3.2 Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Extremos

(baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II)

Universidade de Aveiro, 2024/2025

Cálculo II - C

Resumo dos Conteúdos

Extremos locais e globais

Definições: Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$.

1. P é um maximizante local de f, se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}\,,\ f(X) \leq f(P)$.
   Nesse caso, $f(P)$ diz-se um máximo local de f.
2. P é o maximizante global de f, se $\forall X \in \mathcal{D}\,,\ f(X) \leq f(P)$.
   Nesse caso, $f(P)$ diz-se o máximo global de f.
3. P é um minimizante local de f, se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}\,,\ f(X) \geq f(P)$.
   Nesse caso, $f(P)$ diz-se um mínimo local de f.
4. P é um minimizante global de f, se $\forall X \in \mathcal{D}\,,\ f(X) \geq f(P)$.
   Nesse caso, $f(P)$ diz-se o mínimo global de f.

Máximos e mínimos (locais ou globais) designam-se, genericamente, por **extremos** (locais ou globais); os pontos onde são atingidos designam-se, genericamente, por **extremantes** (locais ou globais, consoante o caso).

Condição suficiente para a existência de extremos globais: Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass:

Se $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ é fechado e limitado (compacto), então f admite máximo e mínimo globais em $\mathcal{D}$.

Exemplo 1:

Seja $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, com $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$, tal que $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Uma vez que $\mathcal{D}$ é compacto e f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f atinge, em $\mathcal{D}$, máximo e mínimo globais.

Exemplo 2: A função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ admite no seu domínio máximo global, atingido em $(0, 0)$, mas não possuí mínimo global.

Isto contradiz o Teorema de Weierstrass? Porquê?

Condição necessária para a existência de extremo local num ponto interior: Teorema de Fermat

Teorema de Fermat:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Se f tem derivadas parciais de 1.ª ordem em P e P é um extremante local de f, então $\nabla f(P) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definição:

Um ponto $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ tal que $\nabla f(P) = (0, 0, \ldots, 0)$ diz-se um ponto crítico de f.

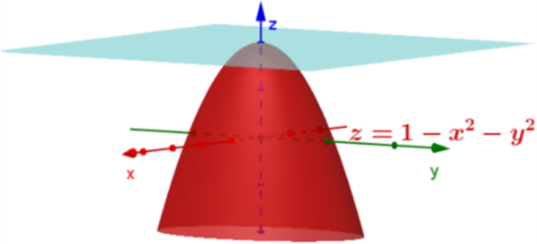
Observações:

- Se $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ é um extremante de f, então P é ponto crítico de f ou não existe alguma das derivadas parciais de 1ª ordem de f.
- Existem pontos críticos que não são extremantes; esses pontos designam-se por **pontos de sela**.

Exemplo – Extremante e ponto crítico

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

Esboço Gráfico:

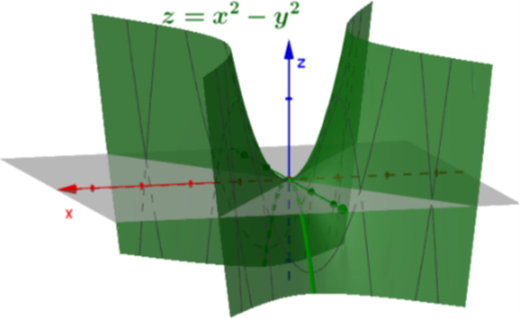


Notar que $(0, 0)$ é um maximizante (global) de f e que nesse ponto a função atinge o seu valor máximo: 1.
As derivadas parciais $f'_x(x, y) = -2x$ e $f'_y(x, y) = -2y$, existem para todo o (x, y). De acordo com o Teorema de Fermat, essas derivadas são nulas em $(0, 0)$, o que com facilidade se verifica.

Exemplo – Ponto crítico não extremante (ponto de sela)

A função real de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = x^2 - y^2$ tem um ponto de sela. De facto, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, ou seja, $(0,0)$ é um ponto crítico de f, mas não é extremante local de f (justifique usando a definição).

Esboço Gráfico:



Matriz Hessiana

Como verificar se um ponto crítico é um extremante local?

Uma das abordagens pode ser através da matriz Hessiana de f.

Definição:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. A matriz Hessiana de f em P é a matriz (simétrica) de ordem n:

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é chamado o Hessiano de f em P.

