Atividade 4

Convergência estocástica

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

3 de maio de 2023

1.

Seja (A_n) sequência de eventos em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. $\forall n$, defina $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ (indicadora de A_n).

Mostre que $\mathrm{P}(A_n) \longrightarrow 0$ se, e somente se, $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

$$\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 &\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(|\mathbb{1}_{A_n}| > \varepsilon\Big) = 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\mathbb{1}_{A_n} = 1\Big) = 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0 \\
&\iff \mathrm{P}(A_n) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

2.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias tal que $\mathrm{E}(X_n) = \alpha$ para todo n e $\mathrm{Var}(X_n) \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \alpha$ (Dica: use a desigualdade clássica de Chebyshev).

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(|X_n - \mathrm{E}(X_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X_n) \\
\implies &\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(X_n) \\
\implies &\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) \leq 0 \\
\implies &\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) = 0
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) = 0$, portanto $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \alpha$.

3.

Seja $X, X_1, X_2, X_3, ...$ sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n = \dfrac{n}{n+1}X$, para todo n.

Mostre que a sequência converge em média quadrática para X se $\mathrm{E}(X^2) < \infty$, mas não em caso contrário.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(|X_n - X|^2) \\
&= \mathrm{E}\left(\left|\frac{n}{n+1}X - X\right|^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\left|\frac{-1}{n+1}X\right|^2\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}\mathrm{E}(X^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X_n \xrightarrow{r=2} 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n - X|^2) = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\mathrm{E}(X^2) = 0 \\
\iff &\mathrm{E}(X^2) < \infty
\end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{r=2} 0$ apenas quando $\mathrm{E}(X^2) < \infty$.

4.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias discretas tal que

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2},\ \mathrm{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^2},\ \forall n$$

Prove que $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(X_n = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, $\mathrm{P}(\limsup[X_n = n]) = 0$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\limsup[X_n = n]) = 0 \\ \implies &\mathrm{P}(\limsup[X_n > \varepsilon]) = 0 \\ \implies &\mathrm{P}(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{P}(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 0$, portanto $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

5.

Para $n \geq 1$, sejam $X_n \sim \text{Unif}(0,1)$ variáveis aleatórias i.i.d. Defina $Y_n = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $U_n = nY_n$. Mostre que

a)

$Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

$$\begin{aligned} &F_{Y_n}(y) \\ &= 1 - (1 - F_{X_n}(y))^n \\ &= 1 - (1-y)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{P}(Y_n > \varepsilon) \\ &= 1 - \text{P}(Y_n < \varepsilon) \\ &= 1 - F_{Y_n}(\varepsilon) \\ &= (1-\varepsilon)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \text{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} \text{P}(Y_n > \varepsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon)^n \\ &= 0, \qquad \text{pois } (1-\varepsilon) < 1 \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \text{P}(|Y_n - 0| > \varepsilon) = 0$, portanto $Y_n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

b)

$U_n \xrightarrow{\text{D}} U$, sendo $U \sim \text{Exp}(1)$.

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= \text{P}(U_n \leq u) \\ &= \text{P}(nY_n \leq u) \\ &= \text{P}\Big(Y_n \leq \frac{u}{n}\Big) \\ &= F_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) &= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \\ &= 1 - e^{-u} \\ &= F_U(u) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} F_{U_n}(u) = F_U(u)$, portanto $U_n \xrightarrow{\text{D}} U$.

6.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias. Mostre que

a)

Se X_n não converge em probabilidade para 0, então $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) = \infty$

$$
\begin{aligned}
X_n \overset{\mathrm{P}}{\nrightarrow} 0 &\implies \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) \neq 0 \\
&\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) \longrightarrow \infty
\end{aligned}
$$

Pois série de uma sequência que não converge para 0 diverge.

b)

Se as variáveis aleatórias são independentes e $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

Considerando os evento A_n independentes e usando a negação do lema de Borel-Cantelli:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \text{ diverge} \implies \mathrm{P}(\limsup A_n) = 1
$$

$$
\mathrm{P}(\limsup A_n) \neq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) \text{ converge}
$$

$$
\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 &\implies \mathrm{P}(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 0 \\
&\implies \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty
\end{aligned}
$$

7.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias independentes tal que $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n),\ \forall n$.

Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{P}} 0$ porém X_n não converge para zero q.c.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \text{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} \text{P}(X_n = 1) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1/n = 0 \\
\Longrightarrow\ &\lim_{n\to\infty} \text{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0 \\
\Longrightarrow\ &X_n \xrightarrow{\text{P}} 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \text{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \text{P}(X_n = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \longrightarrow \infty \\
\Longrightarrow\ &\text{P}(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) = 1 \neq 0 \\
\Longrightarrow\ &X_n \overset{\text{q.c.}}{\nrightarrow} 0
\end{aligned}$$

9.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias, sendo $X_n \sim \text{Unif}(a, b_n), \forall n$. Se $b_n \longrightarrow a$ quando $n \to \infty$, mostre que $X_n \xrightarrow{\text{D}} a$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b_n - a}, & \text{se } a \leq x < b_n \\ 1, & \text{se } x \geq b_n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ 1, & \text{se } x \geq a \end{cases} \\
&= F_a(x)
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_a(x)$, portanto $X_n \xrightarrow{\text{D}} a$.

8.

Seja $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$, em que $\Omega = (0,1],\ \mathcal{F} =\ (0,1]$ (borelianos no intervalo $(0,1]$) e P é a medida de Lebesgue em $(0,1]$, ou seja, para todo $0 < a < b \leq 1$, temos que $\mathrm{P}((a,b]) = b - a$. Para cada n, seja $X_n = n\mathbb{1}_{(0,1/n^2]}$.

a)

Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\limsup[|Xn - 0| > \varepsilon]) &= \mathrm{P}\Big(\limsup[n\mathbb{1}_{(0,1/n^2]} > \varepsilon]\Big) \\
&= \mathrm{P}\Big(\limsup[\mathbb{1}_{(0,1/n^2]} > \varepsilon/n]\Big) \\
&= \mathrm{P}\Big(\limsup[\mathbb{1}_{(0,1/n^2]} = 1]\Big) \\
&= \mathrm{P}(\limsup(0,1/n^2]) \\
&= \mathrm{P}((0,0]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(\limsup[|Xn - 0| > \varepsilon]) = 0$, portanto $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

b)

Para que valores de r temos que $X_n \xrightarrow{\text{r}} 0$?

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n|^r) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big((n\mathbb{1}_{(0,1/n^2]})^r\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^r\mathrm{E}\Big((\mathbb{1}_{(0,1/n^2]})\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^r\mathrm{P}((0,1/n^2]) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^r/n^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{r-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_n \xrightarrow{\text{r}} 0 &\iff \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(|X_n|^r) = 0 \\
&\iff \lim_{n\to\infty} n^{r-2} = 0 \\
&\iff r - 2 < 0 \\
&\iff r < 2 \\
&\iff r = 1,\ \text{pois } r \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{\text{r}} 0$ apenas para $r = 1$.

10.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias, em que para cada n, X_n tem função de distribuição acumulada dada por

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases}$$

em que $\lambda > 0$. Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$, sendo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \\ &= F_X(x) \\ &\implies X_n \xrightarrow{\text{D}} X \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, portanto $X_n \xrightarrow{\text{D}} X$.

Pois $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}$.