Atividade 2

Cadeias de Markov

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

25 de julho de 2023

1) Considere o exemplo da cadeia de Markov com dois estados. Se $X_n, n \geqslant 0$, é tal cadeia, calcule
a) $\mathrm{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 0, X_2 = 0)$.

$$\mathrm{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 0, X_2 = 0) = \frac{\mathrm{P}(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 0)}{\mathrm{P}(X_0 = 0, X_2 = 0)} =$$

$$\frac{\pi_0(0)\mathrm{P}(0,0)\,\mathrm{P}(0,0)}{\pi_0(0)\mathrm{P}(0,0)\,\mathrm{P}(0,0) + \pi_0(0) + \mathrm{P}(0,1)\,\mathrm{P}(1,0)} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2 + pq}$$

b) $\mathrm{P}(X_1 \neq X_2)$.

$$\mathrm{P}(X_1 \neq X_2) = \mathrm{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) =$$

$$\pi_1(0)\mathrm{P}(0,1) + \pi_1(1)\mathrm{P}(1,0) = \pi_1(0)(p-q) + q =$$

$$((1-p-q)\pi_0(0) + q)(p-q) + q$$

2) Seja $X_n, n \geqslant 0$, uma cadeia de Markov com função de transição P.
a) Mostre que se π_n denota a distribuição da variável aleatória X_n, então, para $m \geqslant 1$, temos que
$\mathrm{P}(X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \cdots, X_{n+m} = x_{n+m}) = \pi_n(x_n)\mathrm{P}(x_n, x_{n+1}) \cdots \mathrm{P}(x_{n+m-1}, x_{n+m})$.

Seja a notação $[X_0 = x_0, \cdots, X_j = x_j] \implies [X = x]_{0,\cdots,j}$

$$\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m}\big) =$$
$$\mathrm{P}\big(X_{n+m} = x_{n+m}, [X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big) =$$
$$\mathrm{P}\big(X_{n+m} = x_{n+m} \mid [X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big)\,\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big) =$$
$$\mathrm{P}\big(X_{n+m} = x_{n+m} \mid X_{n+m-1} = x_{n+m-1}\big)\,\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big) =$$
$$\mathrm{P}\big(x_{n+m-1}, x_{n+m}\big)\,\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big)$$

Aplicando m vezes a relação

$$\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m}\big) = \mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n+m-1}\big)\,\mathrm{P}\big(x_{n+m-1}, x_{n+m}\big)$$

Temos que:

$$\mathrm{P}\big([X = x]_{n,\cdots,n}\big)\,\mathrm{P}\big(x_n, x_{n+1}\big) \cdots \mathrm{P}\big(x_{n+m-1}, x_{n+m}\big) =$$
$$\pi_n(x_n)\mathrm{P}\big(x_n, x_{n+1}\big) \cdots \mathrm{P}\big(x_{n+m-1}, x_{n+m}\big)$$

b) Use a parte a) para mostrar que
$\mathrm{P}(X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \mathrm{P}(X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2)$.

$$\mathrm{P}\big(X_1 = x_1 \mid [X = x]_{2,\cdots,n}\big) = \frac{\mathrm{P}\big([X = x]_{1,\cdots,n}\big)}{\mathrm{P}\big([X = x]_{2,\cdots,n}\big)} =$$
$$\frac{\pi_1(x_1)\mathrm{P}(x_1, x_2)\,\mathrm{P}(x_2, x_3) \cdots \mathrm{P}(x_{n-1}, x_n)}{\pi_2(x_2)\mathrm{P}(x_2, x_3) \cdots \mathrm{P}(x_{n-1}, x_n)} = \frac{\pi_1(x_1)\mathrm{P}(x_1, x_2)}{\pi_2(x_2)} =$$
$$\frac{\mathrm{P}(X_1 = x_1)\,\mathrm{P}(X_2 = x_2 \mid X_1 = x_1)}{\mathrm{P}(X_2 = x_2)} = \frac{\mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\mathrm{P}(X_2 = x_2)} = \mathrm{P}(X_1 = x_1 \mid X_2 = x_2)$$

3) Seja $X_n, n \geqslant 0$, uma cadeia de Markov sobre o espaço de estados $\mathcal{S}$. Para $y \in \mathcal{S}$ fixo, expresse $\mathrm{P}(X_1 = y)$ em termos da distribuição inicial $\pi_0(x) = \mathrm{P}(X_0 = x)$ e a função de transição $\mathrm{P}(x, y) = \mathrm{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)$.

$$\mathrm{P}(X_1 = y) = \mathrm{P}([X_1 = y] \cap \Omega) = \mathrm{P}\left([X_1 = y] \cap \bigcup_{x \in \mathcal{S}} [X_0 = x]\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{x \in \mathcal{S}} [X_1 = y \cap X_0 = x]\right) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathrm{P}([X_1 = y \cap X_0 = x]) =$$

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \mathrm{P}(X_1 = y \mid X_0 = x)\, \mathrm{P}(X_0 = x) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) \mathrm{P}(x, y)$$

4) Considere a cadeia de Markov de dois estados, com $p = 1/2$ e $q = 1/3$. Suponha que $X_0 \sim \mathrm{Bernoulli}(3/5)$, em que $\mathrm{P}(X_0 = 1) = 3/5$. Use o resultado do exercício 3 para obter a distribuição de X_1. Veja se a sua resposta é coerente com o visto na aula.

$$\mathrm{P}(X_1 = y) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_0(x) \mathrm{P}(x, y) = \pi_0(0) \mathrm{P}(0, y) + \pi_0(1) \mathrm{P}(1, y) =$$

$$\frac{2}{5} \begin{cases} 1/2, & \text{se } y = 0 \\ 1/2, & \text{se } y = 1 \end{cases} + \frac{3}{5} \begin{cases} 1/3, & \text{se } y = 0 \\ 2/3, & \text{se } y = 1 \end{cases} = \begin{cases} 2/5, & \text{se } y = 0 \\ 3/5, & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

