Atividade 6

Função característica. Lei dos grandes números. Teorema central do limite.

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

12 de junho de 2023

1) Seja X variável aleatória com função característica φ_X. Definimos $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Mostre que a função característica de Y é dada por $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_y(t) &= \mathrm{E}\big(e^{itY}\big) \\
&= \mathrm{E}\big(e^{it(aX+b)}\big) \\
&= \mathrm{E}\big(e^{itaX}e^{itb}\big) \\
&= e^{itb}\mathrm{E}\big(e^{i(ta)X}\big) \\
&= e^{itb}\varphi_X(at)
\end{aligned}$$

---

3) Considere uma sequência de variáveis independentes tais que $X_n \sim \mathrm{Exp}(2^{n/2})$, $n \geqslant 1$. Verifique se vale a lei fraca dos grandes números.

Para valer a Lei fraca de Chebyshev precisamos que as V.A.s sejam independentes e uniformemente limitadas

$$\exists c \in \mathbb{R} \mid \mathrm{Var}(X_n) \leqslant c, \forall n \qquad \mathrm{Var}(X_n) = \frac{1}{2^{n/2}} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n}$$

A sequência $\big(\sqrt{2}\big)^{-n}$ é limitada, pois converge para 0. Então vale a Lei fraca dos grandes números.

2) Obtenha a função característica das seguintes distribuições.

a) $X \sim \text{Binomial}(n, p)$.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{itX}) \\ &= \sum_{x=1}^{n} e^{itx}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^{n} \binom{n}{x} (pe^{it})^x (1-p)^{n-x} \\ &= (pe^{it} + 1 - p)^n\end{aligned}$$

b) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{itX}) \\ &= \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} dx \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - it)} \int_0^\infty (\lambda - it) e^{-x(\lambda - it)} dx \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda - it)}\end{aligned}$$

c) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Seja $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \implies x = \sigma z + \mu$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{itX}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\sigma z + \mu)} \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz \\ &= \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-z^2}{2} + it\sigma z\right\} dz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{e^{it\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - it\sigma\right)^2 + \frac{(it\sigma)^2}{2}\right\} dz \\ &= \frac{e^{it\mu} e^{-t\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z - it\sigma\right)^2\right\} dz \\ &= \frac{e^{it\mu} e^{-t\frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du \\ &= \exp\left\{it\mu - t\frac{\sigma^2}{2}\right\}\end{aligned}$$

4) Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias independentes tais que

$$\mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2} \ \text{ e } \ \mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \ \text{ para todo } n.$$

Se $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, verifique que

$$\frac{S_n - H_n}{n} \xrightarrow{p} 0,$$

em que $H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ é o n-ésimo número harmônico.

Comparando com a Lei fraca dos grandes números: $\dfrac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p} 0$ vemos que para provar $\dfrac{S_n - H_n}{n} \xrightarrow{p} 0$, basta verificar que vale a Lei fraca e que $\mathrm{E}(S_n) = H_n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= 0\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n\frac{1}{n^2} = 1/n \\
\mathrm{E}(X_n^2) &= 0^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2\frac{1}{n^2} = 1 \\
\mathrm{Var}(X_n) &= 1 - \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(X_n)$ é limitado.

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = H_n$$

Portanto vale a Lei fraca dos grandes números e $\dfrac{S_n - H_n}{n} \xrightarrow{p} 0$.

5) Seja $(X_j)_{j\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias independentes tais que

$$\mathrm{P}\big(X_j = -\alpha^j\big) = \mathrm{P}\big(X_j = \alpha^j\big) = 1/2, \quad \text{para todo } j,$$

em que α é uma constante, $0 < \alpha < 1$. Prove que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(X_j\big) &= -\alpha^j \frac{1}{2} + \alpha^j \frac{1}{2} = 0 \\
\mathrm{E}\big(X_j^2\big) &= \alpha^{2j} \frac{1}{2} + \alpha^{2j} \frac{1}{2} = \alpha^{2j} \\
\mathrm{Var}\big(X_j\big) &= \alpha^{2j} \text{ (limitado).}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(S_n) = \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\big(X_j\big) = \sum_{j=1}^{n} 0 = 0$$

Então pela Lei fraca dos grandes números, $\dfrac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{n} = \dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{p} 0$.

6) Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Poisson(λ).

a) Sendo $\bar{X}_n$ a média amostral, verifique que $\sqrt{\dfrac{n}{\lambda}}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$.

b) Determine c tal que $\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \longrightarrow c$ quase certamente.

São V.A.s i.i.d., então pelo teorema central do limite, temos que

$$\frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mathrm{E}(X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)/n}} = \frac{\bar{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} = \sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\bar{X}_n - \lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$$

Seja a V.A. em questão X_j^2, Utilizando a segunda lei forte de Kolmogorov para V.A.s i.i.d. com esperanças finitas, e definindo $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$:

$$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \mu$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2 \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathrm{E}\big(X_j^2\big)$$

$$\mathrm{E}\big(X_j^2\big) = \mathrm{Var}\big(X_j\big) + \mathrm{E}\big(X_j\big)^2 = \lambda + \lambda^2$$

Então $c = \lambda + \lambda^2$.

7) Seja $(X_n)n \geqslant 1$ sequência de variáveis aleatórias i.i.d. seguindo o modelo Bernoulli com parâmetro $p = 0.4$. Use o TCL para determinar o valor aproximado de $\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j = 50\right)$.

Pelo TCL de Moivre-Laplace, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} &\sim \mathcal{N}(0,1) \\
\frac{S_n - 40}{\sqrt{24}} &\sim \mathcal{N}(0,1) \sim Z
\end{aligned}$$

Utilizando uma correção de continuidade:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{100} X_j = 50\right) &= \mathrm{P}\Big(50 - \frac{1}{2} \leqslant S_n \leqslant 50 + \frac{1}{2}\Big) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{50 - \frac{1}{2} - 40}{\sqrt{24}} \leqslant \frac{S_n - 40}{\sqrt{24}} \leqslant \frac{50 + \frac{1}{2} - 40}{\sqrt{24}}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{10 - \frac{1}{2}}{\sqrt{24}} \leqslant Z \leqslant \frac{10 + \frac{1}{2}}{\sqrt{24}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{10 + \frac{1}{2}}{\sqrt{24}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - \frac{1}{2}}{\sqrt{24}}\right) \\
&= 0.01019538
\end{aligned}$$

Enquanto o resultado exato pela distribuição binomial é 0.01033751.