5z - 1$
  - b)  $g(x) = \frac{1}{x}$  e  $h(z) = z^2 + 1$
  - c)  $g(x) = x^3$  e  $h(z) = (z - 1)(z + 1)$
2. (Simon & Blume 4.3) Use a **regra da cadeia**
  - a)  $y = -7x^3$
  - b)  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
  - c)  $y = 4x^5 - 3x^{\left(\frac{1}{2}\right)}$
  - d)  $y = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(4x^5 - 3\sqrt{x})$
  - e)  $y = 5(x^5 - 6x^2 + 3x)^{\frac{2}{3}}$
3. (Simon & Blume 2.22) Suponha que o custo total de manufaturar  $x$  unidades de uma certa mercadoria seja  $C(x) = 2x^2 + 6x + 12$ . Use diferenciais para aproximar o custo de produzir a 21ª unidade. Compare essa estimativa com o custo real de produzir a 21ª unidade.
4. (Simon & Blume 2.23) O custo total de um fabricante é  $C(x) = 0,1x^3 - 0,25x^2 + 300x + 100$  unidades monetárias, onde  $x$  é o nível de produção. Estime o efeito no custo total de um aumento de 6 para 6,1 unidades no nível de produção.

- a) Use diferenciais para aproximar o custo de produzir a 7ª unidade. Compare essa estimativa com o custo real de produzir a 7ª unidade.
  - b) Use diferenciais para aproximar o custo de produzir 6 unidades adicionais. Compare essa estimativa com o custo real de produzir 6 unidades adicionais.
  
5. (Simon & Blume, 3.1) Use a derivada primeira e a derivada segunda para esboçar os gráficos das seguintes funções:
  - a)  $y = x^3 + 3x$
  - b)  $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$
  - c)  $y = \frac{1}{3}x^3 + 9x + 3$
  
6. A empresa Paradise S.A. enfrenta a seguinte equação de demanda por seu produto  $p = 6 - \frac{1}{2}x$  reais. Encontre a função receita ( $R = p * x$ ) e use a derivada primeira e a derivada segunda para esboçar o gráfico da função.
  
7. (Simon & Blume 4.1) Para cada um dos pares de funções  $g$  e  $h$  a seguir, escreva as funções compostas  $g(h(z))$  e  $h(g(x))$  de uma forma tão simples quanto possível. Em cada caso, descreva o domínio da função composta.
  - d)  $g(x) = x^2 + 4$  e  $h(z) = 5z - 1$
  - e)  $g(x) = \frac{1}{x}$  e  $h(z) = z^2 + 1$
  - f)  $g(x) = x^3$  e  $h(z) = (z - 1)(z + 1)$
  
8. (Simon & Blume 4.3) Use a **regra da cadeia** para calcular a derivada de todas as funções compostas do exercício (1) a partir das derivadas das duas funções componentes.
  
9. Use a **regra da cadeia** para as funções compostas a seguir:
  - f)  $y = \sqrt{3x^2 + 1}$
  - g)  $y = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{x}\right) + 4$
  - h)  $y = (3x^2 + 1)^3$
  - i)  $y = \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^4$

10. (Simon & Blume 4.6) Uma firma calcula que em um dado momento sua produção está crescendo a uma taxa de 2 unidades por hora e que seu custo marginal é 12. Qual é a taxa de crescimento do custo por hora?
11. (Simon & Blume 4.8) Calcule uma expressão para a inversa de cada uma das seguintes funções, especificando cuidadosamente os domínios:
- a)  $y = 3x + 6$
  - b)  $y = \frac{1}{x+1}$
  - c)  $y = x^{\frac{2}{3}}$
  - d)  $y = x^2 + x + 2$
12. (Simon & Blume, 4.9) Para cada uma das funções  $f$  do exercício anterior, use o Teorema para calcular a derivada de sua função inversa no ponto  $f(1)$ . Confira sua resposta, calculando as derivadas das funções inversas diretamente a partir das respostas do exercício anterior.
13. Calcule a função inversa de  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .
14. Seja  $f(x) = x + x^3$
- a) Mostre que  $f$  admite função inversa  $g$ ;
  - b) Calcule a derivada da função inversa  $g$  diretamente e indiretamente através da função  $f$ ;
  - c) Calcule  $g'(0)$ .
15. (Chiang, 7.2) Dada a função custo total  $C = Q^3 - 5Q^2 + 12Q + 75$ , escreva uma função de custo variável (CV). Encontre a derivada da função CV e interprete o significado econômico daquela derivada.
16. (Simon & Blume 5.5) Resolva as seguintes equações em  $x$ :

a)  $2e^{6x} = 18$ ;

b)  $\ln x^2 = 5$

c)  $2^x = e^5$

17. (Simon & Blume 5.7) Quanto tempo leva \$500 para crescer para \$600 se a taxa de juros é 5% e o juros é creditado continuamente?

