Cálculo - II - Estudo Teste 1

DATAS	CONTEÚDO/ CAPÍTULO/ SECÇÃO	RESULTADO DE APRENDIZAGEM	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM
	Séries numéricas	Analisar se uma dada série é convergente e calcular a soma de séries convergentes.	Definir série numérica.
			Distinguir entre série numérica convergente e divergente.
			Identificar séries geométricas e séries de Mengoli.
			Selecionar o critério adequado para a aplicar a uma dada série.
			Aplicar critérios de convergência e propriedades das séries para determinar a natureza de uma série.
			Calcular a soma de uma série geométrica convergente.
			Calcular a soma de uma série de Mengoli convergente.
	Séries de potências	Aproximar funções por polonómios	Definir uma série de potências.
			Determinar o raio, intervalo e o domínio de convergência de uma série de potências.
			Construir e utlizar a fórmula de Taylor para uma função dada.
			Calcular aproximações de funções.
			Majorar o erro cometido em aproximações.
		Reconhecer e aplicar técnicas para determinar a série de Taylor de uma dada função.	Definir série de Taylor.
			Utilizar as propriedades das séries de potências.
			Determinar a série de Taylor de uma dada função.
	Séries de Fourier	Obter séries de Fourier para funções periódicas.	Definir série de funções.
			Distinguir convergência pontual de convergência uniforme.
			Determinar o domínio de convergeência de uma série de funções.
			Definir série de Fourier.
			Utilizar as propriedades das séries de Fourier.
			Calcular os coeficientes de Fourier para uma dada função.
			Calcular a função soma de uma série de Fourier.
			Determinar a soma de algumas séries numéricas utlizando séries de Fourier.

Série Numéricas

- O que é uma série numerica?

  - É uma soma infinita de todos os termos de uma sucessão

- Convergencia de uma série

  - Dizemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito

Soma parcial dos primeiros n termos

Ao valor deste limite se as condicões forem verdadeiras chamamos de soma de série

Exemplo 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \qquad S_n = ? \qquad \lim S_n = ?$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) \cancel{+ \dots +} \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1}$$

$\lim S_n = \lim\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 + 0 = 1$, logo a série é convergente c/ soma de série de 1.

Exemplo 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+2)}\right) \qquad S_n = ? \qquad \lim S_n = ?$$

$$\underset{\times(n(n+2))}{\frac{1}{n(n+2)}} = \underset{\times(n(n+2))}{\frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}} \iff 1 = A(n+2) + Bn \iff 1 = An + 2A + Bn$$

$$\iff 1 = (A+B)n + 2A$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A \\ A = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2m} - \frac{1}{2(m+2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right)$$

$$S_m = \sum_{m=1}^{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{6}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} \right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

, logo $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m(m+2)} \right)$ é convergente

Exemplo 3

$\rightarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$\rightarrow (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - 1} = \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(m-1)(m+1)} \right)$$

$\times(m-1)(m+1)$ $\qquad$ $\times(m-1)(m+1)$

$$\frac{1}{(m-1)(m+1)} = \frac{A}{m-1} + \frac{B}{m+1} \Leftrightarrow 1 = A(m+1) + B(m-1) \Leftrightarrow 1 = Am + A + Bm - B$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)m + A - B$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ -B - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{2}}{m-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{m+1} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2(m-1)} - \frac{1}{2(m+1)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right)$$

$$S_m = \sum_{m=2}^{k} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} \right) + \cancel{\dots} + \cancel{\dots}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{1}{m^2-1} = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

⚠ Isto pode ser confirmado no GeoGebra

$$b = \text{Sum}\left(\frac{1}{n^2 - 1}, \underbrace{n, 2}_{m=2}, \underbrace{1000}_{\text{até } m = 1000 \text{, (simula +/- o } \infty)} \right)$$

$$= 0.7490004995005$$

$\simeq 0{,}75$

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ ✓

Séries Convergentes

- Series Geométricas 1
- Séries Mengoli 2

1 Series Geométricas

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{m-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} a r^m = \sum_{m=1}^{+\infty} a r^{m-1}$$

- $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o primeiro termo da série e r é a razão

$$S_m = \begin{cases} m a & \text{se } r = 1 \\ \dfrac{1 - r^m}{1 - r} a & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

$|r| \geq 1 \longrightarrow$ diverge

$|r| < 1 \longrightarrow$ converge

Se converge?

