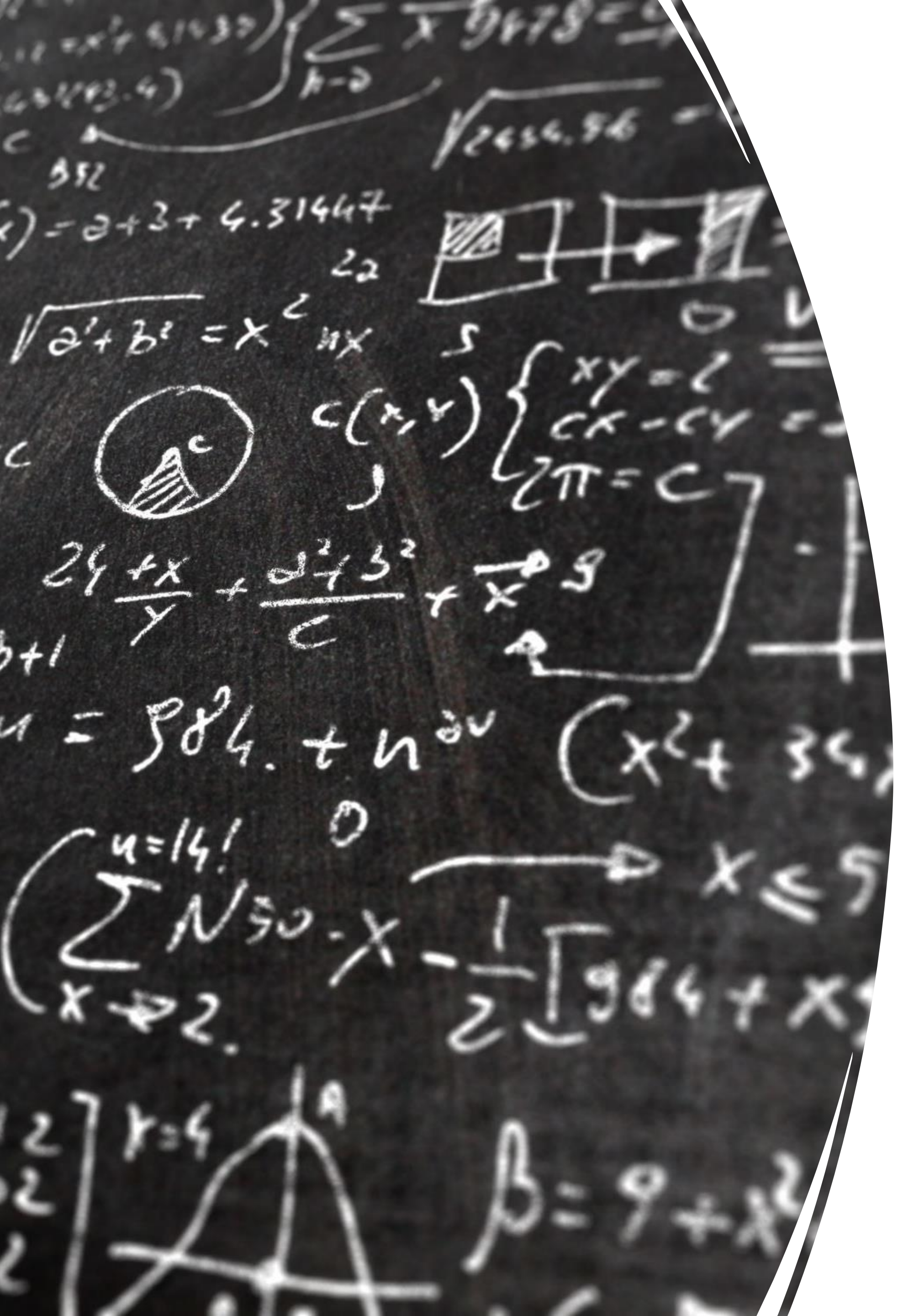

Matemática

Aula XII: Função Inversa e Funções Exponencial e Logaritmo

Data: 28/05/2024

Exponenciais e Logaritmos

- *Observação sobre a função logaritmo*:

$$a^y = x \to y = \log_a x$$

Assim $a^{\log_a x} = x$.

