Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — 1.º Teste de Avaliação Mista

11 de abril de 2012

Duração: **2h**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[10pts] 1. Usando a transformada de Laplace calcule o valor do integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3\,t\cos(\sqrt{2}\,t)\,e^{-t}\,dt.$

2. Considere o seguinte problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 2t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

[10pts] (a) Justifique que o problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$).

(b) Seja $y = y(t)$ a solução do problema.

[15pts] i. Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}\,,\quad s > 0.$

[25pts] ii. Determine $y(t)$.

3. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

[35pts] (a) $(1 + x^2)y' + xy + x = 0\,;$

[40pts] (b) $y'' - 2y' - 15y = 8e^{5x}\,.$

[30pts] 4. Determine o integral geral da equação diferencial homogénea

$$x^2 e^{\frac{x}{y}} y' = y^2 + xye^{\frac{x}{y}}\,,\quad x > 0.$$

5. Considere uma equação diferencial da forma $y' + a(x)y = b(x)y^p$ (onde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e a, b são funções reais definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$).

[15pts] (a) Mostre que a mudança de variável dada por $z = y^{1-p}$ transforma aquela equação numa equação diferencial linear.

[20pts] (b) Determine o integral geral da equação diferencial $y' - \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{3}{x^2}\,y^4\,,\quad x > 0.$

Cálculo II — $1.^{\underline{o}}$ Teste de Avaliação Mista

– FORMULÁRIO –

(Em geral nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas).

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt, \quad s > s_f.$$

Tabela de transformadas de Laplace ($a \in \mathbb{R}$).

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0\,,\ n \in \mathbb{N}_0\ \ (0! = 1)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$

$f(t)$	$F(s)$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

- $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f\,,\ n \in \mathbb{N}.$
- $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f\,,\ a > 0 \quad$ (f nula em $\mathbb{R}^-$).
- $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f\,,\ a > 0.$
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$
  $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$