UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Introdução à Álgebra Linear
Segunda Lista de Exercícios
Paulo Ricardo Seganfredo Campana

Questão 1.

a) $T(x, y) = (2x + 2x, x + 3y)$ $\quad T(-2, 1) = (-2, 1)$ $\quad T(v) = \lambda v \quad (\lambda = 1)$ ✓

b) $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$ $\quad T(1, 1, 2) = (4, 4, 8)$ $\quad T(v) = \lambda v \quad (\lambda = 4)$ ✓

Questão 2.

a) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \qquad \lambda = \{2, 3\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad x = 2y \qquad v = [(2, 1)]$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \qquad x = y \qquad v = [(1, 1)]$$

b) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$det \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda \notin \mathbb{R}$$

c) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$(1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda) - 2) \qquad (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \qquad \lambda = \{1, 4\}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \qquad z = -y \qquad v = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \qquad 2y = z, y = x \qquad v = [(1, 1, 2)]$$

Questão 3.

a)

$$T(v) = \lambda v \qquad T(v) = 0 \qquad v \in N(T) \qquad N(T) \neq 0$$

Se $N(T) \neq 0$, T não é injetora, portanto não é bijetora e não é invertível.

b) $detA = detA^t \longrightarrow det(A - I\lambda) = det(A^t - I\lambda) = 0$ terão as mesmas soluções.

c) O determinante para matrizes triangulares e diagonais é o produto da diagonal principal.

$$det\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda) = 0 \qquad \lambda = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

Questão 4.

a)

$$det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)\dots(1-\lambda) = 0 \qquad \lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \\ 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \\ \vdots \\ 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \end{cases}$$

$$v = [(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)] = \mathbb{R}^n$$

b)

$$T(\alpha u - \beta v) = \alpha T(u) - \beta T(v) = \alpha(\lambda u) - \beta(\lambda v)$$

$$T(\alpha u - \beta v) = \lambda(\alpha u - \beta v)$$

Boldrini - Capítulo 6

Questão 9.

$$det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda = \{-1, 1\}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \qquad y = -x \qquad v = [(1,-1)]$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \qquad y = 0 \qquad v = [(1,0)]$$

Questão 11.

$$det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \qquad \lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad z = 0, y = 0 \qquad v = [(1,0,0)]$$

Questão 14.

$$det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)+2+2-(8-4\lambda+1-\lambda+1-\lambda)$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda)-6(1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-6) = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda) = 0 \qquad \lambda = \{-1,1,4\}$$

$$\lambda=-1 \quad \begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{cases}2x+y+2z=0\\ x+3y+z=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases} \qquad y=0, z=-x \qquad v=[(1,0,-1)]$$

$$\lambda=1 \quad \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{cases}y+2z=0\\ x+y+z=0\\ 2x+y=0\end{cases} \qquad y=-2x, z=x \qquad v=[(1,-2,1)]$$

$$\lambda=4 \quad \begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix} = \begin{cases}-3x+y+2z=0\\ x-2y+z=0\\ 2x+y-3z=0\end{cases} \qquad y=z, x=y \qquad v=[(1,1,1)]$$

Questão 18.

$$det\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1\\ 12 & 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0-\lambda\end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-6)=0 \qquad \lambda=\{-1,1,6\}$$

$$\lambda=-1 \quad \begin{vmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 12 & 0 & 4 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{cases}3x+z=0\\ 3y+t=0\\ 12x+4z=0\\ -y+t=0\end{cases} \qquad y=t=0, z=-3x \qquad v=[(1,0,-3,0)]$$

$$\lambda=1 \quad \begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 12 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1\end{vmatrix} = \begin{cases}x+z=0\\ y+t=0\\ 12x+2z=0\\ -y-t=0\end{cases} \qquad z=-x=0, t=-y \qquad v=[(0,1,0,-1)]$$

$$\lambda=6 \quad \begin{vmatrix}-4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 1\\ 12 & 0 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -6\end{vmatrix} = \begin{cases}-4x+z=0\\ -4y+t=0\\ 12x-3z=0\\ -y-6t=0\end{cases} \qquad t=4y=0, z=4x \qquad v=[(1,0,4,0)]$$

Questão 20.

a) $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$

b)

$$v = \{v \in V; T(v)=\lambda v\} \cup \{0\}, x, y \in v$$

$$T(x+\alpha y) = T(x)+\alpha T(y) = \lambda x + \alpha\lambda y = \lambda(x+\alpha y) \qquad x+\alpha y \in v, \forall v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Questão 25.

a) $T(v) = \lambda v$ $\quad T(v) = 0$ $\quad v \in N(T)$ $\quad N(T) \neq 0 \longrightarrow$ T não é injetora.

b) Sim, se T não é injetora, $\exists v \in V \neq 0; v \in N(T) \longrightarrow T(v) = 0 \longrightarrow 0 = 0v \longrightarrow \lambda = 0$

Boldrini - Capítulo 7

Questão 3.

a)

$$det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)^3(3-\lambda) = 0 \qquad \lambda = \{2, 3\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad v = [(1,0,0,0), (0,0,1,0)]$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \qquad v = (0,0,0,1)$$

$v = [(1,0,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$ não é base do $\mathbb{R}^4$ portanto não é diagonalizável.

b)

$$m(x) = (2-x)^2(3-x) = 0 \text{ pois } m(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 5.

a)

$(1-\lambda)(a-\lambda)$ $\qquad \lambda = \{1, a\}$ $\qquad a \neq 1$ pois $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

b)

$(1-\lambda)^2$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ só é diagonalizável para $a = 0$

Questão 6.

a)

$(2-\lambda)(-3-\lambda)^2$ $\qquad \lambda = \{2, -3\}$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{cases} z = 0 \\ -5y + z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \qquad v = (1,0,0)$$

$$\lambda = -3 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad v = (0,1,0)$$

b)

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad (2-\lambda)(-3-\lambda)^2 \quad \text{o mesmo polinômio.}$$

c) Não existe, pois T não é diagonalizável já que os autovetores não formam base do $\mathbb{R}^3$.

Questão 11.

a) $T(v) = T(T(v))$ $\qquad \lambda v = \lambda^2 v$ $\qquad (\lambda^2 - \lambda)v = 0$ $\qquad \lambda = \{0, 1\}$

b) A matriz identidade pois $T(T(x,y)) = T(x,y) = (x,y)$ e $\lambda = 1$

c) O polinômio característico sera da forma $-\lambda^n(1-\lambda)^m$ e o polinômio mínimo da forma $-x(1-x) = x(x-1)$ ou seja, fatores lineares distintos, portanto é diagonalizável.

Questão 12.

$$det \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5(3-\lambda) = 0$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 5) = 0 \qquad (3-\lambda)(\lambda^2+1) \qquad \lambda = 3$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{cases} -y - 5z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \qquad y = z = 0 \qquad v = (1,0,0)$$

$$\lambda = i \quad \begin{vmatrix} 3-i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & -5 \\ 0 & 1 & -2-i \end{vmatrix} \begin{cases} (3-i)x = 0 \\ (2-i)y - 5z = 0 \end{cases} \qquad y = z = 0 \qquad v = (1,0,0)$$

Que por si só não forma base, portanto não é diagonalizável, porém há soluções complexas para (λ^2+1), $\quad \lambda = \pm i$, o autovetor $(1,0,0)$ junto com os autovetores de $\lambda = \pm i$ formam base portanto A pode ser diagonalizável com uma base complexa.