Questão 1.

$$f(x) = 2e^{-2x}, \quad x > 0$$

Note que $f(x)$ é uma distribuição exponencial de parâmetro $\lambda = 2$, Portanto terá função de distribuição acumulada, valor esperado e variância conhecida.

$$\mathrm{F}_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

a) P$(1 \leq X \leq 3)$

$$\mathrm{P}(1 \leq X \leq 3) = \mathrm{P}(X \leq 3) - \mathrm{P}(X \leq 1) =$$
$$= \mathrm{F}_X(3) - \mathrm{F}_X(1) = (1 - e^{-6}) - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-6}$$

b) O valor esperado

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

c) A variância

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$$

d) A Função acumulada

$$\int_0^x 2e^{-2t}dt = \left(\frac{2}{-2}e^{-2t}\right)\Big|_0^x = (-e^{-2t})\Big|_0^x = (-e^{-2x}) - (-e^0) = 1 - e^{-2x}$$

Questão 2.

Será uma distribuição uniforme $\mathcal{U}(1, 10)$, portanto:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$\mathrm{F}_X(x) = \frac{x-a}{b-a},\ a \leq x \leq b$$

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

a) P$(7 \leq X \leq 10)$

$$\mathrm{P}(7 \leq X \leq 10) = \int_7^{10} \frac{1}{10-1} dx = \frac{1}{9}(x)\Big|_7^{10} = \frac{10-7}{9} = \frac{1}{3}$$

b) P$(X = 5)$

$$\mathrm{P}(X = 5) = \int_5^5 \frac{1}{9} dx = 0$$

c) a média dessa distribuição

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{11}{2}$$

d) a variância dessa distribuição

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

Questão 3.

$$f(x) = k(x^2 - 1), \quad 1 \leq x \leq 5$$

Para $f(x)$ ser função de densidade, a integral de $f(x)$ em seu suporte deve ser 1.

$$\int_1^5 k(x^2 - 1)dx = 1$$

$$k\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\bigg|_1^5 = 1$$

$$k\left(\left(\frac{125}{3} - 5\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right) = 1$$

$$k\left(\frac{110}{3} - \frac{-2}{3}\right) = 1$$

$$k\left(\frac{112}{3}\right) = 1$$

$$k = \frac{3}{112}$$

Questão 4.

$$\mathrm{D1} \sim \mathcal{N}(42, 36) \qquad\qquad \mathrm{D2} \sim \mathcal{N}(45, 9)$$

Padronize as varíaveis

$$\mathrm{P}(\mathrm{D1} < 45) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{D1} - 42}{\sqrt{36}} < \frac{45 - 42}{\sqrt{36}}\right) = \mathrm{P}\left(Z < \frac{1}{2}\right) = \mathrm{F}_Z\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{F}_Z\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.6914$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{D2} < 45) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{D2} - 45}{\sqrt{9}} < \frac{45 - 45}{\sqrt{9}}\right) = \mathrm{P}\left(Z < 0\right) = \mathrm{F}_Z(0)$$

$$\mathrm{F}_Z(0) = 0.5$$

O aparelho D1 possui maior probabilidade de sua vida útil ser inferior a 45 horas, portanto deve ser preferido o aparelho D2.