

## Velocidades e Jacobiano de Manipuladores

*Data de Entrega: Faseada (ver datas por problema)*

### HOMEWORK #3

1. Considere um manipulador cilíndrico (PRP-RR) ao qual corresponde a tabela de DH que se apresenta. O vector das variáveis de junta é dado por  $q = [d_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5]$ .

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0->1	$90^\circ$	$d_1$	0	$90^\circ$
1->2	$90^\circ + \theta_2$	0	0	$90^\circ$
2->3	$0^\circ$	$d_3$	0	$-90^\circ$
3->4	$\theta_4$	0	0	$90^\circ$
4->G	$\theta_5$	5	0	$0^\circ$

Obtenha:

- O Jacobiano Geométrico do manipulador  ${}^0J_{6 \times 5}$ ;
  - Análise as singularidades do manipulador. Justifique devidamente a resposta e desenhe o manipulador nas configurações singulares;  
(AJUDA : Analise para que configurações do manipulador se anula uma qualquer componente de velocidade);
  - Assumindo que se desloca a primeira junta do manipulador com uma velocidade  $\dot{d}_1$ , obtenha as equações de velocidade para as restantes juntas do manipulador de modo a garantir  ${}^0v|{}^0\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ .
  - Se aplicar no punho do manipulador uma força  ${}^4F_{4,App} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na sua configuração "home" ( $q = \begin{bmatrix} 10 & 0^\circ & 10 & 0^\circ & 0^\circ \end{bmatrix}^T$ ), quais os valores de binário/força nas juntas do manipulador que asseguram o seu equilíbrio estático.
2. Considere o manipulador com 3 graus de mobilidade RPR cujas matrizes de transformação de junta se apresenta:

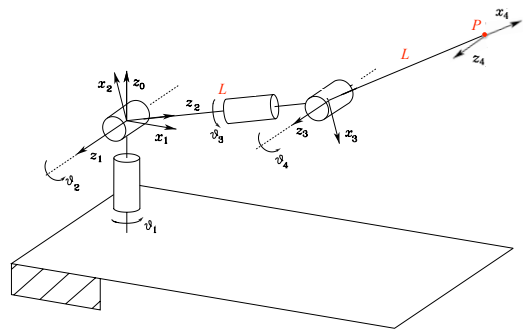
$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & L_1 \cdot C_1 \\ S_1 & 0 & C_1 & L_1 \cdot S_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2T_E = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & C_3 & L_2 \cdot C_3 \\ 0 & -C_3 & S_3 & L_2 \cdot S_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obtenha o Jacobiano do manipulador,  ${}^G J_{6 \times 3}$ , que expressa a velocidade linear e angular do *end-effector* em função da velocidade das juntas.
- Obtenha o Jacobiano de movimento angular expresso no referencial 1 ( ${}^1 J_\omega$ ). O que é que esse jacobiano lhe diz em termos da velocidade angular segundo a direção  $x$ ? Explique as diferenças verificadas entre o Jacobiano de velocidade angular obtido e o Jacobiano angular expresso no referencial base  ${}^0 J_\omega$ .
- Recorrendo a  ${}^1 J_v$ , obtenhas as configurações singulares do manipulador e explique quais as restrições de movimento que acontecem em cada caso (Ajuda: Usando as matrizes de transformação fornecidas, desenhe o esquemático do manipulador em estudo).

3. Considere o robot 4R da figura anexa do qual se conhecem as matrizes de transformação dos elos,

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^3_4T = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & L \cdot C_4 \\ S_4 & C_4 & 0 & L \cdot S_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Os sistemas de coordenadas de D-H são os apresentados na figura, correspondendo a configuração apresentada ao vector de variáveis de junta

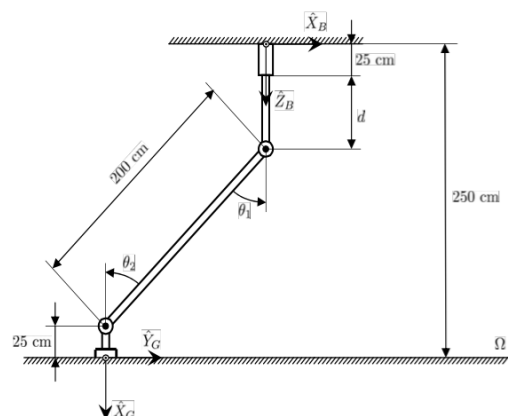
$$q = [0 \quad 6\pi/10 \quad \pi \quad 6\pi/10]^T \equiv [0^\circ \quad 108^\circ \quad 180^\circ \quad 108^\circ]^T.$$

Assumindo a configuração  $q_1 = [0 \quad 3\pi/4 \quad \pi \quad \pi]^T$  e fazendo  $L = 1m$ ,

- Obtenha o Jacobiano básico  ${}^0 J_{6 \times 4}$ .
- Mostre que na configuração  $q_1$  o manipulador consegue concretizar a velocidade  $\begin{bmatrix} {}^0 v & {}^0 \omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T$ .
- Considerando unicamente a velocidade linear  ${}^0 v$ , verifique se perante a configuração  $q_1$  o manipulador se encontra numa configuração singular.