Cadeia de menores principais líderes de uma matriz

Definição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ e

$$M_1 = |a_{11}|$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$M_n = |A| \ .$$

M_1, M_2, ..., M_n chama-se a cadeia de menores principais líderes de A.

Exemplo: A matriz $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ tem os menores principais líderes:

$$M_1 = |-5| = -5$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 11$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -22$$

Teste da Hessiana (versão dos menores principais líderes)

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ **ponto crítico de** f. Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$, *i.e.*, $M_n(P) \neq 0$.

- Se a cadeia de menores principais líderes de $H_f(P)$ é positiva, *i.e.*, $M_k(P) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, então P é um minimizante local de f.
- Se a cadeia de menores principais líderes de $H_f(P)$ é alternada, começando por um menor principal negativo, *i.e.*, $M_k(P) < 0$, se k ímpar, e $M_k(P) > 0$, se k par, $k = 1, 2, \ldots, n$, então P é um maximizante local de f.
- Se nenhuma das situações anteriores ocorrer, P é um ponto de sela de f.

Nota: se $\det(H_f(P)) = 0$, este teste não serve para concluir da natureza do ponto crítico.

Exemplo de aplicação do Teste da Hessiana

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Assim, $P = (0,0)$ e $Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ são os pontos críticos de f. A matriz Hessiana é

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, logo P é ponto de sela de f, pois $M_2(P) \neq 0$ e $M_1(P) = 0$.

$H_f(Q) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, como $M_1(Q) = -8 < 0$ e $M_2(Q) = 16 > 0$, Q é maximizante local de f. O máximo local correspondente é $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{59}{27}$.

Teste da Hessiana para $n = 2$

Teorema:

Sejam $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ ponto crítico de f. Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$.

1. Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$, então P é um minimizante local.
2. Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$, então P é um maximizante local.
3. Se $\det(H_f(P)) < 0$, então P é ponto de sela.

Nota: Quando $\det(H_f(P)) = 0$, qualquer teste baseado em $H_f(P)$ é inconclusivo. De facto, para Hessianas "idênticas", os pontos associados podem ter uma natureza completamente distinta (veja os exemplos do slide seguinte).

Exemplos de aplicação inconclusiva do Teste da Hessiana

Ex. 1: Determinar os extremos locais da função $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$.

- Pontos críticos de f: $(0,0)$
- $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$ e $\det(H_f(0,0)) = 0$. O teste da Hessiana é inconclusivo.
- Análise, recorrendo à definição, da função numa vizinhança de $(0,0)$:
  Em toda a bola aberta centrada em $(0,0)$ existem pontos da forma $(0,b)$, com b negativo e com b positivo. Como
  $f(0,b) = b^3 < 0$, se $b < 0$, e $f(0,b) = b^3 > 0$, se $b > 0$,
  o ponto $(0,0)$ não é extremante de f, mas sim um ponto de sela.

Ex. 2: A aplicação do Teste da Hessiana na determinação dos extremos locais da função $f(x,y) = x^4 + x^2 + y^4$ é também inconclusiva. Mas, neste caso, $(0,0)$ é um minimizante local. Verifique, fazendo uma análise similar à do exemplo anterior.

Cálculo de Extremos Globais em Compactos

Se $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e $\mathcal{D}$ fechado e limitado (compacto), o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes globais em D. A identificação desses extremantes, e respetivos valores extremos, pode ser feita usando o seguinte procedimento:

1. Determinar, no interior de $\mathcal{D}$, os pontos críticos de f.
2. Determinar, no interior de $\mathcal{D}$, os pontos onde não exista uma das derivadas parciais.
3. Determinar os candidatos a extremantes da restrição de f à fronteira de $\mathcal{D}$.
4. Considerar os pontos obtidos nos passos anteriores e calcular o valor de f em cada um deles. O menor dos valores é o mínimo global de f e o maior é o máximo global de f (em $\mathcal{D}$).

