UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Introdução à Álgebra Linear
Segunda Prova
Paulo Ricardo Seganfredo Campana - 20210044220

Questão 1.

a) Uma transformação que satisfaz as propriedades:

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \text{ e } T(\alpha u) = \alpha T(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall u, v \in V$$

b)
I)
$T(0,0) = (0 \cos 0) = (0,1)$ $\qquad$ $T(0,0) \neq 0$ portanto não é linear.
II)

$$T(ax^2 + bx + c + dx^2 + ex + f) = T((a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)) =$$

$$(a+d)x^2 + (-2a - 2d + b + e)x + (a + d - b - e + c + f) =$$

$$(ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c)) + (dx^2 + (-2d+e)x + (d-e+f)) = T(ax^2+bx+c) + T(dx^2+ex+f)$$

$$T(\alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c) = (\alpha a x^2 + \alpha(-2a+b)x + \alpha(a-b+c)) =$$

$$\alpha(ax^2 + (-2a+b)x + (a-b+c)) = T(ax^2+bx+c)$$ Portanto é linear.

III) Sem perda de generalidade para o caso $2x2$:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} =$$
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)$$
$$T\left(\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} =$$
$$\alpha T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$ Portanto é linear.

Questão 2.

$$x(1,2,0,-4) + y(2,0,-1,3) + z(a,b,c,d) = (x + 2y + az, 2x + bz, -y + cz, -4x + 3y + dz)$$

$$T(x,y,z) = (x + 2y + az, 2x + bz, -y + cz, -4x + 3y + dz)$$

Questão 3.

I)

Seja $v \in N(T)$, $T(v) = 0$, porém $T(0) = 0$, já que T é injetora, apenas um vetor pode valer 0, $v = 0$ ou seja $N(T) = \{0\}$.

II)

Pelo teorema de dimensão: $dimN + dimIm = dimV \longrightarrow dimIm = dimV \longrightarrow Im(T) = V$

III)

Foi visto anteriormente que se $Im(T) = V \longrightarrow N(T) = \{0\}$ e que se $N(T) = \{0\} \longrightarrow T$ é injetora, portanto se $Im(T) = V \longrightarrow T$ é injetora.

Questão 4.

I)

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 12 & 0 \\ -8 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -\frac{32}{3} & 0 \\ -8 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -8 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$y = 0, \quad z = 0, \quad x = 0 \longrightarrow N(T) = \{0, 0, 0\}$

$Im(T) = \mathbb{R}^3$ pois $N(T) = \{0, 0, 0\}$ como visto na demonstração na questão 3.

Portanto é injetora e sobrejetora, ou seja, bijetora, e caracteriza isomorfismo.

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{-16}{3} & \frac{8}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-11x + 4y + 4z, -8x + y + 4z, -16x + 8y + 5z)$$

II)

$$det \begin{vmatrix} -9-\lambda & 4 & 4 \\ -8 & 3-\lambda & 4 \\ -16 & 8 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-9-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) - 256 - 256 + 64(3-\lambda) - 16(-9-\lambda) + 32(7-\lambda)$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = -(\lambda+1)^2(\lambda-3) \quad \lambda = \{-1, 3\}$

$\lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 4 \\ -16 & 8 & 8 \end{vmatrix} \quad y + z = x \qquad v = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$

$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -12 & 4 & 4 \\ -8 & 0 & 4 \\ -16 & 8 & 4 \end{vmatrix} \begin{cases} 4z = 8x \longrightarrow z = 2x \\ -16x + 8y + 4z = 0 \longrightarrow -8x + 8y = 0 \longrightarrow x = y \end{cases} \qquad v = x(1, 1, 2)$

Os três autovetores geram o $\mathbb{R}^3$ portanto T é diagonalizável.

Questão 5.

I) Verdadeiro, pois isso significa que o polinômio característico/minimal é da forma $(x_1 - \lambda_1)(x_2 - \lambda_2)\ldots(x_n - \lambda_n)$ com todos os λs distintos, que pelo teorema 3.3.3 da $3^{\underline{a}}$ unidade, é dito como diagonalizável.

II) Verdadeiro, segue a demonstração do material da 3ª unidade.

Sejam $T : V \to V$ Um operador linear e A e B bases de V. Sabe-se que a relação entre matrizes semelhantes é $[T]_B = M^{-1}[T]_A$ M, sendo M a matriz-mudança de base de B para A. Então:

$$\det([T]_B - \lambda I) = \det(M^{-1}[T]_A M - \lambda I) = \det(M^{-1}[T]_A M - \lambda M^{-1} I M)$$

$$\det([T]_B - \lambda I) = \det(M^{-1}([T]_A - \lambda I)M) = \det M^{-1} \det([T]_A - \lambda I) \det M$$

$$\det([T]_B - \lambda I) = \det M^{-1} \det M \det([T]_A - \lambda I) = \det(M^{-1} M) \det([T]_A - \lambda I)$$

$$\det([T]_B - \lambda I) = \det([T]_A - \lambda I)$$

III) Verdadeiro, sem perda de generalização para o caso de 2 autovalores:

Seja $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \qquad a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = 0$

$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \qquad a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0 \qquad a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$

Já que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ e $v \neq 0$, $a_2 = 0$, o mesmo vale para a_1

Portanto a única solução para $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$ é a trivial $a_1 = a_2 = 0$ e v_1, v_2 são LI.

IV) Verdadeiro.

$$det \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda^n = 0$$

Porém a função exponencial $-\lambda^n$ não possui raiz, não existe autovalores então não pode ser diagonalizável.