Capítulo 2 – Parte 2

Convergência Pontual

Uma sucessão de funções $\{f_n\}$ converge pontualmente para f se, para cada x em D, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Exemplo: Verifique a convergência pontual de $f_n(x) = \frac{x}{n}$ para $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0 \qquad f(x) = 0$$

Convergência Uniforme

f_n converge uniformemente para f se $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$

Exemplo: Verifique a convergência uniforme de $f_n(x) = \frac{x}{n}$ em $x \in [0,1]$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} \frac{x}{n} - 0 = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ quando } n\to+\infty$$

Séries Funções

Convergência Pontual e Uniforme

Uma série de funções é uma soma infinita de funções da forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

↳ Soma das N funções da série

Ao limite S chamamos soma de série e escrevemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x)$

Convergência pontual:

Uma série de funções converge pontualmente em D, se para cada x em D a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge para $f(x)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$$

Convergência Uniforme:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge (pontualmente) em D com soma S, então $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é convergente e tem soma $S(x)$

Propriedades das séries uniformemente convergente

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a,b]$. Suponha que $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente em $[a,b]$ com soma S.

i) A soma S é contínua em $[a,b]$

ii) A soma S é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

iii) Se cada f_n é de classe C^1 em $[a,b]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$ então S é diferenciável neste intervalo e $(S(x))' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x))'$, $x \in [a,b]$

Exercício: Verifique a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ em $[-1,1]$

1º calcular a derivada

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot (x^n)' = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot x^{n-1} = x^{n-1}$$

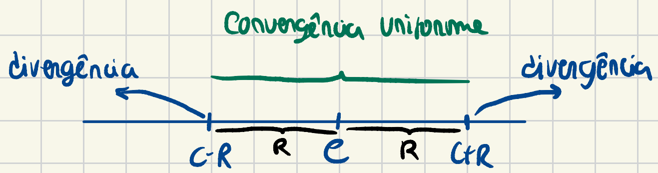
2º Verificar a convergência uniforme das derivadas

$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \rightarrow$ Série Geométrica com razão x

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-R}$$, converge se $|R|<1$,

$-1 < x < 1$

Logo é convergente.



Série de Potências

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-c)^n \rightarrow$ Série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu $I_C =]c-R, c+R[$

↓

série de potências com raio C

↓

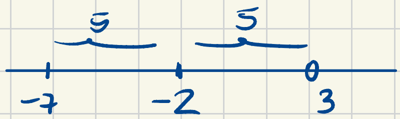
Dentro deste intervalo, podemos encontrar subintervalos fechados e limitados onde a série converge uniformemente ✱

Teorema Abel:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências com raio convergência $R \in \mathbb{R}^+$
$R > 0$

- Se a série converge no ponto $x = c \pm R$, então ela converge uniformemente em $[c, c+R]$ ou $[c-R, c]$

Exemplo: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$ $\quad$ $x-(-2)$ $\quad$ $D_C = [-7, 3[$



$I_C = [$

Pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente $[-7,-2]$

✱ Assim, podemos concluir que a série é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma

$[-7, b] \rightarrow -7 \leq b < 3$

Fourier

$$L = \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]}$$

$|\cos(x)|$ $\cos(x)$ $|\sin(x)|$

Se f é uma função par, a sua série de Fourier é uma série de cossenos $(b_n = 0)$

$f(x) = f(-x)$

$\sin(x)$

Se f é uma função ímpar, a sua série de Fourier é uma série de senos $(a_n = 0)$

$f(x) =$

Capítulo 3

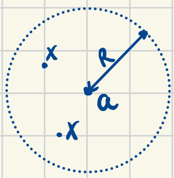
Distância

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$$

Bola Aberta e Fechada

Bola Aberta:

Bola aberta é o conjunto de todos os pontos (X) pertencentes ao espaço Real de n dimensões ($\mathbb{R}^n$)

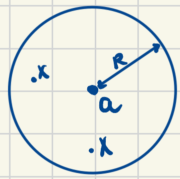


$X \in \mathbb{R}^n$, tal que $\|X-a\| < R$ — distância dos pontos X ao ponto a é menor que R

$$B_R(a) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,a) < R\}$$

Bola Fechada

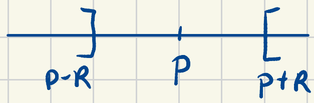
$$\overline{B}_R(a) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,a) \leq R\}$$



① Se $\boxed{n=1}$ a bola aberta de centro $p \in \mathbb{R}$ e raio $R>0$ é o intervalo aberto $]p-R, p+R[$

(porque $d(x,p) < R \Leftrightarrow \sqrt{(x-y)^2} < R$

$\Leftrightarrow -R < x-p < R \Leftrightarrow p-R < x < p+R \Leftrightarrow x \in]p-R, p+R[$



