Atividade 6

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

26 de outubro de 2023

1) Seja π uma distribuição estacionária de uma cadeia de Markov. Mostre que se $\pi(x) > 0$ e $x \to y$, então $\pi(y) > 0$.

Pela questão 5 da atividade 3 temos que $\rho_{xy} > 0 \iff \mathrm{P}^n(x, y) > 0$ para algum n, então:

$$x \to y \implies \rho_{xy} > 0 \implies \mathrm{P}^n(x, y) > 0 \text{ para algum } n$$

π sendo distribuição estacionária então satisfaz a seguinte soma para todo k:

$$\sum_{z \in \mathcal{S}} \pi(z) \mathrm{P}^k(z, y) = \pi(y)$$

Escolhendo apenas o termo da soma em que $z = x$ e $k = n$ tal que $\mathrm{P}^n(x, y) > 0$ temos a desigualdade:

$$\pi(x) \mathrm{P}^n(x, y) \leqslant \pi(y)$$

Porém $\pi(x) > 0$ e $\mathrm{P}^n(x, y) > 0$, então $\pi(y) > 0$.

2) Considere uma cadeia de Markov redutível, em que C_0 e C_1 são dois subconjuntos de $\mathcal{S}$ irredutíveis disjuntos de recorrência positiva. Se π_0 e π_1 são as distribuições estacionárias concentradas em C_0 e C_1, respectivamente, mostre que $\pi_\alpha = (1 - \alpha)\pi_0 + \alpha\pi_1$, $0 < \alpha < 1$, é também uma distribuição estacionária da cadeia.

Para π ser distribuição estacionária temos que $\pi \mathbf{P} = \pi$, então:

$$\pi_\alpha \mathbf{P} = ((1 - \alpha)\pi_0 + \alpha\pi_1)\mathbf{P} = (1 - \alpha)\pi_0 \mathbf{P} + \alpha\pi_1 \mathbf{P} = (1 - \alpha)\pi_0 + \alpha\pi_1 = \pi_\alpha$$

$\pi_\alpha \mathbf{P} = \pi_\alpha$ então π_α é distribuição estacionária.

3) Seja X_n, $n \geqslant 0$, uma cadeia de nascimento e morte irredutível de recorrência positiva, e suponha que X_0 tem a distribuição estacionária π. Mostre que

$$\mathrm{P}(X_0 = y \mid X_1 = x) = \mathrm{P}(x, y)\,,\ x, y \in \mathcal{S}.$$

$$\mathrm{P}(X_0 = y \mid X_1 = x) = \frac{\mathrm{P}(X_0 = y, X_1 = x)}{\mathrm{P}(X_1 = x)} = \frac{\mathrm{P}(X_0 = y)\,\mathrm{P}(X_0 = y, X_1 = x)}{\mathrm{P}(X_0 = y)\,\mathrm{P}(X_1 = x)} =$$

$$\frac{\mathrm{P}(X_0 = 0)\,\mathrm{P}(X_1 = x \mid X_0 = y)}{\mathrm{P}(X_1 = x)} = \frac{\pi_0(y)}{\pi_1(x)}\mathrm{P}(y, x) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}\mathrm{P}(y, x) = \frac{\pi_y}{\pi_x}\mathrm{P}(y, x)$$

Seja $y = x$:

$$\frac{\pi_y}{\pi_x}\mathrm{P}(y, x) = \mathrm{P}(x, x) = \mathrm{P}(x, y)$$

Seja $y = x + 1$:

$$\frac{\pi_y}{\pi_x}\mathrm{P}(y, x) = \frac{\pi_{x+1}}{\pi_x}\mathrm{P}(x + 1, x) = \frac{p_x}{q_{x+1}}q_{x+1} = p_x = \mathrm{P}(x, x + 1) = \mathrm{P}(x, y)$$

Seja $y = x - 1$:

$$\frac{\pi_y}{\pi_x}\mathrm{P}(y, x) = \frac{\pi_{x-1}}{\pi_x}\mathrm{P}(x - 1, x) = \frac{q_x}{p_{x-1}}p_{x-1} = q_x = \mathrm{P}(x, x - 1) = \mathrm{P}(x, y)$$

Em todos os possíveis casos de uma cadeia de nascimento e morte (permanecer, aumentar ou diminuir em 1) temos que a propriedade $\mathrm{P}(X_0 = y \mid X_1 = x) = \mathrm{P}(x, y)$ vale.

