Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 **2013/14**

Soluções do 2.º Teste de Avaliação Discreta

---

1. $\frac{4}{3}$ (soma de uma série geométrica de razão $\frac{2}{5}$ e primeiro termo $\frac{4}{5}$).

2. (a) <u>Divergente</u> (comparar com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, usando o Critério de Comparação por passagem ao limite).

   (b) <u>Convergente</u> (usar o Critério de D'Alembert ou, em alternativa, o Critério da Raiz).

   (c) Divergente se $|\beta| \leq 1$ (i.e., se $\beta \in [-1, 1]$) e convergente se $|\beta| > 1$ (i.e., se $\beta \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

3. (a) Verdadeira.

   (b) Verdadeira.

4. O domínio de convergência é o intervalo $]-1, 7]$, sendo a série absolutamente convergente em $]-1, 7[$ e simplesmente convergente no ponto 7.

5. (a) A fórmula de MacLaurin de ordem 2 da função dada (com resto de Lagrange) é

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2}_{T_0^2 f(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\theta)}{3!}\,x^3}_{R_0^2 f(x)}$$

   para certo θ entre 0 e x (com $x > -1$ e $x \neq 0$), cuja existência é assegurada pelo Teorema de Taylor. Após alguns cálculos simples chega-se à fórmula

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(\theta+1)^3}\,x^3.$$

   (b) $\ln(1,1) = f(0,1) \simeq T_0^2 f(0,1) = 0,1 - \frac{(0,1)^2}{2} = \frac{19}{200} = 0,095.$

   O erro cometido nesta aproximação é dado por $\left|R_0^2 f(0,1)\right|$. Notando que θ se situa agora entre 0 e $0,1$, podemos estimar o erro do seguinte modo:

$$\left|R_0^2 f(0,1)\right| = \left|\frac{(0,1)^3}{3(\theta+1)^3}\right| < \frac{(0,1)^3}{3} = \frac{1}{3} \times 10^{-3}.$$

6.

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n,$$

sendo esta representação válida no intervalo $]-1, 1[$ (notar que este é o domínio de convergência da série obtida). Na penúltima igualdade usou-se a derivação termo a termo (válida no intervalo de convergência), enquanto que a última se justifica pelas propriedades das séries.

7. A série de Fourier da função f é

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} \operatorname{sen}((2n+1)x).$$

Embora não se apresente aqui um esboço do gráfico da soma da série no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$, fica a informação que a soma $S(x)$ é dada por

$$S(x) = \begin{cases} -1\,, & x \in]-3\pi, -2\pi[\cup]-\pi, 0[\cup]\pi, 2\pi[\\ 0\,, & x \in]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[\cup]2\pi, 3\pi[\\ -\frac{1}{2}\,, & x \in \{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}. \end{cases}$$