

# Cálculo I-C

## Slides de apoio às aulas

### Primitivas. Integrais indefinidos

Departamento de Matemática  
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof.  
Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).

# Primitiva de uma função

**Definição:** Sejam  $I$  um intervalo não degenerado de  $\mathbb{R}$  (isto é, com mais do que um ponto) e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $I$ . Chama-se **primitiva** ou **antiderivada de  $f$**  a toda a função  $F$  diferenciável em  $I$  tal que, para todo o  $x \in I$ ,

$$F'(x) = f(x).$$

Se  $f$  admite uma primitiva em  $I$  dizemos que  $f$  é **primitivável em  $I$** .

**Observação:** Se  $I = [a, b]$  dizer que

$$F: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ é diferenciável em } I$$

significa dizer que  $F$  é diferenciável em  $]a, b[$  e que  $F'_+(a)$  e  $F'_-(b)$  existem e são finitas.

**Observação:** Toda a primitiva de uma dada função é uma função contínua.

# Primitiva de uma função

**Nota:** O uso das regras de derivação em "sentido inverso" permite-nos determinar algumas primitivas que designamos por **primitivas imediatas**.

## Exemplos:

- $F(x) = x^2$  é uma primitiva de  $f(x) = 2x$ , em  $\mathbb{R}$
- $F(x) = e^x + 3$  é uma primitiva de  $f(x) = e^x$ , em  $\mathbb{R}$
- $F(x) = \sin x$  é uma primitiva de  $f(x) = \cos x$ , em  $\mathbb{R}$
- $F(x) = \cos x$  é uma primitiva de  $f(x) = -\sin x$ , em  $\mathbb{R}$

**Exercício:** Indique uma primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , em  $\mathbb{R}^+$ .

# Integral indefinido

**Proposição:** Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$  em  $I$ . Então, para cada  $C \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(x) + C$  é também uma primitiva de  $f$  em  $I$ .

**Proposição:** Se  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  são duas primitivas de  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , então existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) - G(x) = C$ , para todo o  $x \in I$ .

**Definição:** À família de todas as primitivas de  $f$  chama-se o **integral indefinido de  $f$**  e denota-se por  $\int f(x) dx$ . Dizemos que  $f$  é a **função integranda** e que  $x$  é a **variável de integração**.

A variável de integração é uma variável muda, pelo que podemos usar qualquer um dos símbolos:

$$\int f(x) dx, \quad \int f(t) dt, \quad \int f(z) dz, \dots$$

# Integral indefinido

**Observação:** Atendendo à proposição anterior,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

**Nota:** É evidente que se  $f$  é diferenciável, então

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Integrais indefinidos imediatos

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (onde } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ (onde } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x \in \mathbb{R}^-)$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Integrais indefinidos imediatos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{cosec} x \cotg x dx = -\operatorname{cosec} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

# Propriedades

**Proposição:** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $I$  e  $\alpha$  e  $\beta$  duas constantes reais não simultaneamente nulas. Se  $f$  e  $g$  são primitiváveis em  $I$ , então a função  $\alpha f + \beta g$  é primitivável em  $I$  e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

**Exemplos de aplicação:**

$$\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int \left( 5 \cos x - \frac{\pi}{2} \sin x \right) dx &= 5 \int \cos x dx - \frac{\pi}{2} \int \sin x dx \\ &= 5 \sin x + \frac{\pi}{2} \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



## Integração "quase imediata"

**Proposição:** Sejam  $I$  e  $J$  dois intervalos de números reais,  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável e  $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que a composta  $f \circ g$  está definida. Se  $g$  é diferenciável em  $J$ , então  $(f \circ g)g'$  é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

**Exemplo de aplicação:**

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Integrais indefinidos "quase imediatos"

$$\int g'(x) g^p(x) dx = \frac{g^{p+1}(x)}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \operatorname{sen}(g(x)) dx = -\cos(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \cos(g(x)) dx = \operatorname{sen}(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \sec^2(g(x)) dx = \operatorname{tg}(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \operatorname{cosec}^2(g(x)) dx = -\operatorname{cotg}(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Integrais indefinidos "quase imediatos"

$$\int \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - (g(x))^2}} dx = \arcsen(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{g'(x)}{1 + (g(x))^2} dx = \arctg(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \sec(g(x)) \operatorname{tg}(g(x)) dx = \sec(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) \operatorname{cosec}(g(x)) \operatorname{cotg}(g(x)) dx = -\operatorname{cosec}(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int g'(x) a^{g(x)} dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

