

# Probabilidade II

## Lista 2a

**1.**

Suponha que  $f$  e  $g$  sejam densidade nesse intervalo  $a \leq x \leq b$

Para  $f + g$  ser densidade,  $f + g$  tem que ser positivo e com integral no suporte igual a 1:

**a)**

Verifique que  $f + g$  não é uma densidade nesse intervalo.

$$\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = 1 + 1 = 2$$

$\int_a^b f(x) + g(x)dx \neq 1$ ,  $f + g$  não é densidade.

**b)**

Verifique que, para todo número  $\beta$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$  é uma densidade nesse intervalo.

$$\beta f(x) + (1 - \beta)g(x) \geq 0, \text{ para } 0 < \beta < 1$$
$$\int_a^b \beta f(x) + (1 - \beta)g(x)dx = \beta \int_a^b f(x)dx + (1 - \beta) \int_a^b g(x)dx = \beta + (1 - \beta) = 1$$

Então  $\beta f(x) + (1 - \beta)g(x)$  é densidade

## 2.

Um componente eletrônico, de marca ‘A’, tem duração de vida que segue uma distribuição exponencial com vida média de 100 horas e um custo unitário de R\$10,00. A marca “B”, desse componente eletrônico, tem uma vida média de 200 horas e um custo de R\$15,00. Considere também a incidência de um custo adicional de R\$8,00 se o componente durar menos de 200 horas, qualquer que seja a marca. Pergunta: Qual a marca mais econômica?

$A \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$  com custo de R\$10,00 e  $B \sim \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{200}\right)$  com custo de R\$15,00. Para levar em consideração o custo adicional de R\$8,00, calcule a probabilidade do componente durar menos de 200 horas:

A função de distribuição acumulada de uma variável exponencial é dada por:  $1 - e^{-\lambda x}$

$$P(A < 200) = F_A(200) = 1 - e^{-\frac{1}{100}200} = 1 - e^{-2} = 0.865$$

$$P(B < 200) = F_B(200) = 1 - e^{-\frac{1}{200}200} = 1 - e^{-1} = 0.632$$

O custo total do componente eletrônico será o custo unitário + custo adicional  $\times$  probabilidade de ocorrer o custo adicional:

$$C_A = 10 + 8 \times 0.865 = 16.917$$

$$C_B = 15 + 8 \times 0.632 = 20.057$$

A marca com melhor custo-benefício será aquela que custa menos por unidade de tempo:

$$C_A/h = 16.917/100 = 0.169 \text{ R\$ por hora}$$

$$C_B/h = 20.057/200 = 0.1 \text{ R\$ por hora}$$

Então a marca A é a mais barata e a marca B tem melhor custo-benefício, pois é 7 centavos por hora mais barata que a marca A.

### 3.

Seja  $X$  a duração de vida de uma válvula eletrônica e admita que  $X$  possa ser representada por uma variável aleatória contínua, com densidade  $f(x) = be^{-bx}, x \geq 0$ . Seja  $p_j = P(j \leq X < j+1)$ . Verifique que  $p_j$  é da forma  $(1-a)a^j$  e determine  $a$ .

Note que  $X$  é uma variável aleatória exponencial e sua distribuição acumulada é dada por:  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ .

$$\begin{aligned} P(j \leq X < j+1) &= P(X < j+1) - P(X \leq j) \\ &= F(j+1) - F(j) \\ &= 1 - e^{-b(j+1)} - (1 - e^{-bj}) \\ &= e^{-bj} - e^{-b(j+1)} \end{aligned}$$

Multiplique  $e^{-bj} - e^{-b(j+1)}$  por  $e^{bj}e^{-bj} = 1$ :

$$\begin{aligned} P(j \leq X < j+1) &= e^{-bj} - e^{-b(j+1)} \\ &= (e^{-bj} - e^{-b(j+1)})e^{bj}e^{-bj} \\ &= (1 - e^{-b})e^{-bj} \end{aligned}$$

Comparando  $(1 - e^{-b})e^{-bj}$  com  $(1-a)a^j$  vemos que  $a = e^{-b}$ :

**4.**

Suponha que o diâmetro  $X$  de um cabo elétrico é uma variável aleatória com f.d.p.  $f(x) = 6x(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

**a)**

Verifique que essa expressão é realmente uma densidade.

$$6x(1-x) \geq 0 \text{ para todo } 0 \leq x \leq 1$$
$$\int_0^1 6x(1-x)dx = \int_0^1 6x - 6x^2 dx = (3x^2 - 2x^3) \Big|_0^1 = 3 - 2 = 1$$

$f(x)$  é densidade.

**b)**

Obtenha uma expressão para a função de distribuição de  $X$ .