4. Observe o manipulador **PRR** apresentado na figura.

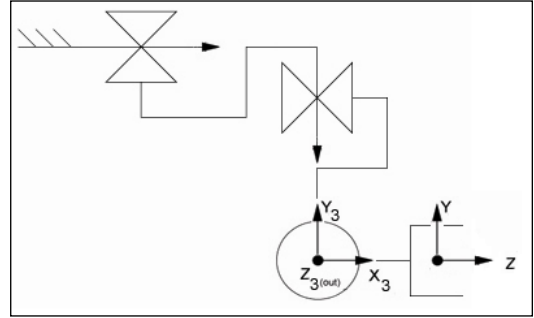
- Obtenha o modelo geométrico directo do manipulador.
  - (NOTA: Respeite os sistemas de coordenadas que se apresentam para a base e garra do manipulador)
- Obtenha o Jacobiano básico do manipulador  ${}^B J_{6 \times 3}$ .
- Obtenha as expressões das velocidades angulares  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ , e linear  $\dot{d}_1$ , que asseguram o movimento rectilíneo com uma velocidade linear constante de  $|v_{B/X}| = 10cm/s$  sobre o plano  $\Omega$ .



- d) Se quiser aplicar com o gripper uma força constante sobre o plano  $\Omega$  igual a  ${}^G F = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , quais as expressões para os binários das juntas função da trajectória.

5. Considere o manipulador **PPR** da figura. Um vector de força é aplicado ao end-effector e medido no sistema de coordenadas  $\{0\}$  como sendo igual a  ${}^0 F_{G,App} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na configuração  $\begin{bmatrix} d_1 = 25cm & d_2 = 25cm & \theta_3 = 90^\circ \end{bmatrix}$ . Considere  $d_3 = 10cm$ .

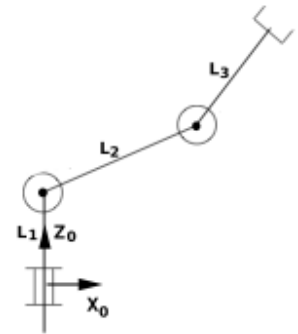
Sabendo que  ${}^G J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_3 & -S_3 & d_3 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$



- Determine os binários nas juntas que asseguram o equilíbrio estático do manipulador.
- Quais os valores de força e binário em cada junta do manipulador.
- Qual a força e binário que uma ferramenta acoplada ao end-effector aplica quando são aplicadas nas juntas os binários calculados na alínea a). Considere que a ferramenta está alinhada com o eixo  $\hat{x}_G$  e que possui um comprimento  $L=15cm$ .

6. Observe o manipulador RRR da figura. Sabendo que as matrizes de transformação  ${}^{i-1}T_i$  são conhecidas e iguais a

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & L_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & L_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & L_3 C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & L_3 S_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



obtenha:

- O Jacobiano,  ${}^0 J_{6 \times 4}$ , que expressa a velocidade linear e angular do *end-effector* em função da velocidade das juntas.
- Para que configurações se encontra o manipulador numa singularidade? Desenhe as configurações singulares, justificando claramente cada singularidade, indicando qual o movimento condicionado com cada singularidade. (Ajuda: para simplificar os cálculos, converta o jacobiano obtido em a) para  ${}^1 J$ ).
- Para cada singularidade observada, pretende-se incorporar uma junta adicional para resolver essa singularidade. Para cada situação, desenhe o esquemático do manipulador resultante e justifique porque razão a singularidade fica resolvida com a nova junta.
- Um vector de força é aplicado ao end-effector e medido no sistema de coordenadas  $\{G\}$  como sendo igual a  ${}^G F_{G,App} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T$ , estando o manipulador na configuração  $[\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = \pi/4, \theta_3 = \pi/2]$ . Obtenha o valor dos binário/força das juntas do manipulador que asseguram o equilíbrio estático. Considere  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ .

7. Considere o manipulador RRP, cujas matrizes de transformação de elos são conhecidas e representadas por

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & C_1 & -aC_1 \\ C_1 & 0 & S_1 & aS_1 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_E T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obtenha o Jacobiano geométrico do manipulador  ${}^E J_{6 \times 3}$ .
- Identifique as configurações singulares de velocidade linear do manipulador. Desenhe as configurações singulares encontradas e explique porque razão são singulares.
- Para que configurações das juntas de rotação se obtém a máxima manipulabilidade posicional do manipulador? Justifique.
- Qual a configuração do manipulador que assegura o seu equilíbrio estático aplicando binários/forças nulos nas juntas do manipulador quando se aplica no end-effector o vetor de forças  ${}^0F_{E,App} = \begin{bmatrix} 0 & -f_y & 0 & -w_x & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ ?
- Assumindo que o vetor de forças da alínea d) era aplicado ao end-effector do manipulador na configuração  $(\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ, d_3 = 5cm)$ , sendo  $a = 5$ ,  $b = 1$ , obtenha os valores de força e binário em cada junta do manipulador na situação de equilíbrio estático?

