Avaliação 3

Integração numérica e sistemas lineares

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

10 de maio de 2023

O código fonte desta prova está disponível no Github

Funções de integração numérica

```
library(dplyr)
library(Deriv)
```

```
integral <- function(função, a, b, n, método) {
    i <- seq(a, b, length.out = n+1)
    h <- (b - a) / n
    valores <- sapply(i, função)
    pesos <- case_when(
método == "trapézio"  ~ (rep(2, n)                        - c(1, rep(0, n-1))) |> c(1),
método == "simpson13" ~ (rep(4, n) - rep(c(2, 0),    n/2) - c(1, rep(0, n-1))) |> c(1),
método == "simpson38" ~ (rep(3, n) - rep(c(1, 0, 0), n/3) - c(1, rep(0, n-1))) |> c(1)
    )
    case_when(
        método == "trapézio"  ~   h/2 * sum(valores * pesos),
        método == "simpson13" ~   h/3 * sum(valores * pesos),
        método == "simpson38" ~ 3*h/8 * sum(valores * pesos)
    )
}
```

A função `integral()` calcula uma aproximação da integral definida de $f(x)$ no intevalo $[a, b]$ com suporte para a regra dos trapézios, regra de $1/3$ de Simpson e regra de $3/8$ de Simpson.

```r
erro <- function(função, a, b, n, método) {
    f2x <- sapply(
        seq(b, a, length.out = 1000),
        Deriv(função, nderiv = 2)
    )
    f4x <- sapply(
        seq(b, a, length.out = 1000),
        Deriv(função, nderiv = 4)
    )
    case_when(
        método == "trapézio"  ~ (b-a)^3 / n^2 / 12  * max(abs(f2x)),
        método == "simpson13" ~ (b-a)^5 / n^4 / 180 * max(abs(f4x)),
        método == "simpson38" ~ (b-a)^5 / n^4 / 80  * max(abs(f4x))
    )
}
```

A função `erro()` calcula o máximo erro absoluto da aproximação da função `integral()`, com base nos seguintes limitantes do erro:

$$\begin{aligned}
\text{regra dos trapézios:} \quad & |E| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|f^{(2)}(x)\right| \\
\text{regra de 1/3 de Simpson:} \quad & |E| \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|f^{(4)}(x)\right| \\
\text{regra de 3/8 de Simpson:} \quad & |E| \leqslant \frac{(b-a)^5}{80n^4} \max_{a \leqslant x \leqslant b} \left|f^{(4)}(x)\right|
\end{aligned}$$

```r
tabela <- function(função, ...) {
    tibble(
        método = c("trapézio", "simpson13", "simpson38"),
        `valor da integral` = sapply(
            método,
            function(x) integral(função, ..., x)
        ),
        `limite superior do erro` = sapply(
            método,
            function(x) erro(função, ..., x)
        )
    )
}
```

Funções de solução de sistemas lineares

```r
sistema <- function(matriz, iterações = 10) {
    nrow <- nrow(matriz)
    ncol <- ncol(matriz)
    novo <- function(tabela, matriz) {
        anterior <- tabela[nrow(tabela), ] |> as.numeric()
        tabela[nrow(tabela) + 1, ] <- lapply(
            1:(ncol-1),
            function(i) {
                prod <- anterior[-i] * -matriz[i,-c(i,ncol)]
                sum(prod, matriz[i,ncol]) / matriz[i,i]
            }
        )
        tabela
    }
    zeros <- data.frame(lapply(1:nrow, function(x) 0))
    names(zeros) <- paste0("x", 1:nrow)
    Reduce(
        f = function(a, b) novo(a, matriz),
        x = 1:iterações,
        init = zeros
    )
}
```

A função `sistema()` recebe uma matriz de tamanho arbitrário contendo os coeficientes do sistema linear e aplica o método de resolução de Gauss-Siedel para encontrar uma solução aproximada, começando por um chute inicial de $\mathbf{x} = \vec{0}$.

Questão 1.

Calcule o valor aproximado da seguinte interal usando $n = 6$ e a regra dos trapézios generalizada, a regra de 1/3 de Simpson e a regra de 3/8 de Simpson, em cada caso determine um limitante superior para o erro

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx$$

```r
função <- function(x) exp(-x^2)
tabela(função, 0, 2, n = 6)
```

método	valor da integral	limite superior do erro
trapézio	0.8814156	0.0370370
simpson13	0.8820316	0.0016461
simpson38	0.8819629	0.0037037

Questão 2.

Um radar foi usado para medir a velocidade de um corredor durante os primeiros 5 segundos de uma corrida. Use a regra 1/3 de Simpson para estimar a distância que o corredor cobriu durante aqueles 5 segundos

```r
q2 <- tibble(
tempo      = c(0, 0.5,   1, 1.5,   2,  2.5,    3,  3.5,    4,  4.5,    5),
velocidade = c(0,4.67,7.34,8.86,9.73,10.22,10.51,10.67,10.76,10.81,10.81)
)
```

```r
h <- 0.5
pesos <- c(1,4,2,4,2,4,2,4,2,4,1)
h / 3 * sum(q2$velocidade * pesos)
# [1] 44.735
```

A Distância estimada que o corredor percorreu nos primeiros 5 segundos da corrida é de 44.735 metros.

Questão 3.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases}$$

a) Verificar a possibilidade de aplicação do método de Gauss-Seidel usando o critério de Sassenfeld.
b) Se possível, resolvê-lo pelo método do item a), obtendo um resultado com erro absoluto $< 10^{-2}$.

Primeiramente, divide-se cada linha pelo coeficiente da diagonal:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 = 1.4 \\ -0.25x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 0.75 \\ 0.2x_1 - 0.3x_2 + x_3 = -0.1 \end{cases}$$

O critério de Sassenfeld é tal que $\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= |a_{11}| + |a_{12}| = 0.4 + 0.1 = 0.5 \\ \beta_2 &= |a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| = 0.25 \times 0.5 + 0.5 = 0.625 \\ \beta_3 &= |a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 = 0.2 \times 0.5 + 0.3 \times 0.625 = 0.2875 \end{aligned}$$

$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \beta_i < 1$, portanto o critério de Sassenfeld é satisfeito e o método de Gauss-Siedel irá convergir:

```r
matriz <- matrix(
    c( 5,  2,  1,  7,
      -1,  4,  2,  3,
       2, -3, 10, -1),
    byrow = TRUE, ncol = 4
)

sistema(matriz, iterações = 20) |> round(5)
```

x1	x2	x3
0.00000	0.00000	0.00000
1.40000	0.75000	-0.10000
1.12000	1.15000	-0.15500
0.97100	1.10750	0.02100
0.95280	0.98225	0.03805
0.99949	0.96918	0.00412
1.01151	0.99782	-0.00915
1.00270	1.00745	-0.00296
0.99761	1.00215	0.00169
0.99880	0.99856	0.00112
1.00035	0.99914	-0.00019
1.00038	1.00018	-0.00033
0.99999	1.00026	-0.00002
0.99990	1.00001	0.00008
0.99998	0.99994	0.00002
1.00002	0.99998	-0.00002
1.00001	1.00001	-0.00001
1.00000	1.00001	0.00000
1.00000	1.00000	0.00000
1.00000	1.00000	0.00000
1.00000	1.00000	0.00000

A solução do sistema é então $\{1, 1, 0\}$.