18. (Simon & Blume 5.8) Calcule as derivadas primeira e segunda de cada uma das seguintes funções:

g)  $xe^{3x}$

h)  $\ln(x^4 + 2)^2$

i)  $\frac{\ln(x)}{x}$

j)  $\frac{e^x}{x+1}$

19. (Chiang 10.5 – item 4) Calcule as derivadas de:

a)  $y = 5^t$

b)  $y = \log_2(t + 1)$

c)  $y = 13^{2t+3}$

d)  $y = x^2 \log_3(x)$

20. (Chiang 10.5 – item 7) Calcule as derivadas das seguintes funções, tomando, em primeiro lugar, o logaritmo natural em ambos os lados:

a)  $y = \frac{3x}{(x+2)(x+4)}$

b)  $y = (x^2 + 3)e^{x^2+1}$

21. (Simon & Blume 5.11) A uma taxa anual de juros de 10%, determine qual das seguintes importâncias tem o maior valor presente:

a) R\$ 215 daqui a dois anos;

b) R\$ 100 no final de cada um dos próximos dois anos;

c) R\$ 100 agora e R\$ 95 daqui a dois anos;

22. (Simon & Blume 5.13) Digamos que você possui um livro raro, cujo valor daqui a  $t$  anos será de  $B(t) = 2^{\sqrt{t}}$  unidades monetárias. Supondo uma taxa de juros

constante de 5%, quando será a melhor época para vender o livro e investir o dinheiro arrecadado?

23. (Chiang 10.7 – item 2) Se a população crescer segundo a função  $H = H_0 2^{bt}$  e o consumo segundo a função  $C = C_0 e^{at}$ , calcule as taxas de crescimento da população, do consumo e do consumo per-capita usando o logaritmo natural.

24. (Chiang 14.2 – item 1) Encontre a integral das seguintes funções:

- a)  $\int 16x^{-3} dx \ (x \neq 0);$
- b)  $\int (x^5 - 3x) dx$
- c)  $\int (2ax + b)(ax^2 + bx)^7 dx$

25. (Chiang 14.2 – itens 3 e 4) Encontre a integral das seguintes funções:

- d)  $\int \left(\frac{3}{x}\right) dx \ (x \neq 0)$
- e)  $\int x \ln(x) dx$
- f)  $\int (x + 3)(x + 1)^{1/2} dx$

26. (Chiang 14.3 – itens 1 e 2) Calcule o valor das seguintes integrais definidas:

- a)  $\int_1^3 \frac{1}{2} x^2 dx$
- b)  $\int_e^6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$
- c)  $\int_2^3 (e^{2x} + e^x) dx$

27. (Chiang 14.5) Dadas as seguintes funções receita marginal:

- a)  $R'(q) = 28q - e^{0,3q}$
- b)  $R'(q) = 10(1 + q)^{-2}$

encontre, em cada caso, a função receita total  $R(Q)$ . Que condição inicial você pode introduzir para definir a constante de integração?

28. (Chiang 14.5 – item 4) Dado um fluxo contínuo de renda à taxa constante de R\$ 1.000 por ano.

- a) Qual será o valor presente **VP** se o fluxo de renda durar 2 anos e a taxa contínua de desconto for 0,05 por ano?
- b) Qual será o valor presente **VP** se o fluxo de renda terminar exatamente após 3 anos e a taxa de desconto for 0,04?

29. (Chiang 14.5 – item 5) Qual é o valor presente de um fluxo de caixa perpétuo de:

- a) R\$ 1.450 por ano, descontado a  $r = 5\%$ ?
- b) R\$ 2.460 *por ano*, descontado a  $r = 8\%$ ?