Conferindo com o resultado $\mathrm{P}(X_1 = 0) = (1 - p - q)\pi_0(0) + q$.

$$\mathrm{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{6}\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$$

5) Suponha que temos duas caixas (A e B) e $2d$ bolas, das quais d bolas são pretas e as outras d são vermelhas. Inicialmente, d bolas são colocadas na caixa A, e as restantes são colocadas na caixa B. Em cada ensaio duas bolas são selecionadas ao acaso, uma da caixa A e a outra da caixa B, e as bolas selecionadas são colocadas nas caixas opostas. Seja X_0 a variável aleatória que representa o número de bolas pretas inicialmente na caixa A, e seja $X_n, n \geqslant 1$, a variável aleatória que representa o número de bolas pretas na caixa A depois do n-ésimo ensaio. Achar a função de transição da cadeia de Markov $X_n, n \geqslant 0$.

- Seja A_p, A_v, B_p, B_v as quantidades de bolas de certa cor em certa caixa.
- A quantidade total de bolas numa caixa e de bolas de uma cor é constante.
  - $A_p + A_v = d$
  - $B_p + B_v = d$
  - $A_p + B_p = d$
  - $A_v + B_v = d$
- A_p é a variável de interesse, $A_p = X_n$.
- A cada etapa, A_p só pode aumentar em 1, diminuir em 1 ou permanecer o mesma.
  - Aumentar: se é escolhido bola vermelha de A e uma preta de B.
  - Diminuir: se é escolhido bola preta de A e bola vermelha de B.
  - Permanecer: se é escolhido bolas de cores iguais de A e B.
- Os eventos de escolha são independentes.

$$\mathrm{P}(\text{Aumentar}) = \mathrm{P}(A_v)\,\mathrm{P}(B_p) =$$

$$\frac{A_v}{A_v + A_p}\frac{B_p}{B_v + B_p} = \frac{d - A_p}{d}\frac{d - A_p}{d} = \left(\frac{d - A_p}{d}\right)^2 = \left(1 - \frac{X_n}{d}\right)^2$$

$$\mathrm{P}(\text{Diminuir}) = \mathrm{P}(A_p)\,\mathrm{P}(B_v) =$$

$$\frac{A_p}{A_v + A_p}\frac{B_v}{B_v + B_p} = \frac{A_p}{d}\frac{d - A_v}{d} = \left(\frac{A_p}{d}\right)^2 = \left(\frac{X_n}{d}\right)^2$$

$$\mathrm{P}(\text{permanecer}) = 1 - \mathrm{P}(\text{Aumentar}) - \mathrm{P}(\text{Diminuir}) =$$

$$1 - \left(1 - \frac{X_n}{d}\right)^2 - \left(\frac{X_n}{d}\right)^2 = \frac{2X_n}{d}\left(1 - \frac{X_n}{d}\right)$$

$$\mathrm{P}(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{d}\right)^2 & , \text{ se } y = x + 1 \\ \left(\frac{x}{d}\right)^2 & , \text{ se } y = x - 1 \\ \frac{2x}{d}\left(1 - \frac{x}{d}\right) & , \text{ se } y = x \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

6) Considere a *fila modificada* em que, se há clientes na fila aguardando para serem atendidos no início de cada período, tem-se uma probabilidade p de que um cliente seja atendido nesse período e probabilidade $1-p$ de que ninguém seja atendido naquele período. Obtenha a função de transição para essa cadeia de Markov.

Seja X_n uma fila comum e Y_n uma fila em que os clientes nunca são atendidos, elas tem função de transição:

$$\mathrm{P}(x,y)_X = \begin{cases} f(y) & \text{, se } x = 0 \\ f(y-x-1), & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{P}(x,y)_Y = \begin{cases} f(y) & \text{, se } x = 0 \\ f(y-x), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A cadeia de Markov de interesse Z_n é justamente uma cadeia em que alterna entre as cadeias X_n e Y_n com probabilidade p, então:

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{com probabilidade } p \\ Y_n\ , & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

$$\mathrm{P}(x,y)_Y = \begin{cases} f(y) & \text{, se } x = 0 \\ pf(y-x-1) + (1-p)f(y-x), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

7) O seguinte script simula a ruina do jogador sobre o espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$: A variável `vec` retorna os valores da cadeia $X_n, n \geqslant 0$, enquanto que a variável `cont` retorna o valor da etapa $n \geqslant 1$ para o qual a cadeia atinge o estado absorvente $x = 0$ ou $x = d$. O valor `p` determina a probabilidade do jogador ganhar uma determinada aposta. Adaptar o script anterior para simular o *passeio aleatório simples*.

```r
# Ruina do jogador
set.seed(75898)
start <- 20 # capital inicial
d <- 60
p <- 0.5
gain <- start
vec <- c(start)
cont <- 0
while (0 < gain && gain < d) {
    cont <- cont + 1
    gain <- gain + sample(c(-1, 1), size = 1, prob = c(1 - p, p))
    vec <- c(vec, gain)
}
```

```r
# Passeio aleatório simples
set.seed(75898)
pos <- 0 # posição inicial
p <- 0.4
q <- 0.4
r <- 0.2
stopifnot(p + q + r == 1)
vec <- c(pos)
cont <- 0
while (cont < 500) {
    cont <- cont + 1
    pos <- pos + sample(c(1, -1, 0), size = 1, prob = c(p, q, r))
    vec <- c(vec, pos)
}
```