Atividade 3

Cadeias de Markov

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

15 de agosto de 2023

1) Implemente um script para simular uma cadeia de Markov com base no seguinte algoritmo:

```r
simular <- function(n, transição, inicial) {
    X <- sample(names(inicial), size = 1, prob = inicial)
    for(i in 2:n) {
        j <- X[i - 1]
        p <- transição[j, ]
        X[i] <- sample(names(p), size = 1, prob = p)
    }
    as.numeric(X)
}

P <- rbind(
    c(0.2, 0.3, 0.5),
    c(1/3, 1/3, 1/3),
    c(0.8, 0.1, 0.1)
)
pi0 <- c(0.4, 0.3, 0.3)

colnames(P) <- rownames(P) <- 0:2
names(pi0) <- 0:2

simular(100, P, pi0)
```

```
 [1] 2 0 1 0 1 2 1 2 0 2 0 2 2 0 1 2 0 2 0 2 1 0 2 0 0 2 0 2 0 2 0 2 0 2 2 0 2
[38] 0 1 0 1 2 0 1 0 2 1 0 0 0 2 0 1 2 0 0 2 0 2 0 1 0 2 0 0 2 0 2 0 2 2 1 0 2
[75] 0 2 2 0 0 2 0 2 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 2 0 2 0 1 2 0 2
```

2) *Ruina do jogador:* Suponha que o jogador inicia com 4 reais e que ele aposta até ganhar 10 reais ou ficar na ruina. Em cada jogada, ele ganha 1 real com probabilidade 0.4 e perde 1 real com probabilidade 0.6. Determine o ganho esperado do jogador após 5 jogadas.

$$\mathrm{E}[X_5] = \sum_{x\in\mathcal{S}} x\pi_5(x) = \boldsymbol{\pi}_5^\top \mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}_0^\top \mathbf{P}^5 \mathbf{x} = 3.02592$$

$\mathbf{x}^\top$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{\pi}_0^\top$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

```r
P5 <- P %*% P %*% P %*% P %*% P
t(pi0) %*% P5 %*% x
```

```
        [,1]
[1,] 3.02592
```

3) Suponha que Maria tem cinco músicas favoritas, enumeradas em ordem de preferência (1, 2, 3, 4, 5), e que em um dia qualquer ela seleciona uma dessas cinco músicas para ouvir o dia inteiro. Assuma que em um dia particular ela escolhe uma das músicas 1, 2, 3, 4, 5 com probabilidades 0.35, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, respectivamente, e que a escolha para o dia seguinte seja dada pela matriz de transição. Supondo que as possíveis seleções em dias posteriores possam ser modeladas por uma cadeia de Markov, ache a probabilidade de Maria ouvir a música nº 2 no terceiro e quinto dia, e a música nº 4 no oitavo dia.

$$\mathrm{P}(X_3 = 2, X_5 = 2, X_8 = 4) =$$
$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) \mathrm{P}^3(x, 2)\, \mathrm{P}^2(2, 2)\, \mathrm{P}^3(2, 4) = 0.01633164$$

x	1	2	3	4	5
$\pi_0(x)$	0.35	0.3	0.2	0.1	0.05

P	1	2	3	4	5
1	0	0.5	0.3	0.1	0.1
2	0.4	0	0.3	0.2	0.1
3	0.3	0.3	0	0.2	0.2
4	0.4	0.3	0.2	0	0.1
5	0.3	0.3	0.2	0.2	0

```r
P2 <- P %*% P
P3 <- P %*% P %*% P

sum(sapply(
    1:5,
    \(x) pi0[x] * P3[x,2] * P2[2,2] * P3[2,4]
))
```

