Probabilidade II

Lista 3

1. Suponha que X tenha a seguinte densidade: $f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}$, $x \geqslant a$.

   a. Determine a função geradora de momentos de X.
   b. Empregando a função geradora de momentos, calcule $\mathrm{E}[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$.

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_a^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx \\
&= \lambda e^{\lambda a}\int_a^\infty e^{-x(\lambda-t)}dx \\
&= \lambda e^{\lambda a}\left(\frac{-e^{-x(\lambda-t)}}{\lambda-t}\right)\Bigg|_a^\infty \\
&= \lambda e^{\lambda a}\frac{e^{-\lambda a}e^{at}}{\lambda-t} \\
&= \frac{\lambda e^{at}}{\lambda-t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= M'_X(t)\Big|_0 \\
&= \frac{(\lambda-t)(a\lambda e^{at})-(\lambda e^{at})(-1)}{(\lambda-t)^2}\Bigg|_0 \\
&= \frac{(\lambda)(a\lambda)-(\lambda)(-1)}{(\lambda)^2} \\
&= \frac{a\lambda^2+\lambda}{\lambda^2} \\
&= a+\frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= M''_X(t)\Big|_0 \\
&= \frac{a^2\lambda e^{at}}{\lambda-t}+\frac{2a\lambda e^{at}}{(\lambda-t)^2}+\frac{2\lambda e^{at}}{(\lambda-t)^3}\Bigg|_0 \\
&= a^2+\frac{2a}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}[X]^2 \\
&= a^2+\frac{2a}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}-\left(a+\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\
&= a^2+\frac{2a}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}-a^2-\frac{2a}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

2. Se a variável aleatória X tiver uma função geradora de momentos dada por $M_X(t) = 3/(3-t)$, qual será o desvio padrão de X?

Sabemos que a f.g.m. de uma V.A. exponencial é dada por $\lambda/(\lambda - t)$, comparando com $3/(3-t)$, vemos que X é uma V.A. exponencial de parâmetro 3.

Sua variância é dada por 1/9 então o desvio padrão é 1/3.

---

4. Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto bidimensional com função de probabilidade conjunta dada pela tabela dupla entrada a seguir.

a) Verifique que trata-se de uma legítima função de probabilidade conjunta e obtenha as funções de probabilidade marginais de X e Y.
b) Determine se X e Y são independentes.

Completando a tabela com os totais das linhas e colunas obtemos as probabilidades marginais

X \Y	0	1	2
0	0.20	0.15	0.15
1	0.16	0.12	0.12
2	0.04	0.03	0.03

X \Y	0	1	2	P(X = x)
0	0.20	0.15	0.15	0.5
1	0.16	0.12	0.12	0.4
2	0.04	0.03	0.03	0.1
P(Y = y)	0.40	0.30	0.30	1.0

Tanto a probabilidade conjunta quanto as marginais são positivas e suas somas são 1, portanto é uma função de probabilidade conjunta legítima.

X e Y também são independentes, pois para qualquer (x, y), $P_{X,Y}(x, y) = P_X(x)P_Y(y)$.

$$
\begin{aligned}
P_{X,Y}(0,0) &= 0.20 = (0.50)(0.40) = P_X(0) \cdot P_Y(0) \\
P_{X,Y}(0,1) &= 0.15 = (0.50)(0.30) = P_X(0) \cdot P_Y(1) \\
P_{X,Y}(0,2) &= 0.15 = (0.50)(0.30) = P_X(0) \cdot P_Y(2) \\
P_{X,Y}(1,0) &= 0.16 = (0.40)(0.40) = P_X(1) \cdot P_Y(0) \\
P_{X,Y}(1,1) &= 0.12 = (0.40)(0.30) = P_X(1) \cdot P_Y(1) \\
P_{X,Y}(1,2) &= 0.12 = (0.40)(0.30) = P_X(1) \cdot P_Y(2) \\
P_{X,Y}(2,0) &= 0.04 = (0.10)(0.40) = P_X(2) \cdot P_Y(0) \\
P_{X,Y}(2,1) &= 0.03 = (0.10)(0.30) = P_X(2) \cdot P_Y(1) \\
P_{X,Y}(2,2) &= 0.03 = (0.10)(0.30) = P_X(2) \cdot P_Y(2)
\end{aligned}
$$

5. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas e g e h duas funções quaisquer. Mostre que se X e Y são independentes, então $\mathrm{E}[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)]$.

