ROBÓTICA 2018/2019

Sistemas de Coordenadas e Transformações

Problemas Tipo :

1. Dada a matriz de dimensão 3x3

$$R = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix}$$

   a. Mostre que *R* é uma matriz de rotação.
   b. Determine o vector unitário que define o eixo de rotação e o valor do ângulo de rotação.
   c. Quais são os parâmetros de Euler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ de *R*?

2. O sistema de coordenadas *{B}* está inicialmente coincidente com o sistema de coordenadas *{A}*. É efectuada a rotação de *{B}* sobre OY_B de um ângulo igual a ϕ graus seguida de uma outra rotação de *{B}* sobre OX_B de um ângulo igual a θ graus.
   a. Obtenha a matriz de rotação ${}^A_B R$, a qual permite alterar a descrição do vector *P* no sistema referencial *{B}*, ${}^B P$, para o sistema de coordenadas *{A}*, ${}^A P$.
   b. Qual é o resultado se $\theta = 60^\circ$ e $\phi = 30^\circ$?
   c. Obtenha ${}^A \hat{Z}_B$.

3. Em geral, a multiplicação de matrizes de transformação homogéneas não é comutativa. Considere o produto matricial que se apresenta

$$H = R_{OX,\alpha} \cdot T_{X,b} \cdot T_{Z,d} \cdot R_{OZ,\theta}$$

   a. Do conjunto de matrizes que se apresentam à direita da equação, diga quais os pares de matrizes que comutam. Explique as razões que suportam a sua escolha.
   b. Apresente todas as permutações destas quatro matrizes que se traduzem na mesma matriz de transformação homogénea, H.

4. Mostre que $Q_I = (1,0,0,0)$ é o elemento identidade para a multiplicação de quaterniões unitários, i.e., $QQ_I = Q_I Q = Q$ para qualquer quaternião unitário Q.

5. O conjugado Q^* de um quaternião Q é definido por $Q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$. Mostre que Q^* é o quaternião inverso de Q, i.e., mostre que $Q^* Q = QQ^* = (1,0,0,0)$.

6. Considere os quaterniões $Q_x = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0 \right)$ e $Q_z = \left(\sqrt{2}/2, 0, 0, \sqrt{2}/2 \right)$. Mostre que a rotação do vetor x_0 pelo quaternião composto $Q_x Q_z$ resulta no vetor z_0. Confirme que se obtém o mesmo resultado através de $R_x(\pi/2) R_z(\pi/2) x_0$

7. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^A_B T$, a qual traduz a rotação de B sobre o eixo ${}^A\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ de um ângulo $\phi = 45^\circ$.
   a. Represente numericamente a matriz de transformação ${}^A_B T$ e obtenha os ângulos de Roll-Pitch-Yaw equivalentes.
   b. Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:
      i. Rodar o sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $\pi/3$ sobre o eixo de rotação ${}^A\vec{r}$;
      ii. Deslocar o sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^A\vec{r}$;
   c. Qual o deslocamento a realizar, se na sequência de movimentos da alínea anterior substituir o deslocamento realizado segundo a direção ${}^A\vec{r}$ por deslocamentos realizados segundo os eixos do sistema referencial A.
   d. Apresente graficamente as sequências de movimentos propostas nas alíneas b) e c).
   e. Qual a expressão que representa a localização da origem do referencial B após ter realizado os movimentos propostos em b)? Qual a nova localização?

8. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação ${}^A_B T$. O sistema de coordenadas A encontra-se localizado em $t = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ relativamente ao sistema de coordenadas B e a matriz de rotação ${}^A_B R$ é representada pelos parâmetros de Euler que se apresentam

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

a) Represente numericamente a matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$ e obtenha os ângulos de Roll-Pitch-Yaw equivalentes.

b) Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas A e B após se terem realizado os seguintes movimentos:

1. Rodar o sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $\pi/2$ sobre o eixo de rotação ${}^{B}\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$;
2. Deslocar o sistema de coordenadas A em 4 unidades segundo o eixo de rotação ${}^{B}\vec{r}$;
3. Rodar o atual sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ sobre o eixo de rotação OY_B.

c) Apresente graficamente a sequência de movimentos proposta na alínea b).

d) Apresente uma sequência alternativa de movimentos que se traduza na mesma matriz de transformação.

9. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base. Sabendo que $\hat{X}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, $\hat{Y}_B = \hat{Y}_A$, $\hat{Z}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{X}_A + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{Z}_A$, e que ${}^{A}t_{ori_B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, obtenha;

a) A sequência de movimento a realizar de modo a recolocar o sistema de coordenadas B coincidente com o sistema de coordenadas A, i.e., ${}^{A}_{B}T = I_{4x4}$.

b) Obtenha os valores do quaternião unitário da matriz ${}^{A}_{B}R$ ($[e_1, e_2, e_3, e_4]$), e com base nos valores obtidos calcule o eixo de rotação arbitrário ${}^{A}\vec{r}$ e correspondente ângulo de rotação ϕ.

c) Obtenha a transformação ${}^{B}_{B_N}T$ que resulta da rotação do sistema de coordenadas B sobre o eixo ${}^{A}\vec{r}$ de um ângulo ϕ igual a $\pi/3$.

10. Considere o vector, ${}^{A}V = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$, expresso no sistema de coordenadas A. De que forma o vector se altera se for expresso no referencial B ? São ${}^{A}V$ e ${}^{B}V$ o mesmo vector? Comente do ponto de vista das suas magnitudes e direções. Caso sejam diferentes, de que forma se pode transformar o vector ${}^{A}V$ em ${}^{B}V$? Obtenha ${}^{B}V$ partindo do conhecimento de ${}^{A}V$.

11. Considere um espaço de trabalho constituído por um manipulador equipado com uma garra, cuja localização da garra é definida na sua base através da transformação ${}^{0}_{G}T = {}^{0}_{6}T\,{}^{6}_{G}T$. O manipulador está colocado num espaço de trabalho,

sendo a pose do robot nesse espaço definida através de ${}^{W}_{0}T$. O espaço de trabalho é monitorizado por uma câmara definida por ${}^{W}_{C}T$, sendo a pose da peça a manusear obtida no referencial da câmara e definida por ${}^{C}_{O}T$.

Obtenha:

a) A transformação ${}^{0}_{6}T$ que assegura a colocação da garra na posição de agarrar a peça;

b) A nova transformação ${}^{C}_{O}T$ após o robot ter movido a peça através de uma rotação θ segundo o seu eixo OZ.

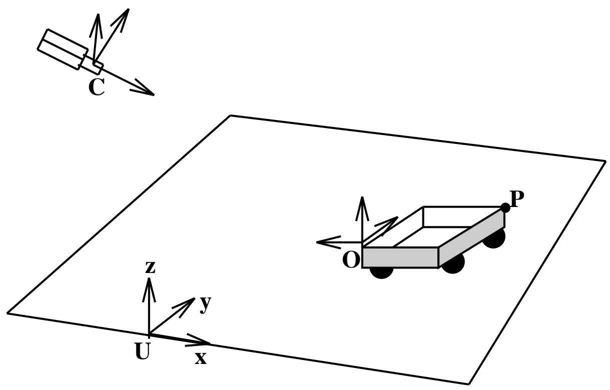
Se após ter movido a peça, rodar a câmara de um ângulo α sobre o eixo ${}^{w}\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, qual a expressão que representa a nova localização da câmara no referencial da garra (${}^{G}_{C_N}T$)?

12. Analisando a figura que se apresenta, a qual pretende descrever o universo dos sistemas de coordenadas envolvidos num processo de localização de objectos, identificam-se três sistemas referenciais:

- O sistema referêncial C, acoplado à camara e com o eixo OZ coincidente com o eixo óptico da câmara;
- O sistema referencial O, acoplado a uma plataforma que se desloca no espaço de monitorização visual;
- O sistema referêncial inercial U, solidário ao espaço de monitorização.