8. Considere o manipulador RRRR cujos parâmetros de DH são apresentados na tabela.

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	Offset
$0 \rightarrow 1$	$\theta_1$	0	$l_1$	$-\pi/2$	0
$1 \rightarrow 2$	$\theta_2$	0	$l_2$	$\pi/2$	0
$2 \rightarrow 3$	$\theta_3$	0	0	$\pi/2$	$\pi/2$
$3 \rightarrow 4$	$\theta_4$	$d$	0	0	0

- Desenhe o esquemático do manipulador na sua posição de repouso (“home”). Apresente os eixos  $x_i$  e  $z_i$  dos sistemas referenciais associados a cada junta.
  - Conhecendo a matriz de “pose” do “end-effector” no referencial base ( ${}^0_4T$ ), i.e., conhecendo  ${}^0_4R$  e  ${}^0p_{04}$ , obtenha a expressão que permite conhecer  ${}^0p_{02}$ .
  - Obtenha as expressões de cinemática inversa para as juntas do manipulador, i.e.,  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ . Considere comprimentos unitários para  $l_1, l_2, d$ .
  - Obtenha o Jacobiano geométrico do manipulador,  ${}^0J_{6 \times 4}$ .
  - Identifique as configurações singulares do manipulador. Represente as configurações singulares encontradas e explique porque razão são singulares.
9. Considere a existência de dois sistemas referenciais  $\{A\}$  e  $\{B\}$ , relacionados através da seguinte matriz de transformação

$${}^A T_B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -0.5 & 0 & 5.0 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 10.0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Um observador situado na origem do referencial  $\{B\}$  vê um corpo rígido  $P$  localizado em  ${}^B P = [2, 1, 1]^T$  e mede a velocidade de  $P$  no referencial  $\{B\}$  como sendo igual a  ${}^B v_P = \begin{bmatrix} v_{1x3} & w_{1x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}^T$ . Entretanto um observador colocado na origem do referencial  $\{A\}$  mede a velocidade do referencial  $\{B\}$  como sendo igual a  ${}^A v_B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}^T$ .

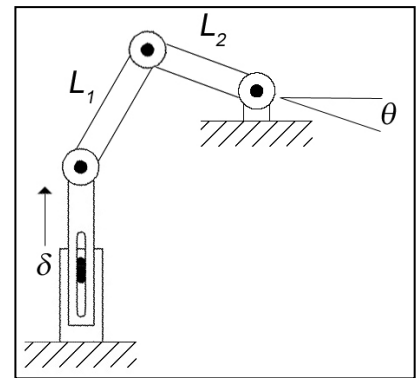
Obtenha o vector de velocidade 6x1 do corpo rígido  $P$  na perspectiva do observador colocado em  $\{A\}$ .

10. Considere o robot planar PRRR apresentado na figura.

a) Obtenha o modelo geométrico do manipulador de acordo com a metodologia de D-H standard

b) Assumindo que os três elos apresentam um comprimento  $L$  e que o eixo prismático realiza um deslocamento  $d_1 = \delta$ , obtenha  $\theta = f(\delta, L)$ .

Considere que os pontos de acoplamento de ambas as extremidades do manipulador estão afastadas  $\begin{bmatrix} x & 0 & z \end{bmatrix}$ , sendo que  $x = z = L$ . Considere nos



cálculos a realizar que a distância  $d$  do elo terminal é nula e que o comprimento dos elos é unitário, i.e.,  $L = 1$ .

c) Sabendo que na configuração  $\left( \delta = 1 \quad \theta_2 = -30^\circ \quad \theta_3 = -120^\circ \quad \theta_4 = -30^\circ \right)$  a junta prismática se movimenta com uma velocidade instantânea igual a  $\dot{d}_1 = 1 \text{ cm/s}$ , calcule o valor das velocidades angulares das restantes juntas, i.e.,  $(\dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4)$ .

