Atividade 3

Cadeias de Markov

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

10 de agosto de 2023

1) Implemente um script para simular uma cadeia de Markov com base no seguinte algoritmo:

```r
simular <- function(n, transição, inicial) {
    stopifnot(
        n == as.integer(n), n >= 0,
        nrow(transição) == ncol(transição),
        all(rowSums(transição) == 1), sum(inicial) == 1
    )
    X0 <- sample(names(inicial), size = 1, prob = inicial)
    X <- X0
    if(n == 0) return(X)
    for(i in 1:n) {
        j <- X[i]
        p <- transição[j, ]
        X[i + 1] <- sample(names(p), size = 1, prob = p)
    }
    X |> as.numeric()
}
expm <- function(x, n) {
    stopifnot(
        n == as.integer(n), n >= 1,
        ncol(x) == nrow(x)
    )
    list(x) |>
        replicate(n = n) |>
        Reduce(f = "%*%")
}
```

2) *Ruina do jogador:* Suponha que o jogador inicia com 4 reais e que ele aposta até ganhar 10 reais ou ficar na ruina. Em cada jogada, ele ganha 1 real com probabilidade 0.4 e perde 1 real com probabilidade 0.6. Determine o ganho esperado do jogador após 5 jogadas.

$$\mathrm{E}[X_5] = \sum_{x \in \mathcal{S}} x \pi_5(x) = \boldsymbol{\pi}_5^\top \mathbf{x} = \boldsymbol{\pi}_0^\top \mathbf{P}^5 \mathbf{x} = 3.02592$$

$\mathbf{x}^\top$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{\pi}_0^\top$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

```r
t(pi0) %*% expm(P, 5) %*% x
```

```
[1] 3.02592
```

3) Suponha que Maria tem cinco músicas favoritas, enumeradas em ordem de preferência (1, 2, 3, 4, 5), e que em um dia qualquer ela seleciona uma dessas cinco músicas para ouvir o dia inteiro. Assuma que em um dia particular ela escolhe uma das músicas 1, 2, 3, 4, 5 com probabilidades 0.35, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, respectivamente, e que a escolha para o dia seguinte seja dada pela matriz de transição. Supondo que as possíveis seleções em dias posteriores possam ser modeladas por uma cadeia de Markov, ache a probabilidade de Maria ouvir a música nº 2 no terceiro e quinto dia, e a música nº 4 no oitavo dia.

$$\mathrm{P}(X_3 = 2, X_5 = 2, X_8 = 4) =$$
$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) \mathrm{P}^3(x, 2)\, \mathrm{P}^2(2, 2)\, \mathrm{P}^3(2, 4) = 0.01633164$$

x	1	2	3	4	5
$\pi_0(x)$	0.35	0.3	0.2	0.1	0.05

P	1	2	3	4	5
1	0	0.5	0.3	0.1	0.1
2	0.4	0	0.3	0.2	0.1
3	0.3	0.3	0	0.2	0.2
4	0.4	0.3	0.2	0	0.1
5	0.3	0.3	0.2	0.2	0

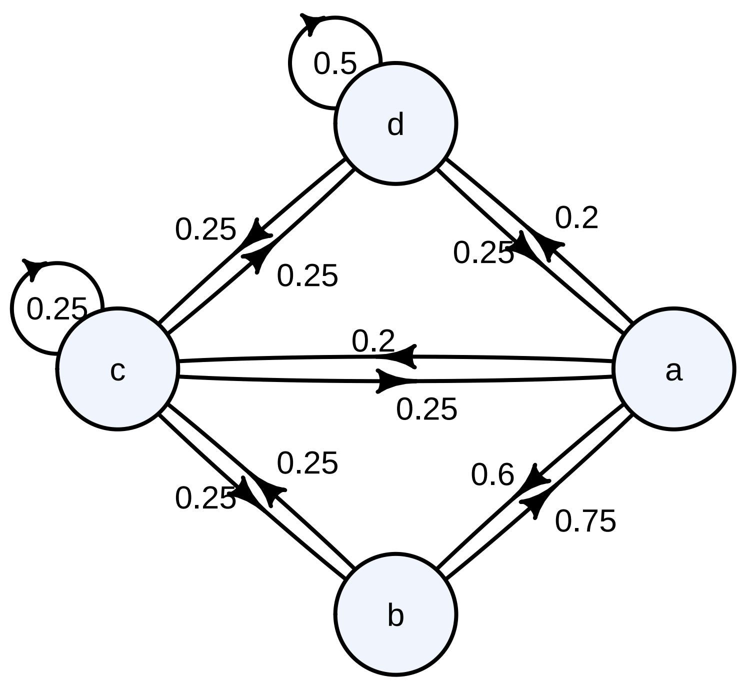
```r
P2 <- expm(P, 2)
P3 <- expm(P, 3)

sum(sapply(
    1:5,
    \(x) pi0[x] * P3[x,2] * P2[2,2] * P3[2,4]
))
```

```
[1] 0.01633164
```

4) Considere uma cadeia de Markov com matriz de transição
a) Obtenha o grafo de transição (grafo ponderado dirigido) da cadeia.
b) O grafo de transição da cadeia pode ser obtido sem arestas dirigidas (grafo ponderado). Mostre tal grafo.

P	a	b	c	d
a	0	0.6	0.2	0.2
b	0.75	0	0.25	0
c	0.25	0.25	0.25	0.25
d	0.25	0	0.25	0.5



Pela propriedade

$$\mathrm{P}^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}_x(T_y = m)\,\mathrm{P}^{n-m}(y,y)$$

Tomando apenas o ultimo termo $m = n$:

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x(T_y = n)\,\mathrm{P}^0(y,y) = \mathrm{P}_x(T_y = n)$$

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x(T_y = n)$$

5) Mostre que $\mathrm{P}^n(x,y) > 0$ para algum inteiro positivo n se, e somente se, $\rho_{xy} > 0$.

Começando por $\rho_{xy} > 0$

$$\mathrm{P}_x(T_y < \infty) > 0$$

$$\mathrm{P}_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) > 0$$

Para pelo menos um n, a probabilidade $\mathrm{P}_x(T_y = n)$ é maior que 0.

$$\mathrm{P}^n(x,y) \geqslant \mathrm{P}_x(T_y = n) > 0$$

$$\mathrm{P}^n(x,y) > 0$$

Começando por $\mathrm{P}^n(x,y) > 0$

$$\sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}_x(T_y = m)\,\mathrm{P}^{n-m}(y,y) > 0$$

Para pelo menos um m, esse produto $\mathrm{P}_x(T_y = m)\,\mathrm{P}^{n-m}(y,y)$ é maior que 0.

$$\mathrm{P}_x(T_y = m)\,\mathrm{P}^{n-m}(y,y) > 0$$

$$\mathrm{P}_x(T_y = m) > 0$$

$$\mathrm{P}_x(T_y < \infty) > 0$$

$$\rho_{xy} > 0$$