# Exercício

**Exercício:** Mostre que

$$\textcircled{1} \int \frac{x^4}{1+x^5} dx = \frac{1}{5} \ln |1+x^5| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \int \cos x \operatorname{sen}^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{3} \int \sec^2 x \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\textcircled{4} \int \sec x dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{5} \int \operatorname{cosec} x dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

# Fórmulas trigonométricas úteis na determinação de integrais

Das fórmulas trigonométricas bem conhecidas do ensino secundário:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

podem obter-se as seguintes fórmulas trigonométricas

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

# Fórmulas trigonométricas úteis na determinação de integrais

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

que são muito úteis no cálculo de integrais.

# Integrais indefinidos envolvendo funções trigonométricas

## Exemplos:

$$\textcircled{1} \int \cos^2(2x) dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos(4x)) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \sin(2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \int \sin x \sin(3x) dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(-2x) - \cos(4x)) dx \\ &= \frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{8} \sin(4x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

# Método de integração por partes

**Proposição (Integração por partes):** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis em  $I$ . Então

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

**Exemplo de aplicação:**

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{f'(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)} dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$



# Método de integração por partes

- Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e além disso é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- Quando conhecemos uma primitiva de cada função, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação (se alguma delas se simplificar!).
- Se conhecemos uma primitiva de cada função e se nenhuma das funções se simplifica por derivação, a escolha da função a primitivar é arbitrária. Por vezes é necessário efectuar uma segunda aplicação da fórmula de integração por partes, obtendo-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

# Método de integração por substituição

**Proposição (Integração por substituição):** Sejam  $I$  e  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável e  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e invertível tal que  $\varphi(J) \subseteq I$ . Então a função  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é primitivável e, sendo  $H$  uma primitiva de  $(f \circ \varphi)\varphi'$ , tem-se que  $H \circ \varphi^{-1}$  é uma primitiva de  $f$ .

**Observação:** Nas condições da proposição anterior escrevemos (por abuso de linguagem)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C, C \in \mathbb{R}$$

e dizemos que  $\int f(x)dx$  foi obtido através da substituição de variável definida por  $x = \varphi(t)$ .

# Método de integração por substituição

## Exemplo de aplicação:

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx$$

Substituição de variável:  $\sqrt{2x} = t$ , donde resulta  $x = \frac{t^2}{2}$ ,  $t \geq 0$ .

Esta substituição está definida pela função  $\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$ , tal que  $D_\varphi = J$ , sendo  $J$  um intervalo adequado de  $\mathbb{R}_0^+$ . A função  $\varphi$  é diferenciável e invertível em  $J$ .

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx &= \int \frac{t}{1 + t} dt \\ &= \int \left( 1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt \\ &= t - \ln |1 + t| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

# Integração de funções envolvendo radicais (usando substituições trigonométricas)

## Tabela de substituições

### Função com o radical:

1.  $\sqrt{a^2 + x^2}, a > 0$
2.  $\sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$
3.  $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0$
4.  $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}, a, b > 0$
5.  $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}, a, b > 0$
6.  $\sqrt{-a^2 + b^2 x^2}, a, b > 0$
7.  $\sqrt{a^2 x^2 + bx + c}, a \neq 0 \text{ e } b, c \in \mathbb{R}$

### Substituição:

- $x = a \operatorname{tg} t$ , com  $t \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$   
 $x = a \operatorname{sen} t$ , com  $t \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$   
 $x = a \operatorname{sec} t$ , com  $t \in ] 0, \frac{\pi}{2} [$   
reduz-se ao caso 1.  
reduz-se ao caso 2.  
reduz-se ao caso 3.  
reduz-se a um dos anteriores.

