Avaliação 4

Solução numérica para EDOs

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

1 de junho de 2023

O código fonte desta prova está disponível no Github

https://github.com/PauloCampana/UFPB/blob/main/P4/numérico/prova4/prova4.qmd

A função `PVI` definida a seguir, cria uma tabela das iterações dos métodos de Euler e Runge-Kutta para solução de problemas de valor inicial, aqui, o método de Euler é representado como `ordem = 1`, pois o mesmo é um caso específico dos métodos de Runge-Kutta.

```r
library(dplyr)
PVI <- function(EDO, ordem, inicial, objetivo, h) {
    ac <- case_when(
        ordem == 1 ~ list(c(  0,   0, 0), c(  1,   0,   0,   0)),
        ordem == 2 ~ list(c(1/2,   0, 0), c(1/2, 1/2,   0,   0)),
        ordem == 3 ~ list(c(1/2,   1, 0), c(1/6, 2/3, 1/6,   0)),
        ordem == 4 ~ list(c(1/2, 1/2, 1), c(1/6, 1/3, 1/3, 1/6)),
    )
    a <- ac[[1]]
    c <- ac[[2]]
    x <- seq(inicial[1], objetivo, by = h)
    y <- inicial[2]
    for(n in 1:(length(x) - 1)) {
        K    <- EDO(x[n]           , y[n]                  )
        K[2] <- EDO(x[n] + h * a[1], y[n] + h * a[1] * K[1])
        K[3] <- EDO(x[n] + h * a[2], y[n] + h * a[2] * K[2])
        K[4] <- EDO(x[n] + h * a[3], y[n] + h * a[3] * K[3])
        y[n+1] <- y[n] + h * sum(c * K)
    }
    data.frame(n = seq_along(x) - 1, x, y)
}
```

Questão 1.

1) Usando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 3ª ordem com $h = 0.2$ calcule $y(1)$ sabendo que $y(x)$ é solução de

$$\begin{cases} 2x + yy' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sabendo que a solução exata do PVI acima é $\sqrt{2x+1}$ calcule para os dois métodos o erro absoluto cometido na aproximação de $y(1)$.

Isolando y' na EDO temos:

$$2x + yy' = y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y' = y - \frac{2x}{y}$$

```
EDO1 <- function(x, y) y - 2*x / y
```

```
PVI1_ordem_1 <- PVI(
    EDO1,
    ordem = 1,
    inicial = c(0,1),
    objetivo = 1,
    h = 0.2
)
PVI1_ordem_1
```

```
PVI1_ordem_3 <- PVI(
    EDO1,
    ordem = 3,
    inicial = c(0,1),
    objetivo = 1,
    h = 0.2
)
PVI1_ordem_3
```

Tabela 1: Método de Euler

n	x	y
0	0.0	1.000000
1	0.2	1.200000
2	0.4	1.373333
3	0.6	1.531495
4	0.8	1.681085
5	1.0	1.826948

Tabela 2: Runge-Kutta de 3ª ordem

n	x	y
0	0.0	1.000000
1	0.2	1.183947
2	0.4	1.343141
3	0.6	1.485673
4	0.8	1.616110
5	1.0	1.737384

Sendo $\sqrt{2x+1}$ a solução exata da EDO, temos que $y(1) = \sqrt{3}$, com isso podemos comparar os erros absolutos dos dois métodos.

```
abs(sqrt(3) - PVI1_ordem_1[6,"y"])
# [1] 0.09489737
```

```
abs(sqrt(3) - PVI1_ordem_3[6,"y"])
# [1] 0.005333385
```

O método de Euler apresenta um erro absoluto de 9% enquanto o Runge-Kutta de 3ª ordem tem erro de meio porcento.

Questão 2.

Seja $P(t)$ o número de indivíduos de uma certa população medido em anos. Se a taxa de nascimentos é constante b e a taxa de mortalidade d é proporcional ao tamanho da população, então o crescimento da população é dado pela equação logística

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k(P(t))^2$$

Onde $d = kP(t)$. Suponha que $P(0) = 50976,\ b = 2.9 \times 10^{-2}$ e $k = 1.4 \times 10^{-7}$. Encontre a população estimada depois de 5 anos utilizando Runge-Kutta de ordem 4.

Portanto, desejamos obter $y(5)$ a partir da EDO $y' = (2.9 \times 10^{-2})y - (1.4 \times 10^{-7})y^2$ e condição inicial $y(0) = 50976$, seja $h = 0.5$:

```
EDO2 <- function(x, y) 2.9e-2 * y - 1.4e-7 * y^2
PVI(EDO2, ordem = 4, inicial = c(0,50976), objetivo = 5, h = 0.5)
```

n	x	y
0	0.0	50976.00
1	0.5	51535.30
2	1.0	52098.69
3	1.5	52666.16
4	2.0	53237.69
5	2.5	53813.25
6	3.0	54392.84
7	3.5	54976.44
8	4.0	55564.02
9	4.5	56155.56
10	5.0	56751.04

Temos que a população estimada depois de 5 anos é de 56751 habitantes.