Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Exame Final

14 de junho de 2012

Duração: **2h30m**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais:

[30pts] (a) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$;

[20pts] (b) $2(1+x^2)dy - \sqrt{y}\,dx = 0$.

[10pts] 2. Seja $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades das séries de potências, mostre que a função φ é uma solução particular da equação diferencial $y'' - 4y = 0$.

[30pts] 3. Resolva o seguinte problema de valores iniciais usando transformadas de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 3y = 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

[15pts] 4. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica de termos positivos e $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (na_n)$.

Mostre que se $\ell \in \mathbb{R}^+$, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

[25pts] 5. Estude a natureza da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{(2n)!}$.

[20pts] 6. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

7. Considere a função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

[10pts] (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 da função f (com resto de Lagrange).

[10pts] (b) Usando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule uma aproximação de $\sqrt[3]{1,3}$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a 10^{-2}.

8. Considere a série de Fourier

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n)^2 - 1}$$

associada à função f, periódica de período 2π, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.

[10pts] (a) Mostre que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

[15pts] (b) Indique, justificando, a função soma da série dada.

[5pts] (c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

Cálculo II — Exame Final

– FORMULÁRIO –

(Em geral nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas).

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt, \quad s > s_f.$$

Tabela de transformadas de Laplace ($a \in \mathbb{R}$).

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0\,,\ n \in \mathbb{N}_0\ \ (0! = 1)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$

$f(t)$	$F(s)$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \lvert a\rvert$

- $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda\,,\ \lambda \in \mathbb{R}.$
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f\,,\ n \in \mathbb{N}.$
- $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f\,,\ a > 0 \quad$ (f nula em $\mathbb{R}^-$).
- $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f\,,\ a > 0.$
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$

  $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$