Lista 1

Probabilidade I

Paulo Campana

27. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.
a) Qual é a probabilidade de que o menor número do emblema seja 5?
b) Qual é a probabilidade de que o maior número do emblema seja 5?

Suponha que a primeira pessoa escolhida seja o 5, para que 5 seja o menor, a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, a chance é de $5/9$ da segunda pessoa estar entre 6 e 10, e a chance é de $4/8$ para a terceira pessoa. Porém a suposição da primeira pessoa ser o 5 é arbitrária, ela poderia ser o segundo ou terceiro, então multiplicamos a probabilidade total por 3.

$$3\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\right)=\frac{1}{12}$$

De forma análoga, agora porém a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{1, 2, 3, 4\}$, a chance é de $4/9$ para a segunda pessoa e $3/8$ para a terceira.

$$3\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{20}$$

28. Uma montagem eletrônica é formada de dois subsistemas A e B. De ensaios anteriores as seguintes probabilidades são admitidas conhecidas: $\mathrm{P}(\text{A falhar}) = 0.20, \mathrm{P}(\text{A e B falhem}) = 0.15$ e $\mathrm{P}(\text{B falhe sozinho}) = 0.20$. Calcule as seguintes probabilidades: $\mathrm{P}(\text{A falhe} \mid \text{B tenha falhado})$ e $\mathrm{P}(\text{A falhe sozinho})$.

$$\mathrm{P}(\text{A falhe} \mid \text{B tenha falhado}) = \frac{\mathrm{P}(\text{A falhe} \cap \text{B tenha falhado})}{\mathrm{P}(\text{B tenha falhado})} =$$

$$\frac{\text{P(A e B falhem)}}{\text{P(A e B falhem)} + \text{P(B falhe sozinho)}} = \frac{0.15}{0.15 + 0.2} = \frac{3}{7}$$

$$\text{P(A falhe sozinho)} = \text{P(A falhar)} - \text{P(A e B falhem)} = 0.20 - 0.15 = 0.05$$

29. O Sport ganha com probabilidade 0.7 se chove e com 0.8 se não chove. Em setembro a probabilidade de chuva é de 0.3. O Sport ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

$$\begin{aligned}
&\text{P(ganhar)} \\
&= \text{P}((\text{chover} \cap \text{ganhar}) \cup (\text{não chover} \cap \text{ganhar})) \\
&= \text{P}(\text{chover} \cap \text{ganhar}) + \text{P}(\text{não chover} \cap \text{ganhar}) \\
&= \text{P}(\text{ganhar} \mid \text{chover})\,\text{P}(\text{chover}) + \text{P}(\text{ganhar} \mid \text{não chover})\,\text{P}(\text{não chover}) \\
&= 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.7 \\
&= 0.77
\end{aligned}$$

$$\text{P}(\text{chover} \mid \text{ganhar}) = \frac{\text{P}(\text{chover} \cap \text{ganhar})}{\text{P(ganhar)}} = \frac{\text{P}(\text{ganhar} \mid \text{chover})\,\text{P}(\text{chover})}{\text{P(ganhar)}} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.77} = \frac{3}{11}$$

30. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes. Dos pedidos de um tipo de processamento cerca de 10% vem do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Caso o pedido não seja feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0.5% do cliente C, 2% do cliente D e 8% do cliente E.
a) Qual a probabilidade do sistema apresentar erro?
b) Sabendo-se que o processo apresentou erro calcule a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E.

Cliente	A	B	C	D	E
P(cliente)	0.10	0.15	0.15	0.40	0.20
P(erro $\mid$ cliente)	0.01	0.02	0.005	0.02	0.08

$$\mathrm{P(erro)} = 0.10 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.02 + 0.15 \cdot 0.005 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.20 \cdot 0.08 = 0.02875$$

$$\mathrm{P(cliente\ E} \mid \mathrm{erro)} = \frac{\mathrm{P(cliente\ E} \cap \mathrm{erro)}}{\mathrm{P(erro)}} =$$

$$\frac{\mathrm{P(erro} \mid \mathrm{cliente\ E)\, P(cliente\ E)}}{\mathrm{P(erro)}} = \frac{0.08 \cdot 0.20}{0.02875} = 0.5565217$$

31. Nos cursos de Estatística 5% dos homens e 2% das mulheres estão acima dos pesos ideais. Um estudante é escolhido aleatoriamente. Sabe-se também que 60% dos estudantes são homens. Sorteando-se aleatoriamente um estudante, calcule a probabilidade de que ele:
a) esteja acima do peso;
b) seja mulher, sabendo que o mesmo está acima do peso.