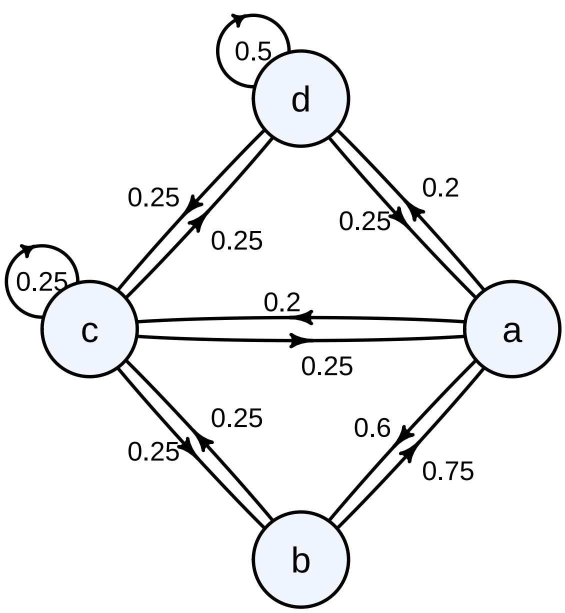
```
[1] 0.01633164
```

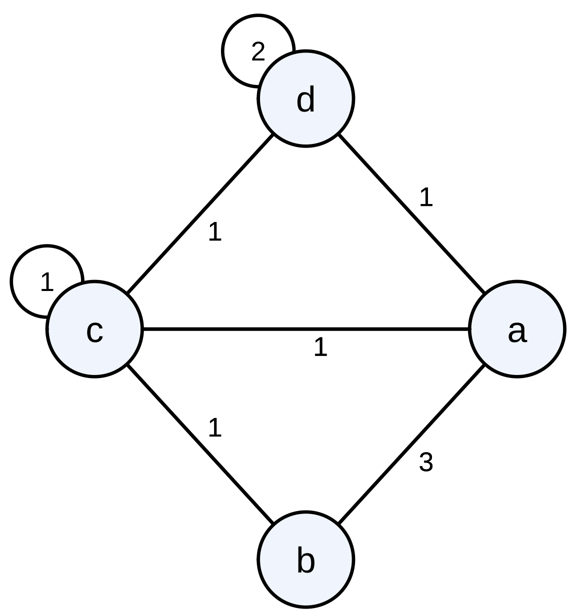
4) Considere uma cadeia de Markov com matriz de transição
a) Obtenha o grafo de transição (grafo ponderado dirigido) da cadeia.
b) O grafo de transição da cadeia pode ser obtido sem arestas dirigidas (grafo ponderado). Mostre tal grafo.

P	a	b	c	d
a	0	0.6	0.2	0.2
b	0.75	0	0.25	0
c	0.25	0.25	0.25	0.25
d	0.25	0	0.25	0.5

$\mathbf{P}^*$	a	b	c	d
a	0	3	1	1
b	3	0	1	0
c	1	1	1	1
d	1	0	1	2

O segundo grafo pode ser obtido multiplicado as probabilidades de transição de cada linha da matriz por um denominador comum, sendo assim, agora o grafo não representa mais probabilidades e sim pesos.





Pela propriedade

$$\mathrm{P}^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}_x\big(T_y = m\big)\, \mathrm{P}^{n-m}(y,y)$$

Tomando apenas o ultimo termo $m = n$:

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x\big(T_y = n\big)\, \mathrm{P}^0(y,y) = \mathrm{P}_x\big(T_y = n\big)$$

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x\big(T_y = n\big)$$

5) Mostre que $\mathrm{P}^n(x,y) > 0$ para algum inteiro positivo n se, e somente se, $\rho_{xy} > 0$.

Começando por $\rho_{xy} > 0$

$$\mathrm{P}_x\big(T_y < \infty\big) > 0$$

$$\mathrm{P}_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) > 0$$

Para pelo menos um n, a probabilidade $\mathrm{P}_x\big(T_y = n\big)$ é maior que 0.

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x\big(T_y = n\big) > 0$$

$$\mathrm{P}^n(x,y) > 0$$

Começando por $\mathrm{P}^n(x,y) > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}_x\big(T_y = m\big)\, \mathrm{P}^{n-m}(y,y) > 0$$

Para pelo menos um m, esse produto $\mathrm{P}_x\big(T_y = m\big)\, \mathrm{P}^{n-m}(y,y)$ é maior que 0.

$$\mathrm{P}_x\big(T_y = m\big)\, \mathrm{P}^{n-m}(y,y) > 0$$

$$\mathrm{P}_x\big(T_y = m\big) > 0$$

$$\mathrm{P}_x\big(T_y < \infty\big) > 0$$

$$\rho_{xy} > 0$$