Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 13 de abril de 2016

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

- Justifique as suas respostas e indique os cálculos efetuados.
- O formulário encontra-se no verso.

---

1. **[25]** Determine uma função cuja transformada de Laplace é dada por:

   (a) $\dfrac{s+4}{s^2+6s+13}$; (b) $\dfrac{e^{-s}}{(s-1)^2}$.

2. **[30]** Considere o seguinte problema de valores iniciais:
$$y''-2y'-8y=0\,, \quad y(0)=3\,, \quad y'(0)=6.$$
   Resolva-o usando transformadas de Laplace.

3. **[60]** Resolva as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

   (a) $xyy'-1=0\,;$

   (b) $x^2y'+xy=1\,, \quad x>0;$

   (c) $xy'-x=y+x\cos\left(\dfrac{2y}{x}\right)$ (se necessário, recorde que $1+\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha$).

4. **[60]** Considere a equação diferencial linear
$$y''+y=f(x)\,,$$
   onde f é uma função contínua em $]0,\pi/2[$.

   (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

   (b) Determine uma solução particular da EDO considerando $f(x)=-2\cos x$.

   (c) Encontre agora uma solução particular da EDO com $f(x)=-\dfrac{2}{\cos x}$.

   (d) Determine a solução geral da equação diferencial
$$y''+y=-2\left(\cos x+\frac{1}{\cos x}\right).$$

5. **[25]** Considere uma equação diferencial da forma
$$y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)\,,$$
   onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções contínuas num dado intervalo.
   Mostre que se y_p é uma solução particular da equação, então a mudança de variável dada por
$$y=y_p+\frac{1}{z} \quad (z\neq 0)$$
   transforma a equação dada numa EDO linear.

Formulário (Transformadas de Laplace)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \ \ (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$\cosh(at) \ \ (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$e^{\lambda t} f(t) \ \ (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t)f(t-a) \ \ (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \ \ (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \ \ (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$

Nota: Em geral, nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas. Em alguns casos são omitidas as restrições ao domínio das transformadas.