Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I - C **2024/2025**

Ficha de Exercícios 1

Complementos de funções reais de variável real

1. Calcule:
   (a) $\operatorname{sen}\left(\arccos(\frac{1}{2})\right)$
   (b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
   (c) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
   (d) $\operatorname{sen}\left(\arccos(-\frac{1}{2})\right)$
   (e) $\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$
   (f) $\cos(2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right))$
   (g) $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$
   (h) $\operatorname{arccotg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)$
   (i) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi\right)\right)$

   Resolução (d): $\operatorname{sen}\left(\arccos(-\frac{1}{2})\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Simplifique $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg} x\right)$.

3. Mostre que:
   (a) $\cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - x^2, \;\; \forall x \in [-1, 1]$.
   (b) $\operatorname{sen}^2(\arccos x) = 1 - x^2, \;\; \forall x \in [-1, 1]$.

4. Seja f a função definida por $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\ln(2x+1)\right)$.
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Justifique que f é invertível e caracterize a sua inversa, f^{-1}, indicando o domínio, o contradomínio e a expresão analítica que a define.

   Resolução:

   (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 > 0\} =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
   Uma vez que $\ln(2x+1)$, para $x \in D_f$, toma todos os valores de $\mathbb{R}$, então $CD_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   (b) f é invertível porque é injetiva (porque f é a composta de duas funções injetivas).
   $D_{f^{-1}} = CD_f =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   $CD_{f^{-1}} = D_f =]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
   Expressão designatória: para $x \in D_f$ e $y \in CD_f$, tem-se que

   $$y = f(x) \Leftrightarrow y = \operatorname{arctg}\left(\ln(2x+1)\right) \Leftrightarrow tg(y) = \ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x + 1 = e^{\operatorname{tg}(y)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^{\operatorname{tg}(y)} - 1\right).$$

   Logo $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\operatorname{tg}(x)} - 1\right)$.

5. Caracterize a função inversa das seguintes funções indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que as definem. Considere as restrições principais das funções trigonométricas.

   (a) $f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;

   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\text{arcsen}\,(1-x)}{3}$;

   (c) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2-x}\right)$;

   (d) $f(x) = e^{\text{arcsen}\,x}$;

   (e) $f(x) = 2\text{arcsen}\,(\sqrt{x}) - \pi$;

   (f) $f(x) = 3\arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$;

   (g) $f(x) = \frac{1}{\pi + \arccos(x-2)}$;

   (h) $f(x) = \pi - 3\text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)$;

   (i) $f(x) = \text{arccotg}\,(\ln(x+1))$.

6. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das funções dadas por:

   (a) $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$

   (b) $g(x) = -\dfrac{\pi}{3} + \text{arccotg}\,(-3x)$

   (c) $h(x) = \text{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

   (d) $m(x) = \text{arcsen}\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

   Resolução (a):

   $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 2x+1 \leq 1\} = [-1, 0]$.

   Uma vez que $2x+1$, para $x \in D_f$, toma todos os valores do intervalo $[-1,1]$, então

   $$0 \leq \arccos(2x+1) \leq \pi.$$

   Logo, $0 \leq \pi - \arccos(2x+1) \leq \pi$, o que permite concluir que $CD_f = [0, \pi]$.
   Para $x \in D_f$ temos que

   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arccos(2x+1) = \pi \Leftrightarrow 2x+1 = \cos(\pi) \Leftrightarrow x = -1.$$

   Logo $x = -1$ é o único zero de f.

7. Seja f a função dada por $f(x) = \text{arcsen}\,(x^2 - 1)$.

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

   (b) Indique as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

8. Considere a função g definida por

   $$g(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Indique o domínio, o contradomínio e os zeros de g.

9. Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - 1)$.

   (a) Caracterize a função inversa de f, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica.

   (b) Resolva a inequação $f(x) > \frac{\pi}{4}$.

10. Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^3}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

11. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to a} \frac{x-a}{|x-a|}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

   (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \operatorname{cotg}\left(\frac{2}{x}\right)$

   (d) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(1-x)$

   (e) $\lim_{x\to -\infty} \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

   (f) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

12. Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^5 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} (x^2-1)\cosh(x^2) + 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \\ 2ke^{x-2} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$

13. Mostre que a equação $x^5 - 3x = 1$ admite pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$.

14. Mostre que a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

15. Seja $f(x) = 6x + \operatorname{sen}(1-x^2) + 3\cos(x^2-1)$. Mostre que existe pelo menos um zero de f no intervalo $]-1, 1[$.