Usando a definição de esperança para V.A.s discretas

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(X)h(Y)] &= \sum_{i \in S_X} \sum_{j \in S_Y} g(X)h(Y)\mathrm{P}(X = i, Y = j) \\
&= \sum_{i \in S_X} \sum_{j \in S_Y} g(X)h(Y)\mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = j) \\
&= \sum_{i \in S_X} g(X)\mathrm{P}(X = i) \sum_{j \in S_Y} h(Y)\mathrm{P}(Y = j) \\
&= \left(\sum_{j \in S_Y} h(Y)\mathrm{P}(Y = j) \right) \left(\sum_{i \in S_X} g(X)\mathrm{P}(X = i) \right) \\
&= \mathrm{E}[h(Y)]\mathrm{E}[g(X)]
\end{aligned}
$$

---

6. Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição qui-quadrado com κ graus de liberdade se sua densidade é dada por

$$
f(x) = \frac{x^{\kappa/2-1}e^{-x/2}}{2^{\kappa/2}\Gamma(\kappa/2)}, \quad x \geqslant 0.
$$

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado com κ_1 e κ_2 graus de liberdade, respectivamente.

a) Mostre que a função geradora de momentos de $Z = X_1 + X_2$ é $\psi_Z(t) = (1-2t)^{-(\kappa_1+\kappa_2)/2}$.
b) Mostre que Z tem distribuição qui-quadrado com $\kappa_1 + \kappa_2$ graus de liberdade.

Utilizando o resultado da questão 5. temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[g(X)h(Y)] &= \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)] \\
\mathrm{E}\left[e^{tX}e^{tX}\right] &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]\mathrm{E}\left[e^{tY}\right] \\
\mathrm{E}\left[e^{t(X+Y)}\right] &= \mathrm{E}\left[e^{tX}\right]\mathrm{E}\left[e^{tY}\right] \\
M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t)
\end{aligned}
$$

Então para encontrar a f.g.m. de Z, basta encontrar a f.g.m. de X_1 e X_2 e multiplicar.

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &\implies \int_0^\infty e^{tx} \frac{x^{\kappa/2-1} e^{-x/2}}{2^{\kappa/2}\Gamma(\kappa/2)} dx \\
\text{juntado as exponenciais} &\implies \int_0^\infty \frac{x^{\kappa/2-1} e^{-x(1-2t)/2}}{2^{\kappa/2}\Gamma(\kappa/2)} dx \\
\text{introduzindo o termo } (1-2t)^{\kappa/2} &\implies \frac{1}{(1-2t)^{\kappa/2}} \int_0^\infty (1-2t)^{\kappa/2} \frac{x^{\kappa/2-1} e^{-x(1-2t)/2}}{2^{\kappa/2}\Gamma(\kappa/2)} dx \\
\text{juntando } x \text{ e } (1-2t) \text{ no mesmo expoente} &\implies \frac{1}{(1-2t)^{\kappa/2}} \int_0^\infty [x(1-2t)]^{\kappa/2-1} \frac{e^{-x(1-2t)/2}}{2^{\kappa/2}\Gamma(\kappa/2)} dx \\
\text{a integral é uma densidade, igual a 1} &\implies \frac{1}{(1-2t)^{\kappa/2}} \\
&\implies (1-2t)^{-\kappa/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_Z(t) &= \psi_{X_1}(t)\psi_{X_2}(t) \\
&= (1-2t)^{-\kappa_1/2}(1-2t)^{-\kappa_2/2} \\
&= (1-2t)^{-(\kappa_1+\kappa_2)/2}
\end{aligned}
$$

Comparando com a f.g.m. de uma qui-quadrado de κ graus de liberdade, $(1-2t)^{-\kappa/2}$, vemos que Z tem distribuição qui-quadrado com $\kappa_1 + \kappa_2$ graus de liberdade.

