Teste 1: esboço de resolução

[15 p.] 1. Calcule, usando a transformada de Laplace, o valor do integral impróprio $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)e^{-3x}\,dx$.

Pela definição de transformada de Laplace (e pela tabela), $\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(x)\}(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)e^{-sx}\,dx = \frac{1}{s^2+1}$ para $s > 0$.
Logo, $I = \mathscr{L}\{\operatorname{sen}(x)\}(3) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x)e^{-3x}\,dx = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10}$.

[70 p.] 2. (a) Determine, usando a transformada de Laplace, a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - y = e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Seja $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$ a transformada de Laplace da função (incógnita) y. Pela tabela, sabe-se que $\mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) = s^2Y(s) - 2 - s$. Assim, transformando ambos os membros de EDO, pela linearidade tem-se que

$$\mathscr{L}\left\{y'' - y\right\}(s) = \mathscr{L}\{e^x\}(s) \Leftrightarrow s^2Y(s) - 2 - s - Y(s) = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow (s^2-1)Y(s) = \frac{1}{s-1} + s + 2 \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2+s-1}{(s^2-1)(s-1)}.$$

(Só agora podemos concluir que $Y(s)$ está definida para $s > 1$.)
A solução do PVI é dada pela transformada de Laplace inversa de $Y(s)$. Como $(s^2-1)(s-1) = (s+1)(s-1)^2$, então

$$Y(s) = \frac{s^2+s-1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} = \frac{(A+B)s^2 + (-2A+C)s + A - B + C}{(s+1)(s-1)^2}.$$

Os coeficientes A, B e C determinam-se, graças à independência linear das potências, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+C=1 \\ A-B+C=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A \\ C=1+2A \\ A-1+A+1+2A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{5}{4} \\ C=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

sendo, pela linearidade e pela regra do deslocamento da transformada,

$$\begin{aligned} y = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\ &= -\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{5}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = -\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{5}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x}. \end{aligned}$$

Pela teoria sobre PVI com EDO linear de coeficientes constante, o domínio I da solução depende apenas da continuidade do termo independente, sendo neste caso $I = \mathbb{R}$.

---

2. (b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' - y = x^2.$$

A solução geral de uma EDO linear pode sempre ser escrita da forma $y = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da EDO homogénea associada e y_p é uma solução particular da EDO completa.

Como tem coeficientes constantes, a equação homogénea associada, $y'' - y = 0$, resolve-se calculando as raízes da equação caraterística $s^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow s = s_1 = 1$ ou $s = s_2 = -1$, ambas de multiplicidade 1. A cada raiz corresponde um número de soluções igual à sua multiplicidade, $\phi_1 = e^{s_1x} = e^x$ e $\phi_2 = e^{s_2x} = e^{-x}$, que constituem um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada. Portanto, a solução geral é

$$y_h = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 = C_1e^x + C_2e^{-x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dado que o termo independente da EDO completa é uma potência, pode obter-se uma solução particular usando o método dos coeficientes indeterminados. Em particular, $x^2 = p(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x)$ com $p(x) = x^2$, de grau 2, e $\alpha = \beta = 0$. Como $\alpha \pm i\beta = 0$ não é solução da equação caraterística, uma solução particular será dada pela fórmula

$$y_\mathrm{p} = x^0\mathrm{e}^{0x}\big(A(x)\cos(0x) + B(x)\,\mathrm{sen}(0x)\big) = A(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2,$$

sendo, necessariamente, grau$A(x) \leq 2$ — nesta expressão, os coeficientes A_0, A_1 e A_2 são indeterminados. Substituindo $y_\mathrm{p} = A_2x^2 + A_1x + A_0$ e a sua derivada de ordem dois, $y_\mathrm{p}'' = 2A_2$, na EDO completa, tem-se que

$$y_\mathrm{p}'' - y_\mathrm{p} = x^2 \Leftrightarrow 2A_2 - A_2x^2 - A_1x - A_0 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -A_2 = 1 \\ -A_1 = 0 \\ 2A_2 - A_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -1 \\ A_1 = 0 \\ A_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow y_\mathrm{p} = -x^2 - 2.$$

Juntando os resultados obtidos separadamente, $y = y_\mathrm{p} + y_\mathrm{h} = -x^2 - 2 + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, com domínio $\mathbb{R}$.

