Lista de Exercícios 1 – Matemática

Avaliação Parcial II

Exponenciais, Logaritmos e Integrais

Departamento de Economia – CCSA/UFPE

Data: 19/07/2024

Data de Entrega: 30/07/2024

Prof. Cristiano da Silva

1. (Simon & Blume 5.5) Resolva as seguintes equações em x:
   a) $2e^{6x} = 18$;
   b) $lnx^2 = 5$
   c) $2^x = e^5$
2. (Simon & Blume 5.7) Quanto tempo leva $\$500$ para crescer para $\$600$ se a taxa de juros é 5% e o juros é creditado continuamente?

3. (Simon & Blume 5.8) Calcule as derivadas primeira e segunda de cada uma das seguintes funções:

a) xe^{3x}

b) $\ln(x^4 + 2)^2$

c) $\frac{\ln(x)}{x}$

d) $\frac{e^x}{x+1}$

4. (Chiang 10.5 – item 4) Calcule as derivadas de:
   a) $y = 5^t$
   b) $y = \log_2(t + 1)$
   c) $y = 13^{2t+3}$
   d) $y = x^2 \log_3(x)$

5. (Chiang 10.5 – item 7) Calcule as derivadas das seguintes funções, tomando, em primeiro lugar, o logaritmo natural em ambos os lados:

a) $y = \frac{3x}{(x+2)(x+4)}$

b) $y = (x^2+3)e^{x^2+1}$

6. (Simon & Blume 5.11) A uma taxa anual de juros de 10%, determine qual das seguintes importâncias tem o maior valor presente:
   a) R$ 215 daqui a dois anos;
   b) R$ 100 no final de cada um dos próximos dois anos;
   c) R$ 100 agora e R$ 95 daqui a dois anos;

7. (Simon & Blume 5.13) Digamos que você possui um livro raro, cujo valor daqui a t anos será de $B(t) = 2^{\sqrt{t}}$ unidades monetárias. Supondo uma taxa de juros constante de 5%, quando será a melhor época para vender o livro e investir o dinheiro arrecadado?

8. (Chiang 10.7 – item 2) Se a população crescer segundo a função $H = H_0 2^{bt}$ e o consumo segundo a função $C = C_0 e^{at}$, calcule as taxas de crescimento da população, do consumo e do consumo per-capita usando o logaritmo natural.

9. (Chiang 14.2 – item 1) Encontre a integral das seguintes funções:

   a) $\int 16x^{-3}dx \ (x \neq 0)$;
   b) $\int (x^5 - 3x)dx$
   c) $\int (2ax+b)(ax^2+bx)^7 dx$

10. (Chiang 14.2 – itens 3 e 4) Encontre a integral das seguintes funções:

    d) $\int \left(\frac{3}{x}\right) dx \quad (x \neq 0)$
    e) $\int x ln(x) dx$
    f) $\int (x+3)(x+1)^{1/2} dx$

11. (Chiang 14.3 – itens 1 e 2) Calcule o valor das seguintes integrais definidas:

a) $\int_1^3 \frac{1}{2} x^2 dx$

b) $\int_e^6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$

c) $\int_2^3 (e^{2x} + e^x) dx$

12. (Chiang 14.5) Dadas as seguintes funções receita marginal:

a) $R'(q) = 28q - e^{0,3q}$

b) $R'(q) = 10(1+q)^{-2}$

encontre, em cada caso, a função receita total $R(Q)$. Que condição inicial você pode introduzir para definir a constante de integração?

13. (Chiang 14.5 – item 4) Dado um fluxo contínuo de renda à taxa constante de R$ 1.000 por ano.

a) Qual será o valor presente $\boldsymbol{VP}$ se o fluxo de renda durar 2 anos e a taxa contínua de desconto for $0{,}05$ por ano?

b) Qual será o valor presente **VP** se o fluxo de renda terminar exatamente após 3 anos e a taxa de desconto for 0,04?

14. (Chiang 14.5 – item 5) Qual é o valor presente de um fluxo de caixa perpétuo de:

a) $R\$$ 1.450 por ano, descontado a $r = 5\%$?

b) $R\$$ 2.460 $por\ ano$, descontado a $r = 8\%$?

Anexo I: Derivadas e conceitos financeiros

Valor Presente

Boa parte dos problemas econômicos, envolvem a comparação de quantidades de dinheiro em tempos distintos numa mesma conta. Na análise custo-benefício para a realização de um empreendimento qualquer, é necessário levar em consideração o custo inicial para abertura do negócio, os custos de manutenção do empreendimento e os benefícios monetários futuros obtidos.

O conceito de Valor Presente é uma forma de trazer estes valores futuros para o presente, a fim de realizar a comparação entre os custos e os benefícios em um único instante no tempo.

Note que se depositarmos A unidades monetárias numa conta que credita juros continuamente a uma taxa r, então teremos

$$B(t) = Ae^{rt}$$

unidades monetárias, decorridos t anos. De forma recíproca, para gerar B unidades monetárias daqui a t anos, numa conta que credita juros a uma taxa r, teríamos de investir

$$A = Be^{-rt}$$

unidades monetárias agora. Logo, diz-se que Be^{-rt} é o **valor presente (VP)** de B unidades monetárias daqui a t anos (a uma taxa *r)*.

