Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 2 de julho de 2014

Exame da Época de Recurso Duração: 2h30

- Justifique as suas respostas e indique os cálculos efetuados.
- O formulário encontra-se no verso.

---

1. [**35**] Considere a equação diferencial $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 2\cos^2 x\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

   (a) Determine a solução geral da EDO usando um fator integrante.

   (b) Determine a solução geral da EDO usando o método da variação das constantes.

2. [**55**] Considere o seguinte problema de valores iniciais (PVI): $\begin{cases} y'' + 2y' = 2t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$

   (a) Determine a solução do PVI começando por resolver a respetiva EDO pelo método dos coeficientes indeterminados.

   (b) Resolva o PVI usando transformadas de Laplace.

3. [**30**] Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) de cada uma das séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2+1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$.

4. [**15**] Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Mostre que se (b_n) for uma sucessão limitada, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

5. [**15**] Usando o resto na forma de Lagrange, determine um majorante para o erro que se comete ao aproximar a função $f(x) = \cos(4x)$ pelo polinómio de MacLaurin $T_0^2 f(x)$ no intervalo $[-0.01, 0.01]$.

6. [**30**] Considere a série de potências $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$.

   (a) Determine o seu domínio de convergência, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (b) Calcule $S'(1/2)$.

7. [**20**] Considere a função $f(x) = x,\ x \in]-\pi, \pi]$.
   Determine a série de Fourier de f e represente graficamente a sua soma no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Formulário

$F(s)$ – transformada de Laplace da função $f(t)$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,, \ s > 0$
$\mathrm{e}^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,, \ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,, \ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,, \ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,, \ s > \lvert a\rvert$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,, \ s > \lvert a\rvert$
$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f(t-a) \quad (a > 0,\ f \ \text{ nula em } \mathbb{R}^-)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\,,$ onde $f^{(0)} \equiv f$

Nota: Em geral, nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas. Em alguns casos são omitidas as restrições ao domínio das transformadas.