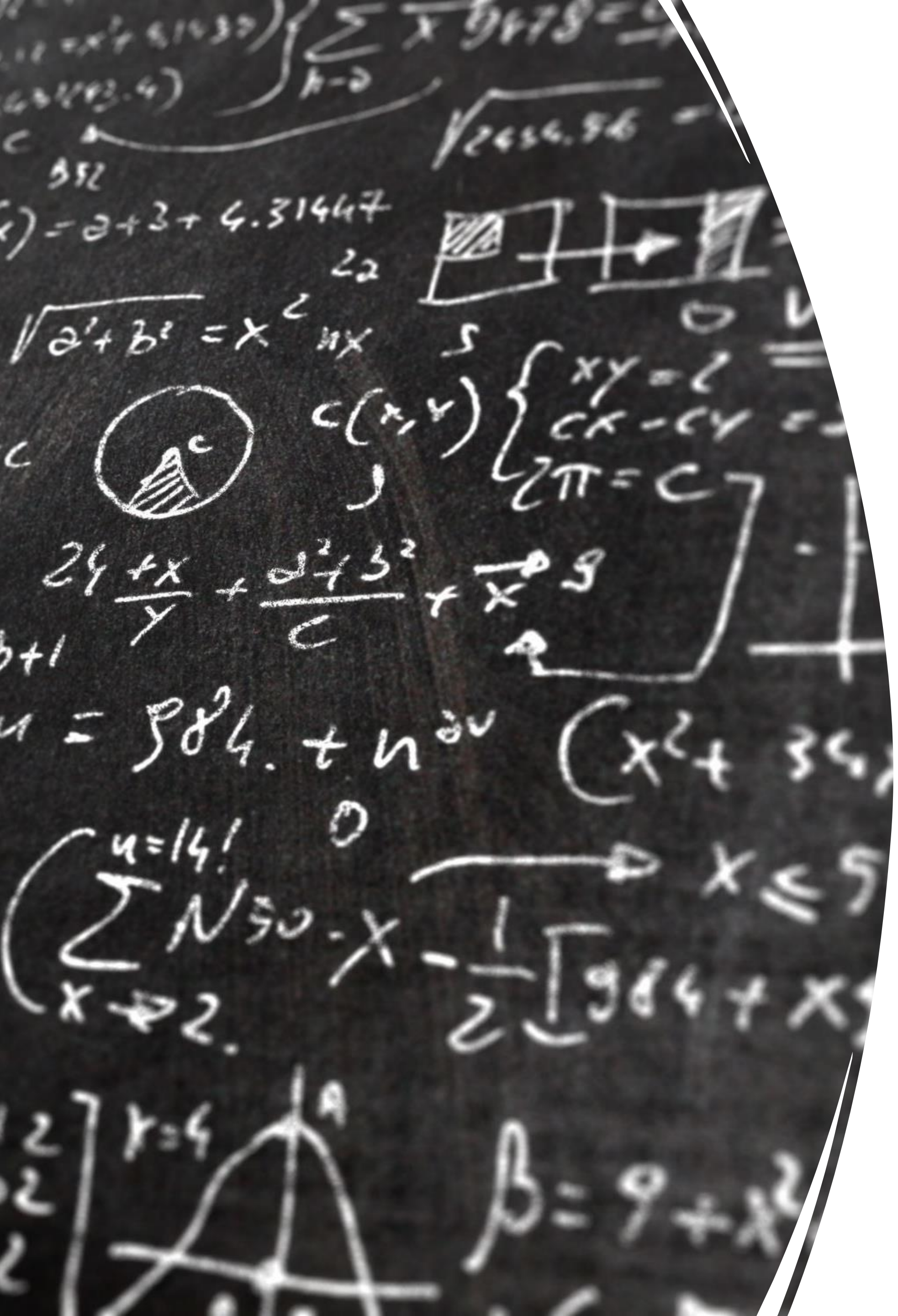

Matemática

Aula IV: Funções – Parte I

Data: 26/04/2024

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Funções Lineares:**

$$f(x) = mx + b$$

Definição: Sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1)pontos arbitrários de uma reta l, o quociente

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

É denominado a "inclinação" da reta l

Cálculo a uma variável: Fundamentos

Definição – Equação da Reta: Suponha que a reta l atravesse o eixo y no ponto $(0, b)$ – **ponto de corte com o eixo $\boldsymbol{y}$**. Seja (x, y) um ponto qualquer da reta

$$m = \frac{y - b}{x - 0} \rightarrow y = mx + b$$

Exemplo: Com base no ponto de corte em y $(0,3)$ e o ponto $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (2,7)$. Encontre a equação da reta.

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Interpretação da inclinação de uma função linear.**

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}}$$

A inclinação da reta mede o quanto $\boldsymbol{y}$ muda quando avançamos ao longo de um reta até aumentar x em uma unidade.

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Interpretação da inclinação de uma função linear.**

$a)$ $C = f(Q) \rightarrow$ denota uma função custo linear que especifica o custo total "C" de manufaturar "Q" unidades do produto.

Logo, a inclinação da função mede o aumento no custo total de manufatura devido a produção de uma unidade adicional do produto (**custo marginal de produção)**

$b)$ $U = u(x) \rightarrow$ denota uma função que mede a utilidade (bem-estar) de possuir uma renda de x unidades monetárias.

Logo, a inclinação da função mede a utilidade adicional gerada por uma unidade monetária adicional (**utilidade marginal da renda)**

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Funções não-lineares**

a) $C = f(Q) \rightarrow$ Retornos decrescentes em escala

O aumento da produção incrementa a complexidade na gestão dos insumos e do fator trabalho, gerando incrementos crescentes de custo para cada unidade adicional de produto.

b) $U = u(x) \rightarrow$ Utilidade marginal da renda decrescente.

O incremento de bem-estar do dinheiro vai decaindo a medida em que a renda cresce.

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Funções não-lineares**

Como mensurar o efeito marginal em funções não-lineares?

Problema: A inclinação da reta tangente para funções não-lineares varia de ponto para ponto.

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Funções não-lineares**

A inclinação da reta tangente no ponto $\left(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})\right)$ é a derivada de f em x_0, que é denotada por $f'(x_0)$ ou $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$, que é definida por:

$$f'(x_0) = \lim_{h_n \to 0} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

E a equação da reta tangente é dada por:

$$y - f(x_0) = m_s(x - x_0)$$

Onde $m_s = f'(x_0)$

Cálculo a uma variável: Fundamentos

- **Funções não-lineares**

Exemplo: *Seja* $f(x) = x^2$. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $f'(3)$.

Limite e Continuidade

Definição- Função Contínua: A função f é contínua em p se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (com δ dependendo de ε), tal que, para todo $x \in D_f$

$$p - \delta < x < p + \delta \to f(p) - \varepsilon < f(x) < f(p) + \varepsilon$$

Exemplos:

i) A partir da definição de continuidade, prove que $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $x = 1$.

ii) A partir da definição de continuidade, prove que $f(x) = \begin{cases} 2x \; se \; x \neq 1 \\ 1 \; se \; x = 1 \end{cases}$ não é contínua em $x = 1$

Limite e Continuidade

Definição- Limite: Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$

$$|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

- A função f é contínua em p se, e somente se, $\lim_{x \to p} f(x) = \mathrm{f(p)}$
- Prove que a função linear $f(x) = mx + b$ é contínua.

Limite e Continuidade

- O limite de f em p não depende do valor que a função assumo no ponto p, em específico, mas sim dos valores que f assume nos pontos próximos de p.

- Exemplo: A partir do aspecto abordado acima prove que existe limite para $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ quando $x = 2$.