Sabendo que

$${}^{U}_{C}T = \begin{bmatrix} 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & -100 \\ 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & 50 \\ -0.5 & 0 & 0.8660 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



obtenha:

a. A sequência de movimentos a efectuar em U para colocar C na pose definida por ${}^{U}_{C}T$.

b. Qual a transformação ${}^{C}_{C_N}T$ que resulta da rotação de C sobre o eixo ${}^{U}r = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.707 & 0 \end{bmatrix}^T$ que passa no ponto ${}^{U}p = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 \end{bmatrix}^T$? (pergunta de selecção)

c. Incorporando um manipulador ao ambiente de trabalho, o qual está localizado em ${}^{U}_{R}T$ e com o gripper na pose ${}^{U}_{Actual}T$, obtenha a expressão que representa o deslocamento a ser efectuado pelo gripper de modo a se colocar coincidente com a pose do ponto P (${}^{Gripper}_{P}T$), conhecendo ${}^{C}_{O}T$?

13. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequencia de movimentos:

1. Deslocação do sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo ${}^{A}\bar{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
2. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo ${}^{A}\bar{r}$.
3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/2$ segundo o eixo $\hat{Z}_B$ do referencial B atual.

a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e., ${}^{A}_{B}T$.

b) Represente a sequência de movimentos realizada anteriormente através da conjugação de um movimento translacional puro t combinado com uma rotação sobre um eixo arbitrário ${}^{A}\bar{r}$ de um ângulo ϕ. Obtenha os valores para ϕ, t e ${}^{A}\bar{r}$.

14. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

1. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a $\pi/2$ segundo o eixo ${}^{B}\bar{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
2. Deslocação do sistema de coordenadas B em três unidades ao longo do eixo ${}^{B}\bar{r}$.
3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a $-\pi/4$ segundo o atual eixo $\hat{X}_B$.

a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e., ${}^{A}_{B}T$.

b) Considere agora a existência de um terceiro referencial C cuja orientação é idêntica à orientação de B e que se encontra localizado em ${}^{B}t_{orig_C} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T$. Obtenha a expressão que representa a origem do sistema de coordenadas C no sistema de coordenadas A, i.e., ${}^{A}p_{orig_C}$. Obtenha a matriz de transformação ${}^{A}_{C}T$.

c) Se aplicar ao sistema de coordenadas C uma rotação igual a $\pi/4$ segundo ${}^{B}\bar{r}$ centrado na origem de A, qual a nova transformação ${}^{A}_{C}T$. Considerando que os 3 sistemas de coordenadas {A,B,C}, representam, respectivamente, os sistemas de coordenadas *World*, *Robot* e *Gripper*, obtenha a transformação de movimento a realizar pelo robô para colocar a garra em condição de agarrar uma peça cuja transformação é dada por

${}^{Robot}_{Obj}T$. Qual o valor da rotação a realizar pela garra segundo o seu eixo de aproximação ($\hat{Z}_{Gripper}$) se ${}^{Robot}_{Obj}R = I_{3x3}$?

15. Dois sistemas de coordenadas A e B estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. $$

a. Obtenha uma sequência de movimentos que se traduza na matriz de transformação previamente apresentada.

b. Obtenha a nova matriz de transformação ${}^{A}_{B}T$, após serem realizados os movimentos complementares apresentados a seguir:

   i. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo α segundo o eixo $OY_{A_{ATUAL}}$.

   ii. Deslocação do sistema de coordenadas A em *d* unidades segundo o eixo $OZ_{B_{INICIAL}}$.

   iii. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo β segundo o eixo $OX_{A_{ATUAL}}$.

c. Sabendo que a matriz de transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas, após a sequência de movimentos da alínea a), é representada por

