Probabilidade II

Lista 2

1.

Suponha que f e g sejam densidade nesse intervalo $a \leq x \leq b$

Para $f + g$ ser densidade, $f + g$ tem que ser positivo e com integral no suporte igual a 1:

a)

Verifique que $f + g$ não é uma densidade nesse intervalo.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 1 + 1 = 2$$

$\int_a^b f(x) + g(x)dx \neq 1,\ f + g$ não é densidade.

b)

Verifique que, para todo número $\beta,\ 0 < \beta < 1,\ \beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$ é uma densidade nesse intervalo.

$$\beta f(x) + (1 - \beta)g(x) \geq 0,\ \text{para } 0 < \beta < 1$$

$$\int_a^b \beta f(x) + (1 - \beta)g(x)dx = \beta \int_a^b f(x)dx + (1 - \beta) \int_a^b g(x)dx = \beta + (1 - \beta) = 1$$

Então $\beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$ é densidade

2.

Um componente eletrônico, de marca 'A', tem duração de vida que segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas e um custo unitário de R\$10,00. A marca "B", desse componente eletrôico, tem uma vida média de 200 horas e um custo de R\$15,00. Considere também a incidêcia de um custo adicional de R\$8,00 se o componente durar menos de 200 horas, qualquer que seja a marca. Pergunta: Qual a marca mais econômica?

$A \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$ com custo de R\$10,00 e $B \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{200}\right)$ com custo de R\$15,00. Para levar em consideração o custo adicional de R\$8,00, calcule a probabilidade do componente durar menos de 200 horas:

A função de distribuição acumulada de uma variável exponencial é dada por: $1 - e^{-\lambda x}$

$$
\begin{aligned}
P(A < 200) = F_A(200) = 1 - e^{-\frac{1}{100}200} = 1 - e^{-2} = 0.865 \\
P(B < 200) = F_B(200) = 1 - e^{-\frac{1}{200}200} = 1 - e^{-1} = 0.632
\end{aligned}
$$

O custo total do componente eletrônico será o custo unitário + custo adicional × probabilidade de ocorrer o custo adicional:

$$
\begin{aligned}
C_A = 10 + 8 \times 0.865 = 16.917 \\
C_B = 15 + 8 \times 0.632 = 20.057
\end{aligned}
$$

A marca com melhor custo-benefício sera aquela que custa menos por unidade de tempo:

$$
\begin{aligned}
C_A/h = 16.917/100 = 0.169 \text{ R\$ por hora} \\
C_B/h = 20.057/200 = 0.1 \text{ R\$ por hora}
\end{aligned}
$$

Então a marca A é a mais barata e a marca B tem melhor custo-benefício, pois é 7 centavos por hora mais barata que a marca A.

3.

Seja X a duração de vida de uma válvula eletrônica e admita que X possa ser representada por uma variável aleatória contínua, com densidade $f(x) = be^{-bx}, x \geq 0$. Seja $p_j = \mathrm{P}(j \leq X < j+1)$. Verifique que p_j é da forma $(1-a)a^j$ e determine a.

Note que X é uma variável aleatória exponencial e sua distribuição acumulada é dada por: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(j \leq X < j+1) &= \mathrm{P}(X < j+1) - \mathrm{P}(X \leq j) \\
&= F(j+1) - F(j) \\
&= 1 - e^{-b(j+1)} - (1 - e^{-bj}) \\
&= e^{-bj} - e^{-b(j+1)}
\end{aligned}$$

Multiplique $e^{-bj} - e^{-b(j+1)}$ por $e^{bj}e^{-bj} = 1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(j \leq X < j+1) &= e^{-bj} - e^{-b(j+1)} \\
&= (e^{-bj} - e^{-b(j+1)})e^{bj}e^{-bj} \\
&= (1 - e^{-b})e^{-bj}
\end{aligned}$$

Comparando $(1-e^{-b})e^{-bj}$ com $(1-a)a^j$ vemos que $a = e^{-b}$:

4.

