Universidade de Aveiro Duração: 2h 30min
Exame de Recurso de Cálculo II 2 de Julho de 2014

1. **(30 pts)** Determine uma equação diferencial ordinária completa, de 3ª ordem, de coeficientes constantes tal que

   - $y_p = e^{-x}$ seja uma solução particular da equação completa e
   - o conjunto $\{\text{sen}\,(x), \cos\,(x), e^{2x}\}$ seja um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada.

   Justifique adequadamente a sua resposta.

2. **(20 pts)** Usando o método da variação das constantes, determine o integral geral da equação diferencial linear de primeira ordem
$$xy' \ln x + y - \ln x = 0$$

3. **(25 pts)** Usando a transformada de Laplace determine a solução do problema de Cauchy
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 3x = te^{2t} \\ \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

4. **(35 pts)** Considere a função $f : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

   (a) Determine uma expressão para a derivada de ordem n da função f.

   (b) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n com resto de Lagrange, $R_n(x)$, para a função f.

   (c) Verifique que existe uma constante $c > 0$ tal que
$$|R_n(x)| < c|2x|^{n+1}, \ \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

   (d) A partir da alínea anterior, mostre que se pode desenvolver f em série de MacLaurin e escreva-a.

   (e) Atendendo ao resultado da alínea anterior, escreva a série de MacLaurin para a função $g : \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

5. **(35 pts)** Considere a seguinte série de termos reais $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (a) Enuncie o Critério de Convergência de D'Alembert (ou da razão) .

   (b) Supondo que
$$a_{n+1} = \frac{n}{2n+3}a_n, \ a_1 \neq 0$$
   estude a natureza da série cujo termo geral é a_n.

   (c) Determine o número racional que pode ser representado pela dízima infinita periódica $0,363363363\ldots$.

6. **(20 pts)** Determine o domínio de convergência da série de potências, indicando o tipo de convergência (simples ou absoluta) em cada ponto desse domínio,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n(2n+1)}$$

v.s.f.f.

7. **(35 pts)** Seja f a função periódica de período 2π tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -\pi < x \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico da função f no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Mostre que a série de Fourier da função f é dada por

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(5x) + \dots\right]$$

(c) Determine, justificando, a soma da série de Fourier da alínea anterior.

(d) Dando um valor apropriado a x mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Formulário (Transformada de Laplace)

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s)\,,\ s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)\,,\ s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s >$ ordem exp. de f
$f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordem exp. de $f, f', \dots, f^{(n-1)}$

Formulário (Primitivas)

função	primitiva
$u^r u'$, com $r \neq -1$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$
$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$
$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$
$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$
$u' \csc^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$
$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \csc u$	$-\ln\|\csc u + \operatorname{cotg} u\|$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Notas:

1. F denota a transformada de Laplace da função f, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$;
2. O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.
3. $\sec u = \dfrac{1}{\cos u}$ e $\csc u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$