



Nº mec. _____ Nome: _____

Comece por escrever o seu número e nome nas quatro folhas do enunciado. Cada folha contém uma questão, a que deve responder na própria folha (frente e verso), justificando claramente a sua resposta. Pode consultar apenas o seu formulário e não pode utilizar qualquer equipamento eletrónico. Boa sorte!

1. (4,0 val.) Considere a função definida por

$$f(x) = \sqrt{\arctan(x) + \frac{\pi}{2}}.$$

- (a) Caracterize a função f , determinando o seu domínio, contradomínio, zeros e estudando a monotonia da função.
- (b) Mostre que f é invertível, determine a expressão que define a sua inversa f^{-1} e caracterize também esta função (domínio, contradomínio, zeros e monotonia).
- (c) Calcule as derivadas de f e f^{-1} e mostre que, com $y = f(x)$, se verifica

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}.$$

2. (4,0 val.) Considere a função $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x) \ln(x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, utilizando a Regra de Cauchy e diga, justificando, se f é contínua em 0.
- (b) Determine a função derivada de f , indicando o seu domínio.
- (c) Enuncie o Teorema de Rolle e aplique este teorema para mostrar que existe pelo menos um ponto em que a derivada desta função f se anula.

Nº **mec.** _____ **Nome:** _____

3. (6,0 val.) Calcule as seguintes primitivas

(a) $\int x^2 e^x dx.$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

(c) $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^2} dx.$

Nº mec. _____ Nome: _____

4. (6,0 val.) Resolva os seguintes problemas

(a) Determine a função F tal que

$$F'(x) = \left(\int_x^{x^2+1} e^t dt \right)' \text{ e } F(0) = 0.$$

(b) Determine o valor de $k > 0$ de modo a que a área da região definida por

$$0 \leq x \leq \sqrt[3]{k} \text{ e } 0 \leq y \leq x^2$$

seja igual a π .

(c) Efetue uma mudança de variável no integral

$$\int_0^{64} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$$

de modo a obter um integral em que a função integranda é um quociente de funções polinomiais (não calcule o integral na nova variável).