Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 2 **2013/14**

Proposta de resolução do 1.º Teste de Avaliação Discreta

Nota: A resolução apresentada omite alguns cálculos intermédios mais simples.

---

1. **Resolva as seguintes equações diferenciais:**

   (a) $y' - \dfrac{2x}{1+2x^2}\, y = x.$

   Trata-se de uma EDO linear de primeira ordem, a qual poderá ser resolvida de várias formas. Vamos usar a técnica do fator integrante. Como

$$\int \frac{-2x}{1+2x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\ln(1+2x^2) + K, \qquad K \in \mathbb{R},$$

   um fator integrante é dado por

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln(1+2x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Multiplicando ambos os membros da EDO dada por $\mu(x)$, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\left(y' - \frac{2x}{1+2x^2}\, y\right) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

   ou seja,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\, y\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

   Desta forma, temos

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\, y = \int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   Assim, a solução geral da EDO dada é

$$y = \sqrt{1+2x^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+2x^2} + C\right) = \frac{1}{2} + x^2 + C\sqrt{1+2x^2}$$

   com C uma constante real arbitrária.

   (b) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}, \quad x > 0.$

   A EDO dada é equivalente à equação $y' = \dfrac{y/x - 1}{y/x + 1}, \quad x > 0.$ Trata-se, portanto, de uma EDO homogénea. Considere-se a mudança de variável dada por $\dfrac{y}{x} = z$. Substituindo na equação diferencial (observando que $y' = z'x + z$) obtemos a EDO de variáveis separáveis (em x e z)

$$z'x + z = \frac{z-1}{z+1} \iff z'x = -\frac{1+z^2}{z+1}.$$

Esta última pode ser escrita na forma de variáveis separadas:

$$\frac{z+1}{1+z^2}\,z' = -\frac{1}{x}.$$

A solução geral obtém-se agora integrando em relação a cada uma das variáveis:

$$\int \frac{z+1}{1+z^2}\,dz = \int -\frac{1}{x}\,dx \Longleftrightarrow \int \left(\frac{z}{1+z^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)dz = -\int \frac{1}{x}\,dx.$$

Temos então

$$\frac{1}{2}\ln(1+z^2)+\operatorname{arctg} z = -\ln x + C, \qquad C\in\mathbb{R},$$

ou ainda, usando as propriedades do logaritmo,

$$\ln\sqrt{x^2+x^2z^2}+\operatorname{arctg} z = C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

Uma vez que $z=\dfrac{y}{x}$, a solução geral da EDO inicial é dada por

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C, \qquad C\in\mathbb{R}.$$

(c) $y''-6y'+9y=\dfrac{2\,e^{3x}}{x}\,, \quad x>0.$

Trata-se de uma EDO linear, pelo que a sua solução geral é dada por $y = y_h+y_p$, onde y_h denota a solução geral da EDO homogénea associada e y_p denota uma solução particular da EDO completa dada.

Determinação de y_h:

A EDO homogénea associada, $y''-6y'+9y=0$, é uma equação diferencial linear de coeficientes constantes, cuja equação característica é

$$r^2-6r+9=0 \Leftrightarrow (r-3)^2=0.$$

Esta equação do 2.º grau possui a raiz dupla $r=3$, à qual correspondem as soluções linearmente independentes e^{3x} e xe^{3x}. Por conseguinte, a solução geral da EDO homogénea é dada por

$$y_h = C_1\,e^{3x}+C_2\,xe^{3x}\,, \qquad \text{com } C_1, C_2\in\mathbb{R}.$$

Determinação de y_p:

