Segunda prova

Probabilidade IV

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

5 de junho de 2023

1)

Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \sim \text{Bernoulli}(p_n)$, em que $p_n = \frac{1}{2^n}$, para todo n. Mostre que $X_n \xrightarrow{p} 0$ (Dica: use a desigualdade básica de Chebyshev).

$$\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant k) \leqslant \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(X)$$

Note que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}(X_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2^n}\right| \geqslant k\right) &\leqslant \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(X_n) \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|X_n - \frac{1}{2^n}\right| \geqslant k\right) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}(X_n) \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| \geqslant k) &\leqslant 0 \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) &= 0
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0$, portanto $X_n \xrightarrow{p} 0$.

2)

Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição $\mathcal{U}(0,b)$. Sejam $(V_n)_{n\geqslant 1}$ e $(W_n)_{n\geqslant 1}$ sequências de variáveis aleatórias definidas por $V_n = \min(X_1,\dots,X_n)$ e $W_n = \max(X_1,\dots,X_n)$, para todo n. Mostre que $V_n \xrightarrow{p} 0$ e $W_n \xrightarrow{p} b$.

$F_X(x) = \dfrac{x}{b}$ para $x \in [0,b]$ por X ter distribuição uniforme.

X_n, V_n e W_n tem suporte $[0,b]$, são V.A.s positivas.

$$F_{V_n}(v) = 1-(1-F_X(v))^n = 1-\left(1-\frac{v}{b}\right)^n \qquad F_{W_n}(w) = (F_X(w))^n = \left(\frac{w}{b}\right)^n$$

Seja $\varepsilon \in (0,b)$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(|V_n-0|>\varepsilon)\\&=\mathrm{P}(V_n>\varepsilon)\\&=1-F_{V_n}(\varepsilon)\\&=\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(|W_n-b|>\varepsilon)\\&=\underbrace{\mathrm{P}(W_n>b+\varepsilon)}_{b+\varepsilon\text{ fora do suporte}}+\mathrm{P}(W_n<b-\varepsilon)\\&=F_{W_n}(b-\varepsilon)\\&=\left(\frac{b-\varepsilon}{b}\right)^n\\&=\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\end{aligned}$$

$\varepsilon \in (0,b) \implies \dfrac{\varepsilon}{b} \in (0,1) \implies \left(1-\dfrac{\varepsilon}{b}\right) \in (0,1)$, então:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(|V_n-0|>\varepsilon)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(|W_n-b|>\varepsilon)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\varepsilon}{b}\right)^n\\&=0\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}(|V_n-0|>\varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}(|W_n-b|>\varepsilon) = 0$, portanto $V_n \xrightarrow{p} 0$ e $W_n \xrightarrow{p} b$.

3)

Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência tal que $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ e $\mathrm{P}(X_n = n^2) = \dfrac{1}{n^2}$. Mostre que, para $r \geqslant 1$, X_n não converge na r-ésima média para zero.

X_n tem suporte $\{0,1\}, \{0,4\}, \{0,9\}, ...,$ são V.A.s positivas.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|X_n - 0|^r) \\
&= \mathrm{E}(X_n^r) \\
&= 0^r \cdot \mathrm{P}(X_n = 0) + (n^2)^r \cdot \mathrm{P}(X_n = n^2) \\
&= n^{2r}\frac{1}{n^2} \\
&= n^{2r-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&X_n \xrightarrow{r} 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n - 0|^r) = 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} n^{2r-2} = 0 \\
&\iff 2r - 2 < 0 \\
&\iff r < 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{r} 0 &\iff r < 1 \\
X_n \overset{r}{\nrightarrow} 0 &\iff r \geqslant 1
\end{aligned}
$$

Ou seja, para $r \geqslant 1$, X_n não converge em r-ésima média

4)

Seja $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $\mathrm{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, para todo n. Mostre que $X_n \xrightarrow{p} 0$, mas X_n não converge quase certamente para zero. É certo que $X_n \xrightarrow{D} 0$?

X_n tem suporte $\{0,1\}$, então $[|X_n| > \varepsilon] = [X_n = 1]$, para $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n = 1)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n = 1)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow \infty\\ &\Longrightarrow \mathrm{P}(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 1\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0 \implies X_n \xrightarrow{p} 0$$

$$\mathrm{P}(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) \neq 0 \implies X_n \overset{\text{q.c.}}{\nrightarrow} 0$$

X_n converge para 0 em probabilidade mas não quase certamente.

X_n também converge em distribuição, pois convergência em probabilidade implica em convergência em distribuição.