---

7. A distribuição de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada por $p(1,1) = 1/8$, $p(1,2) = 1/4$, $p(2,1) = 1/8$ e $p(2,2) = 1/2$. X e Y são variáveis aleatórias independentes? Calcule

Completando o quadro de probabilidades, vemos que X e Y não são independentes, por exemplo, $\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathrm{P}(X = 1)\mathrm{P}(Y = 1)$ pois $1/8 \neq 3/8 \cdot 1/4$.

X \Y	1	2	P(X = x)
1	1/8	1/4	3/8
2	1/8	1/2	5/8
P(Y = y)	1/4	3/4	1

a) $\mathrm{P}(XY \leqslant 3)$

$$\mathrm{P}(XY \leqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(XY > 3) = 1 - \mathrm{P}(X = 2, Y = 2) = 1 - 1/2 = 1/2$$

b) $\mathrm{P}(X + Y > 2)$

$$\mathrm{P}(X + Y > 2) = 1 - \mathrm{P}(X + Y \leqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(X + Y = 2) = 1 - 1/8 = 7/8$$

c) $\mathrm{P}(X/Y = 1)$

$$\mathrm{P}(X/Y = 1) = \mathrm{P}(X = Y) =$$
$$\mathrm{P}(X = 1, Y = 1) + \mathrm{P}(X = 2, Y = 2) = 1/8 + 1/2 = 5/8$$

d) $\mathrm{P}(X - Y < 1)$

$$\mathrm{P}(X - Y < 1) = 1 - \mathrm{P}(X - Y \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X - Y = 1) =$$
$$1 - \mathrm{P}(X = 2, Y = 1) = 1 - 1/8 = 7/8$$

8. Sejam $X_1, \cdots, X_n$ variáveis aleatórias independentes, cujas funções de distribuição são $F_1, \cdots, F_n$, respectivamente. Mostre que as expressões da função de distribuição de $Y_1 = \min(X_1, \cdots, X_n)$ e $Y_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ são dadas, respectivamente, por:

$$F_{Y_1}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(z)] \qquad\qquad F_{Y_n}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} F_i(\omega)$$

O máximo de um vetor aleatório é menor ou igual a um valor dado ω se e somente se, cada um dos X_i for menor ou igual a ω, ou seja:

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(\omega) &= \mathrm{P}(X_{\max} \leqslant \omega) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \leqslant \omega, \cdots, X_n \leqslant \omega) \\
&= \mathrm{P}(X_1 \leqslant \omega) \cdots \mathrm{P}(X_n \leqslant \omega) \\
&= F_1(\omega) \cdots F_n(\omega) \\
&= \prod_{i=1}^{n} F_i(\omega)
\end{aligned}$$

O mínimo de um vetor aleatório é maior a um valor dado z se e somente se, cada um dos X_i for maior a ω, ou seja:

$$\begin{aligned}
F_{Y_1}(z) &= \mathrm{P}(X_{\min} \leqslant z) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_{\min} > z) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_1 > z, \cdots, X_n > z) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_1 > z) \cdots \mathrm{P}(X_n > z) \\
&= 1 - [1 - \mathrm{P}(X_1 \leqslant z)] \cdots [1 - \mathrm{P}(X_n \leqslant z)] \\
&= 1 - [1 - F_1(z)] \cdots [1 - F_n(z)] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - F_i(z)]
\end{aligned}$$

9. Sejam $X_1, \cdots, X_n$ independentes, tais que $X_i \sim \text{Unif}(0, \theta)$, $\theta > 0$. Obtenha a função de distribuição acumulada de $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$ e $W = \min(X_1, \cdots, X_n)$.

Sabemos da função de distribuição de X_i como

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0 \\ x/\theta, & \text{se } 0 \leqslant x < \theta \\ 1, & \text{se } \theta \leqslant x \end{cases}$$

Utilizando o resultado anterior, para $0 \leqslant y, w < \theta$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_i(y)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - x/\theta] \\ &= 1 - [1 - x/\theta]^n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F_W(w) &= \prod_{i=1}^{n} F_i(w) \\ &= \prod_{i=1}^{n} x/\theta \\ &= [x/\theta]^n \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad y < 0 \\ 1 - [1 - y/\theta]^n, & \text{se } 0 \leqslant y < \theta \\ 1, & \text{se } \theta \leqslant y \end{cases} \qquad F_W(w) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad w < 0 \\ [w/\theta]^n, & \text{se } 0 \leqslant w < \theta \\ 1, & \text{se } \theta \leqslant w \end{cases}$$

10. Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto bidimensional com funçãao de probabilidade conjunta dada pela tabela dupla entrada a seguir. Determine a função de probabilidade de $Z = X + Y$.