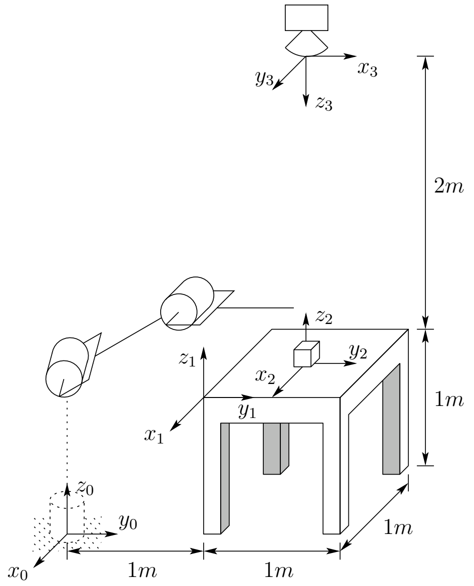
$$ {}^{A'}_{B''}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

obtenha os valores de (α, β, d) que conduzem à matriz apresentada. Confirme o resultado graficamente.

d. Apresente uma sequência alternativa de movimentos, composta apenas por uma rotação e uma translação, que se traduza na mesma matriz de transformação

16. Considere o diagrama da figura anexa. Um manipulador é colocado afastado um metro de uma mesa de trabalho com altura de $1m$ e área igual a $1m^2$. Um sistema de coordenadas o_1, x_1, y_1, z_1 é colocado num dos cantos da superfície da mesa, e um cubo com $20cm$ de lado é colocado no centro da mesa com o sistema de coordenadas o_2, x_2, y_2, z_2 colocado no centro de massa do cubo. A inspecionar a cena é colocada uma câmara a $2m$ de distância da mesa e alinhada perpendicularmente à sua superfície, tendo a câmara acoplado o

sistema referencial o_3, x_3, y_3, z_3 onde o eixo $\overrightarrow{o_3 z_3}$ está alinhado com o centro do cubo.



a. Obtenha as transformações homogéneas que relacionam cada um dos sistemas referenciais ao sistema referencial base o_0, x_0, y_0, z_0.
b. Se após a calibração da câmara, rodar a câmara 30° sobre o eixo ${}^2\vec{r} = [-1, -1, +1]^T$, qual a nova transformação que relaciona a câmara com o referencial base?
c. Se pretender compensar o deslocamento espacial sofrido pela câmara após a rotação aplicada, quais as deslocações a impor à câmara, sobre os seus próprios eixos, para a recolocar na localização inicial?

LABWORK #1 *Data de Entrega: 14 de Outubro 2018*

A componente laboratorial desta disciplina é realizada tirando partido da *toolbox ROBOTICS* desenvolvida pelo professor *Peter Corke*. Para tal deverá instalar a *toolbox* na sua plataforma de trabalho, a qual pode ser descarregada no endereço

http://www.petercorke.com/Robotics_Toolbox.html.

Siga as instruções descritas na página de acesso para integrar as funções da *toolbox* no seu ambiente de trabalho MATLAB.

1. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #1)

   Considere a existência de um objecto tridimensional de dimensão (1 x 1 x 1) colocado num espaço de trabalho (*World*) de dimensão $\left[-10..10,-10..10,-10..10\right]$.

   O objeto tem um sistema de coordenadas ortonormado acoplado a um dos seus vértices e está localizado no espaço de trabalho na seguinte configuração:

$$^{World}T_{Object}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Explorando as potencialidades das funções *trinterp, ctraj* e *mtraj* da toolbox ROBOTICS, ou desenvolvendo funções próprias, desenvolva uma aplicação em matlab que permita visualizar os movimentos do objecto quando lhe é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

   1. Rotação de 30° sobre o eixo OX do sistema de coordenadas *World*;
   2. Deslocação de 3 unidades sobre o eixo OZ do atual sistema de coordenadas *Object*;
   3. Rotação de −45° sobre o eixo $\left[1,-1,1\right]$ do sistema de coordenadas *Object* inicial;
   4. Rotação de 90° do sistema de coordenadas *World* sobre o seu próprio eixo OZ.