4) Considere uma cadeia de Markov sobre $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ com matriz de transição P.
a) Mostre que a cadeia é irredutível;
b) Ache o período;
c) Ache a distribuição estacionária.

$x \to y, \forall x, y \in \mathcal{S}$, então a cadeia é irredutível.

Analisando o estado 0, a probabilidade $\mathrm{P}^m(0,0)$ é positiva para $m = 2$ pelo caminho $0 \to 2 \to 0$ e $m = 3$ pelo caminho $0 \to 2 \to 1 \to 0$.

Então $I_0 = \{n \geqslant 1 | \mathrm{P}^n(0,0) > 0\} = \{2, 3, \cdots\}$. Sendo assim, o M.D.C de I_0 é 1, o período de 0, mas já que a cadeia é irredutível, todos os estados tem o mesmo período, portanto a cadeia tem período 1.

$$\pi \mathbf{P} = \pi \implies \begin{cases} b + c/2 = a \\ c/2 = b \\ a = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 2b = a = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \implies \pi = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

5) Considere uma cadeia de Markov sobre $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com matriz de transição P.
a) Mostre que a cadeia é irredutível;
b) Ache o período;
c) Ache a distribuição estacionária.

Começando de qualquer estado, visitará todos os próximos, sendo assim irredutível pois a cadeia segue um padrão:

$$0 \to (1 \text{ ou } 2) \to (3 \text{ ou } 4) \to 0 \to \cdots$$

Analisando o estado 0, a probabilidade $\mathrm{P}^m(0,0)$ é positiva apenas para m múltiplos de 3, dessa forma, a cadeia tem período 3.

$$\pi \mathbf{P} = \pi \implies \begin{cases} d + e = a \\ a/3 = b \\ 2a/3 = c \\ b/4 + c/4 = d \\ 3b/4 + 3c/4 = e \\ a + b + c + d + e = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} b + c = a \\ d + e = a \\ b = a/3 \\ c = 2a/3 \\ d = a/4 \\ e = 3a/4 \\ a + b + c + d + e = 1 \end{cases} \implies \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$$

6) Considere uma cadeia de Markov sobre $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com matriz de transição dada por P.
a) Obtenha a decomposição do espaço de estados.
b) Obtenha a distribuição estacionária concentrada em cada um dos conjuntos irredutíveis.
c) Calcule $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}^m(x, y)\,, \quad x, y \in \mathcal{S}$.
d) Qual é o período de cada um dos conjuntos irredutíveis?

$$\mathcal{S}_{\mathsf{T}} = 3, \quad \mathcal{S}_{\mathsf{R}} = C_1 \cup C_2 = \{0, 1, 2\} \cup \{4, 5, 6\}$$

$$\pi_{C_1}\mathbf{P} = \pi_{C_1} \implies \begin{cases} c = a \\ a = b \\ b = c \\ a + b + c = 1 \\ d, e, f, g = 0 \end{cases} \implies \pi_{C_1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0\right)$$

$$\pi_{C_2}\mathbf{P} = \pi_{C_2} \implies \begin{cases} f/2 + g/2 = e \\ e/2 + f/4 + g/2 = f \\ e/2 + f/4 = g \\ e + f + g = 1 \\ a, b, c, d = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2e = f + g \\ e + f + g = 1 \\ a, b, c, d = 0 \end{cases} \implies \pi_{C_2} = \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

$$f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{P}^m(x, y) = \begin{cases} 0, & y \in \mathcal{S}_{\mathsf{T}} \\ \dfrac{\rho_{xy}}{m_y}, & y \in \mathcal{S}_{\mathsf{R}} \end{cases}$$