16. Prove que a equação $x^3 = 3x^2 - 1$ tem pelo menos uma raiz real.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & se \quad x < 0 \\ \\ x^2 + 3 & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) A função f tem mínimo global no intervalo $[-1, 1]$?

   (b) A alínea anterior contradiz o Teorema de Weierstrass? Justifique.

18. Sejam k um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + k & se \quad x < 0 \\ \\ \text{arctg}\,(\cos(x)) - 2\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) & se \quad x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Existe algum valor de k que torne a função f contínua em $x = 0$? Justifique convenientemente.

(b) Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $]\pi, 2\pi[$.

Resolução:

(a) Observe-se que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) + k\right) = 0 + k = k$$

porque

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

(uma vez que o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\text{arctg}\,(\cos(x)) - 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \text{arctg}\,(1) - 2\text{sen}\,(0) = \frac{\pi}{4}.$$

f é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Logo, f é contínua em $x = 0$ se $k = \frac{\pi}{4}$.

(b) Uma vez que

- f é contínua em $[\pi, 2\pi]$
- $f(\pi) = \text{arctg}\,(\cos(\pi)) - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 2 < 0$
- $f(2\pi) = \text{arctg}\,(\cos(2\pi)) - 2\text{sen}\,(\pi) = \frac{\pi}{4} > 0$

então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que

$$\exists c \in]\pi, 2\pi[: f(c) = 0,$$

o que prova que f tem pelo menos um zero em $]\pi, 2\pi[$.

19. Determine uma equação da reta tangente e da reta normal ao gráfico de f onde $f(x) = e^{\text{sen}\,(x-1)}$ no ponto de abcissa $x = 1$.

20. Considere a função f definida por $f(x) = x^2 \ln x + 11x - \frac{x^2}{2}$. Determine, caso exista, $a \in \mathbb{R}^+$ por forma a que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = a$ tenha declive $m = 11$.

21. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

22. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

(a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\text{sen}\,x}$;

(d) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$;

(f) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$;

(g) $f(x) = \log_3(\operatorname{tg} x)$

(h) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$;

(i) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;

(j) $f(x) = (1-x^2)\ln x$;

(k) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

(l) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$.

23. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$;

(b) $f(x) = \operatorname{arcsen}\frac{1}{x^2}$;

(c) $f(x) = \arccos(1-e^x)$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1+\ln x)$.

24. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

25. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

26. Para cada uma das funções seguintes determine $(f^{-1})'$ utilizando o Teorema da derivada da função inversa.

(a) $f(x) = x^3 + 1$;

(b) $f(x) = \ln(\operatorname{arcsen} x)$, com $x \in]0,1[$;

(c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1,0[$;

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1-x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

27. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

28. Verifique que $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raiz real.

29. Mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg}(x-2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2,3[$.

30. Utilize o Teorema de Rolle para provar que:

(a) O polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.
Resolução: Seja $f(x) = x^{102} + ax + b$. Observe-se que $f'(x) = 102x^{101} + a$ e, portanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[101]{-\frac{a}{102}}$.
Suponhamos, para redução ao absurdo, que f tem pelo menos 3 zeros, digamos x_1, x_2, x_3, onde supomos que $x_1 < x_2 < x_3$. Pelo Teorema de Rolle, podemos concluir que existe pelo menos um zero de f' em $]x_1, x_2[$ e pelo menos um zero de f' em $]x_2, x_3[$. Mas isto é absurdo, porque f' tem um único zero em $\mathbb{R}$. Logo f tem no máximo dois zeros e, portanto, o polinómio dado tem no máximo duas raízes reais.

(b) O polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

31. Prove que:

   (a) para todo o $x \in]0,1[$ se tem $\operatorname{arcsen} x > x$;

   (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\operatorname{sen} x \leq x$;

   Resolução: Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, com $x \in \mathbb{R}$. Observe-se que $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo f é decrescente em $\mathbb{R}$ e, para todo o $x \geq 0$, tem-se que $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x - x \leq 0$, como se pretendia demonstrar.

   (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

32. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a,b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

33. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \operatorname{arcsen}(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$.

   (a) Determine o domínio de f.

