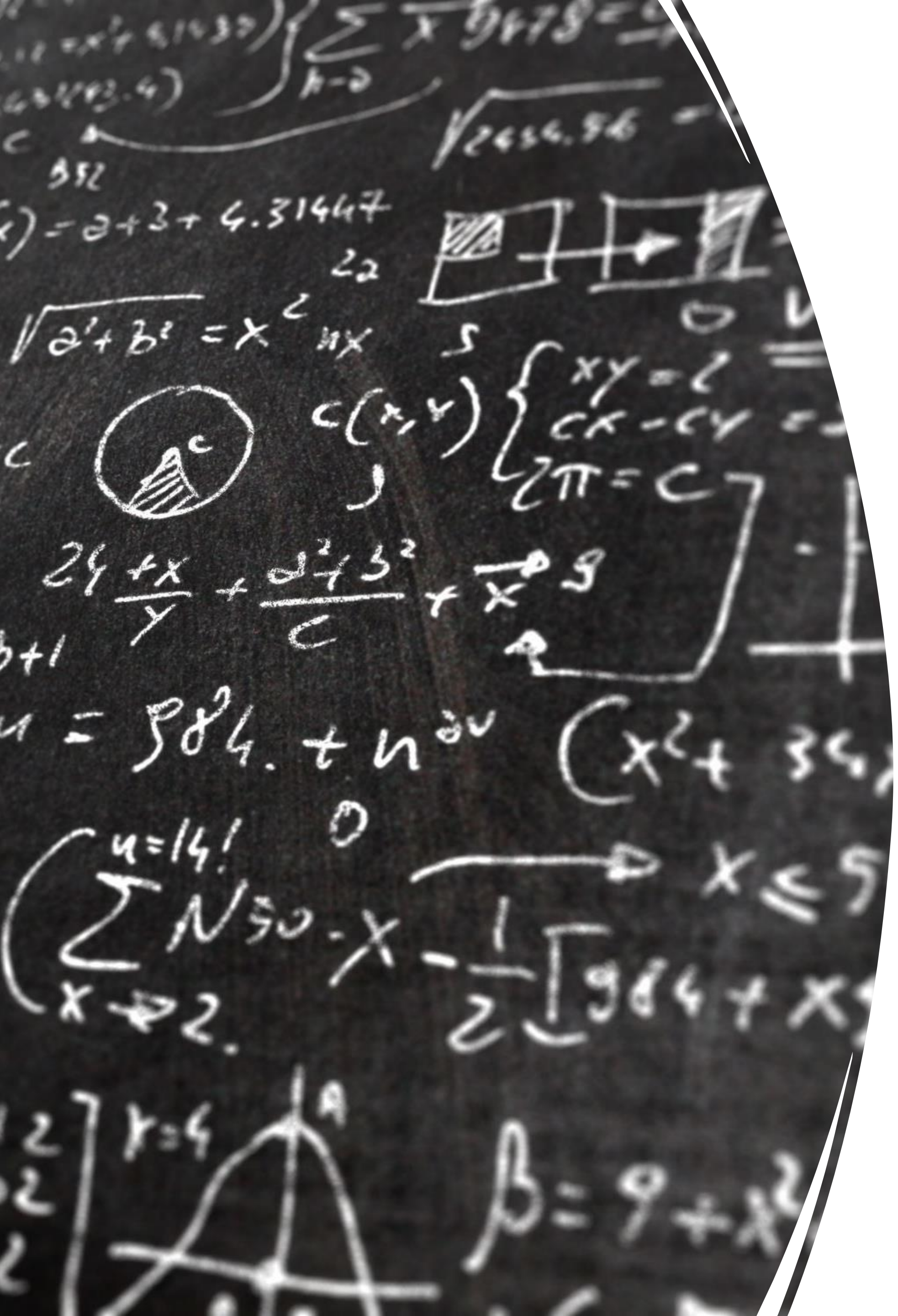

Matemática

Aula IX: Limite e Derivadas – Parte II

Data: 14/05/2024

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Derivada Segunda e a Convexidade

Se a função f for não-linear, além de estabelecer onde ela cresce ou decresce, é necessário estudar também a curvatura da função.