$$\text{Soma} = \frac{a}{1 - r}$$

Exemplo 1

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}\cdot 3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underset{r}{\frac{2}{3}}\right)^{n} \times \underset{a}{\frac{1}{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = \frac{a}{1-r}, \text{ se } |r|<1 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$c = \mathrm{Sum}\left(\frac{2^{n-1}}{3^n}, n, 1, 1000\right)$$

$$= 1$$

2 Séries Mengoli

Uma série diz-se Série de Mengoli se o seu termo geral poder ser escrito destas 2 formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \qquad a_n = u_{n+p} - u_n$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u_{k+p} - u_k\right) = u_{n+1} + \dots + u_{n+p} - (u_1 + \dots + u_p)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - u_{k+p}\right) = u_1 + \dots + u_p - (u_{n+1} + \dots + u_{n+p})$$

Critério da Comparação

1. Se $\sum a_n$ é $\underbrace{\text{convergente}}_{\text{O seu valor numérico é finito}}$ e $\sum b_n \leqslant \sum a_n$, então $\sum b_n$ é convergente (Isto para as séries de termos positivos!)

Exemplo:

Sabemos que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, sendo $\sum b_n$ c/ $b_n = \frac{1}{n^2+n}$, recorrendo ao critério da comparação

$\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$, logo a série $\sum b_n$ também converge.

2. Se $\sum a_n$ é $\underbrace{\text{divergente}}_{\text{O seu valor numérico é infinito } \infty}$ e $\sum b_n \geqslant \sum a_n$, então $\sum b_n$ é divergente

3. Série de Dirichlet

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \begin{array}{l} \text{Se:} \\ \alpha > 1, \text{ converge} \\ \alpha \leqslant 1, \text{ diverge} \end{array}}$$

Exemplos:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2} \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{\text{Converge, pois } 2>1} \Longrightarrow \sum b_n \leqslant \underbrace{\sum a_n}_{\text{converge}}$, logo $\sum b_n$ converge ✓

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

(Se tirar o 1 fica maior ↑)

$3>1$, logo a série converge, (é a mesma justificação da de cima)

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} > \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Divergente } (\alpha=1)}$

$\ln(n) > 1$, a partir de certa ordem

→ Divergente, pelo C.C

Critério do Integral

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e o integral $\int_1^{+\infty} a_x\, dx$ têm a mesma natureza

Exemplos:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\operatorname{arctg}(x) \right]_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ Pelo critério do Integral a série é convergente

Critério do Limite

Se existe $L = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$, se L:

- $L \in \mathbb{R}^+$ $(L > 0)$, então as séries têm a mesma natureza
- $L = 0$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.
- $L = +\infty$, e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também diverge.

Critério D'Alembert & Critério da Raiz

Critério D'Alembert: $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$

Critério da Raiz: $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$

$L < 1 \longrightarrow$ absolutamente convergente

$L > 1 \longrightarrow$ divergente

Critério de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{a_n}_{\text{Sempre } (>0)} \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{a_n}_{\text{Sempre } (>0)}$$

Para usar este critério é preciso verificar as condições:

1. $a_n \geq 0$
2. a_n é decrescente (a partir de certo n)
3. $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$\Big\}$ ✓ — então $\longrightarrow$ série alternada convergente

Série de termos não negativos

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, e $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ então podemos chamar de série de termos não negativos.

Teorema: A sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente

Teorema: A série é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é limitada superiormente

Convergência Simples e absoluta

- Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente série dos módulos.

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se simplesmente convergente

Exercícios :

$$a_n = \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$$

$b_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum b_n$ converge pois $p > 1$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = \lim \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)} =$$

$$\lim \frac{1}{1+\frac{\sqrt{n}}{n^2}} = \lim \frac{1}{1+\underbrace{\cancel{n^{3/2}}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$$, como $L > 0$ $(1 > 0)$ então

a série a_n tem a mesma natureza que b_n logo converge.

2) Quando temos termos c/ fatoriais, potências ou exponenciais → Critério de D'Alembert.

Para uma série c/ termos positivos a_n, calculamos L :

$$L = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se :

$L < 1$, a série converge

$L > 1$ ou $L = \infty$, a série diverge

$L = 1$, a série não conclui nada

Estudar a série $\sum \frac{n}{2^n}$

D'Alambert

$$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim \left| \frac{n+1}{\underbrace{2^{n+1}}_{2^n \cdot 2}} \cdot \frac{2^n}{n} \right| = \lim \left| \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{n} \right|$$

$$= \lim \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \right|$$

1

$$= \frac{1}{2}, \; L < 1, \text{ logo}$$

a série converge.

