

# Probabilidade II

## Lista 2b

**1.**

Seja  $X$  uma variável aleatória com valores não negativos. Mostre que

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x) dx$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - 0 \quad \text{pois a V.A. é positiva.} \\ &= \int_0^{\infty} 1 - P(X \leq x) dx \\ &= \int_0^{\infty} P(X > x) dx \end{aligned}$$

**2.**

A função de distribuição de X é dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -2; \\ \frac{1}{10}(x+2), & \text{se } -2 \leq x < 0; \\ \frac{1}{5} + \frac{x}{10} + \frac{3x^2}{250}, & \text{se } 0 \leq x < 5; \\ 1, & \text{se } x \geq 5. \end{cases}$$

**a)**

Calcule  $E[X]$  sem obter primeiro a densidade de X.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \\ &= \int_0^5 1 - \frac{1}{5} - \frac{x}{10} - \frac{3x^2}{250} dx - \int_{-2}^0 \frac{1}{10}(x+2) dx \\ &= \left( x - \frac{x}{5} - \frac{x^2}{20} - \frac{x^3}{250} \right) \Big|_0^5 - \left( \frac{x^2}{20} + \frac{x}{5} \right) \Big|_{-2}^0 \\ &= \left( 5 - 1 - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{1}{5} + \frac{2}{5} \right) \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{41}{20} \end{aligned}$$

**b)**

Obtenha  $E[X^2]$  via densidade de  $X$ .

Derivando  $F_X(x)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{10}(x+2) \right) &= \frac{1}{10} && \text{para } -2 \leq x < 0; \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{5} + \frac{x}{10} + \frac{3x^2}{250} \right) &= \frac{1}{10} + \frac{3x}{125}, && \text{para } 0 \leq x < 5; \\ &= 0 && \text{para } x < -2 \text{ e } x \geq 5.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 x^2 \frac{1}{10} dx + \int_0^5 x^2 \left( \frac{1}{10} + \frac{3x}{125} \right) dx \\ &= \left( \frac{x^3}{30} \right) \Big|_{-2}^0 + \left( \frac{x^3}{30} + \frac{3x^4}{500} \right) \Big|_0^5 \\ &= \left( 0 - \frac{-8}{30} \right) + \left( \frac{125}{30} + \frac{1875}{500} - 0 \right) \\ &= \frac{16}{60} + \frac{250}{60} + \frac{225}{60} \\ &= \frac{491}{60}\end{aligned}$$

### 3.

Suponha que a duração da vida (em horas) de uma certa válvula seja uma variável aleatória com densidade  $f(x) = 100/x^2$ , para  $x > 100$ , e zero caso contrário. Mostre que  $E[X]$  não existe para a variável aleatória  $X$ .

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{100}^{\infty} x \frac{100}{x^2} dx = 100 \int_{100}^{\infty} \frac{1}{x} dx \\ &= 100 \ln(x) \Big|_{100}^{\infty} \\ &= 100 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) - \ln(100) \right) \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

O limite da esperança de  $X$  diverge para o infinito, portanto  $E[X]$  não existe.

### 4.

Para quaisquer constantes  $a$  e  $b$ , mostre que se  $P(a \leq X \leq b) = 1$ , então,  $a \leq E[X] \leq b$ .

Defina as variáveis aleatórias  $A$  e  $B$  em que  $A$  e  $B$  só assumem os valores  $a$  e  $b$  com probabilidade 1.

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) = 1 &\implies P(A \leq X \leq B) = 1 \\ &\implies A \leq X \leq B \\ &\implies E[A] \leq E[X] \leq E[B] && \text{pela linearidade da esperança} \\ &\implies a \leq E[X] \leq b \end{aligned}$$

**5.**

A função de distribuição da variável aleatória  $X$  é dada seguir. Obtenha  $E[X]$ .

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x/4, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1/2, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x) dx - 0 \quad \text{pois } F_X(x) = 0 \text{ para } x < 0 \\ &= \int_0^1 \frac{x}{4} dx + \int_1^2 \frac{1}{2} dx \\ &= \left( \frac{x^2}{8} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x}{2} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{8} - 0 + 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

**6.**

Suponha que a variável aleatória  $X$  admita densidade  $f(x) = 2xe^{-x^2}, x \geq 0$ . Seja  $Y = X^2$ . Calcule  $E[Y]$ :

**a)**

Diretamente, sem primeiro obter a densidade de  $Y$ .

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x 2te^{-t^2} dt & u &= t^2 \\ & & du &= 2t dt \\ &= \int_0^{x^2} e^{-u} du & t \rightarrow 0 &\implies u \rightarrow 0 \\ & & t \rightarrow x &\implies u \rightarrow x^2 \\ &= (-e^{-u}) \Big|_0^{x^2} \\ &= -e^{-x^2} + e^{-0} \\ &= 1 - e^{-x^2} & \text{para } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(\sqrt{X^2} \leq \sqrt{y}) = P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - 0 & \text{pois } F_X(x) = 0 \text{ para } x < 0 \\ &= 1 - e^{-\sqrt{y}^2} \\ &= 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

Vemos que a função de distribuição acumulada de  $Y$  é a mesma de uma variável aleatória Exponencial de parâmetro  $\lambda = 1$ , portanto sua esperança é  $\frac{1}{\lambda} = 1$ .

**b)**

Primeiramente obtendo a densidade de Y.

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= 1 - e^{-y} \\f_Y(y) &= \frac{d}{dy}(1 - e^{-y}) \\&= e^{-y} \quad \text{para } y \geq 0\end{aligned}$$

Integração por partes para achar  $E[Y]$ :

$$\begin{aligned}E[Y] &= \int_0^{\infty} ye^{-y} dy \\&= (-ye^{-y}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-y} dy \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} -ne^{-n} + (e^{-y}) \Big|_0^{\infty} \\&= 0 - \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} + e^{-0} \\&= 1\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}u &= y \\du &= dy \\dv &= e^{-y} dy \\v &= -e^{-y}\end{aligned}$$