② Se $\boxed{n=2}$ $B_R(P)$ é o círculo de centro P e raio R sem incluir a circunferência

$P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}$

porque $d(X,P) < R$

$\Leftrightarrow d((X_1,X_2),(P_1,P_2)) < R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(X_1-P_1)^2 + (X_2-P_2)^2} < R$

$\Leftrightarrow \boxed{(X_1-P_1)^2 + (X_2-P_2)^2 < R^2}$

③ Se $\boxed{n=3}$ $B_R(P)$ é a esfera de centro P e raio $R>0$ sem incluir a superfície esférica

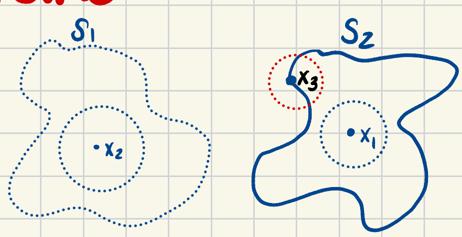
Ponto Interior e Ponto Fronteiro

Ponto Interior: Ponto de um conjunto tal que, formando uma bola aberta nesse ponto, essa bola aberta está contida no conjunto. $\rightarrow$ $\exists R > 0 \quad B_R(P) \subset D$

$X_1 \in \text{int}(S_2)$

$X_2 \in \text{int}(S_1)$

$X_3 \notin \text{int}(S_2)$

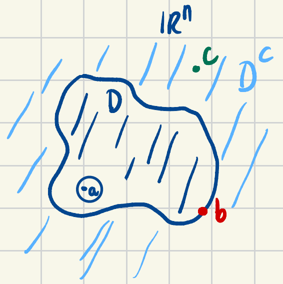


Ponto Fronteiro: Não pertence ao interior de D, nem ao exterior de D.
Quaisquer pontos da bola desse ponto fronteiro, pertencem ao int(D) e ext(D)

$$\forall R>0 \quad B_R(P)\cap D \neq \emptyset \quad \wedge \quad B_R(P)\cap \underbrace{(\mathbb{R}^n\setminus D)}_{D^c} \neq 0$$

Exemplo:

- $a \in int(D)$
- $b \in fr(D)$
- $c \in ext(D)$



complementar de D

Conjunto aberto / fechado / limitado

- D é aberto se $D = int(D)$

↳ Um conjunto é aberto se ele é igual ao seu interior, ou seja, se todos os seus pontos são pontos interiores. Um ponto x é um ponto interior se existir pelo menos uma bola aberta de raio r completamente contida em D

- D é fechado se $fr(D) \subseteq D$

↳ Um conjunto D é fechado se ele contém a sua fronteira. A fronteira de D $(fr(D))$, consiste em todos os pontos onde qualquer bola ao redor do ponto, contém pontos do interior e do exterior de D.

- D é limitado se $\exists R>0 \ \exists c \in \mathbb{R}^n : D \subset \overline{B}_R(C)$

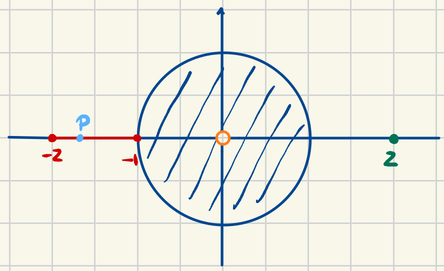
Ponto de Acumulação e Ponto Isolado

Ponto de Acumulação: $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de acumulação de D se qualquer bola centrada em P contém pontos de D distintos de P

$$\forall R>0 \quad B_R(P)\cap (D\setminus\{P\}) \neq \emptyset$$

Ponto Isolado: $P \in D$ é um ponto isolado de D se não é ponto de acumulação de D

Exemplo: $\mathcal{L} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : x^2+y^2\leq 1 \ \vee (y=0 \wedge -2\leq x\leq -1)\} \cup \{(2,0)\}$



$(0,0) \in fr(D)$

- $\mathcal{L}$ é limitado
- $\mathcal{L}$ não é aberto
- $\mathcal{L}$ não é fechado

↓

Não é fechado porque o ponto $(0,0)$, que é um ponto de acumulação não está incluído em $\mathcal{L}$. Portanto, $\mathcal{L}$ não contém todos os seus pontos de acumulação, e por definição, não é um conjunto fechado

- $(2,0)$ é o único ponto isolado
- P é ponto de acumulação
- $(0,1)$ é ponto de acumulação
- $(0,0) \notin \mathcal{L}$ mas é ponto de acumulação

