Universidade de Aveiro — 10 de Julho de 2013

Exame de Recurso de Cálculo II — Duração: 2h 30 min

Identificação do aluno

Nome:______________________________ Nº Mec.:__________

Questão	1	2	3	4	5	6
Cotações	20	30	60	30	30	30
Classificação						

Classificação Final

____

Declaro que desisto ______________ Nº folhas suplementares: ______

1. Indique o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes:

   (a) $\{2\,\text{sen}(x), -\cos(x)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada à equação diferencial $y'' + y = \text{sen}(x)$. .... ☐

   (b) Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tem raio de convergência 2, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. .... ☐

   (c) Seja $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{e^\theta x^3}{6}$, com θ entre 0 e x, a fórmula de MacLaurin de ordem 2 de $f(x) = e^x$. Então $e^1 \approx 2{,}5$ com erro inferior a 0,5. .... ☐

   (d) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos convergente, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$ também é convergente. .... ☐

2. Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = e^t \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y\}(s) = \dfrac{1}{\big((s-1)^2+1\big)s}$.

   (b) Determine a solução do problema de Cauchy.

3. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais:

   (a) $y' = \dfrac{xe^{y/x} + y}{x}$, para $x > 0$;

   (b) $-2y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}} y^3$;

   (c) $y^{(4)} + 4y^{(2)} = x$.

4. Determine:

   (a) a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2-\operatorname{sen}(n)}{\sqrt{n}}$;

   (b) a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

5. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^n}(x-1)^n$.

   (a) Determine o domínio de convergência da série dada.

   (b) Sabendo que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para qualquer $x \in]-1,1[$, determine a função soma da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)}{2^n}(x-1)^n$, indicando o maior intervalo aberto em que a função obtida representa a série considerada.

6. Considere a função 2π-periódica f definida em $]-\pi,\pi]$ por $f(x) = -x$.

   (a) Mostre que $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)dx = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) Determine a série de Fourier de f.

   (c) Seja S a função soma da série de Fourier obtida na alínea anterior. Mostre que $S(-2\pi) = S(3\pi)$.

Tabela de Transformadas de Laplace

$f(t)$	1	t^n	e^{at}	$\operatorname{sen}(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $s > s_f$	$\frac{1}{s}$ $s > 0$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N},\ s > 0$	$\frac{1}{s-a}$ $s > a$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $s > 0$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $s > 0$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$