Vamos agora determinar uma solução particular para a equação diferencial completa usando o *Método da Variação das Constantes* (uma vez que, neste caso, não é possível usar o método dos coeficientes indeterminados devido à estrutura do segundo membro da equação). Procuramos então uma solução da forma

$$y_p = C_1(x)\,e^{3x}+C_2(x)\,xe^{3x},$$

onde $C_1(x)$ e $C_2(x)$ são funções a determinar. Para tal resolve-se o sistema

$$\begin{cases} C_1'(x)\,e^{3x}+C_2'(x)\,xe^{3x} & = \;0 \\ C_1'(x)\,(e^{3x})'+C_2'(x)\,(xe^{3x})' & = \;\frac{2e^{3x}}{x} \end{cases}$$

o qual é equivalente a

$$\begin{cases} (C_1'(x) + C_2'(x)\,x)\,e^{3x} & = & 0 \\ (3C_1'(x) + C_2'(x)(1+3x))\,e^{3x} & = & \frac{2e^{3x}}{x} \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\,x & = & 0 \\ 3C_1'(x) + C_2'(x)\,(1+3x) & = & \frac{2}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} C_1'(x) & = & -2 \\ C_2'(x) & = & \frac{2}{x} \end{cases}.$$

Escolhendo $C_1(x) = -2x$ e $C_2(x) = 2\ln x$ (notar que $x > 0$), obtém-se a solução particular

$$y_p = -2xe^{3x} + 2\ln(x)xe^{3x} = 2xe^{3x}(\ln x - 1), \qquad x > 0.$$

Finalmente, podemos escrever a solução geral da EDO dada:

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 2xe^{3x}(\ln x - 1), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. (a) **Determine a solução geral da equação diferencial $y''' + 4y' = 0$.**

Tratando-se de uma EDO linear homogénea com coeficientes constantes, podemos recorrer ao estudo das raízes do polinómio característico:

$$r^3 + 4r = 0 \iff r(r^2+4) = 0 \iff r = 0 \vee r = \pm 2i.$$

À raiz real simples $r = 0$ corresponde a solução constante $y_1 = 1$ e ao par de raízes complexas conjugadas simples $r = \pm 2i$ correspondem as soluções $y_2 = \cos(3x)$ e $y_3 = \operatorname{sen}(3x)$. Consequentemente, a solução geral da EDO dada é

$$y = C_1 + C_2\cos(3x) + C_3\operatorname{sen}(3x), \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) **Determine uma solução da equação diferencial $y''' + 4y' = \cos(3x)$.**

Vamos determinar uma solução da EDO completa usando o *Método dos Coeficientes Indeterminados*. Atendendo à forma do segundo membro da equação e notando que $3i$ não é raiz do polinómio característico, uma solução particular da EDO dada terá a forma

$$y_p = A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$ a determinar. Assim,

$$y_p' = -3A\operatorname{sen}(3x) + 3B\cos(3x)$$

$$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\operatorname{sen}(3x)$$

$$y_p''' = 27A\operatorname{sen}(3x) - 27B\cos(3x).$$

Sendo $y_p'''(x) + 4y_p'(x) = \cos(3x)$, chegamos à igualdade

$$15A\operatorname{sen}(3x) + (-15B - 1)\cos(3x) = 0,$$

donde se conclui que $A = 0$ e $B = -\dfrac{1}{15}$. Portanto, a solução procurada é

$$y_p = -\frac{1}{15}\operatorname{sen}(3x).$$

(c) **Sabendo que e^{x^2} é uma solução da equação $y'''+4y' = f(x)$, indique, justificando, a solução geral da equação linear**

$$y''' + 4y' = f(x) + \cos(3x).$$

Atendendo à hipótese considerada e ao cálculo da alínea anterior, pelo *Princípio de Sobreposição* podemos garantir que uma solução particular da EDO

$$y''' + 4y' = f(x) + \cos(3x)$$

é $y_P = e^{x^2} - \dfrac{1}{15}\,\mathrm{sen}\,(3x)$. Uma vez que a EDO homogénea associada é a mesma equação da alínea (a), a solução geral da EDO dada é da forma

$$y = C_1 + C_2\cos(3x) + C_3\,\mathrm{sen}\,(3x) + e^{x^2} - \frac{1}{15}\,\mathrm{sen}\,(3x), \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3. **Considere o problema de valores iniciais** $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t\,e^t + 4 \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

(a) **Justifique que o problema dado possui uma única solução, f, (em $\mathbb{R}$) e mostre que a sua transformada de Laplace é dada por**