Exemplo de aplicação do procedimento do slide anterior:

$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, definida em $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$

1. Notar que, $\text{int}(\mathcal{D}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.
   $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o único ponto crítico de f em $\text{int}(\mathcal{D})$.
2. Como f tem derivadas parciais em todos os pontos de $\text{int}(\mathcal{D})$, em relação ao ponto 2. não há pontos a acrescentar.
3. Notar que, $\text{fr}(\mathcal{D}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.
   Tomando $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\text{fr}(\mathcal{D}) = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \colon \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e a restrição de f, $f_{|\text{fr}(\mathcal{D})}$ pode considerar-se como sendo a seguinte função a uma variável

$$\begin{aligned} g(\theta) &= f_{|\text{fr}(D)}(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \\ &= 2 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta, \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Conclusão do exemplo do slide anterior

Os candidatos a extremantes de g, são os seus pontos críticos $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e os pontos fronteiros do intervalo $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.
Assim, devemos considerar os pontos:

$$P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \; P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \; \text{ e } \; P_4 = (1, 0)$$

como candidatos a extremantes globais de f.

4. Como

$$f(P_1) = \frac{1}{2}, f(P_2) = 2 - \sqrt{2}, f(P_3) = 2 + \sqrt{2} \text{ e } f(P_4) = 1,$$

então o **máximo global** de f em $\mathcal{D}$ é $2 + \sqrt{2}$, atingido em $P_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e o **minímo global** de f em $\mathcal{D}$ é $\frac{1}{2}$, atingido em $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

O que é um extremo condicionado (ou ligado) (ou sujeito a restrição)?

Um **extremo condicionado de uma função** é um extremo de uma sua restrição a um certo conjunto, definido por uma certa condição (ou conjunto de condições). Trataremos apenas o caso em que essa condição é uma igualdade. Vamos considerar funções a duas variáveis (a generalização para $n > 2$ é a natural).

Sejam $f\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D} \colon g(x, y) = 0\}.$$

Os extremos da restrição $f_{|\mathcal{C}}$ são designados de extremos condicionados de f sujeitos (ou restritos) à condição (restrição) $g(x, y) = 0$.

A condição $g(x, y) = 0$ é chamada de condição de ligação ou condição de restrição (ou simplesmente, restrição).

Exemplo: $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Problema: Determinar os extremos de f restringida ao conjunto

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}.$$

Em esquema:

$$\begin{array}{cl} \text{min/max} & f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Nota: s.a. lê-se "sujeito a"

Usando o estudo feito no exemplo do Slide 17, para a fronteira, podemos dizer que a resposta é $2 - \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$ para o mínimo e máximo pedidos.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema:

Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D}\colon g(x, y) = 0\}$.
Se $P \in \mathcal{C}$ é um extremante da restrição de f a $\mathcal{C}$ e $\nabla g(P) \neq (0, 0)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Nota: O escalar λ é designado por multiplicador de Lagrange.

Multiplicador de Lagrange:

O teorema anterior (respeitadas as condições em f e g) afirma que pontos de $\mathcal{C}$ onde os gradientes de f e g sejam colineares são os candidatos a extremantes condicionados.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Problema: Sejam $\mathcal{D}$ um aberto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em $\mathcal{D}$ e $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathcal{D}\colon g(x,y) = 0\}$.

$$\begin{array}{cl} \text{min/max} & f(x,y) \\ \text{s.a.} & g(x,y) = 0 \end{array}$$

Método:

1. Determinar as soluções (x,y) do sistema[a]
$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases}, \text{ admitindo } \nabla g(x,y) \neq (0,0).$$
2. Verificar se $\nabla g(x_0,y_0) = (0,0)$ em algum ponto $(x_0,y_0) \in \mathcal{C}$; esse ponto poderá também ser extremante.
3. Estudar a natureza dos pontos obtidos.

[a] Em geral, isso também envolve calcular λ.

Exemplo: $\begin{array}{cl} \text{min/max} & f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$

Aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange:

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Observe-se que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 1$
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$

Logo, f e g são funções de classe C^1 (porque têm derivadas parciais contínuas).

Por outro lado, $\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ se $g(x,y) = 0$.

Logo, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 & = & \lambda 2x \\ 2y - 1 & = & \lambda 2y \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda & = & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y & = & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda & = & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Os candidatos a extremantes são: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $Q = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Como a restrição define um conjunto limitado e fechado de $\mathbb{R}^2$ e f é aí contínua, pelo **Teorema de Weierstrass**, P e Q terão que ser os extremantes.

Assim, conclui-se que $f(P) = 2 - \sqrt{2}$ é o mínimo e $f(Q) = 2 + \sqrt{2}$ é o máximo (condicionados).