Suponha que o diâmetro X de um cabo elétrico é uma variável aleatória com f.d.p. $f(x) = 6x(1-x),\ 0 \leq x \leq 1$.

a)

Verifique que essa expressão é realmente uma densidade.

$$6x(1-x) \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq x \leq 1$$

$$\int_0^1 6x(1-x)dx = \int_0^1 6x - 6x^2 dx = (3x^2 - 2x^3)\Big|_0^1 = 3 - 2 = 1$$

$f(x)$ é densidade.

b)

Obtenha uma expressão para a função de distribuição de X.

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 6t(1-t)dt = (3t^2 - 2t^3)\Big|_0^x = 3x^2 - 2x^3$$

c)

Calcule $\mathrm{P}(X \leq 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3)$.

$$\mathrm{P}(X \leq 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3) = \frac{\mathrm{P}([X \leq 1/2] \cap [1/3 < X < 2/3])}{\mathrm{P}(1/3 < X < 2/3)} =$$

Fazendo a interseção desses dois conjuntos temos que $[X \leq 1/2] \cap [1/3 < X < 2/3] = [1/3 < X \leq 1/2]$

$$\frac{\mathrm{P}(1/3 < X \leq 1/2)}{\mathrm{P}(1/3 < X < 2/3)} = \frac{F(1/2) - F(1/3)}{F(2/3) - F(1/3)} =$$

$$\frac{(3/4 - 1/4) - (1/3 - 2/27)}{(4/3 - 16/27) - (1/3 - 2/27)} = \frac{1/2 - 7/27}{20/27 - 7/27} = \frac{13/54}{26/54} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

5.

Seja a variável aleatória X com função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x}{4}[1 + \log(4/x)], & \text{se} \quad 0 < x \leq 4 \\ 1, & \text{se} \quad x > 4 \end{cases}$$

Obtenha a densidade de X.

$f(x) = F'(x)$, portanto, para $x \leq 0$ e $x > 4,\ f(x) = 0.$ E para $0 < x \leq 4$:

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= \frac{d}{dx}\frac{x}{4}[1 + \log(4/x)] \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\log(4/x)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log(4/x) + \frac{x}{4}\left(\frac{1}{\frac{4}{x}}\right)\left(-\frac{4}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\log(4/x)}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\log(4/x)}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(4/x)}{4}, & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.

Supondo que a expectativa de vida, em anos, seja uma variável aleatória com distribuição $X \sim \text{Exp}(1/60)$:

Lembre da distribuição acumulada da exponencial: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

a)

Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

$$P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 70) = 1 - F(70) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{60}70}) = e^{-\frac{7}{6}} = 0.311$$

b)

Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de morrer antes dos 70, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

Use a falta de memória da distribuição exponencial: $\text{P}(X < s + t | X > s) = \text{P}(X < t)$

$$\text{P}(X < 70 | X \geq 50) = \text{P}(X < 20) = F(20) = 1 - e^{-\frac{1}{60}20} = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0.283$$

c)

Calcule a idade mínima tal que a chance de um indivíduo continuar vivo após essa idade seja de 50%.

$$\begin{aligned}
0.5 &= \text{P}(X > x) \\
&= 1 - \text{P}(X < x) \\
&= 1 - F(x) \\
&= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{60}x}) \\
&= e^{-\frac{x}{60}} \\
\log(0.5) &= -\frac{x}{60} \\
-60\log(0.5) &= x \\
60\log(2) &= x \\
x &= 41.589
\end{aligned}$$

Seguindo essa distribuição, apenas 50% dos indivíduos vivierão após os 42 anos.

7.

Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B. A duração em horas das lâmpadas tem distribuição exponencial com parâmetro 1/80 ou 1/100, conforme se utilize o método A ou o B. Em um grupo de 10 lâmpadas selecionadas ao acaso, qual a probabilidade de que 6 delas durem pelo menos 90 horas?

