UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Introdução à Álgebra Linear
Primeira Prova
Paulo Ricardo Seganfredo Campana - 20210044220

Questão 1.

1.) Subespaço vetorial é um subconjunto não vazio de um Espaço vetorial tal que a soma de dois vetores desse subespaço e que a multiplicação de um vetor por um escalar também estará contido no subespaço.
$u + v \in W, \forall u, v \in W$
$\alpha u \in W, \forall u \in W, \alpha \in \mathbb{R}^3$

2.) Sim, pois não é vazio e:
$(x, 0, 0) + (y, 0, 0) = (x + y, 0, 0)$ que $\in W$
$\alpha(x, 0, 0) = (\alpha x, 0, 0)$ que $\in W$

3.) Não, pois na multiplicação por um escalar $\alpha$ não inteiro, a matriz deixa de seguir a regra imposta deste subespaço.

4.) Sim, pois não e vazio e:
$(0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) =$
$(0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3)$ que $\in W$
$\alpha(0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 + \alpha a_3x^3)$ que $\in W$

Questão 2.

$W = [(1, 2, 3)(1, -1, 1)] = (x + y, 2x - y, 3x + y)$
$U = (x, y, 0)$
$$\begin{cases} x + y = x \\ 2x - y = y \implies x = y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$
$U \cap W = (0, 0, 0)$

Questão 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+4b+3c=1 \\ -a+b-2c=-5 \\ -a+b-2c=-5 \\ 2a+c=5 \end{cases}$$
Escalonando...
$a=2, \quad b=-1, \quad c=1$
$$[\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 4.
1.)
$U=(x,y,z,2z-y)$
$\beta_U=[(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2)]$
$W=(x,2z,z,x)$
$\beta_W=[(1,0,0,1),(0,2,1,0)]$
$$U\cap W=\begin{cases} x=t \\ y=2z \\ t=2y \end{cases}$$
$t=2z-2z \Longrightarrow t=0 \Longrightarrow x=0$
$U\cap W=(0,2z,z,0)$
$\beta_{U\cap W}=(0,2,1,0)$
2.)
$U+W=[(1,0,0,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,2),(1,0,0,1),(0,2,1,0)]$
$(0,2,1,0)$ pode ser escrito como $2(0,1,0-1)+(0,0,1,2)$ então sera eliminado.
$$\begin{cases} x=0 \\ y-t=0 \\ z+2t=0 \\ x+t=0 \end{cases} \Longrightarrow x=0, \quad t=0, \quad y=0, \quad z=0$$
São vetores LI e formam a base de $U+W$, portanto geram $U+W$ e formam soma direta de $\mathbb{R}^4$

Questão 5.
1.)$\beta$ é uma base de um Espaço se $\beta$ é LI e $\beta$ gera o Espaço em questão.
2.) Sim, são LI:
$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+2z=0 \Longrightarrow z=-y \\ y+z=0 \end{cases}$$

$y - 2y = 0, \quad y = 0$
$x + 0 = 0, \quad x = 0$
$z = -y, \quad z = 0$
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \quad \Longrightarrow z = -x \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$
$x + y - 2x = 0 \Longrightarrow y - x = 0, \Longrightarrow x = y$
$x + 2x - 4x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

e geram $\mathbb{R}^3$:
$(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(0, 1, 2) + c(0, 1, 1)$
$(x, y, z) = (a, a + b + c, 2b + c)$

$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(1, 1, 2) + c(1, 2, 4)$
$(x, y, z) = (a + b + c, b + 2c, a + 2b + 4c)$

3.)
a)
$$\begin{cases} a = -1 \\ a + b + c = 2 \Longrightarrow a = -1 \\ 2b + c = -5 \end{cases}$$
$b + c - 1 = 2 \Longrightarrow b + c = 3$
$2b + c = -5 \Longrightarrow -2b - c = 5$
$-b = 8 \Longrightarrow b = -8$
$-16 + c = -5 \Longrightarrow c = 11$
$[(-1, 2, -5)]_\alpha = (-1, -8, 11)$

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \\ b + 2c = 2 \\ a + 2b + 4c = -5 \end{cases}$$
$-a - b - c = 1, \quad + \quad a + 2b + 4c = -5 \Longrightarrow b + 3c = -4$
$b + 3c = -4, \quad + \quad -b - 2c = -2 \Longleftarrow c = -6$
$b - 18 = -4, \Longrightarrow b = 14$
$a + 14 - 6 = 1, \Longleftarrow a = -7$
$[(-1, 2, -5)]_\beta = (-7, 14, -6)$

b)
c) Sim, pois $[[I]^\beta_\alpha]^\alpha_\beta = [I]$

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ b+2c = 1 \\ a+2b+4c = 0 \end{cases}$$

$-a-b-c=-1$
$a+2b+4c=0$
$b+3c=-1$
$-b-2c=-1$
$c=-2$

$b-4=1$
$b=5$
$a+5-2=1$
$a=-2$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+2c = 1 \\ a+2b+4c = 2 \end{cases}$$

$-a-b-c=0$
$a+2b+4c=2$
$b+3c=2$
$-b-2c=-1$
$c=1$

$b+2=1$
$b=-1$
$a-1+1=0$
$a=0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+2c = 1 \\ a+2b+4c = 1 \end{cases}$$

$-a-b-c=0$
$a+2b+4c=1$
$b+3c=1$
$-b-2c=-1$
$c=0$

$b+0=1$
$b=1$
$a+1+0=0$
$a=-1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

credeal

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$$

$1 + 2 + c = 0$

$c = -3$

$a = 1$

$b + c = -1$

$-2b - c = -1$

$-b = -2$

$b = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 1 \\ 2b + c = 2 \end{cases}$$

$1 + 3 + c = 1$

$c = -3$

$a = 1$

$b + c = -1$

$-2b - c = -2$

$-b = -3$

$b = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 2b + c = 4 \end{cases}$$

$1 + 5 + c = 2$

$c = -4$

$a = 1$

$b + c = -1$

$-2b - c = -4$

$-b = -5$

$b = 5$

$$[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$