X \Y	1	2	3
1	0.1	0.1	0.0
2	0.1	0.2	0.3
3	0.1	0.1	0.0

$\mathrm{P}(X + Y = 2) = \mathrm{P}(X = 1, Y = 1) = 0.1$

$\mathrm{P}(X + Y = 3) = \mathrm{P}(X = 2, Y = 1) + \mathrm{P}(X = 1, Y = 2) = 0.1 + 0.1 = 0.2$

$\mathrm{P}(X + Y = 4) = \mathrm{P}(X = 3, Y = 1) + \mathrm{P}(X = 2, Y = 2) + \mathrm{P}(X = 1, Y = 3) = 0.1 + 0.2 + 0.0 = 0.3$

$\mathrm{P}(X + Y = 5) = \mathrm{P}(X = 3, Y = 2) + \mathrm{P}(X = 2, Y = 3) = 0.1 + 0.3 = 0.4$

$\mathrm{P}(X + Y = 6) = \mathrm{P}(X = 3, Y = 3) = 0.0$

z	2	3	4	5	6
P(Z = z)	0.1	0.2	0.3	0.4	0

---

11. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são tiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola tirada e Y o número da segunda.

a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.
b) Calcule $\mathrm{P}(X < Y)$.

Como as bolas são tiradas da urna sem reposição, $\mathrm{P}(X = Y) = 0$.

X \Y	1	2	3
1	0	1/6	1/6
2	1/6	0	1/6
3	1/6	1/6	0

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X < Y) &= \mathrm{P}(X = 1, Y = 2) + \mathrm{P}(X = 1, Y = 3) + \mathrm{P}(X = 2, Y = 3) \\ &= 1/6 + 1/6 + 1/6 \\ &= 1/2\end{aligned}$$

12. Determine se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

a) Se $X_1, \cdots, X_5$ são variáveis aleatórias independentes, tais que $X_i \sim \text{Poisson}(i)$, $i = 1, \cdots, 5$, então $X_1 + \cdots + X_5 \sim \text{Poisson}(15)$.

Verdadeiro, usando o fato de que $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ vista na questão 6. e que a f.g.m. de uma Poisson(λ) é dada por $e^{\lambda(e^t-1)}$, podemos ver que soma de duas V.A.s de distribuição Poisson é também Poisson com a soma dos parâmetros λ de cada um.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)} \\ \implies & X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

Por indução, isso pode ser generalizado para soma de qualquer número de V.A.s.

b) Se X é uma variável aleatória com função geradora de momentos $\psi_X(t) = e^{2.5e^t-2.5}$, então $\text{E}[X] = 1$.

Falso, obtento o primeiro momento a partir da f.g.m. temos:

$$\begin{aligned} \text{E}[X] &= M'_X(t)\Big|_0 \\ &= e^{2.5e^t-2.5}2.5e^t\Big|_0 \\ &= e^{2.5-2.5}2.5 \\ &= 2.5 \neq 1 \end{aligned}$$

c) Sejam X_1, X_2, X_3 variáveis aleatórias independentes tais que $X_1 \sim \text{Bin}(5, 1/3), X_2 \sim \text{Bin}(10, 1/3)$ e $X_3 \sim \text{Bin}(15, 1/3)$, então $X_1 + X_2 + X_3 \sim \text{Bin}(25, 1/3)$.

Falso, usando o fato de que $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ vista na questão 6. e que a f.g.m. de uma Bin(n, p) é dada por $(1-p+pe^t)^n$, podemos ver que soma de duas V.A.s de distribuição binomial de probabilidades iguais é também binomial com a soma dos tamanhos n de cada um.

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= (1-p+pe^t)^{n_1}(1-p+pe^t)^{n_2} \\ &= (1-p+pe^t)^{n_1+n_2} \\ \implies & X + Y \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p) \end{aligned}$$

Porém, 5 + 10 + 15 = 30, então $X_1 + X_2 + X_3$ teria que ter distribuição $\text{Bin}(30, 1/3)$.