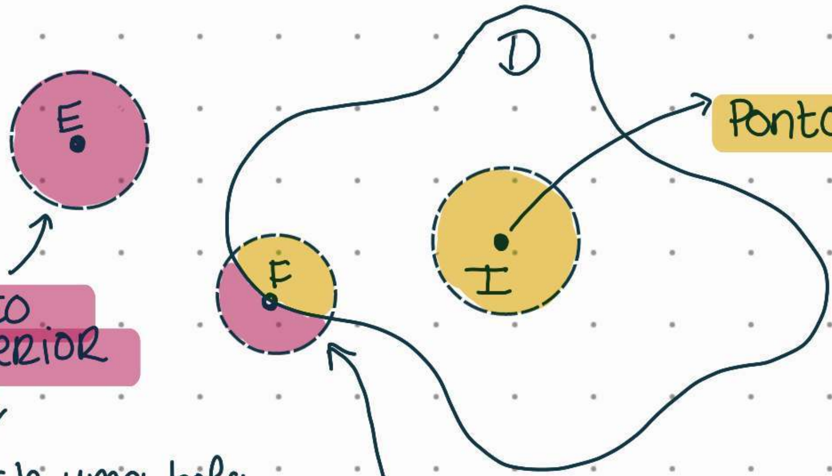
Funções Reais de — **Resumo** — Várias Variáveis Reais

Resumo Capítulo 2

Classificação dos Conjuntos do ponto de vista topológico



Ponto interior

se existe uma bola de centro em I e de raio R que esteja completamente contida em D.

$$\boxed{\exists R>0,\ B_R(a)\subseteq D}$$

ponto exterior

se existe uma bola centrada em E e raio R que esteja contida em D^c (complementar de D)

$$\boxed{\exists R>0 : B_R(a) \subseteq D^c}$$

Ponto fronteiro

se qualquer bola centrada em F interseta D e o seu complementar D^c.

$$\boxed{\forall R>0,\ B_R(a)\cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a)\cap D^c \neq \emptyset}$$

fecho ou aderência

Chamamos fecho ou aderência de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ao conjunto $\overline{D} = D \cup fr(D)$.

Conjunto Aberto / Fechado

Um conjunto diz-se **aberto** se coincide com o seu interior, isto é, $D = int(D)$

E diz-se **fechado** se coincide com o seu fecho, isto é, $D = \overline{D} = D \cup fr(D)$

Ponto de acomulação / isolado

Um ponto a diz-se de **acomulação** de D se:

$$\boxed{\forall R>0,\ B_a(R) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset}$$

Se qualquer bola centrada em a intersecta sempre o conjunto, sem contarmos com o próprio ponto a.

Ao conjunto dos pontos de acomulação chamamos **Derivado, D'**

Caso a interseção da bola centrada em a e o conjunto seja apenas o próprio ponto a, então dizemos que temos um **ponto isolado**.

Conjunto limitado

Um conjunto diz-se limitado se existir uma bola que o contenha.

Domínio e gráfico de uma f.R.V.V.R

Uma função real de várias variáveis reais $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ faz corresponder a cada elemento $X = (x_1, \cdots, x_n)$ de D um único número real $z = f(x_1, \cdots, x_n)$. Isto é,

$$\boxed{X = (x_1, \cdots, x_n) \xrightarrow{f} z = f(x_1, \cdots, x_n)}$$

A **D** chamamos **domínio de f** e determina-se tendo em conta as **restrições** da expressão analítica de f.

$\longrightarrow$ seja $X = (x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{A(X)}{B(X)} \Rightarrow B(X) \neq 0$$

$$\sqrt[n]{A(X)} \overset{n \text{ par}}{\Longrightarrow} A(X) \geq 0$$

$$\ln(A(X)) \Rightarrow A(X) > 0$$

As restrições que conhecíamos para f.R.V.R são generalizadas para o caso f.R.V.V.R

O **Gráfico de f** é um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e presenta-se por:

$$G_f = \{ (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{n variáveis independentes}}, \underbrace{z}_{\text{1 var. dependente}}) \in \mathbb{R}^{n+1} : z = f(x_1, \dots, x_n) \}$$

Conjuntos de nível

seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Chama-se **conjunto de nível k** $k \in \mathbb{R}$, de f ao conjunto:

$$\boxed{N_k = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = k \}}$$

$\longrightarrow$ $n=2$ **curva de nível** k

$\longrightarrow$ $n=3$ **superfície de nível** k

Limites de f.R.V.V.R

$\longrightarrow$ limites usando sucessões: seja $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)$. se **$\forall (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$** :

$\lim f(x_n, y_n)$ existe e é único.

