Universidade de Aveiro — 24 de Junho de 2013

Exame Final de Cálculo II — Duração: 2h 30 min

Identificação do aluno

Nome:______________________________ Nº Mec.:__________

Questão	1	2	3	4	5	6	7
Cotações	20	30	60	15	30	20	25
Classificação							

Classificação Final

____

Declaro que desisto ______________________ Nº folhas suplementares: ________

1. Indique o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, então $y_3 = 3e^x + 5e^{-x}$ também é solução da mesma equação diferencial. . . . . ☐

   (b) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é convergente em $x = 2$, então a série é absolutamente convergente em $x = -1$. . . . . ☐

   (c) Se a série de MacLaurin de uma função f é $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^n$, então $f^{(15)}(0) = -\frac{1}{30}$. . . . . ☐

   (d) A soma da série trigonométrica de Fourier da função 2π-periódica definida por $f(x) = x$ em $]-\pi, \pi]$ vale π em $x = \pi$. . . . . ☐

2. Determine:

   (a) uma função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ cuja transformada de Laplace é $F(s) = \dfrac{s+1}{(s+3)(s+2)}$;

   (b) a solução da equação diferencial $y'' + 4y' + 3y = e^{-2t}$ que satisfaz as condições $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$.

3. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' + \dfrac{1}{x-1} y = (x-1)^{-3}$;

   (b) $(1 + x^2)y' - xy = 0$;

   (c) $2y'' - 4y' - 6y = 3xe^{2x}$.

4. Estude a natureza da seguinte série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^3+4}$.

5. Determine o raio e o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (2x-1)^n$.

6. Sabe-se que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para qualquer $x \in]-1,1[$.

   Determine uma representação em série de potências de $f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$ e indique o maior intervalo onde essa representação seja válida.

7. Considere a função 2π-periódica f tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x < \pi \\ 1+x, & -\pi \le x < 0 \end{cases} .$$

   Verifique que a função f é par e determine a série de Fourier associada a f.

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	1	t^n	e^{at}	$\text{sen}(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $s > s_f$	$\dfrac{1}{s}$ $s > 0$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N},\ s > 0$	$\dfrac{1}{s-a}$ $s > a$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $s > 0$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $s > 0$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$