Para C_1 temos que $\dfrac{1}{m_y} = \pi_{C_1}(y) = \dfrac{1}{3}$ para $y = 0, 1, 2$. E $\rho_{xy} = 1$ para $x, y \in C_1$ e 0 caso contrário.

$$f(x, 0) = f(x, 1) = f(x, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0\right)$$

Para C_2 temos que $\dfrac{1}{m_y} = \pi_{C_1}(y)$ então $m_4 = 5$ e $m_5 = m_6 = 5/2$. E $\rho_{xy} = 1$ para $x, y \in C_2$ e 0 caso contrário.

$$f(x, 4) = f(x, 5) = f(x, 6) = \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Para o estado 3, $\rho_{3y} = 1/2$ para $y = 0, 1, 2, 4, 5, 6$.

$$f(x,3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

Para C_1: o período é 3 pois segue a ordem $0 \to 1 \to 2 \to 0 \to \cdots$.

Para C_2: $\mathrm{P}^m(4,4) > 0$ para $m = 2$ pelo caminho $4 \to 5 \to 4$ e $m = 3$ pelo caminho $4 \to 5 \to 5 \to 4$, I_0 contém pelo menos 2 e 3, então seu M.D.C. e período é 1.

7) Considere a cadeia de Ehrenfest, com $d = 3$. Determine o comportamento assintótico da matriz P^n para os casos em que n é par ou impar. Verifique numericamente o resultado usando o R.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $P = P^3$, por indução $P^{\text{impar}} = P$ e $P^{\text{par}} = P^2$ pois:

$$P^{2n+1} = P^{2n-2}P^3 = P^{2n-2}P = P^{2n-1}$$

$$P^{2n} = P^{2n-3}P^3 = P^{2n-3}P = P^{2n-2}$$

```r
matrixpow <- function(M, n) {
    M |>
        replicate(n = n, simplify = FALSE) |>
        Reduce(f = `%*%`)
}

P <- rbind(
    c(  0, 1,   0),
    c(1/2, 0, 1/2),
    c(  0, 1,   0)
)

matrixpow(P, 1000)
matrixpow(P, 1001)
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.5    0  0.5
[2,]  0.0    1  0.0
[3,]  0.5    0  0.5
```

```
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  0.0    1  0.0
[2,]  0.5    0  0.5
[3,]  0.0    1  0.0
```

8) Considere a cadeia de Ehrenfest modificada, com $d = 3$.
a) Usando o `R`, verifique que a distribuição estacionária é também a distribuição limite da cadeia.
b) Usando o método de Monte Carlo, implemente um script no `R` para verificar numericamente que a distribuição limite pode ser vista como a proporção esperada de vezes que a cadeia visita cada estado para n grande.

Como visto em sala, a matriz de transição e distribuição estacionária são as seguintes:

```
P <- rbind(
    c(1/2, 1/2,   0,   0),
    c(1/6, 1/2, 1/3,   0),
    c(  0, 1/3, 1/2, 1/6),
    c(  0,   0, 1/2, 1/2)
)
rownames(P) <- colnames(P) <- 0:3

estacionária <- c(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)
estacionária
## [1] 0.125 0.375 0.375 0.125

limite <- matrixpow(P, 1000)[1, ]
limite
##     0     1     2     3
## 0.125 0.375 0.375 0.125
```

```
proporções <- function(n, transição) {
    X <- "1"
    for(i in 2:n) {
        j <- X[i - 1]
        p <- transição[j, ]
        X[i] <- sample(names(p), size = 1, prob = p)
    } # simula a cadeia n passos
    table(X) / n # calcula as proporções de visita aos estados
}

proporções(1000, P) |>     # simular até 1000
    replicate(n = 1000) |> # 1000 réplicas dessa simulação
    apply(1, mean)         # média das proporções em todas as réplicas
##        0        1        2        3
## 0.123827 0.376545 0.374621 0.125007
```