- O logaritmo natural (ln) é a função inversa da função exponencial na base e. Ou seja:

$$e^y = x \to y = \ln(x)$$

Assim $e^{\ln(x)} = x$

Exponenciais e Logaritmos

Propriedades Logaritmo:

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a x^s = slog(x)$

3. $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = -\log_a x$

4. $\log \left(\frac{x}{s}\right) = \log_a(x) - \log_a(s)$

5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Mudança de base)

Exponenciais e Logaritmos

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Prova: Suponha $\begin{cases} \theta = \log_a x \to a^\theta = x \\ \beta = \log_a y \to a^\beta = y \end{cases}$

Logo:

$$xy = a^\theta a^\beta = a^{\theta+\beta}$$

Aplicando o logaritmo na base a em ambos os lados:

$$\log_a xy = \log_a a^{\theta+\beta} = \theta + \beta$$

Como $\theta = \log_a x$ e $\beta = \log_a y$, temos:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

Exponenciais e Logaritmos

2. $\log_a x^s = s\log_a x$

Prova: Da definição de logaritmo:

$$a^y = x \rightarrow y = \log_a x$$

Elevando ambos os lados da primeira equação por s:

$$(a^y)^s = x^s$$

Da propriedade da potência

$$a^{ys} = x^s$$

Tomando o logaritmo na base a em ambos os lados:

$$ys = \log_a x^s$$

Visto que $y = \log_a x\,, então$:

$$\log_a x^s = slog_a x$$

Exponenciais e Logaritmos

5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Mudança de base)

Prova: Seja $y = \log_a x$, da definição de logaritmo:

$$a^y = x$$

Tomando o logaritmo na base b em ambos os lados:

$$\log_b a^y = \log_b x$$

Da propriedade do logaritmo da potência:

$$y \log_b a = \log_b x$$

Logo:

$$y = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Visto que $y = \log_a x\, , ent\tilde{a}o$:

$$\log_a x \ = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

1. $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$

2. $f(x) = e^{g(x)}$, então $f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$

3. $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$

4. $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$, então $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

1. $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$

Demonstração: Da definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$

$$f'(x) = e^x \lim_{h\to 0}(e^h - 1)/h$$

Uma vez que $\lim_{h\to 0}(e^h - 1)/h = 1$:

$$f'(x) = e^x$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

2. $f(x) = e^{g(x)}$, então $f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$

Demonstração: Defina $g(x) = u$ e $f(u) = e^u$:

Da regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u g'(x)$$

Uma vez que$g(x) = u$, logo:

$$f'(x) = e^{g(x)}g'(x)$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

1. $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{g(x)}$, então $f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$
3. $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$

Demonstração: Visto que $\mathrm{y} = \ln(\mathrm{x})$ é a inversa de $x = e^y$:

Da regra da cadeia para derivada de função inversa:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

1. $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$
2. $f(x) = e^{g(x)}$, então $f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$
3. $f(x) = \ln(x)$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$
4. $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$, então $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Demonstração: Defina $g(x) = u$ e $f(u) = \ln(u)$:

Da regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} g'(x)$$

Uma vez que$g(x) = u$, logo:

$$f'(x) = g'(x)/g(x)$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

1. $Se\ f(x) = a^x, então\ f'(x) = a^x \ln(a)$

Demonstração: Da propriedade de mudança de base, podemos reescrever:

$$a^x = e^{lna^x}$$

Da propriedade da potência de logaritmo, $lna^x = xlna$:

$$a^x = e^{xln(a)}$$

Note que $e^{xln(a)} = e^{g(x)}, com\ g(x) = xln(a)$, logo sua derivada será:

$$\left[e^{xln(a)}\right]' = e^{g(x)} g'(x) = e^{xln(a)} \ln(a)$$

Visto que $a^x = e^{xln(a)}$, então:

$$f'(x) = a^x \ln(a)$$

Exponenciais e Logaritmos - Derivadas

Teorema (Derivadas de função logaritmo e exponencial):

$$2.\ Se\ f(x) = \log_a x\,, então\ f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Demonstração: Se $y = \log_a(x)$,

$$x = a^y$$

Da propriedade da derivada da função exponencial :

$$\frac{da^y}{dy} = a^y lna$$

Ao aplicar a regra da função inversa:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{da^y}{dy}} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln(a)} = \frac{1}{xln(a)}$$