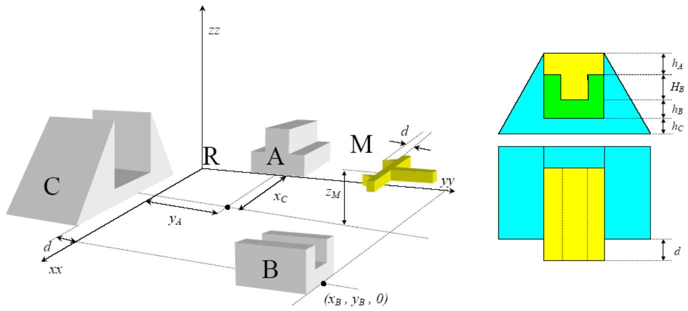
2. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #2)

   Considere o ambiente de trabalho que se apresenta, onde o objectivo é usar a garra de uma manipulador colocada em **M** para executar a seguinte sequência de acções:

   1. Pegar no objecto **A**;
   2. Inseri-lo no objecto **B**;
   3. Encaixar o conjunto no objecto **C**;

      a) A partir da figura, convencionar os referenciais associados a **M**, **A**, **B** e **C**, representá-los, e indicar quais as transformações geométricas que os representam no referencial **R**.

b) Indicar uma sequência de transformações geométricas que permita cumprir os objectivos propostos ($M \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$) segundo o ponto de vista do manipulador, ou, em alternativa, do ponto de vista do referencial **R**.



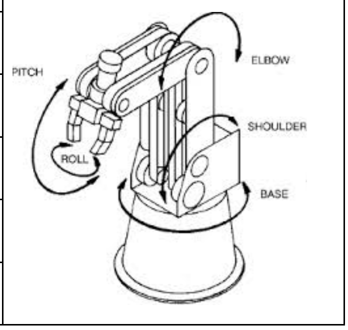
Explore as funcionalidades das funções *trinterp, ctraj* e *mtraj* da toolbox ROBOTICS na realização do problema.

3. EXERCÍCIO MATLAB (Aula laboratorial #2)

Sabendo que a matriz de transformação que modela um elo (*link*) de um manipulador é representada por

$$
{}^{i-1}_{\ \ i}A = \begin{bmatrix} c_{\theta_i+off} & -s_{\theta_i+off}\cdot c_{\alpha_i} & s_{\theta_i+off}\cdot s_{\alpha_i} & a_i\cdot c_{\theta_i+off} \\ s_{\theta_i+off} & c_{\theta_i+off}\cdot c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i+off}\cdot s_{\alpha_i} & a_i\cdot s_{\theta_i+off} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

onde $\left[\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i\right]_{i=1..n}$ representam os 4 parâmetros de Denavith-Hartenberg, elabore um programa em Matlab que desenhe o esquemático de um manipulador na sua configuração "home" e que efetue a animação de movimento do manipulador mediante a interação nas suas variáveis de junta $\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\right]$. Para tal, considere que conhece a tabela de parâmetros D-H dos elos do manipulador. Para efeitos demonstrativos, use como exemplo a tabela de D-H que se apresenta e que corresponde ao manipulador (RRR-RR)

	θ_i	d_i	a_i	α_i	$Offset$	R/T	$Range$	
${}^0T_1(0 \rightarrow 1)$	θ_1	0	0	$\pi/2$	0_{rad}	R	$\left[-\pi/2 .. \pi/2\right]$	
${}^1T_2(1 \rightarrow 2)$	θ_2	0	4	0_{rad}	$\pi/2$	R	$\left[-\pi/3 .. \pi/4\right]$	
${}^2T_3(2 \rightarrow 3)$	θ_3	0	2	0_{rad}	0_{rad}	R	$\left[-\pi/2 .. \pi/2\right]$	
${}^3T_4(3 \rightarrow 4)$	θ_4	0	0	$-\pi/2$	$-\pi/2$	R	$\left[-\pi/2 .. \pi/2\right]$	
${}^4T_G(4 \rightarrow G)$	θ_5	1	0	0_{rad}	0_{rad}	R	$\left[-\pi .. \pi\right]$	