   (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

   (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m. Determine também esses valores.

   (d) Determine o contradomínio de f.

34. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 4x)$. Estude h quanto à existência de extremos e determine os seus intervalos de monotonia.

35. Considere a função g definida por $g(x) = \operatorname{arcsen}\left((x-1)^2\right)$.

   (a) Determine o domínio de g.

   (b) Mostre que a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,2]$.

   (c) Estude g quanto à existência de extremos locais e determine os seus intervalos de monotonia.

   (d) A função g é invertível? Justifique a sua resposta.

36. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(3x^2+2) - \ln(x^2))$;

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{arcsen} x}{3x}$;

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \operatorname{sen} x}$;

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \operatorname{cotg} x}$;

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;

   (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$;

   (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$;

   (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$;

(l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

(m) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

(n) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\text{tg } x)^{\text{tg } (2x)}$;

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;

(q) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$.

37. Mostre que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\text{sen } x}{x+\text{sen } x}$, mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

38. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \text{arctg}\,(x^2) & \text{se } x \le 0 \\ x^2 \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que g é diferenciável em $x=0$ e indique o valor de $g'(0)$.

(b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{2}{\pi}\right[$ tal que $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

Resolução:

(a) $g'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{arctg}\,(x^2)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{1+x^4} = 0$ (pela Regra de Cauchy).
$g'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \text{sen}\,(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 \text{sen}\,(1/x) = 0$ (porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo).
Como $g'_-(0) = g'_+(0) = 0$, então g é diferenciável em $x=0$ e $g'(0)=0$.

(b) Uma vez que:

- g é contínua em $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$
- g é diferenciável em $\left]0, \frac{2}{\pi}\right[$

então, pelo Teorema de Lagrange, podemos concluir que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{2}{\pi}\right[$ tal que

$$g'(c) = \frac{g(\frac{2}{\pi}) - g(0)}{\frac{2}{\pi} - 0} = \frac{(\frac{2}{\pi})^2 \text{sen}\,(\frac{2}{\pi})}{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi}$$

como se pretendia demonstrar.

39. Considere a função f definida em $]-\infty, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{arctg}\, x}{e^x - 1} & se \quad x < 0 \\ 1 + \text{arcsen}\, x & se \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Verifique se f é contínua em $x=0$.

(b) Mostre que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0,1[$.

(c) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

40. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = \text{arctg}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$.

    Mostre que as retas $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais ao gráfico de h.

41. Para cada uma das funções seguintes, determine uma aproximação linear da função f no ponto $x = a$.

    (a) $f(x) = x^3$, $a = 2$;

    (b) $f(x) = e^x$, $a = 2$;

    (c) $f(x) = 1 + 2x - x^3$, $a = 1$.

42. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

    (a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1)$;

    (b) $T_\pi^3(\cos x)$;

    (c) $T_1^3(xe^x)$;

    (d) $T_0^5(\text{sen}\, x)$;

    (e) $T_0^6(\text{sen}\, x)$.

43. Seja $f(x) = (1 + x^2)\text{arctg}\,(1 + x)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine uma aproximação linear de f numa vizinhança de $x = -1$.

44. Considere $f(x) = e^x$.

    (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

    (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

    (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro absoluto cometido nessa aproximação.

45. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

46. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação de sen(3) quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

Exercícios de revisão

47. Determine os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ e^{-x+1} & \text{se} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

48. Considere a função h definida por $h(x) = \arccos(e^{x-1}) + \pi$. Justifique que h é invertível e caracterize a função inversa de h, indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

49. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] \alpha & \text{se} \quad x = 0 \\[2ex] \operatorname{arctg}\left(\ln(x+1)\right) + \dfrac{e^{x-x^2}}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

onde α é um parâmetro real.

(a) Determine os limites laterais de f na origem.

(b) Pode indicar um valor para $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua em $x = 0$? Justifique a sua resposta.

(c) O gráfico de f admite assíntotas verticais? Justifique a sua resposta.

50. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 raízes distintas e localize-as em intervalos de $\mathbb{R}$ cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

51. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.

(a) Determine o domínio de h.

(b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]-1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α.

52. Sejam α um parâmetro real e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi} \operatorname{arccotg}\,(e^x) - \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) & \text{se} \quad x \leq 0 \\[2ex] \sqrt{x} \cdot \cos\left(\dfrac{\alpha}{x}\right) & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

(a) Para que valores de α a função f contínua em $x = 0$? Justifique convenientemente.

