Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 16 de Junho de 2014

2.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

- Justifique as suas respostas e indique os cálculos efetuados.
- Eventuais dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

---

1. [**10**] Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n-1}}$.

2. [**60**] Estude a natureza de cada uma das séries

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{3n^2-1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50^n}{n!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\beta^{2n}}$ $(\beta \in \mathbb{R})$.

   (Nota: Em (c) a natureza da série deverá ser discutida em função do parâmetro β).

3. [**20**] Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

   (a) Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ tem raio de convergência 2, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   (b) Se $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$, então $f^{(100)}(1) = -99!$.

4. [**30**] Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)4^n}(x-3)^n$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

5. [**30**] Considere a função f dada por $f(x) = \ln(x+1)$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 2 da função f (com resto de Lagrange).

   (b) Usando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule um valor aproximado de $\ln(1,1)$ e mostre que o erro cometido nessa aproximação é inferior a $\dfrac{1}{3} \times 10^{-3}$.

6. [**25**] Notando que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $x \in]-1,1[$, determine a série de MacLaurin da função $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ (indicando o maior conjunto onde a representação é válida).

7. [**25**] Considere a função f, periódica de período 2π, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

   Determine a série de Fourier de f e esboce o gráfico da sua soma no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.