3) Se a série vem de uma função contínua e decrescente $\longrightarrow$ Critério do Integral

exemplo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}, \text{ sendo } f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\int f(x)\, dx = \int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln |u| = \ln |\ln(x)|$$

Seja
$u = \ln(x)$
$du = \frac{1}{x} dx$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} = \lim \Big(\ln|\ln(x)| - \ln(2) \Big) = \infty, \text{ logo } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)} \text{ diverge.}$$

7. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n+5]^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^3}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n}$ $(0 < b < 1)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n}$ $(d > 0)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+n-1}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n+1}{2^n-1}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n\cos(n\alpha)}{n^{2n}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$

(x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (Sugestão: $(\ln n)^{\ln n} > n^2$ para n suficientemente grande)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

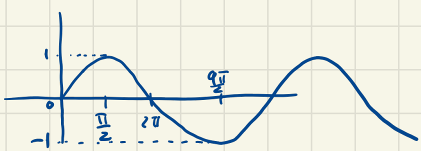
$$\lim \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}} = \lim \frac{n}{\sqrt{3n^2}} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}.\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$ → Logo a série diverge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}} =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, logo a série diverge

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right) =$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2\pi}{2}\right) =$



1; 0; −1; 1; 0; −1; ... Logo a série diverge

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n)} =$

Critério do integral $\longrightarrow \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln(x)}\,dx$

$\downarrow$

diverge

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

calc

$$\int \frac{1}{\ln(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u} \cdot e^u \cdot du$$

$$= \int \frac{e^u}{u} \cdot du$$

Seja

$u = \ln(x)$

$du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$dx = x \cdot du$

$x = e^u$

e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} =$

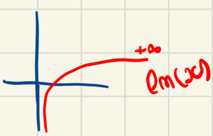
$$\int \frac{\ln(x)\,dx}{x} = \int \frac{u}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \cdot du = \int u \cdot du = \frac{u^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$u = \ln(x)$

$du = \dfrac{1}{x}\,dx$

$dx = x \cdot du$

$$\frac{u^2}{2}\Bigg|_2^{\infty} = \left(\frac{\ln(x)^2}{2}^{\nearrow +\infty} - \frac{\ln(2)^2}{2}\right) = +\infty,$$ logo recorrendo ao critério do integral a série diverge.



f)

7. (f) Como

$$0 < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}} < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5}} \leq \frac{n+n}{\sqrt{2n^5}} = \frac{2n}{\sqrt{2n^5}} = \sqrt{2}\frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ é convergente, pelo Critério de Comparação, a série dada é convergente.

Séries de Potencia e Fórmula de Taylor

- Chama-se séries potências centradas em $c \in \mathbb{R}$ a uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots + a_n (x-c)^n + \dots + (1)$$

(convenção)
$a_0 (x-c)^0 = 0^0 = 1$

onde : $a_n \in \mathbb{R}$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

Os números a_n são designados de coeficientes da série

Nota :

No caso em que $c = 0$ temos a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que se chama série de potência centrada na origem.

Domínio de convergencia - conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}$ para quais a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ é convergente

Exemplo :

- Para que valores de x a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-4)^n}{n}$ converge ?

1. Teste da razão

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(x-4)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-4)^n}{n}} \right| = \left| \frac{\cancel{(x-4)^n} \cdot (x-4)^1}{n+1} \cdot \frac{n}{\cancel{(x-4)^n}} \right| =$$

$$= |x-4| \cdot \frac{n}{n+1}$$

Tem de ser <1 ; Raio de convergencia

$$\lim_{n \to +\infty} \left(|x-4| \cdot \frac{n}{n+1} \right) = \underbrace{|x-4| \cdot 1}_{\text{Tem de ser } <1} < 1 \iff |x-4| < 1$$

· Descobrir o intervalo de convergência ?

$$-R < x-4 < R$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < x-4 < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3}} < x < \underline{\underline{5}}$$

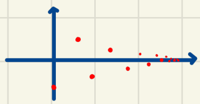
⚠ É preciso descobrir se os intervalos são fechados ou abertos

Substituir na série inicial

· $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\Downarrow$$



$\Rightarrow$ Série convergente

$\downarrow$

Logo vai ser fechado

$3 \leqslant$

· $x = 5$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Série Divergente}$$