Calcule a probabilidade de que cada tipo de lâmpada dure pelo menos 90 horas:

$$P(A \geq 90) = 1 - P(A < 90) = 1 - F_A(90) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{80}90}) = e^{-\frac{9}{8}}$$
$$P(B \geq 90) = 1 - P(B < 90) = 1 - F_B(90) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{100}90}) = e^{-\frac{9}{10}}$$

Agora a probabilida de que uma lâmpada selecionada ao acaso dure pelo menos 90 horas:

$$P(X \geq 90) = P(A)P(A \geq 90) + P(B)P(B \geq 90) = \frac{7}{10}e^{-\frac{9}{8}} + \frac{3}{10}e^{-\frac{9}{10}} = 0.349$$

E use a distribuição Binomial para obter a probabilidade de que entre 10 lâmpadas, 6 durem pelo menos 90 horas:

$Y \sim \text{Bin}(n = 10,\ p = 0.349)$

$$P(Y = 6) = \binom{10}{6} 0.349^6\ 0.651^4 = 0.068$$

8.

Sendo $X \sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2),\ \mu > 0$, avalie as probabilidades abaixo em função de $\Phi(z)$ ou numericamente, se possível:

Lembre que $\mathrm{P}(X < a) = \mathrm{P}\Big(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\Big) = \mathrm{P}(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$.

a)

$\mathrm{P}(|X| < \mu)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X| < \mu) &= \mathrm{P}(-\mu < X < \mu) \\
&= \mathrm{P}(X < \mu) - P(X < -\mu) \\
&= \mathrm{P}\Big(Z < \frac{\mu - \mu}{\sigma}\Big) - \mathrm{P}\Big(Z < \frac{-\mu - \mu}{\sigma}\Big) \\
&= \mathrm{P}(Z < 0) - \mathrm{P}\bigg(Z < \frac{-2\mu}{\sigma}\bigg) \\
&= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

b)

$\mathrm{P}(|X - \mu| > 0)$.

Note que $|X - \mu|$ é sempre positivo, então:

$$\mathrm{P}(|X - \mu| > 0) = \mathrm{P}(|X - \mu| \neq 0) = 1$$

c)

$\mathrm{P}(X - \mu < -\sigma)$.

$$\mathrm{P}(X - \mu < -\sigma) = \mathrm{P}\Big(\frac{X - \mu}{\sigma} < -1\Big) = \mathrm{P}(Z < -1) = \Phi(-1)$$

d)

$\mathrm{P}(\sigma < |X-\mu| < 2\sigma)$.

$$\mathrm{P}(\sigma < |X-\mu| < 2\sigma) = \mathrm{P}\left(1 < \frac{|X-\mu|}{\sigma} < 2\right) = \mathrm{P}\left(1 < \left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| < 2\right) =$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(1 < |Z| < 2) &= \mathrm{P}(|Z| < 2) - \mathrm{P}(|Z| < 1) \\
&= \mathrm{P}(-2 < Z < 2) - \mathrm{P}(-1 < Z < 1) \\
&= \mathrm{P}(Z < 2) - \mathrm{P}(Z < -2) - (\mathrm{P}(Z < 1) - \mathrm{P}(Z < -1)) \\
&= \Phi(2) - \Phi(-2) - \Phi(1) + \Phi(-1) \\
&= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) - \Phi(1) + (1 - \Phi(1)) \\
&= 2\Phi(2) - 1 - 2\Phi(1) + 1 \\
&= 2(\Phi(2) - \Phi(1))
\end{aligned}$$

9.

Suponha que X seja uniformemente distribuída sobre $[-\alpha,\ \alpha]$, com $\alpha > 0$. Determine α de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

Lembre que para $X \sim \mathrm{Unif}(-\alpha,\ \alpha),\ F(x) = \dfrac{x-(-\alpha)}{\alpha-(-\alpha)} = \dfrac{x+\alpha}{2\alpha}$.

a)

$\mathrm{P}(X > 1) = 1/3$.

$$\begin{aligned}
1/3 &= \mathrm{P}(X > 1) \\
2/3 &= \mathrm{P}(X < 1) \\
2/3 &= F(1) \\
2/3 &= \frac{1+\alpha}{2\alpha} \\
4\alpha &= 3 + 3\alpha \\
\alpha &= 3
\end{aligned}$$

b)

