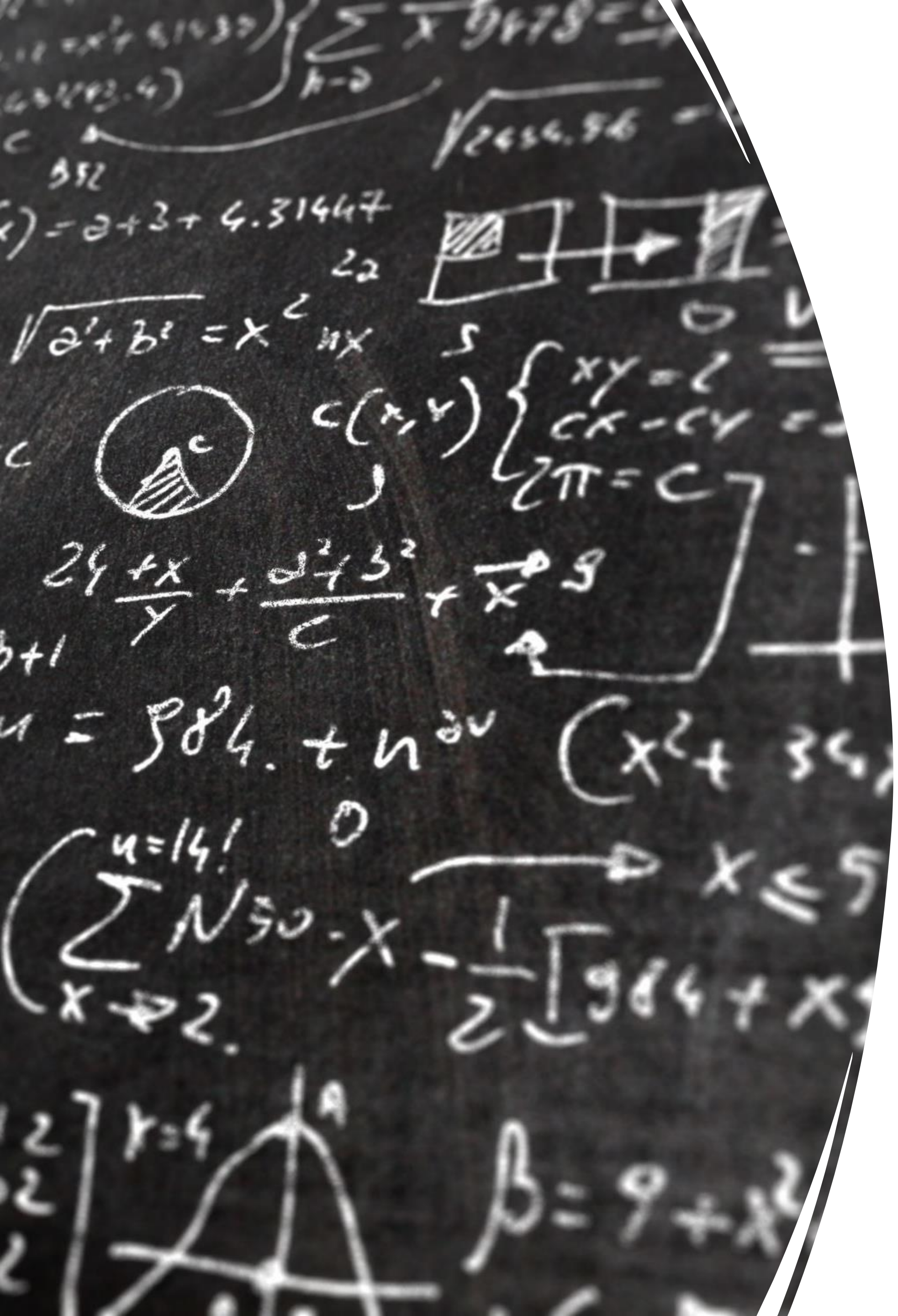

Matemática

Aula XX: Funções de Várias Variáveis(Parte V)

Data: 13/08/2024

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Limitação de Funções Côncavas: propriedade cardinal, a concavidade depende dos números que a função associa aos conjuntos de nível e não só do formato dos conjuntos de nível.

Logo, uma transformação monótona de uma função côncava, não necessariamente gera outra função côncava.

