Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo II - agr. 4 **2013/14**

época de recurso: 1.º teste, 2.º teste ou global Duração: 2h30

- **1.º TESTE: questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6.**
- **2.º TESTE: questões 7, 8, 9, 10, 11 e 12.**
- **GLOBAL (toda a matéria): questões 1, 2, 5, 7, 10 e 12, assinaladas com (G).**
- **Assinala no campo "época" do cabeçalho da folha de prova qual das 3 situações anteriores é aplicável ao teu caso. No caso de nada assinalares, a prova será corrigida como GLOBAL.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados.**

1.º teste em recurso

1. **(G)** Determina integrais gerais para as seguintes equações diferenciais ordinárias:

   (a) $y' + y = 1 + x^2\,;$ (b) $y' \cos y = -\dfrac{x \sin y}{1+x^2}\,.$

2. **(G)** Considera o seguinte PVI:
$$y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$
   Resolve-o começando por resolver a respetiva EDO pelo método dos coeficientes indeterminados.

3. Calcula as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções:

   (a) $\dfrac{1}{(s-1)^2+1}\,;$ (b) $\dfrac{s}{(s-1)^2+1}\,.$

4. Considera o mesmo PVI da questão 2. Resolve-o agora através do uso de transformadas de Laplace.

5. **(G)** Considera a EDO linear completa (de coeficientes variáveis)
$$t^2y''(t) - ty'(t) + 2y(t) = t\ln t, \quad t > 0.$$
   Verifica que, dada uma qualquer solução $y(t)$ desta EDO, a função $z(x) := y(e^x)$ é solução da EDO linear completa de coeficientes constantes
$$z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. (a) Sabendo que $P(y, y', \dots, y^{(n)}) = b(x)$ é uma EDO linear de ordem n, indica a forma mais geral que $P(y, y', \dots, y^{(n)})$ pode assumir.

   (b) Prova o princípio de sobreposição para tais equações. Isto é, prova que se y_1 for solução de $P(y, y', \dots, y^{(n)}) = b_1(x)$ e se y_2 for solução de $P(y, y', \dots, y^{(n)}) = b_2(x)$, então $y_1 + y_2$ é solução de $P(y, y', \dots, y^{(n)}) = b_1(x) + b_2(x)$.

Cotação:

1. 4; 2. 3; 3. 3; 4. 5; 5. 2; 6. 3.

2.º teste em recurso

7. **(G)** Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n/2}}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

8. Calcula a soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1} + 3^n}{2^{2n-1}}$.

9. Sejam $f(x) = \ln(x-1)$, $x > 1$, e $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Calcula $f'(x)$ e verifica, por indução, que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(x-1)^{-n}$.

   (b) Usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, descobre um valor de n para o qual $(T_2^n f)(3)$ seja um valor aproximado de $f(3)$ com erro inferior a 10^{-3}.

10. **(G)** Considera a função f real de variável real x dada pela soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x-1)^n}{n}.$$

   (a) Determina o domínio de convergência da série.

   (b) Mostra que $f'(x) = -\frac{1}{x}$ no intervalo de convergência da série.

   (c) Determina $f^{(10)}\left(\frac{1}{3}\right)$.

11. Calcula a soma da série dada na questão anterior.

12. **(G)**

   (a) Define série de Fourier de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2π e integrável em $[-\pi, \pi]$.

   (b) Explica detalhada e justificadamente como é possível obter uma série de Fourier de senos para uma função integrável $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.

Cotação:

7. 4; 8. 3; 9. 4; 10. 4; 11. 2; 12. 3.