Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2013/14**

1º teste Duração: 2h00
(+15mn de tolerância)

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas. O formulário encontra-se no verso.**

---

1. Classifica e resolve as seguintes equações diferenciais ordinárias:

   (a) $y' = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$; (b) $y' + xy = xy^3$.

2. Considera a seguinte EDO:
$$y'' - y' - 2y = e^{2x}.$$
   (a) Determina a solução geral da EDO homogénea associada.
   (b) Determina a solução geral da EDO dada usando o método dos coeficientes indeterminados.
   (c) Determina a solução geral da EDO dada usando o método da variação das constantes.

3. Calcula as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções:

   (a) $\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$; (b) $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}$; (c) $\dfrac{4s+e^{-s}}{s^2+s-2}$.

4. Resolve o seguinte sistema sujeito às condições iniciais indicadas, onde tanto x como y são funções da variável independente t:
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} ; \quad x(0) = 2,\ y(0) = 0.$$
   [Sugestão: Aplica transformadas de Laplace a ambas as equações, resolve o sistema algébrico resultante e depois aplica transformadas inversas de Laplace.]

5. Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.
   (a) Define transformada de Laplace de f.
   (b) Indica condições que garantam a existência da transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ para todo o s maior que um dado valor $s_f \in \mathbb{R}$ (define também os conceitos que usares nessas condições).
   (c) Supõe que f é integrável em $[0, b]$, qualquer que seja o $b > 0$, e seja $a > 0$. Mostra, usando a definição de transformada de Laplace, que se a transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ existe para $s > s_f$ então a transformada de Laplace de $f(at)$ existe para $s > as_f$, verificando-se para tais valores de s que
$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Cotação:

1. 5; 2. 6; 3. 4; 4. 2; 5. 3.

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

CÁLCULO II - Agrupamento 4 - 2013/14

Formulário (Transformada de Laplace)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f; \qquad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad s > s_g$$

função	transformada
$t^n \;\; (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\; s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\; s > a$
$\mathrm{sen}(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\; s > 0$
$\cos(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\; s > 0$
$\mathrm{senh}(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\; s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \;\; (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\; s > \lvert a\rvert$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)\,,\; s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \;\; (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s)\,,\; s > s_f$
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \;\; (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\,,\; s > s_f + \lambda$
$H_a(t) f(t-a) \;\; (a > 0)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\; s > s_f$
$f(at) \;\; (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\; s > a\, s_f$
$t^n f(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\; s >$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s) - f(0)\,,\; s >$ ordem exp. de f
$f''(t)$	$s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)\,,\; s >$ ordens exp. de f, f'
$f^{(n)}(t) \;\; (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)} \equiv f$, $s >$ ordens exp. de $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$

Nota: O facto de se indicarem restrições numa dada linha do quadro acima não significa que não haja restrições adicionais a considerar para que a fórmula indicada nessa linha seja válida.