(b) Considere $\alpha = 1$. Mostre que f tem pelo menos um zero no intervalo $]\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}[$.

53. Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{arcsen}(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

54. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

55. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x^2)} - 1}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\[2ex] 0 & \text{se} \quad x = 0 \\[2ex] \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se} \quad x > 0. \end{cases}$$

Usando a definição de derivada, verifique se f é diferenciável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, indique o valor de $f'(0)$.

56. Mostre que $x = 2$ é o único zero da função h definida por $h(x) = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) - x + 2$.

57. Seja $f(x) = \ln(1+x)$, com $x \in]-1, +\infty[$.

    (a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f, $T_0^2 f(x)$.

    (b) Usando o polinómio $T_0^2 f(x)$, determine um valor aproximado de $\ln(1.1)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

Soluções:

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $-\frac{1}{2}$; (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e) $\frac{5}{12}$; (f) $-\frac{7}{25}$; (g) $\frac{1}{2}$; (h) $\frac{\pi}{4}$; (i) 0.

2. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3. ———

4. Resolvido

5. (a) $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; $CD_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen}(2y) - \frac{\pi}{2}$;

    (b) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$; $CD_{f^{-1}} = [0, 2]$; $f^{-1}(y) = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right)$;

    (c) $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $CD_{f^{-1}} =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$; $f^{-1}(y) = 2 - \frac{\pi}{\operatorname{arctg} y}$;

    (d) $D_{f^{-1}} = \left[e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$; $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{sen}(\ln y)$;

    (e) $D_{f^{-1}} = [-\pi, 0]$; $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = [0, 1]$; $f^{-1}(y) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right)$;

    (f) $D_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; $CD_{f^{-1}} = [-4, -3]$; $f^{-1}(y) = \cos^2\left(\frac{y+\frac{\pi}{2}}{3}\right) - 4$;

    (g) $D_{f^{-1}} = \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$; $CD_{f^{-1}} = [1, 3]$; $f^{-1}(y) = 2 + \cos\left(\frac{1}{y} - \pi\right)$;

    (h) $D_{f^{-1}} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[$ $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; $f^{-1}(y) = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-y}{3}\right) + 1$;

    (i) $D_{f^{-1}} =]0, \pi[$ $CD_{f^{-1}} =]-1, +\infty[$; $f^{-1}(y) = e^{\operatorname{cotg} y} - 1$.

6. (a) $D_f = [-1, 0]$, $CD_f = [0, \pi]$, zeros de f: $x = -1$.
    (b) $D_g = \mathbb{R}$, $CD_g =]-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$, zeros de g: $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.
    (c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $CD_h =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, h não tem zeros.
    (d)$D_m = [1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}]$, $CD_m = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$, zeros de m: $x = 0 \vee x = 2$.

7. (a) $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; $CD_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
    (b) Interseção com o eixo dos xx: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$; Interseção com o eixo dos yy: $(0, -\frac{\pi}{2})$.

8. $D_g =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, $CD_g = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, zeros de g: $x = 1$.

9. (a) $D_{f^{-1}} =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $CD_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} x}$.
    (b) $]\sqrt[3]{2}, +\infty[$.

10. 0

11. (a) Não existe; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $-\frac{\pi}{2}$; (e) $\frac{\pi}{2}$; (f) e^2.

12. (a) $k = 1$; (b) $k = 1$; (c) $k = 0$.

13. —

14. —

15. —

16. —

17. (a) Não.
    (b) Não, porque f não é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

18. Resolvido

19. Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$: $y = x$.
    Equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, f(1))$: $y = 2 - x$.

