Atividade 2

Sequências e Séries de números reais. Séries de Taylor.

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

20 de março de 2023

1.

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{n^2+\frac{4}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+4n}{2n+3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{2+\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{2} = \infty$$

2.

Provar que toda sequência periódica convergente é constante.

Se uma sequência (x_n) é periódica de período p, isso significa que (x_n) irá se repetir exatamente a cada p termos e implica que (x_n) terá no máximo p termos distintos que se repetirão infinitamente, sendo assim p pontos de acumulação.

Uma sequência convergente possui apenas 1 ponto de acumulação, portanto os p pontos de uma sequência periódica devem ser iguais para haver convergência, o que torna (x_n) uma sequência constante.

3.

Provar a seguinte afirmação:

> Se $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ e $b < a$, então, para n suficientemente grande, tem-se $b < x_n$ Analogamente, se $a < b$, então $x_n < b$ para todo n suficientemente grande.

A partir da definição de convergência de uma sequência temos que:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n > n_0 \implies |x_n - a| < \epsilon \implies a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

Sendo $b = a - \epsilon$, então $b < x_n$

E para $b = a + \epsilon$, então $b > x_n$

4.

Obter os valores de aderência de (x_n). Esta sequência converge?

$$x_n = \begin{cases} (-1)^n, \text{ se } n \text{ for impar} \\ 1 + 1/n, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Tome as subsequências (x_{2n-1}) e (x_{2n})

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$$

A sequência (x_n) possui dois valores de aderência: $\{-1, 1\}$, portanto não converge.

5.

Achar os valores de aderência da sequência:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

A sequência contém todas as combinações de frações $\frac{a}{b}$ com $a \neq b$, então terá infinitos valores de aderência:

Tome $c = ak$ e $d = bk$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

Note que se $\frac{a}{b}$ é elemento da sequência, então $\frac{c}{d}$ também será, e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Portanto, para qualquer elemento da sequência, existirá infinitos outros elementos com mesmo valor numérico, que caracteriza valor de aderência.

6.

Mostre que os seguintes limites são satisfeitos:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{\log(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}\ln 10}{\frac{1}{x}\ln 10} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = e^{\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{a}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a}{n}} = e^{\ln a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} = 1,\ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n+p]{1} \leq \sqrt[n+p]{n} \leq \sqrt[n]{n},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} &\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \\ 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} &\leq 1 \\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+p]{n} &= 1 \end{aligned}$$

7.

Achar o $\liminf x_n$ e o $\limsup x_n$ para cada uma das seguintes sequências:

a) $x_n = \frac{1}{n}$

x_n converge para 0, portanto $\liminf x_n = \limsup x_n = 0$

b) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

x_n converge para 0, portanto $\liminf x_n = \limsup x_n = 0$

c) $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$

Tome as subsequências (x_{2n-1}) e (x_{2n})

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1}\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) = -\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n-1} = -1$$
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n} = 1$$

$\liminf x_n = -1,\ \limsup x_n = 1$

8.

Verificar que $\lim a_n = \lim b_n = 0$, porém $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são divergentes.

a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \\ -\sqrt{1} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \cdots - \sqrt{n} \qquad\qquad \end{array}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \infty$$

b) $b_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}\right) = \log 1 = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) =$$

$$\log 2 + \log 3 + \cdots + \log n + \log(n+1)$$
$$- \log 1 - \log 2 - \log 3 - \cdots - \log n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log(n+1) - \log 1 = \infty$$

9.

Decidir se as seguintes séries são convergentes ou divergentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
$$-\frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$$

Converge por ser limitada

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

Diverge por comparação

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n} = 0 < 1$$

Converge pelo teste da razão

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

Diverge por comparação

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

Diverge por comparação

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Converge por comparação

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Converge por comparação

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n^2}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \to \infty$$

Diverge por comparação

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r},\ r > 1$

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^r} dx = \left.\frac{x^{1-r}}{1-r}\right|_a^{\infty} = \frac{1}{1-r} \lim_{x\to\infty} \left(x^{1-r} - a^{1-r}\right) < \infty,\ r > 1$$

Converge pelo teste da integral

10.

Determine para quais valores de x as seguintes séries são convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n,\ k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^k x^{n+1}}{n^k x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^k = |x| \left(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n}\right)^k = |x|$$

Converge para $|x| < 1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}}{n+1} = 0$$

Converge para todo x

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$$

Diverge para todo x

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x|\left(\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n}\right)^2 = |x|$$

Converge para $|x| < 1$

11.

Obter a série de Taylor de ordem n das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x$, **em torno de** $x = 0$

$$f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

b) $f(x) = \log(1+x),\ x > -1,$ **em torno de** $x = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0,$ **em torno de** $x = 2$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2},\ f''(x) = \frac{2}{x^3},\ f'''(x) = \frac{-6}{x^4},\ \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}},\ f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n\, n!}{2^{n+1}}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$$

12.

Obter a série de Taylor, em torno do ponto $x = 0$, das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},$ **ordem** $2n+1$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ \cdots$$

$$f'(0) = 0,\ f''(0) = -2,\ f'''(x) = 0,\ f''''(x) = 24,\ \cdots$$

$$f^{(n)}(0) = n!\, Re(i^n)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} Re(i^n)x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Re(i^{2n})x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

b) $f(x) = \sin x,$ **ordem** $2n+1$

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ \cdots$$
$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ \cdots$$
$$f^{(n)}(0) = Re(i^{n-1})$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Re(i^{n-1})}{n!}x^n$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Re(i^{2n+1-1})}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

c) $f(x) = \cos x,$ **ordem** $2n$

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f'''(x) = \sin x,\ \cdots$$
$$f'(0) = 0,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 0,\ \cdots$$
$$f^{(n)}(0) = Re(i^{n})$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Re(i^{n})}{n!}x^n$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Re(i^{2n})}{(2n)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$
