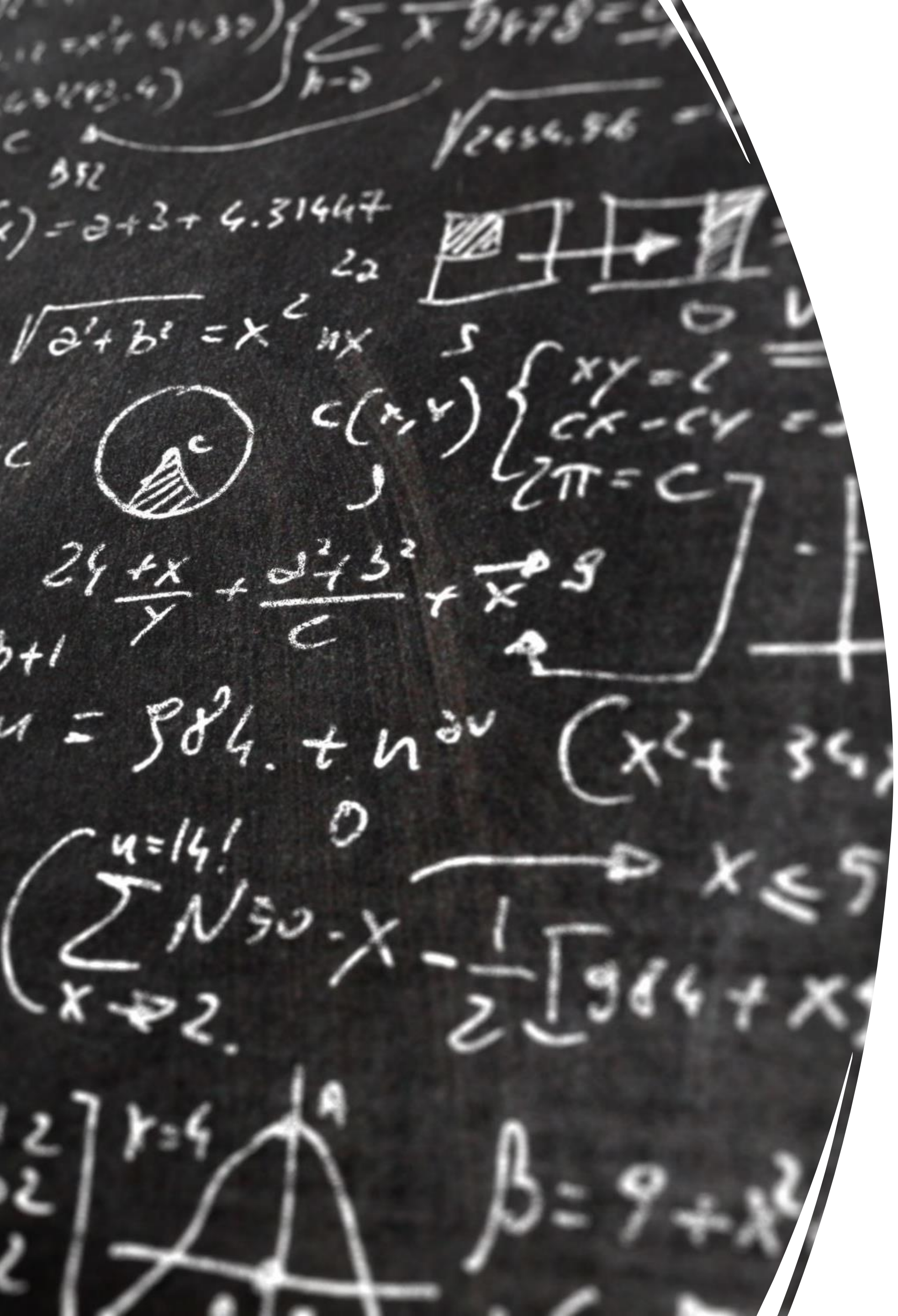

Matemática

Aula V: Limite e Continuidade – Parte I

Data: 30/04/2024

Limite e Continuidade

Definição- Função Contínua: A função f é contínua em p se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (com δ dependendo de ε), tal que, para todo $x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta \rightarrow f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$$

Exemplos:

i) A partir da definição de continuidade, prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $x = 1$.

ii) A partir da definição de continuidade, prove que $f(x) = \begin{cases} 2x \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$

Limite e Continuidade

Definição- Limite: Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$

$$|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

- A função f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = \mathrm{f(p)}$
- Prove que a função linear $f(x) = mx + b$ é contínua.

Limite e Continuidade

- O limite de f em p não depende do valor que a função assumo no ponto p, em específico, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p.

- Exemplo 2: A partir do aspecto abordado acima prove que existe limite para $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ quando $x = 2$.

- Exemplo 3: Mostre que $f(x) = x^3$ é contínua em $x = 1$.

Limite e Continuidade

- **Propriedades da Função Limite:**

Se $\lim_{x\to p} f(x) = L_1 \ e \lim_{x\to p} g(p) = L_2$, então:

a) $lim_{x\to p}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

b) $lim_{x\to p} kf(x) = klim_{x\to p} f(x) = kL_1,$ com k constante

c) $lim_{x\to p}[f(x)g(x)] = lim_{x\to p} f(x). lim_{x\to p} g(x) = L_1 L_2$

d) $lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_2}$ desde que $L_2 \neq 0$

Exemplo: Calcule $\lim_{x\to 2} 5x^3 - 8$

Limite e Continuidade

- **Propriedades da Função Limite:**

Se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to p} g(p) = L_2$, então:

$a)$ $lim_{x \to p}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

$b)$ $lim_{x \to p} kf(x) = klim_{x \to p} f(x) = kL_1,$ com k constante

$c)$ $lim_{x \to p}[f(x)g(x)] = lim_{x \to p} f(x). lim_{x \to p} g(x) = L_1 L_2$

$d)$ $lim_{x \to p} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_2}$ desde que $L_2 \neq 0$

Exemplo 5: Calcule $\lim\limits_{x \to 2} 5x^3 - 8$

Limite e Continuidade

Exemplo 6 : Calcule $\lim_{x \to -1} \frac{(x^3+1)}{x^2+4x+3}$

Limite e Continuidade

<u>Limites Laterais:</u> Sejam f uma função, p número real e suponhamos que existam a e b tal que os intervalos (a, p) e (p, b) estejam contidos em D_f, então:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \leftrightarrow \left\{ \lim_{x \to p^-} f(x) = \lim_{x \to p^+} f(x) \right.$$

Exemplo 6: O limite $lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existe?

Exemplo 7: Qual a derivada de $f(x) = |x| \; quando \; x \to 0$?

Exemplo 8: $\boldsymbol{f(x)} = |\boldsymbol{x}|$é contínua em $p = 0$?