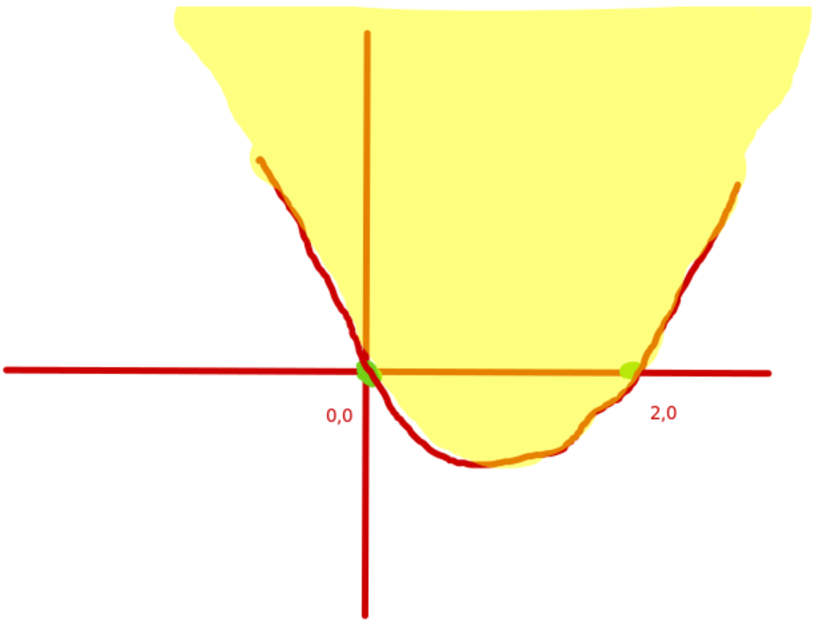
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Cálculo II
Segunda Prova
Paulo Ricardo Seganfredo Campana - 20210044220

Questão 1

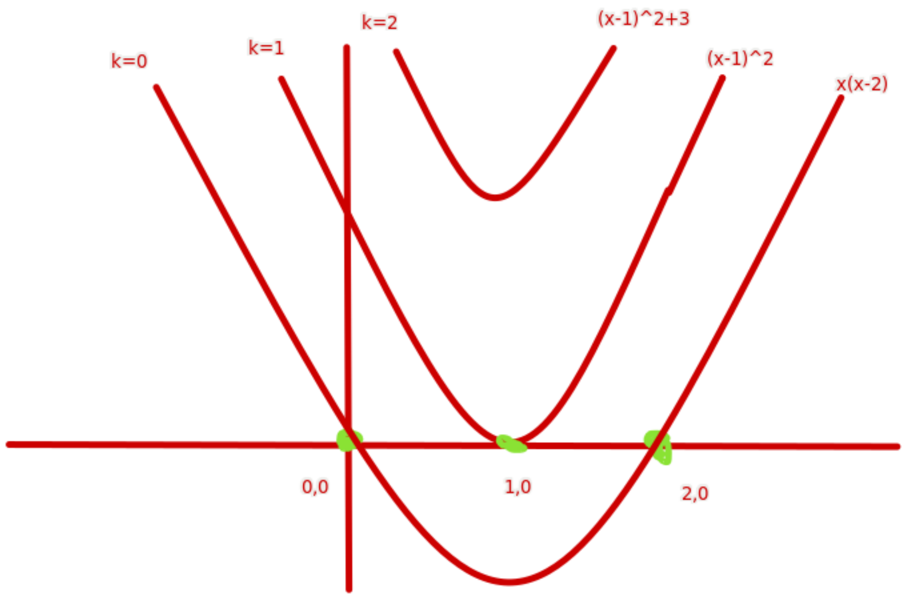
Item 1

$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2 + 2x}$$
$$y - x^2 + 2x \geq 0$$
$$y \geq x^2 - 2x$$
$$y \geq x(x-2)$$
$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 + 2x\}$$



Item 2

$$C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{y - x^2 + 2x} = k\}$$
$$C_0 \longrightarrow \sqrt{y - x^2 + 2x} = 0 \longrightarrow y - x^2 + 2x = 0 \longrightarrow y = x^2 - 2x \longrightarrow y = x(x-2)$$
$$C_1 \longrightarrow \sqrt{y - x^2 + 2x} = 1 \longrightarrow y - x^2 + 2x = 1 \longrightarrow y = x^2 - 2x + 1 \longrightarrow y = (x-1)^2$$
$$C_2 \longrightarrow y = x^2 - 2x + 4 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 3$$
$$C_3 \longrightarrow y = x^2 - 2x + 9 \longrightarrow y = (x-1)^2 + 8$$
$$\vdots$$



Questão 2

Item 1

$$\frac{y^3}{y^2+x^2} = \frac{y^2}{y^2+x^2} \cdot y$$

$$\frac{y^2}{y^2+x^2} \text{ é limitado pois } y^2 \leq y^2 + x^2 \text{ já que todo número real ao quadrado é positivo}$$

$$\text{além de } \lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$$

$$\text{portanto } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{y^2+x^2} = 0$$

Item 2

Avalia-se o limite em duas retas: $x = 0$ e $y = 0$

$$x = 0 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

$$y = 0 \longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{|x|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

Os limites laterais de um mesmo ponto da função tem valores diferentes, portanto o limite não existe

Questão 3

Item 1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\cdot y^3 - xy^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y^3 + y^5 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\cdot 3xy^2 - xy^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + 3xy^4 - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Item 2

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(0,0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) := \lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(0,0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t^3}{0+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

Item 3

A função f é diferenciável no ponto (0,0) se o limite $\frac{xy^3}{x^2+y^2}$ existir

$$\frac{xy^3}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot xy$$

$\frac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitado, como visto na questão 2

além de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

portanto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{y^2+x^2} = 0$

O limite existe, e então f é diferenciável em (0,0)

Questão 4

Item 1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)2x = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x^2+y^2)\cdot 2y = \frac{-y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot 2y = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}\right) = \frac{-y\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{y^2(x^2+y^2)}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$= \frac{-y(x^2+y^2)+x^2y}{y^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y(x^2-(x^2+y^2))}{y^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y^2}{y(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Item 2

$$\text{Equação do plano: } \mathbb{P} : z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \frac{1}{0+1+0\sqrt{0+1}} = 1$$

$$f(0,1) = \ln(0+\sqrt{0+1}) = \ln 1 = 0$$

$$\mathbb{P} : z - 0 = 1(x-0) + 1(y-1)$$

$$\mathbb{P} : z = x + y - 1$$

$$\mathbb{P} : x + y - z = 1$$

Item 3

$$\overrightarrow{u} \text{ é unitário pois } \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$$\text{Portanto: } \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}} = \bigtriangledown f(a,b) \cdot \overrightarrow{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)u_2$$

$$1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$