No contexto de fluxos de caixa, o **VP** (a uma taxa *r*) de um investimento que paga B_1 unidades monetárias daqui a t_1 anos, e paga B_2 unidades monetárias daqui a t_2 anos, ..., e paga B_n unidades monetárias daqui a t_n anos, é dado por:

$$\boldsymbol{VP} = B_1e^{-rt_1} + B_2e^{-rt_2} + \cdots + B_ne^{-rt_n}$$

Anuidade

Uma **anuidade** é uma sequência de pagamentos iguais em intervalos regulares ao longo de um período especificado. O **VP** ***de uma unidade que paga A*** *unidades monetárias ao final de cada um dos próximos N anos, supondo uma taxa de juros constante r composta continuamente* é:

$$\boldsymbol{VP} = Ae^{-r} + Ae^{-2r} + \cdots + Ae^{-Nr}$$

$$\boldsymbol{VP} = A(e^{-r} + e^{-2r} + \cdots + e^{-Nr})$$

Visto que $(a + \cdots + a^n)(1 - a) = a - a^{n+1}$, segue que:

$$a+..+a^n = \frac{a(1 - a^n)}{1 - a}$$

Tome $e^{-r} = a$ e $n = N$, produz-se:

$$\boldsymbol{VP} = \frac{A(1 - e^{-rN})}{e^r - 1}$$

E tomando o limite quando $N \to \infty$, têm-se:

$$\boldsymbol{VP} = \frac{A}{e^r - 1}$$

Já que $e^{-rN} \to 0$ quando $N \to \infty$.

Tempo ótimo de espera

Suponha que você possua um imóvel, cujo valor de mercado será $V(t)$ unidades monetárias daqui a t anos. Se a taxa de juros permanecer constante em r ao longo desse período, o fluxo temporal correspondente de valores presentes é $V(t)e^{-rt}$.

A teoria econômica sugere que o tempo ótimo para vender essa propriedade é o instante $t = t_0$, em que ocorre o valor máximo desse fluxo temporal de fluxos de valores presentes. A condição de primeira ordem para esse problema é:

$\frac{d(V(t)e^{-rt})}{dt} = V'(t)e^{-rt} - rV(t)e^{-rt} = 0$ (note que foi aplicada a derivada do produto)

$$V'(t)e^{-rt} = rV(t)e^{-rt}$$

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = r \quad em\ t = tempo\ ótimo\ de\ venda\ t_0$$

Observe que no lado esquerdo é expressa a taxa de variação percentual (ou taxa de crescimento) do valor do imóvel e o lado direito dá a taxa de juros (que denota a taxa de variação percentual do dinheiro no banco).

Enquanto a valorização do imóvel for maior do que a taxa de juros, faz sentido manter o imóvel. Já, a partir do momento em que o dinheiro no banco tiver uma taxa de crescimento relativamente maior, é melhor vender o imóvel e aplicar o dinheiro obtido à taxa de juros r no Banco.

Exemplo: Você possui um imóvel cujo valor de mercado daqui a t anos é dada pela função $V(t) = 10.000e^{\sqrt{t}}$. Supondo que a taxa de juros permaneça em 6% no futuro previsível, o tempo ótimo de venda é obtido maximizando-se o valor presente.

$$V(t) = 10.000e^{\sqrt{t}}e^{-0,06t} = 10000e^{\sqrt{t}-0,06t}$$

Tomando a primeira derivada:

$$V'(t) = 10.000e^{\sqrt{t}-0,06t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,06\right)$$

Logo:

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = 0 \to \frac{1}{2\sqrt{t}} - 0,06 = 0 \to \frac{1}{2\sqrt{t}} = 0,06$$

$$\sqrt{t} = \frac{1}{0,12} \to t_0 = \left(\frac{1}{0,12}\right)^2 \to t_0 = 69,44$$

Observe que $para\ todo$ $0 \leq t < 69,44$, $V'(t)$ é positivo e para todo $t > 69,44$, $V'(t)$ é negativo. Logo em $t_0 = 69,44$ anos, o VP será máximo!

Questão: Qual será o VP da venda do imóvel no ótimo?

Anexo II: Integrais e conceitos financeiros

Valor presente de um fluxo de caixa

Nossa discussão anterior sobre desconto e valor presente, limitada ao caso de um único valor futuro $B(t)$, nos levou às fórmulas de desconto

$$A = Be^{-rt}$$

Agora suponha que temos um fluxo de valores futuros – uma série de receitas recebíveis em vários instantes ou de desembolsos de custo pagáveis em vários instantes. Como calcular o valor presente do fluxo de caixa no caso contínuo?

Considere um fluxo de caixa contínuo de receita a uma taxa de $R(t)$ reais por ano. Isso significa que, em $t = t_1$, a taxa de fluxo é $R(t)$ reais por ano, mas, em um outro instante $t = t_2$, a taxa será $R(t_2)$ reais por ano – considerando t como uma variável contínua. Em qualquer instante, o montante de receita durante o intervalo $[t, t + dt]$ pode ser escrito como $R(t)dt$. Quando descontada continuamente a taxa de r por ano, seu valor presente deve ser $R(t)e^{-rt}dt$. Se, por outro lado, nosso problema for encontrar o valor presente total de um fluxo de 3 anos, nossa resposta será encontrada na seguinte integral definida:

$$VP = \int_{t_1}^{t_2} R(t)e^{-rt}dt$$

Note que se o fluxo de caixa persistir para sempre (fluxo perpétuo), então o valor presente do fluxo de caixa seria

$$VP = \int_{t_1}^{\infty} R(t)e^{-rt}dt$$

Que é uma integral imprópria.