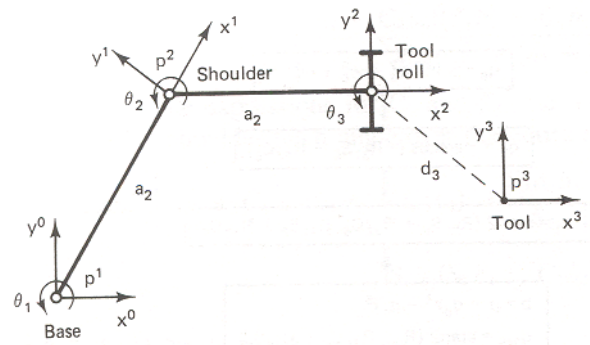
## LABWORK #3

### ▪ (AULA 1 e 2 – A entregar a 25-11-2017)

Considere o robot apresentado na figura seguinte. Pretende-se utilizar este robot num processo de pintura satisfazendo as seguintes restrições:

- A pistola de pintura está acoplada ao tool com o difusor de tinta perpendicular ao plano do robô, i.e., a ferramenta (e em particular  $d_3$ ) deve ser vista como estando colocada perpendicularmente à folha do papel. O robô desloca-se paralelamente à superfície a pintar.
- A matriz de transformação  ${}^{Base}T_{ferramenta}$  correspondente ao "home" do processo de pintura é

$${}^{Base}T_{ferramenta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Para efectuar uma correcta pintura, o robô deve deslocar a ferramenta (tool) segundo a reta  $y = 2x + 10$  com uma velocidade  $|v| = 15 \text{ cm/seg}$ . A pistola de pintura deverá manter a orientação da posição "home" durante o processo de pintura.
- Considere a dimensão dos elos  $a_2 = 35 \text{ cm}$  e a dimensão da ferramenta  $d_3 = 10 \text{ cm}$ .
  - a) Com base nestas restrições apresente uma solução para as variáveis das juntas do robot  $q = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$  que garanta o correto posicionamento da ferramenta na posição de "home" de pintura.
  - b) Calcule as expressões para a velocidade de rotação das juntas  $\dot{q} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$  que asseguram a restrição temporal de pintura.
  - c) Realize o movimento do manipulador tendo em atenção a restrição de velocidade anteriormente referida ( $|v| = 15 \text{ cm/seg}$ ). Para tal considere as duas possíveis abordagens de controlo:

1. Abordagem Integradora - Controlo de movimento discreto no tempo considerando

$$\begin{aligned} \dot{q}^* &= J(q(k))^{-1} v^* \\ q^*(k+1) &= q(k) + \Delta t \cdot \dot{q}^*(k) \end{aligned}$$

2. Abordagem em malha fechada – A abordagem anterior, puramente integradora, sofre de acumulação de erro posicional, podendo ser eliminado recorrendo a uma solução em malha fechada baseada na diferença entre a pose desejada  $p^*(k)$  e a pose actual  $f(q(k))$ .

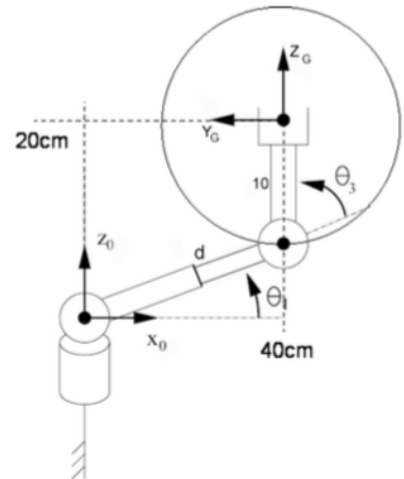
$$\begin{aligned} \dot{q}^*(k) &= J(q(k))^{-1} (p^*(k) - f(q(k))) \\ q^*(k+1) &= q(k) + K_p \cdot \Delta t \cdot \dot{q}^*(k) \end{aligned}$$

Utilize as funções da Toolbox Robótica para validar e visualizar os resultados.

- (AULA 2 e 3 – A entregar a 02-12-2017)

Observe o manipulador **RPR** apresentado na figura. Desenvolva um programa em MATLAB que permita visualizar o modo de funcionamento do manipulador. Tenha em atenção os seguintes aspectos:

1. Obter o **modelo cinemático directo** do manipulador recorrendo aos parâmetros de **Denavit-Hartenberg**.
2. Pretende-se manter o sistema referencial da garra solidário à posição **[40cm, 0cm, 20cm]**, variando a sua orientação. Obter a solução de **cinemática inversa** para  $\theta_1$ ,  $d_2$  e  $\theta_3$  que permite efectuar o movimento circular marcado na figura.



3. Calcule as **expressões para a velocidade de rotação das juntas**  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \omega_1 & v_d & \omega_3 \end{bmatrix}^T$  que asseguram um movimento circular com uma **velocidade angular igual a  $\pi$  rad/s**.
4. Tal como no problema anterior, implemente as **duas estratégias de controlo** do movimento: **puramente integradora e em malha fechada**.

O programa a desenvolver deverá **apresentar a velocidade das juntas função do tempo** para os requisitos do ponto 3.

Use as funções da Toolbox Robotics para validar e visualizar os resultados.