---

2. (c) Determine uma solução particular da equação diferencial

$$y'' - y = 3\mathrm{e}^x - x^2.$$

[Sugestão: na resolução da alínea (c) pode aproveitar as informações obtidas na resolução das alíneas (a) e (b)]

Observe-se que a solução do PVI da alínea (a), $y_1 = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x} + \frac{5}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}$, é uma solução particular da equação $y'' - y = \mathrm{e}^x$ e que na alínea (b) foi obtida uma solução particular, $y_2 = -x^2 - 2$, da equação $y'' - y = x^2$. Portanto, pelo princípio de sobreposição, uma solução particular de $y'' - y = 3\mathrm{e}^x - x^2$ será

$$y_\mathrm{p} = 3y_1 - y_2 = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-x} + \frac{15}{4}\mathrm{e}^x + \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{-x} + x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Observação: visto que, pela alínea (b), e^x e e^{-x} são soluções da equação homogénea associada, também $y_\mathrm{p} = \frac{3}{2}x\mathrm{e}^{-x} + x^2 + 2$ é uma solução particular da equação dada.

[45 p.] 3. Usando uma substituição adequada, determine a solução geral (em forma implícita) da equação diferencial

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y},\ x > 0.$$

[Sugestão: a EDO é, ao mesmo tempo, homogénea e de Bernoulli]

É uma **EDO homogénea**, pois, em forma normal $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$, o segundo membro da igualdade depende apenas da fração $z = \frac{y}{x}$. Derivando $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$ e substituindo na equação dada, obtém-se

$$z'x + z - z = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z'x = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z \cdot z' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int z\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow \int 2z\,dz = 2\int \frac{1}{x}\,dx \Leftrightarrow$$
$$z^2 = C + 2\ln x \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C + \ln x^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2(C + \ln x^2),\ C \in \mathbb{R}.$$

É uma **EDO de Bernoulli**, já que a equação homogénea associada é linear, mas o termo independente contém o fator y^{-1}. A mudança de variável prevista pela teoria é, neste caso, $z = y^2$, sendo $z' = 2yy'$. Substituindo na equação dada,

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow yy' - \frac{1}{x}y^2 = x \Leftrightarrow 2yy' - \frac{2}{x}y^2 = 2x \Leftrightarrow z' - \frac{2}{x}z = 2x.$$

A EDO linear na incógnita z pode resolver-se usando o fator integrante, que é $\mu = \mathrm{e}^{-2\ln x} = \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$, sendo $-2\ln x$ uma primitiva do coeficiente de z, $-\frac{2}{x}$. Assim,

$$y^2 = z = \frac{1}{\mu}\int \mu \cdot 2x\,dx = x^2\int \frac{2x}{x^2}\,dx = x^2\int \frac{2}{x}\,dx = x^2(C + \ln x^2),\ C \in \mathbb{R}.$$

[55 p.] 4. Considere a equação diferencial linear $(x+1)y''+xy'-y=(x+1)^2$ para $x>0$.

(a) Justifique que $\{x, \mathrm{e}^{-x}\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada e

---

Basta verificar que o conjunto dado contém duas (ordem da EDO) soluções linearmente independentes da equação homogénea associada. Ambas as funções são soluções: substituindo-as na parte homogénea da equação, obtém-se

$$\begin{array}{ll} \text{para } \phi_1 = x, & (x+1)\phi_1''+x\phi_1'-\phi_1=(x+1)\cdot 0+x\cdot 1-x=0, \\ \text{para } \phi_2=\mathrm{e}^{-x}, & (x+1)\phi_2''+x\phi_2'-\phi_2=(x+1)\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}=(x+1-x-1)\mathrm{e}^{-x}=0. \end{array}$$

Finalmente, pela teoria estudada, qualquer conjunto de potências (com expoente não negativo) e funções exponenciais é linearmente independente.