$\mathrm{P(acima\ do\ peso)}$
$= \mathrm{P(acima\ do\ peso} \ \cap\ \mathrm{mulher)} + \mathrm{P(acima\ do\ peso} \ \cap\ \mathrm{homem)}$
$= \mathrm{P(acima\ do\ peso} \mid \mathrm{mulher)\, P(mulher)} + \mathrm{P(acima\ do\ peso} \mid \mathrm{homem)\, P(homem)}$
$= 0.02 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.6$
$= 0.038$

$$\mathrm{P(mulher} \mid \mathrm{acima\ do\ peso)} = \frac{\mathrm{P(mulher} \ \cap\ \mathrm{acima\ do\ peso)}}{\mathrm{P(acima\ do\ peso)}} =$$

$$\frac{\mathrm{P(acima\ do\ peso} \mid \mathrm{mulher)\, P(mulher)}}{\mathrm{P(acima\ do\ peso)}} = \frac{0.02 \cdot 0.4}{0.038} = \frac{4}{19}$$

32. Mostre que $\mathrm{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$.

Escrevendo B como uma união disjunta entre a parte de B que tem interseção com A e a parte que não tem interseção:

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$
$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A^c \cap B))$$
$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B)$$

$$\mathrm{P}(A^c \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

Então:

$$\mathrm{P}(A^c \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A^c \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 1 - \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$$

33. Demonstre: Se $\mathrm{P}(A \mid B) > \mathrm{P}(A)$, então, $\mathrm{P}(B \mid A) > \mathrm{P}(B)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A \mid B) &> \mathrm{P}(A) \\
\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} &> \mathrm{P}(A) \\
\mathrm{P}(A \cap B) &> \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \\
\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} &> \mathrm{P}(B) \\
\mathrm{P}(B \mid A) &> \mathrm{P}(B)
\end{aligned}$$

34. Uma caixa contém m bolas brancas e n vermelhas. dois jogadores se alternam a retirar, ao acaso, uma bola da caixa. as retiradas são com reposição e vence quem retirar a primeira bola branca. Mostre que quem inicia o jogo tem vantagem.

A probabilidade de ganhar em um certo turno é $\frac{m}{n+m}$, seja esse valor x, a probabilidade de não ganhar é então $1 - x$.
Na primeira retirada, o jogador 1 tem x chance de ganhar, já na segunda retirada, o jogador 2 tem $(1-x)x$ chance de ganhar, pois é necessário que o jogador 1 não ganhe na retirada anterior, e assim por diante.

Retirada	Jogador	chance de ganhar
1	1	x
2	2	$(1-x)x$
3	1	$(1-x)^2x$
4	2	$(1-x)^3x$
5	1	$(1-x)^4x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A probabilidade total do jogador 1 ganhar é $P1 = (1-x)^0 x + (1-x)^2 x + (1-x)^4 x + \cdots$
A probabilidade total do jogador 2 ganhar é $P2 = (1-x)^1 x + (1-x)^3 x + (1-x)^5 x + \cdots$
Note que $P2 = (1-x)P1$, como x é uma probabilidade entre 0 e 1, $1-x$ também é entre 0 e 1, isso significa que $P2$ sempre é menor que $P1$ então o jogador 1 sempre terá vantagem.

35. Demonstre que dois eventos com probabilidade positiva e disjuntos, nunca são independentes.

Temos que $\mathrm{P}(A) > 0, \mathrm{P}(B) > 0$ (probabilidade positiva) e $A \cap B = \emptyset$ (disjuntos).
Suponha que A e B sejam independentes:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\emptyset)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0}{\mathrm{P}(B)} = 0$$

Porém $\mathrm{P}(A) > 0$, é uma contradição, então A e B não são independentes.

36. Demonstre as seguintes relações:
a) $A \subset B \iff A^c \supset B^c$;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

TODO

$$(A \cup B) \cup C$$
$$\{x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$$
$$\{x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\}$$
$$A \cup (B \cup C)$$