Curvas / Superfícies de Nível

$$\boxed{N_K = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K\}}$$

N_K → Conjunto de nível K de f

Para $\boxed{n=2}$ chamamos curva de nível K e é denotado por $\mathcal{C}_K$

Para $\boxed{n=2}$ chamamos curva de superfície K e é denotado por S_K

Limites de sucessão em $\mathbb{R}^p$

Exemplo:

① $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{n}, \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (0,0,1)$

A sucessão de $\mathbb{R}^3$ tal que $X_n = \left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{n}, \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge para $L = (0,0,1)$

② $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{2n}}, \cos(n)\right)$ não existe pois $\lim_{n\to+\infty} \cos(n)$ não existe

A sucessão de $\mathbb{R}^3$ tal que $X_n = \left(\frac{1}{e^{2n}}, \cos(n)\right)$ não é convergente

Limite Segundo Conjunto

Exemplos:

① Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

Seja $R_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : y = mx\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in R_m}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x\, m^3 x^3}{x^2 + m^6 x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot m \cdot x^2}{\cancel{x^2}(1+m^6x^4)} = 0$$

Ainda, nada se pode concluir

Seja $S_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = my^3\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_m}} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{my^3y^3}{m^2y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^6} \cdot m}{\cancel{y^6}(m^2+1)} = \frac{m}{m^2+1}$$

Como o limite depende de m, significa que o limite vai depender do caminho que for escolhido. Logo, não existe limite.

② $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}$ (f(x,y)) $\quad D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) = 0$

$$\boxed{\lim_{X\to A} \underbrace{f(X)}_{\lim_{X\to A} f(X)=0} \cdot \underbrace{g(X)}_{\text{limitada}} = 0}$$

Continuidade

Ver estes exercicios

Teorema Schwarz

NOTA: O que é C^k?

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f é de classe C^k se possuir todas as derivadas parciais até à ordem k contínuas em todo o ponto de D

Corolário do Teorema de Schwarz:

Se f é de Classe C^2 então $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)}$

$$f \in C^2(D) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

Derivadas Direcionais

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ é um vetor unitário (isto é, $\|(u_1, u_2)\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$)

Chama-se derivada direcional de f no sentido do vetor $\vec{u}\,(u_1, u_2)$ no ponto $(a,b) \in D$ ao limite:

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$ se existir e for finito

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \|\nabla f(P)\| \cdot \|U\| \cdot \cos(\theta)$$ onde $\theta = \measuredangle(\nabla f(P), U)$

Interpretação Geométrica da derivada direcional quando n=2

$D_{\vec{u}} f(a,b)$ = declive da reta tangente à curva que se obtém intersectando o G_f (gráfico f) com o plano vertical que tem a direção do vetor $\vec{u}$ no ponto $(a, b, f(a,b))$

Recordar:

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int}(D)$

f é diferenciável em a

$\Downarrow$

f é contínua em a

Diferenciabilidade

Condição Suficiente de diferenciabilidade

$\boxed{\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ com } D \text{ aberto} \\ f \in C^1(D) \Rightarrow f \text{ é diferenciável} \end{array}}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em D

Condição Necessária de diferenciabilidade

$\boxed{\begin{array}{c} f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ é diferenciável em } (a,b) \in \text{int}(D) \\ \Downarrow \\ f \text{ é contínua em } (a,b) \end{array}}$

↳ f não é contínua em (a,b) $\Rightarrow$ f não é diferenciável em (a,b)

Equação do plano tangente ao G_f no ponto $(a,b,f(a,b))$

$$\boxed{z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}$$

↳ Fazer $\nabla f(a,b,f(a,b))$

Reta Normal ao gráfico de f no ponto $P(1,-1,2)$

Seja o plano tangente $2x-2y+z=6$

↓

A Reta normal tem equação

$(x,y,z)=(1,-1,2)+\lambda(2,-2,1), \lambda \in \mathbb{R}$

Vetor Gradiente

- Em $\mathbb{R}^2$ $\nabla_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

- Em $\mathbb{R}^3$ $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$

Teorema Função Implícita

1º a função deve ter derivadas parciais contínuas.

2º – Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ então a equação $f(x,y)=0$ define implicitamente y $y=g(x)$, numa vizinhança de (x_0, y_0)

3º- calcular $g'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$

Capítulo 3 - Parte II

Teste da Hessiana

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Condição suficiente:

- se $\det(H(P)) > 0$ $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0, & P \text{ é minimizante local} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, & P \text{ é maximizante local} \end{cases}$

- se $\det(H(P)) < 0 \rightarrow$ Ponto de sela

- Se $\det(H(P)) = 0 \rightarrow$ Nada se pode concluir

  $\downarrow$

  Fazer análise da função numa vizinhança $P(a,b)$