$(p \leqslant 1)$

$\downarrow$

Logo vai ser aberto

< 5

Intervalo de convergencia $\Rightarrow$ $[3, 5[$

Raio de convergencia $= 1$

Exemplo : 2

· Raio de convergencia e intervalo de convergencia da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^{n+1}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{n+1(x+2)^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{n(x+2)^n}{2^{n+1}}} \right| = \left| \frac{n+1(x+2)^{n+1}}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n(x+2)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{n+1(x+2)^{n+1}}{2^n \cdot 2^2} \times \frac{2^n \cdot 2}{n(x+2)^n} \right|$$

$$= \left| \frac{n+1\,(x+2)^{n+1}}{\cancel{2^{n}}\cdot \cancel{2^{2}}} \times \frac{\cancel{2^{n}}\cdot\cancel{2}}{n\,(x+2)^{n}} \right| = \left| \frac{n+1\,(x+2)^{n+1}}{2} \times \frac{1}{n\,(x+2)^{n}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \times \frac{n+1\,(x+2)^{\cancel{n+1}}}{n\,(x+2)^{\cancel{n}}} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot x+2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot |x+2|$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot |x+2| \right) = \frac{1}{2} \cdot |x+2| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x+2| < 2$$

Raio de convergencia

$$-2 < x+2 < 2$$

Para:

$$-4 < x < 0$$

$x = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cancel{2^{n}}}{\cancel{2^{n}} \cdot 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \longrightarrow$$ Série Divergente

$x = -4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(-2)^{n}}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot n}{2} \longrightarrow$$ Série Divergente

• Intervalo de convergencia $\rightarrow\ ]-4, 0[$ e/ Raio $= 2$

Raio de Convergencia

Seja $\sum_{n\to+\infty}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências com $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$

① $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, se o lim existir.

② $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, se este lim existir.

⚠ Cuidado c/ a aplicação: a série tem que apresentar uma escrita tal igual como no enunciado da proposição

Polinómio de Taylor

$$T_c^n f(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\overset{\text{derivada}}{f^{(k)}}(c)}{k!}(x-c)^{\overset{\text{potencia}}{k}}$$

, é designado por polinómio de Taylor de ordem n da função f no ponto c.

Polinómio de Taylor

$$T_c^n(f(x)) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Polinómio de MacLaurin

$$T_0^n(f(x)) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Nota

- Caso $c=0$ o polinómio T_0^n passa a ser designado por polinómio de MAC Laurin de ordem n da função f.

Exemplo 1

$$T_0^{2m+1}(\operatorname{sen}(x)) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Fórmula de Taylor

- Esta é a formula de Taylor c/ o resto de Lagrange.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\substack{T_c^m f(x) \\ \text{(Polinómio de Taylor)}}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}}{(m+1)!}(x-c)^{m+1}}_{\substack{R_c^m f(x) \\ \text{(Resto de Lagrange)}}}$$

(Resto de Lagrange) – mede o erro de aproximação (diz "quanto falta" para que o PL iguale exatamente a função $f(x)$)

Exemplo

- Aproximar e^x à volta de $c=0$ (MacLaurin), c/ $m=2$

$$T_0^2 = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$T_0^2 e^x = e^0 + \frac{(e^0)'}{1!}(x)^1 + \frac{(e^0)''}{2!}(x)^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$R_0^2 f(x) = \frac{f^{(2+1)}(\alpha)}{(2+1)!}(x-0)^{2+1}$$

$$R_0^2 e^x = \frac{e'''(\alpha)}{3!} x^3$$

$$= \frac{e^\alpha}{6} x^3, \text{ c/ } \alpha \in (0, x)$$

Derivadas (e^x)

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$$R: \; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{e^\alpha}{6} x^3}_{\text{Erro}}, \text{ com } \alpha \in (0, x)$$

Majorantes do resto de Lagrange

- Módulo do resto de Lagrange $R_c^m f(x)$ é o erro absoluto cometido quando tomamos $T_c^m f(x)$ por $f(x)$

$$|R_c^m f(x)| = |f(x) - T_c^m f(x)|$$

Polinómio de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\boxed{n}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Aproximação de uma função a um certo ponto (a)
(finita)

Série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\boxed{\infty}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Soma infinita dos termos, a série representa a função se convergir nesse intervalo

$$P_n(x) \neq f(x)$$

Funções Analíticas

Para $f(x)$ ser uma função analítica é preciso:

- Ter derivadas de todas as ordens em c.
- Existir um r que r > 0 tal que $]c-r, c+r[$ a série de Taylor de f converge para a própria função

Exemplo

1. $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é analítica em $c = 0$?