Então $\lim f(x_n, y_n) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Exemplo: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y}{x+y}$ $\quad (x_n, y_n) \to (0,0)$

$x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{1}{n}$

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{2}{n}}$$

$$= \lim \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

↳ limites usando curvas:

Usamos as curvas para nos aproximarmos do ponto. Se o limite der o mesmo para todas as curvas então o limite coincide com:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

Nota: Mas seria muito difícil mostrar para todas as curvas, então geralmente usamos para mostrar que não existe limite.

basta um contra-exemplo

Exemplo:

$x=0$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+4y}{x-y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{4y}{-y} = -4$

$y=0$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x+4y}{x-y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\neq$, então não existe limite!

↳ limites por mudança de variável:

Transformamos um limite envolvendo várias variáveis em um limite de uma só variável.

Exemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{u}-1}{u} = 1$

MV: $u = xy$

$(x,y)\to(0,0) \quad u\to 0$

Derivadas parciais ($\mathbb{R}^2$)

Por definição

$$f'_x(a,b) = \frac{df}{dx}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$f'_y(a,b) = \frac{df}{dy}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Regras de derivação

$f'_x(x,y) \to$ consideramos y uma constante

$f'_y(x,y) \to$ consideramos x uma constante

$\mathbb{R}^3$

$f'_x(x,y,z) \to$ consideramos y e z constantes

$f'_y(x,y,z) \to$ consideramos x e z constantes

$f'_z(x,y,z) \to$ consideramos y e z constantes

Derivadas direcionais:

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = D_{\vec{u}}f(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

$\vec{u}$ tem de ser unitário $\Rightarrow \|\vec{u}\| = 1$

se nos derem $\vec{v}$, tal que $\|\vec{v}\| \neq 1$, fazemos:

$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ (mesma direção e sentido) ou $\vec{u} = -\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ (mesma direção e sentido oposto)

Gradiente: vetor das derivadas parciais

$$\nabla f(x,y) = (f'_x(x,y), f'_y(x,y))$$

$$\nabla f(x,y,z) = (f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z))$$

Aplicações

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

vetor $(f'_x, f'_y, -1)$ é perpendicular ao Gráfico de f no ponto $(x, y, f(x,y))$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Plano tangente ao G_f em $(a,b,f(a,b))$

$$z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)$$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Reta normal ao G_f em $(a,b,f(a,b))$

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + K(f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1)$$

$K \in \mathbb{R}$

Derivadas direcionais

$$f'_{\vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u}$$

Plano tangente a Superfície de nível K em (a,b,c)

$$f'_x(a,b,c)(x-a) + f'_y(a,b,c)(y-b) + f'_z(a,b,c)(z-c) = 0$$

Condição suficiente de diferenciabilidade

Se as derivadas parciais existem e são contínuas num ponto, então f é diferenciável nesse ponto.

ou

Diferenciabilidade em $\mathbb{R}^2$

Se existir plano tangente ao gráfico num ponto $(a,b,f(a,b))$:

$$\boxed{z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}$$

e

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - [f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)]}{\|(x-a, y-b)\|} = 0}$$

então f é diferenciável em (a,b).

[60] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{1-x^2-y^2}$.

(a) Determine o domínio, D, e a curva de nível 1, C_1, da função f. Represente ou descreva ambos geometricamente.

(b) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y.

(c) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,-3)$.

(d) Determine os vetores unitários $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tais que $D_{\vec{v}} f(1,1) = 0$.

[25] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x-y}$.

(a) Determine e represente geometricamente o domínio D da função f.

(b) Identifique a curva de nível *zero* da função f.

[20] Seja $g(x,y) = x + y - e^{xy}$.

(a) Justifique que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e determine o gradiente de g em $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Determine o plano tangente ao gráfico da função g no ponto $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

[40] Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y) = 3 + x^3 + y^3 - 3xy$.

(a) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,6)$.

~~(b)~~ Determine os pontos críticos de f e classifique-os (em minimizante local, maximizante local ou ponto de sela).

[40] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

(a) Determine e represente geometricamente o domínio D da função f.

(b) Identifique as curvas de nível $k \neq 0$ da função f.

(c) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y.

[55] Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xye^{x-y}$.

~~(a)~~ Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

(b) Justifique que f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio e obtenha uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,2,4)$.

(c) Determine a derivada direcional de f no ponto $(2,2)$ segundo um qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

[30] Considere a função g definida por $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y}$.

(a) Determine o domínio de g e represente-o geometricamente.

~~(b)~~ Mostre que g possui um mínimo local no ponto $(1,1)$.