$\mathrm{P}(X > 1) = 1/2$.

$$\begin{aligned}
1/2 &= \mathrm{P}(X > 1) \\
1/2 &= \mathrm{P}(X < 1) \\
1/2 &= F(1) \\
1/2 &= \frac{1+\alpha}{2\alpha} \\
2\alpha &= 2 + 2\alpha \\
\alpha &= 1 + \alpha
\end{aligned}$$

Não existe soluções para α.

c)

$\mathrm{P}(|X| < 1) = \mathrm{P}(|X| > 1)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X| < 1) &= \mathrm{P}(-1 < X < 1) \\
&= \mathrm{P}(X < 1) - \mathrm{P}(X < -1) \\
&= F(1) - F(-1) \\
&= \frac{1+\alpha}{2\alpha} - \frac{-1+\alpha}{2\alpha} \\
&= \frac{2}{2\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X| > 1) &= \mathrm{P}(X > 1) + \mathrm{P}(X < -1) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X < 1) + \mathrm{P}(X < -1) \\
&= 1 - F(1) + F(-1) \\
&= 1 - \frac{1+\alpha}{2\alpha} + \frac{-1+\alpha}{2\alpha} \\
&= \frac{2\alpha - 2}{2\alpha} \\
&= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \\
&= 1 - \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(|X| < 1) &= \mathrm{P}(|X| > 1) \\
\frac{1}{\alpha} &= 1 - \frac{1}{\alpha} \\
\frac{2}{\alpha} &= 1 \\
\alpha &= 2
\end{aligned}$$

10.

Uma fábrica de lâmpadas oferece uma garantia de troca se a duração da lâmpada for inferior à 60 horas. A duração das lâmpadas é uma variável aleatória contínua X exponencialmente distribuída com função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5000} e^{-\frac{1}{5000}x}, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine quantas lâmpadas são trocadas por conta da garantia para cada 1000 lâmpadas fabricadas.

$X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{5000}),\ F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}x}$.

Primeiramente, a probabilidade da duração da lâmpada ser inferior à 60 horas:

$$\text{P}(X < 60) = F(60) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}60} = 1 - e^{-\frac{3}{250}} = 0.011928$$

E para 1000 lâmpadas, em média 11.928 delas podem ser trocadas pela garantia.

11.

Suponha que X tenha distribuição $\text{N}(\mu,\ \sigma^2)$. Determine c como uma função de μ e σ tal que $\text{P}(X \leq c) = 2\text{P}(X > c)$.

$$\begin{aligned} \text{P}(X \leq c) &= 2\text{P}(X > c) \\ \text{P}(X \leq c) &= 2 - 2\text{P}(X < c) \\ \text{P}(X \leq c) &= 2/3 \\ \text{P}\Big(Z \leq \frac{c-\mu}{\sigma}\Big) &= 2/3 \\ \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right) &= 2/3 \\ \frac{c-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(2/3) \\ c &= \sigma\Phi^{-1}(2/3) + \mu \end{aligned}$$

12.

Verifique que se $X \sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2)$ e $Y = aX + b$, então, $Y \sim \mathrm{N}(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$.

Por função de variável aleatória:

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(aX + b \leq y) = \mathrm{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = F_X'\left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a} =$$

$$\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)\right\}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu+b)}{(a\sigma)}\right)\right\}dx$$

Portanto, $Y \sim \mathrm{N}(a\mu + b,\ a^2\sigma^2)$

Pela experança e variância de Y:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left[x\right] = \mu && \mathrm{Var}\left[x\right] = \sigma^2 \\ &\mathrm{E}\left[Y\right] = \mathrm{E}\left[aX + b\right] = a\mathrm{E}\left[X\right] + b = a\mu + b && \mathrm{Var}\left[x\right] = \mathrm{Var}\left[aX + b\right] = a^2\mathrm{Var}\left[X\right] = a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &\sim \mathrm{N}(\mu,\ \sigma^2) \\ Y &\sim \mathrm{N}(a\mu + b,\ a^2\sigma^2) \end{aligned}$$