20. $a = 1$

21. $y = \frac{1}{4}x + 1$

22. (a) $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $D_{f'} = \mathbb{R}$; (b) $f'(x) = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$;
    (c) $f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen} x}$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; (d) $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(1 + x^2)$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
    (e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, $D_{f'} =]0, 1[$;
    (f) $f'(x) = 3^{\operatorname{tg} x} \ln 3 \sec^2 x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
    (g) $f'(x) = \frac{1}{\ln 3} \sec x \operatorname{cosec} x$, $D_{f'} = \{x \in \mathbb{R} \colon k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
    (h) $f'(x) = \frac{6x^2(\sqrt{x}-1)-\sqrt{x^5}}{2(\sqrt{x}-1)^2}\mathrm{e}^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; (i) $f'(x) = \frac{-2\operatorname{sen}(\log_2(x^2))}{x \ln 2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
    (j) $f'(x) = \frac{1-x^2(2\ln x+1)}{x}$, $D_{f'} = \mathbb{R}^+$; (k) $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + 1$, $D_{f'} = \mathbb{R}$;
    (l) $f'(x) = \frac{2x^3-2+\ln(x^2)}{x^2}$, $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

23. (a) $\frac{-12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$;
    (b) $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{-2\sqrt{x^4-1}}{x^5-x}$;
    (c) $\frac{e^x}{\sqrt{2e^x-e^{2x}}}$;
    (d) $\frac{1}{x(2+\ln^2 x+\ln(x^2))}$.

24. $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$.

25. $(f^{-1})'(2) = 1$.

26. (a) $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-1)^2}}$;
    (b) $(f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$;
    (c) $(f^{-1})'(y) = \frac{-\sqrt{y+1}}{2\sqrt{y}(1+y)^2}$;
    (d) $(f^{-1})'(y) = \begin{cases} \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-y)^2}} & \text{se } y > 1 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}} & \text{se } y < 0 \end{cases}$.

27. —

28. —

29. —

30. —

31. —

32. —

33. (a) $D_f = [0,2]$.
    (b) —
    (c) Para justificar a existência de máximo e mínimo globais usar o Teorema de Weierstrass. Observar que $f'(x) < 0$, para todo $x \in]0,2[$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$ e $f(2) = \frac{-\pi}{2}$. Então o mínimo global é $\frac{-\pi}{2}$ e o máximo global é $\frac{\pi}{2}$.
    (d) $CD_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

34. h é estritamente decrescente em $]-\infty, 2[$ e estritamente crescente em $]2, +\infty[$. A função h tem um mínimo em $x = 2$ cujo valor é $\operatorname{arctg}(-4)$.

35. (a) $\mathcal{D}_g = [0,2]$
    (b) —
    (c) g é estr. decrescente em $]0,1[$ e estr. crescente e $]1,2[$
    g tem um mínimo em $x = 1$ cujo valor é 0
    (d) Não, pois não é injetiva

36. (a) $\ln 3$; (b) $1/9$; (c) não existe; (d) $2/3$; (e) $-1/2$; (f) -1; (g) 0; (h) 1; (i) 1; (j) 1; (k) 1; (l) e; (m) e^{-2}; (n) 0; (o) 1; (p) e^4; (q)$1/2$.

37. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = 1.$

38. Resolvido.

39. (a) f é contínua em $x = 0$
    (b) —
    (c) e

40. —

41. (a) $y = 12x - 16$
    (b) $y = e^2(x-1)$
    (c) $y = 3 - x$

42. (a) $T_0^3(x^3 + 2x + 1) = x^3 + 2x + 1$
    (b) $T_\pi^3(\cos x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2}$
    (c) $T_1^3(xe^x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2 + \frac{2}{3}e(x-1)^3$
    (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
    (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

43. $g(x) = 2(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

44. (a) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum θ entre 0 e x.
    (b) —

(c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}} \simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.

45. —

46. $\frac{(3-\pi)^6}{6!}$ (uma vez que $|R_5(3)| \leq \frac{(3-\pi)^6}{6!}$).

47. Zero de g: -1.

48. $D_{h^{-1}} = [\pi, \frac{3\pi}{2}[$, $CD_{h^{-1}} =]-\infty, 1]$ e $h^{-1}(x) = 1 + \ln(\cos(x-\pi))$.

49. (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
(b) Não, porque não existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.
(c) $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

50. f tem um zero em $]0,1[$, um em $]1,2[$ e outro em $]-1,0[$.

51. (a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
(b) —

52. (a) A função f é contínua em $x = 0$ qualquer que seja o valor de α.
(b) — (Sugestão: usar o Teorema de Bolzano-Cauchy)

53. 1

54. f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$. A função f não tem extremos locais.

55. f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$.

56. —

57. (a) $T_0^2 f(x) = x - \frac{x^2}{2}$.
(b) $\ln(1.1) = f(0.1) \approx T_0^2 f(0.1) = \frac{19}{200}$.