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 6t(1-t)dt = (3t^2 - 2t^3) \Big|_0^x = 3x^2 - 2x^3$$

**c)**

Calcule  $P(X \leq 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3)$ .

$$P(X \leq 1/2 \mid 1/3 < X < 2/3) = \frac{P([X \leq 1/2] \cap [1/3 < X < 2/3])}{P(1/3 < X < 2/3)} =$$

Fazendo a interseção desses dois conjuntos temos que  $[X \leq 1/2] \cap [1/3 < X < 2/3] = [1/3 < X \leq 1/2]$

$$\frac{P(1/3 < X \leq 1/2)}{P(1/3 < X < 2/3)} = \frac{F(1/2) - F(1/3)}{F(2/3) - F(1/3)} =$$
$$\frac{(3/4 - 1/4) - (1/3 - 2/27)}{(4/3 - 16/27) - (1/3 - 2/27)} = \frac{1/2 - 7/27}{20/27 - 7/27} = \frac{13/54}{13/27} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

## 5.

Seja a variável aleatória  $X$  com função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{4}[1 + \log(4/x)], & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Obtenha a densidade de  $X$ .

$f(x) = F'(x)$ , portanto, para  $x \leq 0$  e  $x > 4$ ,  $f(x) = 0$ . E para  $0 < x \leq 4$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= \frac{d}{dx} \frac{x}{4} [1 + \log(4/x)] \\ &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{4} + \frac{x}{4} \log(4/x) \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log(4/x) + \frac{x}{4} \left( \frac{1}{\frac{4}{x}} \right) \left( -\frac{4}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\log(4/x)}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{\log(4/x)}{4} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\log(4/x)}{4}, & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**6.**

Supondo que a expectativa de vida, em anos, seja uma variável aleatória com distribuição  $X \sim \text{Exp}(1/60)$ :

**a)**

Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de viver pelo menos até os 70 anos.

$$P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 70) = 1 - F(70) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{60}70}) = e^{-\frac{7}{6}} = 0.311$$

**b)**

Determine, para um indivíduo escolhido ao acaso, a probabilidade de morrer antes dos 70, sabendo-se que o indivíduo acabou de completar 50 anos.

Use a falta de memória da distribuição exponencial:  $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$

$$\begin{aligned} P(X < 70 | X \geq 50) &= 1 - P(X \geq 70 | X \geq 50) \\ &= 1 - P(X > 20) \\ &= P(X < 20) \\ &= F(20) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{60}20}) \\ &= e^{-\frac{1}{3}} \\ &= 0.717 \end{aligned}$$

c)

Calcule a idade mínima tal que a chance de um indivíduo continuar vivo após essa idade seja de 50%.

$$\begin{aligned}0.5 &= P(X > x) \\&= 1 - P(X < x) \\&= 1 - F(x) \\&= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{60}x}) \\&= e^{-\frac{x}{60}} \\ \log(0.5) &= -\frac{x}{60} \\ -60 \log(0.5) &= x \\ 60 \log(2) &= x \\ x &= 41.589\end{aligned}$$

Seguindo essa distribuição, apenas 50% dos indivíduos viverão após os 42 anos.

7.

Uma fábrica utiliza dois métodos para a produção de lâmpadas: 70% delas são produzidas pelo método A e o resto pelo método B. A duração em horas das lâmpadas tem distribuição exponencial com parâmetro  $1/80$  ou  $1/100$ , conforme se utilize o método A ou o B. Em um grupo de 10 lâmpadas selecionadas ao acaso, qual a probabilidade de que 6 delas durem pelo menos 90 horas?

Calcule a probabilidade de que cada tipo de lâmpada dure pelo menos 90 horas:

$$\begin{aligned}P(A \geq 90) &= 1 - P(A < 90) = 1 - F_A(90) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{80}90}) = e^{-\frac{9}{8}} \\ P(B \geq 90) &= 1 - P(B < 90) = 1 - F_B(90) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{100}90}) = e^{-\frac{9}{10}}\end{aligned}$$

Agora a probabilidade de que uma lâmpada selecionada ao acaso dure pelo menos 90 horas:

$$P(X \geq 90) = P(A)P(A \geq 90) + P(B)P(B \geq 90) = \frac{7}{10}e^{-\frac{9}{8}} + \frac{3}{10}e^{-\frac{9}{10}} = 0.349$$

E use a distribuição Binomial para obter a probabilidade de que entre 10 lâmpadas, 6 durem pelo menos 90 horas:

$$Y \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0.349), P(Y = 6) = \binom{10}{6} 0.349^6 0.651^4 = 0.068$$

**8.**

Sendo  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu > 0$ , avalie as probabilidades abaixo em função de  $\Phi(z)$  ou numericamente, se possível:

Lembre que  $P(X < a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ .

**a)**

$P(|X| < \mu)$ .

$$\begin{aligned} P(|X| < \mu) &= P(-\mu < X < \mu) \\ &= P(X < \mu) - P(X < -\mu) \\ &= P\left(Z < \frac{\mu - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{-\mu - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Z < 0) - P\left(Z < \frac{-2\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(0) - \Phi\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{-2\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

**b)**

$P(|X - \mu| > 0)$ .