## Exemplo

$$\int \frac{3}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}} dx$$

Fazendo a mudança de variável  $\frac{x}{3} = \sec t$ , isto é,  $x = 3 \sec t = \varphi(t)$  com  $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , temos que  $\varphi$  é invertível, diferenciável e

$$\varphi'(t) = 3 \sec t \operatorname{tg} t.$$

Observe-se que

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{9 \sec^2 t \sqrt{\sec^2 t - 1}}.$$

Como  $\sec^2 t - 1 = \operatorname{tg}^2 t$  e  $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , então

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{9 \sec^2 t \operatorname{tg} t}.$$

## Exemplo

Logo,

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int \frac{1}{9 \sec^2(t) \operatorname{tg} t} 3 \sec t \operatorname{tg} t dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt.$$

Primitivando vem

$$\frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t + C, C \in \mathbb{R}.$$

Deveremos agora regressar à variável inicial  $x$ . Dado que a substituição é  $x = 3 \sec t$  com  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , tem-se que

$$x = 3 \sec t \Leftrightarrow x = \frac{3}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t = \frac{3}{x}.$$

## Exemplo

Usando agora a fórmula fundamental da trigonometria podemos concluir que

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{x}\right)^2$$

e, portanto,

$$\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}, \quad t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Logo

$$\int \frac{3}{x^2 \sqrt{x^2 - 9}} dx = \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{3x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

# Integração de funções racionais

A seguir vamos ver como integrar funções do tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde  $N$  e  $D$  são polinómios em  $x$  com coeficientes reais e  $D$  é não nulo. A este tipo de funções chamamos **função racional**.

(1) Se  $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$  dizemos que  $\frac{N(x)}{D(x)}$  é uma **fracção própria**.

(2) Se  $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$ , existem polinómios  $Q$  e  $R$  tais que  $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$  e

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x) .$$

Aos polinómios  $Q$  e  $R$  chamamos, respectivamente, **quociente** e **resto** da divisão de  $N$  por  $D$ .



# Integração de funções racionais

Uma vez que  $D$  é um polinómio não nulo, resulta da igualdade anterior

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Consequentemente,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx.$$

**Observação:** Como toda a função polinomial tem uma primitiva imediata, a integração de funções racionais reduz-se à determinação de primitivas imediatas e à primitivação de fracções próprias.

# Integração de funções racionais

**Definição:** Chamamos **fracção simples** a toda a fracção do tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q},$$

onde  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos e  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  são tais que  $\beta^2 - 4\gamma < 0$ .

**Exemplos de fracções simples:**

$$\frac{2}{x - 4}, \quad \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{1}{x^2 + 2x + 1}, \quad \frac{3x + 5}{(x^2 + x + 1)^3}$$

**Proposição:** Toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples.

# Integração de funções racionais

**Decomposição em fracções simples de  $\frac{R(x)}{D(x)}$  com  $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$**

1. Decompor o polinómio  $D(x)$  em factores irreduzíveis. Isto é, escrever

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_n)^{p_n} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{q_1} \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{q_m}$$

onde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $p_i, q_j \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ , com  $\beta_j - 4\gamma_j < 0$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

2. Fazer corresponder a cada factor de  $D(x)$  uma determinada fracção simples de acordo com o seguinte:

(i) Ao factor de  $D(x)$  do tipo  $(x - \alpha)^r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) corresponde

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r}$$

onde  $A_1, \dots, A_r$  são constantes reais a determinar.

# Integração de funções racionais

(ii) Ao factor de  $D(x)$  do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \text{ com } \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ e } s \in \mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde  $B_i, C_i$  são constantes reais a determinar,  $i = 1, \dots, s$ .

3. Escrever  $\frac{R(x)}{D(x)}$  como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

## Exemplo

$$\int \frac{2x + 1}{x^3 + x} dx$$

Trata-se de uma fração própria que deverá ser decomposta em elementos simples:

$$\frac{2x + 1}{x^3 + x} = \frac{2x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes reais a determinar.

Reduzindo as frações ao mesmo denominador conclui-se que:

$$2x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x \Leftrightarrow 2x + 1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

resultando que

$$A = 1; B = -1 \text{ e } C = 2.$$

## Exemplo

Então

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{-x+2}{x^2+1} \right) dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} \right) dx.$$

Logo

$$\int \frac{2x+1}{x^3+x} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$