Exemplo:

$f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{1/3} \;\; com\ x_i \in R_+$ é côncava.

$g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ é uma transformação monótona de f, com z^3

$g(x_1, x_2) = x_1 x_2$ é uma função convexa.

Exercício: Adote os pontos $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{8}, \boldsymbol{27})$ **e** $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{27}, \boldsymbol{64})$ e teste a concavidade das funções f e g**.**

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Propriedade Ordinal Fundamental de Funções Côncavas: Seus conjuntos de nível limitam regiões convexas por baixo

No caso da teoria do consumidor, essa propriedade implica que o conjunto formado pelas cestas pelo menos tão boas quanto à uma dada cesta em uma curva de indiferença, forma um conjunto convexo.

A implicação disso, é que as taxas marginais de substituição serão decrescentes para as curvas de indiferença (ou seja, ao longo da curva de indiferença, o aumento no consumo de um dado bem é contraposto pela redução no consumo de algum outro bem, de forma a manter a utilidade constante entre os dois pontos).

As funções que atendem esta propriedade desejada serão denominadas **funções quase-côncavas**

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Definição (Funções quase-côncavas): Uma função f definida num subconjunto convexo $U\ de\ \mathbb{R}^n$ é **quase-côncava** se, para cada número real a

$$C_a^+ \equiv \{\boldsymbol{x} \in U : f(\boldsymbol{x}) \geq a\}$$

É um conjunto convexo.

Definição (Funções quase-convexas): Uma função f definida num subconjunto convexo $U\ de\ \mathbb{R}^n$ é **quase-convexa** se, para cada número real a

$$C_a^+ \equiv \{\boldsymbol{x} \in U : f(\boldsymbol{x}) \leq a\}$$

É um conjunto convexo.

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Teorema: Seja f uma função definida num conjunto convexo $U\ de\ \mathbb{R}^n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes entre si

$a)$ f é uma função quase-côncava em U.

b) Para quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U\ e\ t \in [0,1]$,

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{y}) \quad implica\ f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{y})$$

c) Para quaisquer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U\ e\ t \in [0,1]$,

$$f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \geq \min\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\}$$

Segundo o Teorema, toda função côncava é uma função quase-côncava, mas nem toda função quase-côncava é função côncava.

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Exemplo: Considere a função de produção de elasticidade de substituição constante (CES)

$$Q(x, y) = (a_1 x_1^r + a_2 x_2^r)^{1/r}, onde\ 0 < r < 1$$

Note que a função $Q(x, y) = a_1 x_1^r + a_2 x_2^r$ é HG-, $visto\ que\ r < 1$ então a função é côncava.

Como $g(z) = z^{1/r}$ é uma transformação monótona, Q é uma transformação monótona de uma função côncava e, portanto, quase-côncava.

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Critério de Cálculo

Teorema: Suponha que F é uma função C^1 num subconjunto aberto convexo U de $\mathbb{R}^n$. Então F é quase-côncava em U se, e somente se,

$$F(\boldsymbol{y}) \geq F(\boldsymbol{x}) \; implica \; que \; DF(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0$$

F é quase-convexa em U se, e somente se,

$$F(\boldsymbol{y}) \geq F(\boldsymbol{x}) \; implica \; que \; DF(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \leq 0$$

Prova: Suponha que F **é quase-côncava** em U e que $F(\boldsymbol{y}) \geq F(\boldsymbol{x}) \in U$ arbitrários. Então, para qualquer $t \in [0,1]$

$$F\big(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\big) > F(\boldsymbol{x})$$

Como $F\big(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\big) - \mathrm{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \rightarrow \frac{F\left(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\right)-\mathrm{F}(\mathbf{x})}{t} > \mathbf{0}$

Logo $DF(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq 0$

Funções Quase-Côncavas e Quase-Convexas

Novos exercícios para serem entregues até o dia 20/08

Verifique se as funções abaixo são quase-côncavas, a partir dos seguintes pontos $\boldsymbol{x} = (1,2)\ e\ \boldsymbol{y} = (1,9)$.

a) $f(x,y) = \left(2x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}\right)^3$

b) $f(x,y) = yx^{-2}$

c) $f(x,y) = ye^{-x}$

d) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$