Exame Final

[20 p.] 1. Indique, justificando, o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes.

(a) O problema de valores iniciais $(y')^2 = x^2$, $y(1) = 1$ tem exatamente duas soluções em $\mathbb{R}^+$.

(b) Se $y = f(x)$ é solução da equação diferencial $xy' = 5\,\text{sen}\,x$, também $y = 5f(x)$ é solução da mesma equação.

[30 p.] 2. Resolva o problema de valores iniciais $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

[25 p.] 3. Determine a solução geral da equação diferencial $y' \cos x + y\,\text{sen}\,x = 1 + \cos^2 x$.

[25 p.] 4. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + xy}$.

(a) Verifique que se trata de uma equação homogénea.

(b) Determine a sua solução geral.

[20 p.] 5. Determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n-1} \right)$.

[30 p.] 6. Discuta a natureza das seguintes séries, indicando divergência, convergência simples ou convergência absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^3 + \ln n + 1}}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-3)^n \frac{n!}{n^n}$.

[30 p.] 7. Considere a função $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (x-2)^{n+2}$.

(a) Determine o domínio de convergência desta série de potências.

(b) Determine, justificando, explicitamente a função f.

[20 p.] 8. Considere a função $f(x) = \pi - x$.

(a) Determine a sua série de Fourier de senos no intervalo $[0, \pi]$.

(b) Represente graficamente a função soma no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Formulário: Transformada de Laplace

$f(t)$	1	t^n	e^{at}	$\text{sen}(at)$	$\cos(at)$	$\text{senh}(at)$	$\cosh(at)$
$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$\frac{1}{s}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$s > s_f$	$s > 0$	$s > 0$	$s > a$	$s > 0$	$s > 0$	$s > \lvert a \rvert$	$s > \lvert a \rvert$

$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$	$t^n f(t)$, $n \in \mathbb{N}$	$f(t-a)$, $a > 0$	$f(at)$, $a > 0$	$f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}$
$F(s-\lambda)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$\mathrm{e}^{-as} F(s)$ (f nula em $\mathbb{R}_-$)	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$s > s_f + \lambda$	$s > s_f$	$s > s_f$	$s > a s_f$	$s > s_f, s_{f'}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}$