Note que  $|X - \mu|$  é sempre positivo, então:

$$P(|X - \mu| > 0) = P(|X - \mu| \neq 0) = 1$$

**c)**

$P(X - \mu < -\sigma)$ .

$$P(X - \mu < -\sigma) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < -1\right) = P(Z < -1) = \Phi(-1)$$



**d)**

$$P(\sigma < |X - \mu| < 2\sigma).$$

$$P(\sigma < |X - \mu| < 2\sigma) = P\left(1 < \frac{|X - \mu|}{\sigma} < 2\right) = P\left(1 < \left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < 2\right) =$$

$$\begin{aligned} P(1 < |Z| < 2) &= P(|Z| < 2) - P(|Z| < 1) \\ &= P(-2 < Z < 2) - P(-1 < Z < 1) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -2) - (P(Z < 1) - P(Z < -1)) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) - \Phi(1) + \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) - \Phi(1) + (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(2) - 1 - 2\Phi(1) + 1 \\ &= 2(\Phi(2) - \Phi(1)) \end{aligned}$$

**9.**

Suponha que  $X$  seja uniformemente distribuída sobre  $[-\alpha, \alpha]$ , com  $\alpha > 0$ . Determine  $\alpha$  de modo que as seguintes relações sejam satisfeitas:

$$\text{Lembre que para } X \sim \text{Unif}(-\alpha, \alpha), F(x) = \frac{x - (-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{x + \alpha}{2\alpha}.$$

**a)**

$$P(X > 1) = 1/3.$$

$$1/3 = P(X > 1)$$

$$2/3 = P(X < 1)$$

$$2/3 = F(1)$$

$$2/3 = \frac{1 + \alpha}{2\alpha}$$

$$4\alpha = 3 + 3\alpha$$

$$\alpha = 3$$

**b)**

$$P(X > 1) = 1/2.$$

$$1/2 = P(X > 1)$$

$$1/2 = P(X < 1)$$

$$1/2 = F(1)$$

$$1/2 = \frac{1 + \alpha}{2\alpha}$$

$$2\alpha = 2 + 2\alpha$$

$$\alpha = 1 + \alpha$$

Não existe soluções para  $\alpha$ .

**c)**

$$P(|X| < 1) = P(|X| > 1).$$

$$P(|X| < 1) = P(-1 < X < 1)$$

$$= P(X < 1) - P(X < -1)$$

$$= F(1) - F(-1)$$

$$= \frac{1 + \alpha}{2\alpha} - \frac{-1 + \alpha}{2\alpha}$$

$$= \frac{2}{2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\alpha}$$

$$P(|X| > 1) = P(X > 1) + P(X < -1)$$

$$= 1 - P(X < 1) + P(X < -1)$$

$$= 1 - F(1) + F(-1)$$

$$= 1 - \frac{1 + \alpha}{2\alpha} + \frac{-1 + \alpha}{2\alpha}$$

$$= \frac{2\alpha - 2}{2\alpha}$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{2}{\alpha} = 1$$

$$\alpha = 2$$

## 10.

Uma fábrica de lâmpadas oferece uma garantia de troca se a duração da lâmpada for inferior à 60 horas. A duração das lâmpadas é uma variável aleatória contínua  $X$  exponencialmente distribuída com função de densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5000} e^{-\frac{1}{5000}x}, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine quantas lâmpadas são trocadas por conta da garantia para cada 1000 lâmpadas fabricadas.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{5000}), \quad F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}x}.$$

Primeiramente, a probabilidade da duração da lâmpada ser inferior à 60 horas:

$$P(X < 60) = F(60) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}60} = 1 - e^{-\frac{3}{250}} = 0.011928$$

E para 1000 lâmpadas, em média 11.928 delas podem ser trocadas pela garantia.

## 11.

Suponha que  $X$  tenha distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$ . Determine  $c$  como uma função de  $\mu$  e  $\sigma$  tal que  $P(X \leq c) = 2P(X > c)$ .

$$\begin{aligned} P(X \leq c) &= 2P(X > c) \\ P(X \leq c) &= 2 - 2P(X < c) \\ P(X \leq c) &= 2/3 \\ P\left(Z \leq \frac{c - \mu}{\sigma}\right) &= 2/3 \\ \Phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma}\right) &= 2/3 \\ \frac{c - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(2/3) \\ c &= \sigma\Phi^{-1}(2/3) + \mu \end{aligned}$$

## 12.

Verifique que se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $Y = aX + b$ , então,  $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .

Por função de variável aleatória:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = F'_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} =$$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - (a\mu + b)}{(a\sigma)}\right)^2\right\} dx$$

Portanto,  $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

---

Pela esperança e variância de  $Y$ :

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu \\ \text{Var}[X] &= \sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[aX + b] = aE[X] + b = a\mu + b \\ \text{Var}[Y] &= \text{Var}[aX + b] = a^2\text{Var}[X] = a^2\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &\sim N(\mu, \sigma^2) \\ Y &\sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2) \end{aligned}$$