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2}, \quad s > 1.$$

Temos um PVI de segunda ordem envolvendo uma EDO linear de coeficientes constantes (logo funções contínuas em $\mathbb{R}$), cuja função do segundo membro $b(t) = te^t + 4$ é igualmente contínua em $\mathbb{R}$. Nestas condições, o PVI possui uma única solução, f, em $\mathbb{R}$ (resultado de existência e unicidade de solução). Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da EDO, usando a linearidade e atendendo a que

- $\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - 1,$
- $\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(0) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f\}(s) - s - 1,$
- $\mathcal{L}\{te^t + 4\} = \mathcal{L}\{te^t\} + \mathcal{L}\{4\} = \dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{4}{s}, \quad s > 1,$

obtemos

$$\left(s^2 - 2s + 1\right)\mathcal{L}\{f\}(s) - s + 1 = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}, \quad s > 1.$$

Isto equivale a

$$(s-1)^2\mathcal{L}\{f\}(s) = s - 1 + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}, \quad s > 1,$$

donde resulta a igualdade pretendida

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2}, \quad s > 1.$$

(b) **Determine a solução f do problema.**

Uma vez que

$$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2}$$

(ver cálculos auxiliares abaixo), usando a linearidade da transforma de Laplace inversa obtemos

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^4}\right\} \\
&= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-1)^4}\right\} \\
&= 4 - 3e^t + 4e^t t + \frac{1}{6}e^t t^3 \\
&= 4 + e^t\left(\frac{t^3}{6} + 4t - 3\right).
\end{aligned}$$

<u>Cálculos auxiliares</u>:

$$\frac{4}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}\,, \qquad \text{para certos } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Daqui resulta que

$$4 = (A+B)s^2 + (-2A - B + C)s + A,$$

logo

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ -2A - B + C &= 0 \\ A &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 4 \\ B &= -4 \\ C &= 4 \end{cases}.$$

4. **Considere a equação diferencial** $2y'' - 3y' - 2y = 0$.

(a) **Obtenha um sistema fundamental de soluções para a equação.**

O polinómio característico associado, $2r^2 - 3r - 2$, possui duas raízes reais simples: $r = 2$ e $r = -\frac{1}{2}$. Daqui resultam duas soluções da EDO linearmente independentes, nomeadamente $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{-\frac{x}{2}}$. Assim, um sistema fundamental de soluções é

$$\left\{e^{2x},\, e^{-\frac{x}{2}}\right\}.$$

(b) **Usando o resultado obtido na alínea anterior, resolva o problema de Cauchy para a equação dada com as condições iniciais** $y(0) = \alpha$ **e** $y'(0) = \beta$ **(onde** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$**).**

Tendo em conta o resultado obtido na alínea (a), a solução geral da EDO linear homogénea dada é

$$y = A\,e^{2x} + B\,e^{-\frac{x}{2}}, \qquad \text{com } A, B \in \mathbb{R}.$$

A condição inicial $y(0) = \alpha$ implica $A + B = \alpha$. Por outro lado, como

$$y' = 2A\, e^{2x} - \frac{B}{2}\, e^{-\frac{x}{2}},$$

a outra condição inicial $y'(0) = \beta$ leva a que $2A - \dfrac{B}{2} = \beta$. Daqui resulta

$$\begin{cases} A + B &= \alpha \\ 2A - \frac{B}{2} &= \beta \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{\alpha+2\beta}{5} \\ B &= \frac{4\alpha-2\beta}{5} \end{cases}.$$

Portanto, a solução do PVI $\begin{cases} 2y'' - 3y' - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta. \end{cases}$ é

$$\varphi(x) = \frac{\alpha + 2\beta}{5}\, e^{2x} + \frac{4\alpha - 2\beta}{5}\, e^{-\frac{x}{2}}.$$

(c) **Indique a condição que α, β devem verificar por forma a que a solução φ do problema da alínea anterior satisfaça**

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0. \tag{1}$$

Uma vez que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4\alpha - 2\beta}{5}\, e^{-\frac{x}{2}} = 0$ (para quaisquer α e β), a propriedade (1) é satisfeita se e só se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha + 2\beta}{5}\, e^{2x} = 0$. Ora, esta última verifica-se apenas quando

$$\frac{\alpha + 2\beta}{5} = 0\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad \alpha + 2\beta = 0.$$