Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2013/14**

exame final Duração: 2h30

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas. O formulário de transformadas de Laplace encontra-se no verso.**

---

1. Classifica e resolve a equação diferencial ordinária $(1+e^x)yy' = e^x$.

2. Considera o seguinte PVI: $y'' + y' = t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

   (a) Resolve-o começando por resolver a respetiva EDO pelo método dos coeficientes indeterminados.

   (b) Resolve-o através do uso de transformadas de Laplace.

3. Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\Big)$.

4. Obtém uma representação em série de potências para a função f real de variável real x definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

   [Informação: Podes raciocinar a partir de uma representação em série de potências para a função exponencial natural que já conheças.]

5. Sabendo que a série de Fourier de $g(x) = x,\ x \in [-\pi, \pi]$, é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx)$, determina a série de Fourier de $f(x) = x\sin x,\ x \in [-\pi, \pi]$.

   [Sugestão: No cálculo dos coeficientes de Fourier, tira partido das fórmulas trigonométricas

   $$2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b), \quad 2\sin a\cos b = \sin(a-b) + \sin(a+b).]$$

6. Considera uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$.

   (a) Define raio de convergência, intervalo de convergência e domínio de convergência de uma tal série.

   (b) Mostra que se todos os coeficientes a_n forem diferentes de zero e se existir $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ então o raio de convergência daquela série é igual ao valor desse limite.

Cotação:

1. 2; 2. 6; 3. 4; 4. 3; 5. 2; 6. 3.

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

CÁLCULO II - Agrupamento 4 - 2013/14

Formulário (Transformada de Laplace)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\mathrm{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\mathrm{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)\,,\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)\,,\ s > s_f$
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a) \ \ (a > 0)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)\,,\ s >$ ordens exp. de f, f'
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordens exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$

Nota: O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.