→ Tem derivadas de todas as ordens? ✓

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\vdots$$

→ Converge? ✓

$$g^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow g^{(n)}(0) = n!$$

Converge ou Diverge?

Então: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$

$|x| < 1$ converge ; $|x| \geq 1$ diverge

se $|x| < 1$, converge
se $|x| \geq 1$, diverge

$\dfrac{1}{1-x} < 1$, logo converge

ou:

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{x^{n+1}}{x^n} = \lim \frac{x^n \cdot x}{x^n} = \lim_{n \to +\infty} x < 1 \text{ R}$$

$(-1, 1)$

L converge, logo converge em $x = 0$

Logo é uma função analítica em $x=0$.

Nota - Ver anexos capítulo II (20 - 26)

Exercícios capítulo 2 - parte 1 "Ficha de exercícios"

1 Domínio de convergência & Pontos de convergência simples ou absoluta

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\, x^n =$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\cancel{n+1}\,(n+1+1)\, x^{n+1}}{n(\cancel{n+1})\, x^n} \right| = \left| \frac{(n+2)\, x^{n+1}}{n \cdot x^n} \right| = \left| \frac{(n+2) \cdot \cancel{x^n} \cdot x}{n \cdot \cancel{x^n}} \right| =$$

$$\left| \frac{(n+2) \cdot x}{n} \right| = \left| \frac{x \cdot n + 2x}{n} \right| = \left| \frac{x \cdot \cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{2x}{n} \right| = \left| x + \frac{2x}{n} \right|$$

Raio de convergência

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| x + \cancel{\frac{2x}{n}}_{\to 0} \right| = |x| + 0 = |x| < 1$$

Verificar se é fechado ou aberto.

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Para $x = 1$

Vai ser sempre 1 ($1^1 = 1$; $1^2 = 1$; $1^3 = 1$; ...)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot 1^n \rightarrow (n+1) = 2, 3, 4, 5, \ldots \text{ Diverge}$$

Para $x = -1$

Também diverge

Convergência absoluta pq estamos dentro do raio $= 1$

$-1 < x < 1$

b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(2x)^m}{\underbrace{(m-1)!}_{k}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2x)^{k+1}}{k!} = 2x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^k}{k!}$

$k = m-1$

$\Leftrightarrow m = k+1$

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

$= 2x \cdot e^{2x}$

$2x \cdot e^{2x} < 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ ✗

Soluçã correta:

$$\lim_{m\to+\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \lim \left| \frac{\frac{2x^{(m+1)}}{(m+\cancel{1}-1)!}}{\frac{2x^m}{m-1!}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{2x^{m+1}}{m!}}{\frac{2x^m}{m-1!}} \right| = \lim \left| \frac{2x^{m+1}}{m!} \cdot \frac{(m-1)!}{2x^m} \right|$$

$$= \lim \left| \frac{2\cancel{x^m} \cdot 2x}{m!} \cdot \frac{(m-1)!}{2\cancel{x^m}} \right| = \lim \left| \frac{2x}{m!} \cdot (m-1)! \right|$$

⚠ $m! = m.(m-1)!$

$$= 2x \cdot \lim \left| \frac{m-1!}{m!} \right|$$

$$= 2x \cdot \lim \left| \frac{(\cancel{m-1})!}{m.(\cancel{m-1})!} \right| = 2x \cdot \lim \left(\frac{1}{m}\right)$$

$= 2x \cdot 0$

$= 0$

↳ Domínio de convergência

$\mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1}$ $k = m+1$ $\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} -1^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$

$m = k-1$

$$\Leftrightarrow \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim \left| \frac{\cancel{-1^k} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}}{\underbrace{\cancel{-1^{k-1}}}_{(|-1|^!=1)} \cdot \frac{x^k}{k}} \right| = \lim \left| \frac{\cancel{x^{k+1}}}{k+1} \cdot \frac{k}{\cancel{x^k}} \right| = \lim \left| \frac{k}{k+1} \right|$$

$\Leftrightarrow |x| \times \lim_{k\to\infty} \cancel{\frac{k}{k+1}} = |x| \cdot 1 = |x| \longrightarrow |x| < 1$ Raio

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{k(1)}{k(1+\frac{1}{k})}\right| = \frac{1}{1+0} = 1$

$-1 < x < 1$

? ?

