Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2013/14**

2º teste Duração: 2h00
(+15mn de tolerância)

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-e^{-n^2}\right)$.

2. Sejam $f(x)=\cos x$ e $n\in\mathbb{N}$.

   (a) Verifica que o polinómio de Taylor $(T_{\pi/2}^{2n-1}f)(x)$ de ordem $2n-1$ de f no ponto $\frac{\pi}{2}$ é
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}.$$

   (b) Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange e o valor de 3,14 para π, determina um majorante para o erro cometido ao aproximar $\cos(0{,}57)$ por $(T_{\pi/2}^{5}f)(0{,}57)$.

3. Obtém uma representação em série de potências para a função f real de variável real x definida por $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

   [Informação: Podes raciocinar a partir de uma representação em série de potências para a função exponencial natural que já conheças.]

4. Sabendo que a série de Fourier de $g(x)=x,\ x\in[-\pi,\pi]$, é $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$, determina a série de Fourier de $f(x)=x\sin x,\ x\in[-\pi,\pi]$.

   [Sugestão: No cálculo dos coeficientes de Fourier, tira partido das fórmulas trigonométricas
   $$2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b),\quad 2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b).]$$

5. Considera uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$.

   (a) Define raio de convergência, intervalo de convergência e domínio de convergência de uma tal série.

   (b) Mostra que se todos os coeficientes a_n forem diferentes de zero e se existir $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ então o raio de convergência daquela série é igual ao valor desse limite.

Cotação:

1. 6; 2. 5; 3. 4; 4. 2; 5. 3.