Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 2 de Abril de 2014

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

- Justifique as suas respostas e indique os cálculos efetuados.
- Tenha em atenção a clareza e a apresentação das suas respostas.
- Eventuais dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

---

1. **[70]** Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' - \dfrac{2x}{1+2x^2}\, y = x.$

   (b) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}\,, \quad x > 0.$

   (c) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{2\,e^{3x}}{x}\,, \quad x > 0.$

2. **[50]**

   (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y''' + 4y' = 0.$

   (b) Determine uma solução da equação diferencial $y''' + 4y' = \cos(3x).$

   (c) Sabendo que e^{x^2} é uma solução da equação $y''' + 4y' = f(x)$, indique, justificando, a solução geral da equação linear

   $$y''' + 4y' = f(x) + \cos(3x).$$

3. **[50]** Considere o problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t\,e^t + 4 \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

   (a) Justifique que o problema dado possui uma única solução, f, (em $\mathbb{R}$) e mostre que a sua transformada de Laplace é dada por

   $$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2}\,, \quad s > 1.$$

   (b) Determine a solução f do problema.

4. **[30]** Considere a equação diferencial $2y'' - 3y' - 2y = 0.$

   (a) Obtenha um sistema fundamental de soluções para a equação.

   (b) Usando o resultado obtido na alínea anterior, resolva o problema de Cauchy para a equação dada com as condições iniciais $y(0) = \alpha$ e $y'(0) = \beta$ (onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

   (c) Indique a condição que α, β devem verificar por forma a que a solução φ do problema da alínea anterior satisfaça

   $$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Formulário

$F(s)$ – transformada de Laplace da função $f(t)$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s>0$
$\mathrm{e}^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s>a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s>0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s>0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s>\|a\|$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s>\|a\|$
$\mathrm{e}^{\lambda t}f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f(t-a) \quad (a>0,\ f$ nula em $\mathbb{R}^-)$	$\mathrm{e}^{-as}F(s)$
$f(at) \quad (a>0)$	$\dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)\,,$ onde $f^{(0)} \equiv f\,,$

Nota: Em geral, nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas. Em alguns casos são omitidas as restrições ao domínio das transformadas.