Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II – Agrupamento I

(Cursos: 8206, 8221, 8242, 8247, 8263, 8264, 8266, 8297)

Teste 1: 8 de abril de 2015, 15h30–17h30

[15 pt.] 1. Calcule, usando a transformada de Laplace, o valor do integral impróprio $I = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)\mathrm{e}^{-3x}\, dx$.

[70 pt.] 2. (a) Determine, usando a transformada de Laplace, a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - y = \mathrm{e}^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

(b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = x^2.$$

(c) Determine uma solução particular da equação diferencial

$$y'' - y = 3\mathrm{e}^x - x^2.$$

[Sugestão: na resolução da alínea (c) pode aproveitar as informações obtidas na resolução das alíneas (a) e (b)]

[45 pt.] 3. Usando uma substituição adequada, determine a solução geral (em forma implícita) da equação diferencial

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y},\ x > 0.$$

[Sugestão: a EDO é, ao mesmo tempo, homogénea e de Bernoulli]

[55 pt.] 4. Considere a equação diferencial linear $(x+1)y'' + xy' - y = (x+1)^2$ para $x > 0$.

(a) Justifique que $\{x, \mathrm{e}^{-x}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada e

(b) determine a solução geral da equação completa.

[15 pt.] 5. Justificando devidamente, determine uma solução (expressão e domínio) do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2 - 4}{x}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

[Sugestão: não é preciso resolver a equação diferencial]

Transformadas de Laplace

$f(t),\ t \geq 0$	$t^n,\ n \in \mathbb{N}_0$	$\mathrm{e}^{at},\ a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{sen}(at),\ a \in \mathbb{R}$	$\cos(at),\ a \in \mathbb{R}$	$\operatorname{senh}(at),\ a \in \mathbb{R}$	$\cosh(at),\ a \in \mathbb{R}$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s > s_f$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s > \|a\|$

$\alpha f(t) + \beta g(t),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t),\ \lambda \in \mathbb{R}$	$t^n f(t),\ n \in \mathbb{N}$	$f(t-a),\ a > 0$	$f(at),\ a > 0$	$f^{(n)}(t),\ n \in \mathbb{N}$
$\alpha F(s) + \beta G(s)$, $s > \max\{s_f, s_g\}$	$F(s-\lambda)$, $s > s_f + \lambda$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, $s > s_f$	(f nula em $\mathbb{R}^-$) $\mathrm{e}^{-as}F(s)$, $s > s_f$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$, $s > as_f$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, $s > \max\{s_f, s_{f'}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$

(Para além das condições indicadas, pode haver restrições adicionais a considerar, para que as fórmulas da tabela sejam válidas.)

Primitivas

função	$u^r u',\ r \neq -1$	$\frac{u'}{u}$	$u' e^u$	$u' a^u$	$u' \cos u$	$u' \operatorname{sen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
primitiva	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\ln \|u\|$	e^u	$\frac{a^u}{\ln a}$	$\operatorname{sen} u$	$-\cos u$	$\arcsin u$ ou $-\arccos u$

função	$u' \sec u = \frac{u'}{\cos u}$	$u' \operatorname{cosec} u = \frac{u'}{\operatorname{sen} u}$	$u' \sec^2 u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$u' \operatorname{tg} u$	$u' \cot u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
primitiva	$\ln \|\sec u + \tan u\|$	$-\ln \|\operatorname{cosec} u + \cot u\|$	$\tan u$	$-\cot u$	$\ln \|\sec u\|$	$-\ln \|\operatorname{cosec} u\|$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$