Probabilidade II

Lista 2b

1.

Seja X uma variável aleatória com valores não negativos. Mostre que

$$\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\, dx$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_0^\infty 1 - F_X(x)\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \\
&= \int_0^\infty 1 - F_X(x)\, dx - 0 \qquad \text{pois a V.A. é positiva.} \\
&= \int_0^\infty 1 - \mathrm{P}(X \leq x)\, dx \\
&= \int_0^\infty \mathrm{P}(X > x)\, dx
\end{aligned}$$

2.

A função de distribuição de X é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -2; \\ \frac{1}{10}(x+2), & \text{se } -2 \leq x < 0; \\ \frac{1}{5} + \frac{x}{10} + \frac{3x^2}{250}, & \text{se } 0 \leq x < 5; \\ 1, & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

a)

Calcule $\mathrm{E}[X]$ sem obter primeiro a densidade de X.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_0^\infty 1 - F_X(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \\
&= \int_0^5 1 - \frac{1}{5} - \frac{x}{10} - \frac{3x^2}{250}dx - \int_{-2}^0 1 - \frac{1}{10}(x+2)dx \\
&= \left(x - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{20} - \frac{x^3}{250}\right)\Big|_0^5 - \left(x - \frac{x^2}{20} - \frac{x}{5}\right)\Big|_{-2}^0 \\
&= \left(5 - 1 - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(2 + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) \\
&= \frac{9}{4} - \frac{9}{5} \\
&= \frac{9}{20}
\end{aligned}$$

b)

Obtenha $\mathrm{E}\left[X^2\right]$ via densidade de X.

Derivando $F_X(x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{10}(x+2)\right) &= \frac{1}{10} && \text{para } -2 \leq x < 0; \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}+\frac{x}{10}+\frac{3x^2}{250}\right) &= \frac{1}{10}+\frac{3x}{125}, && \text{para } 0 \leq x < 5; \\
&= 0 && \text{para } x < -2 \text{ e } x \geq 5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\
&= \int_{-2}^{0} x^2 \frac{1}{10} dx + \int_{0}^{5} x^2\left(\frac{1}{10}+\frac{3x}{125}\right) dx \\
&= \left(\frac{x^3}{30}\right)\Big|_{-2}^{0} + \left(\frac{x^3}{30}+\frac{3x^4}{500}\right)\Big|_{0}^{5} \\
&= \left(0-\frac{-8}{30}\right)+\left(\frac{125}{30}+\frac{1875}{500}-0\right) \\
&= \frac{16}{60}+\frac{250}{60}+\frac{225}{60} \\
&= \frac{491}{60}
\end{aligned}
$$

3.

Suponha que a duração da vida (em horas) de uma certa válvula seja uma variável aleatória com densidade $f(x) = 100/x^2$, para $x > 100$, e zero caso contrário. Mostre que $\mathrm{E}[X]$ não existe para a variável aleatória X.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{100}^{\infty} x \frac{100}{x^2} dx = 100 \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x} dx \\
&= 100 \ln(x) \Big|_{100}^{\infty} \\
&= 100 \left(\lim_{n \to \infty} \ln(n) - \ln(100) \right) \\
&\to \infty
\end{aligned}
$$

O limite da esperança de X diverge para o infinito, portanto $\mathrm{E}[X]$ não existe.

4.

Para quaisquer constantes a e b, mostre que se $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = 1$, então, $a \leq \mathrm{E}[X] \leq b$.

Defina as variáveis aleatórias A e B em que A e B só assumem os valores a e b com probabilidade 1.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = 1 &\implies \mathrm{P}(A \leq X \leq B) = 1 \\
&\implies A \leq X \leq B \\
&\implies \mathrm{E}[A] \leq \mathrm{E}[X] \leq \mathrm{E}[B] && \text{pela linearidade da esperança} \\
&\implies a \leq \mathrm{E}[X] \leq b
\end{aligned}
$$

5.

A função de distribuição da variável aleatória X é dada seguir. Obtenha $\mathrm{E}[X]$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x/4, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \int_0^\infty 1 - F_X(x)dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)dx \\
&= \int_0^\infty 1 - F_X(x)dx - 0 \qquad\qquad \text{pois } F_X(x) = 0 \text{ para } x < 0 \\
&= \int_0^1 \frac{x}{4}dx + \int_1^2 \frac{1}{2}dx \\
&= \left(\frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x}{2}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{8} - 0 + 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

6.

Suponha que a variável aleatória X admita densidade $f(x) = 2xe^{-x^2}, x \geq 0$. Seja $Y = X^2$. Calcule $\mathrm{E}[Y]$:

a)

Diretamente, sem primeiro obter a densidade de Y.

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_0^x 2te^{-t^2} dt \\
&= \int_0^{x^2} e^{-u} du \\
&= (-e^{-u})\Big|_0^{x^2} \\
&= -e^{-x^2} + e^{-0} \\
&= 1 - e^{-x^2} \qquad \text{para } x \geq 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u &= t^2 \\
du &= 2tdt \\
t \to 0 &\implies u \to 0 \\
t \to x &\implies u \to x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X^2 \leq y) \\
&= \mathrm{P}\left(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{y}\right) = \mathrm{P}(|X| \leq \sqrt{y}) \\
&= \mathrm{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
&= \mathrm{P}(X \leq \sqrt{y}) - \mathrm{P}(X \leq -\sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - 0 \qquad \text{pois } F_X(x) = 0 \text{ para } x < 0 \\
&= 1 - e^{-\sqrt{y}^2} \\
&= 1 - e^{-y}
\end{aligned}
$$

Vemos que a função de distribuição acumulada de Y é a mesma de uma variável aleatória Exponencial de parâmetro $\lambda = 1$, portanto sua esperança é $\frac{1}{\lambda} = 1$.

b)

Primeiramente obtendo a densidade de Y.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= 1 - e^{-y} \\
f_Y(y) &= \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) \\
&= e^{-y} \qquad\qquad \text{para } y \geq 0
\end{aligned}
$$

Integração por partes para achar $\mathrm{E}\,[Y]$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[Y] &= \int\limits_0^\infty ye^{-y}dy \\
&= (-ye^{-y})\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty -e^{-y}dy \\
&= \lim_{n\to\infty} -ne^{-n} + (e^{-y})\Big|_0^\infty \\
&= 0 - \lim_{n\to\infty} e^{-n} + e^{-0} \\
&= 1
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
u &= y \\
du &= dy \\
dv &= e^{-y}dy \\
v &= -e^{-y}
\end{aligned}
$$