Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II — Exame de Recurso

2 de julho de 2012

Duração: **2h30m**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[30pts] 1. Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - 4y' + 4y = 5\cos x$.

[35pts] 2. Resolva o seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} y'' + 4y = e^t \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

[20pts] 3. Encontre a solução geral da equação diferencial de primeira ordem $2y' + y = x$.

[10pts] 4. Seja (a_n) a sucessão definida por $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Calcule (caso exista) a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

5. Estude a natureza (divergência, convergência simples ou absoluta) das seguintes séries:

[20pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n(n-1)}{3n+1}\right)^n$

[20pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-9}{2n^3+n+3}$

6. Considere a série de potências de x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n+1}}{n+1} x^n \qquad (\beta \text{ é um parâmetro real positivo}).$$

[20pts] (a) Determine o raio de convergência da série (em função de β) e estude a sua natureza nos extremos do intervalo de convergência.

[5pts] (b) Justifique que existe um único valor de β para o qual a série é simplesmente convergente no ponto $x = -3$ e determine-o.

[20pts] 7. Desenvolva em série de MacLaurin a função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$, indicando o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o desenvolvimento é válido.

(**Sugestão:** Comece por observar que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in]-1,1[$).

8. Considere a função f, periódica de período 2π, definida em $[-\pi,\pi]$ por $f(x) = |\operatorname{sen} x|$.

[10pts] (a) Justifique que a série de Fourier de f possui a forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad (a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0)$$

e calcule os coeficientes $\boldsymbol{a_0}$ e $\boldsymbol{a_1}$ que figuram naquela série.

[10pts] (b) Sabe-se que a série de Fourier de f é dada por $\displaystyle \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n)^2-1}$.

Mostre que esta série converge para a função f e use este facto para calcular a soma da série numérica $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2-1}$.

– FORMULÁRIO –

(Em geral nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas indicadas).

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, dt, \quad s > s_f.$$

Tabela de transformadas de Laplace ($a \in \mathbb{R}$).

$f(t)$	$F(s)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$, $n \in \mathbb{N}_0$ $(0! = 1)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
$\mathrm{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$

$f(t)$	$F(s)$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$
$\mathrm{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s>\lvert a\rvert$

- $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\} = F(s-\lambda)$, $s > s_f + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$, $s > s_f$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \mathrm{e}^{-as} F(s)$, $s > s_f$, $a > 0$ (f nula em $\mathbb{R}^-$).
- $\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)$, $s > a\, s_f$, $a > 0$.
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$,

  $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$.