Teorema – Derivada Segunda: Suponha que a função f é $\boldsymbol{C^2}$ em seu domínio $D \subset \mathbb{R}^1$**.** Então

(a) Se $f''(x_0) > 0$ no intervalo $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D$, então f’ é crescente em (a, b)

(b) Se $f''(x_0) < 0$ no intervlao $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \subset D,$ então f' é decrescente em (a, b)

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Derivada Segunda e a Convexidade

Função Côncava para cima (Convexa): Reta secante sempre fica acima do gráfico

Em um intervalo I, a função é côncava para cima se, e somente se: $f[(t)a + (1-t)b] \leq tf(a) + (1-t)f(b) \;\; \forall t \in [0,1]$

Função Côncava para baixo (Côncava): Reta secante sempre fica abaixo do gráfico

Em um intervalo I, a função é côncava para cima se, e somente se: $f[(t)a + (1-t)b] \geq atf(a) + (1-t)f(b) \;\; \forall t \in [0,1]$

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Exemplo 1: Avalie se as seguintes funções são côncavas ou convexas entre os valores $a = 2\ e\ b = 4, e\ tome\ t = \frac{1}{2}$:

$a)\ \ f(x) = x^2$

$b)\ \ f(x) = \sqrt{x}$

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Condições de Segunda Ordem

a) Se $f'(x) = 0\ e\ f''(x) < 0$, então x_0 é um máximo local de $f(x)$;
b) Se $f'(x) = 0\ e\ f''(x) > 0$, então x_0 é um mínimo local de $f(x)$;
c) Se $f'(x) = 0\ e\ f''(x) = 0$, então x_0 pode ser max, min ou nenhum dos dois de $f(x)$;

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Etapas para a construção de Gráficos

1) Analise as raízes da função;
2) A partir da derivada primeira, defina os intervalos nos quais a função é crescente ($f'(x) > 0$) ou decrescente ($f'(x) < 0$);
3) A partir da derivada segunda, defina os intervalos nos quais a função é côncava ($f''(x) < 0$) ou convexa ($f''(x) > 0$);
4) Com base nos intervalos construídos, estabeleça os pontos de mínimo, máximo e inflexão (se existirem);
5) Compute os valores da função nos pontos de transição.

Uso das Derivadas Primeira e Segunda para Traçar Gráficos

Etapas para a construção de Gráficos

Para funções racionais, tome também os pontos de indeterminação como críticos, e calcule os limites laterais.

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = x^3 - 3x$

a) Determine quando a função é crescente e quando a função é decrescente;
b) Determine o quando a função é côncava e quando a função é convexa.

Exemplo 3: Dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Trace o gráfico da função

Função Inversa e Sua Derivada

Definição: A função f é **injetora**, se e somente, quaisquer que sejam x_1 e x_2 pertencentes ao domínio Dom_f

a) $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b) $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Definição: Se f é injetora em seu domínio, então existe uma função g, definida na Im_f, e dada por:

$$y = f(x) \leftrightarrow g(y) = x$$

Tal função, g, é denominada **função inversa** de f.

Função Inversa e Sua Derivada

Teorema 1: Uma função f definida num intervalo $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^1$ tem uma inversa bem-definida no intervalo $\mathrm{Im_f}\left(\mathrm{ou}\ f(E)\right)$ se, e somente se, f é monotonamente crescente em todo intervalo E ou monotonamente decrescente em todo intervalo E**;**

a) $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

b) $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

Teorema 2: Uma função f, continuamente diferenciável num intervalo $E \subset \mathbb{R}^1$ é injetora e, portanto, invertível em E se $f'(x) > 0\ \forall x \in E\ ou\ se\ f'(x) < 0\ \forall\ x \in E$.

Função Inversa e Sua Derivada

Teorema 3 (Teorema da Função Inversa): Suponha que f é uma função $\mathbf{C^1}$ definida no intervalo $E \subset \mathbb{R}^1$**.** Se $f'(x) \neq 0$ para cada $x \in E$**,** então:

a) f é invertível em E

b) Sua inversa g é uma função $\boldsymbol{C^1}$ no intervalo $f(E)$ e;

c) Para cada x no domínio da função inversa g, vale

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$