No entanto, para verificar esta propriedade pela definição, é suficiente provar que só quando $a=b=0$, a equação $a\phi_1+b\phi_2=ax+b\mathrm{e}^{-x}=0$ é satisfeita para qualquer valor de x. Em particular, para $x=1$ e $x=2$, tem-se que

$$\begin{cases} a+b\mathrm{e}^{-1}=0 \\ 2a+b\mathrm{e}^{-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a\mathrm{e} \\ 2a-a\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a\mathrm{e} \\ a(2-\mathrm{e}^{-1})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0. \end{cases}$$

Observe-se que todas as condições são satisfeitas em $\mathbb{R}$, logo também para $x>0$.

(b) determine a solução geral da equação completa.

A solução geral é dada pela fórmula $y=y_\mathrm{h}+y_\mathrm{p}$, onde y_h é a solução geral da EDO homogénea associada, ou seja,

$$y_\mathrm{h}=C_1\phi_1+C_2\phi_2=C_1x+C_2\mathrm{e}^{-x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R},$$

pela informação dada na alínea (a), e y_p é uma solução particular da EDO completa. Como não é possível aplicar o método dos coeficientes indeterminados (a EDO não tem coeficientes constantes), pode encontrar-se uma solução particular pelo método da variação das constantes, ou seja, considerando a solução particular dada pela fórmula

$$y_\mathrm{p}=F_1\phi_1+F_2\phi_2=F_1x+F_2\mathrm{e}^{-x},\ \text{onde } F_1 \text{ e } F_2 \text{ são funções incógnitas.} \qquad (*)$$

As funções F_1 e F_2 determinam-se resolvendo o sistema (ver os apontamentos para a notação)

$$\begin{cases} F_1'\phi_1+F_2'\phi_2=0 \\ F_1'\phi_1'+F_2'\phi_2'=\dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1'x+F_2'\mathrm{e}^{-x}=0 \\ F_1'-F_2'\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{(x+1)^2}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_2'=-F_1'x\mathrm{e}^{x} \\ F_1'(1+x)=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_2'=-x\mathrm{e}^{x} \\ F_1'=1 \end{cases}$$

reparando que, na última passagem, o fator $1+x$ pode ser simplificado, pois é diferente de zero para $x>0$.

Após calcular as primitivas (por partes, no caso de F_2) das soluções do sistema, uma solução particular é dada pela fórmula (*) com $F_1=x$ e $F_2=(1-x)\mathrm{e}^{x}$. Substituindo, $y_\mathrm{p}=x\cdot x+(1-x)\mathrm{e}^{x}\cdot\mathrm{e}^{-x}=x^2-x+1$. Logo, a solução geral é

$$y=x^2-x+1+C_1x+C_2\mathrm{e}^{-x},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Observação: também $y=x^2+1+C_1x+C_2\mathrm{e}^{-x}$ é solução geral, pois x é solução da equação homogénea associada.

[15 p.] 5. Justificando devidamente, determine uma solução (expressão e domínio) do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'=\dfrac{y^2-4}{x}, \\ y(1)=2. \end{cases}$$

[Sugestão: não é preciso resolver a equação diferencial]

Repare-se que a EDO é de variáveis separáveis e que, para *separar* as variáveis, antes de dividir, é necessário acrescentar a condição $y^2-4\neq 0$. Contudo, os valores de y tais que $y^2-4=0$, ou seja, $y=2$ e $y=-2$, são soluções constantes (possivelmente singulares); a primeira, satisfazendo a 'condição inicial' $y(1)=2$, é uma solução do PVI dado.

Quanto ao domínio da solução, sabe-se pela definição que é o (maior) intervalo I onde a solução é diferenciável até à ordem da EDO (o que, para uma constante, acontece em $\mathbb{R}$) e são satisfeitas as condições de existência da equação ($0\notin I$) e a condição inicial do PVI ($1\in I$). Juntando as três informações sobre I, deduz-se que $I=\mathbb{R}^+$.
