Universidade de Aveiro
Exame Final de Cálculo II

Duração: 2h 30min
16 de Junho de 2014

1. **(30 pts)** Considere a equação diferencial ordinária homogénea
$$(1-x)y'' + xy' - y = 0, \ x \in]1, +\infty[.$$
   (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação diferencial.
   (b) Determine o seu integral geral.
   (c) Considere a equação diferencial $(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \ x \in]1, +\infty[$.
      i. Determine a constante A tal que $y = Ax^2$ seja uma solução particular desta equação diferencial;
      ii. Indique o integral geral desta equação diferencial.

2. **(25 pts)** Para cada inteiro positivo n, considere a família de curvas $y_n = ke^{nx}$, $k \in \mathbb{R}$.
   (a) Escreva uma equação diferencial de primeira ordem cujo integral geral seja a família de curvas y_n.
   (b) Obtenha a equação diferencial das trajetórias ortogonais à família de curvas y_n.
   (c) Integrando a equação diferencial obtida na alínea anterior, determine a família de trajetórias ortogonais a $y_n = ke^{nx}$, $k \in \mathbb{R}$.

3. **(25 pts)** Obtenha a solução geral da equação diferencial de Bernoulli $y' - y = xy^3$.

4. **(25 pts)** Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos^2 n}{2^n}$ é absolutamente convergente.

5. **(25 pts)** Considere a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$.
   (a) Mostre que se trata de uma série de Mengoli.
   (b) Determine a soma da série.

6. **(35 pts)** Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
   (a) Determine o raio e o domínio de convergência da série de potências.
   (b) Indique a função soma da série de potências, bem como o seu domínio.
   (c) Utilizando a alínea anterior, obtenha a representação em série de potências da função $f(x) = \operatorname{arctg} x$ e indique o domínio onde essa representação é válida.

7. **(35 pts)** A série de Fourier da função f, periódica de período 2π, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = x^2$ é
$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$
   (a) Mostre, usando o Critério de Weierstrass, que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
   (b) Indique, sem calcular, a expressão para determinar os coeficientes de Fourier, a_n e b_n, da função f e justifique o facto de $b_n = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Esboce o gráfico da função soma da série dada no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$. Justifique.
   (d) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$