$x = -1$

$$\sum_{k=2}^{\infty} -1^{k-1} \cdot \frac{-1^k}{k} = \sum_{k=2}^{\infty} -\frac{1}{k}$$

Diverge ~ Série harmónica $1 \geq 1$

$x = 1$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \longleftarrow \text{Critério de Leibniz}$$

é convergente

$a_n > 0$ ✓

$\lim \frac{1}{k} = 0$ ✓

sucessão a_n é monótona decrescente ✓

$]-1, 1]$, simplesmente convergente em $x = 1$
absolutamente convergente nos restantes

Definição: Seja (f_n) uma sequencia de funções. Podemos definir a série de funções associada aos termos de (f_n) à sequencia dada por: $S_n = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$$

Convergência Pontual VS Convergência Uniforme

1 Convergência Pontual

- Para cada $x \in D$, a sequencia $f_n(x)$ converge para $f(x)$

$$\forall x \in D, \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

exemplo

$$f_n(x) = x^n \quad \text{em } [0,1]$$

- Se $x \in [0,1[$, então $x^n \to 0$ $\quad (f_1(0{,}5) = 0{,}5\,;\; f_2(0{,}5) = 0{,}25\,;\; f_3(0{,}5) = 0{,}125 \dots \to 0$
- Se $x = 1$, então $x^n = 1 \;\; \forall n$ $\quad (f_1(1) = 1\,;\; f_2(1) = 1,\; f_3(1) = 1, \dots \to 1$

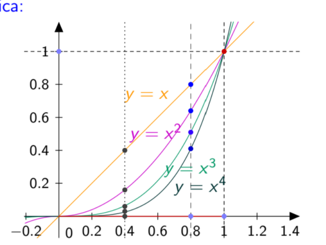
Logo a função para o $\lim_{n \to +\infty}$ fica: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

✓ - Convergencia Pontual

✗ - Convergencia Uniforme

, pois o limite depende do ponto x

Ilustração gráfica:

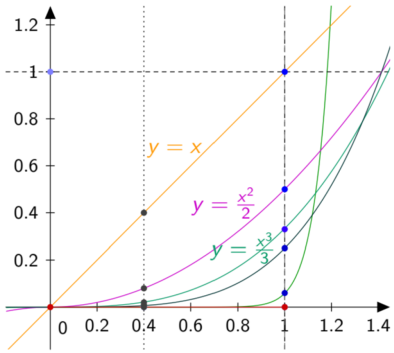


$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2

3. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $x \in [0,1]$, converge pontualmente para a função nula.

Ilustração gráfica:



- **Caso** $x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0, \quad \text{pois } x^n \to 0 \text{ (exponencialmente) e } n \to \infty.$$

- **Caso** $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\Downarrow$$

Conclusão:
A sequência g_n converge pontualmente para a **função nula** $g(x) = 0$ em todo o intervalo $[0,1]$.

2. Supremo e Máximo

Intervalo	Supremo	Máximo	Explicação
`[2, 5]`	5	5	O extremo `5` está incluído.
`]0, 1[`	1	Não existe	`1` não pertence ao intervalo.
`[3, 7[`	7	Não existe	`7` não está incluído.
`]-∞, 4]`	4	4	`4` está incluso.

2 Convergência Uniforme

- Diz que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D se a sucessão numérica de termo geral $u_n := \sup_{(x\in D)} |f_n(x) - f(x)|$ for um infinitésimo, ou seja $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(supremo da diferença)

1. Determinar a função limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

2. Calcular o módulo da diferença

$$u = |f_n(x) - f(x)|$$

3. Calcular o supremo (sup)

$$u_n = \sup_{x\in D} |u|$$

↳ como se faz? Ir ao domínio e ver qual é o supremo, depois é só substituir em u

4. Fazer o limite de u_n

$$\lim_{n \to \infty} u_n, \begin{cases} \text{se o } \lim = 0 \text{ então: a sucessão converge uniformemente} \\ \text{se o } \lim \neq 0 \text{ então: a sucessão não converge uniformemente} \end{cases}$$

Proposição: A convergência uniforme implica a convergência pontual.

Propriedades das sucessões convergentes uniformemente

• Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$.

Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $[a, b]$, então:

i) f é contínua em $[a, b]$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(c) = f(c)$

ii) f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\,\underset{x \neq n}{dx} = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

iii) Se f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e sucessão $(f'_n)_{n \in \mathbb{R}}$ converge uniformemente em $[a, b]$ então:

f é diferenciável em $[a, b]$ & $f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b]$

Nota

• Podemos usar os critérios para provar que a série não conv. uni.

Critério de Weierstrass

(condição suficiente de convergência uniforme de uma série de funções)

- Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definidas em D.
- Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica de termos não negativos.

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in D$$

e se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D