UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Introdução à Álgebra Linear
Primeira Lista de Exercícios
Paulo Ricardo Seganfredo Campana

Questão I

1.) Não, visto que não satisfaz a propriedade 6 para todos os vetores em $\mathbb{R}^3$
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
$(\alpha + \beta)(x, y, z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z)$
$((\alpha + \beta)x, y, z) = (\alpha x, y, z) + (\beta x, y, z)$
$((\alpha + \beta)x, y, z) = (\alpha x + \beta x, 2y, 2z)$
$y \neq 2y, z \neq 2z$ ■

2.) Não, pois não satisfaz a propriedade 8 para todos os vetores em $\mathbb{R}^3$
$1u = u$
$1(x, y, z) = (x, y, z)$
$(0, 0, 0) = (x, y, z)$ ■

3.) Não, pois não satisfaz a propriedade 8 para todos os vetores em $\mathbb{R}^2$
$1u = u$
$1(x, y) = (x, y)$
$(2x, 2y) = (x, y)$ ■

4.) Sim

5.) Não, pois não satisfaz a propriedade 3 para todos os vetores em $\mathbb{R}^2$
$\exists 0 \in V,$ tal que $u + 0 = u$
$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$
$(x + 0 + 1, y + 0 + 1) = (x, y)$
$(x + 1, y + 1) = (x, y)$ ■

6.) Não, pois não satisfaz a propriedade 3 para todas as matrizes na forma $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$.

$\exists 0 \in V,$ tal que $u + 0 = u$
$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+x & 2 \\ 2 & b+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

7.) Não, pois não satisfaz a propriedade 3 para todas as funções em $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(0) = 1\}$.
$\exists 0 \in V,$ tal que $u + 0 = u$
$(f+0)(x) = f(x) + f(x)$
$f(x) = 2f(x)$ $\blacksquare$

8.) Sim

Questão II
Não, pois pela segunda propriedade de Espaço Vetorial:
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \alpha u \in V$
Indica que, se existe um r vetor não nulo, irá existir infinitos vetores r multiplicados por uma constante.
Portanto, os dois vetores desse Espaço Vetorial terão de ser nulos, porém não se pode ter dois vetores iguais em um Espaço Vetorial, então V terá apenas um elemento.

Questão III
Sim, LUA será um vetor nulo, obedece as 8 propriedades, e o conjunto formado por um vetor nulo é um Espaço Vetorial.
p1: $(l+l)+l = l+(l+l) \Longrightarrow l+l = l+l \Longrightarrow l = l$
p2: $l+l = l+l \Longrightarrow l = l$
p3: $l = 0 \Longrightarrow l+l = l \Longrightarrow l = l$
p4: $-u = l \Longrightarrow l+l = 0 = l \Longrightarrow l = l$
p5: $(\alpha\beta)l = \alpha(\beta l) \Longrightarrow l = \alpha l \Longrightarrow l = l$
p6: $(\alpha+\beta)l = \alpha l + \beta l \Longrightarrow l = l+l \Longrightarrow l = l$
p7: $\alpha(l+l) = \alpha l + \alpha l \Longrightarrow \alpha l = l+l \Longrightarrow l = l$
p8: $1 \cdot l = l \Longrightarrow l = l$ $\blacksquare$

Questão IV
1. Não, pois a reta $y = a + z$ não necessariamente passa pela origem.
2. Não, pois não obedece a segunda propriedade de Subespaço, já que se multiplicado por um α não inteiro estará fora so Subespaço.
$\alpha u \in W, \forall u \in W, \alpha \in \mathbb{R}$
3. Sim.

Questão V
Alternativa 3, pois:
$(0,0,0) = 0 \cdot (2,1,4) + 0 \cdot (3,2,5)$

Questão VI
1.)

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-9 \\ x-y+2z=-7 \\ 4x+3y+5z=-15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5z=-16 \\ 7x+11z=-36 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -21x-35z=112 \\ 21x+33z=-108 \end{cases} \tag{1}$$

$z=-2, x=-2, y=1$

$u=(-9,-7,-15)=-2(2,1,4)+1(1,-1,3)-2(3,2,5)$
2.)

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-9 \\ x-y+2z=-7 \\ 4x+3y+6z=-15 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x+5z=-16 \\ 7x+12z=-36 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -21x-35z=112 \\ 21x+36z=-108 \end{cases} \tag{2}$$

$z=4, x=-12, y=3$

$u=-9-7x-15x2=-12(2+x+4x^2)+3(1-x+3x^2)+4(3+2x+6x^2)$

Exercicios do Boldrini

1.
a) Vetor nulo: $(0,0,\cdots,0)$, $-(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ é o vetor oposto
b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{bmatrix}$

3.
a) Sim, $a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
b) Não.

5.
a) Sim, $dim = n$, sem perda de generalização para o caso 2x2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Sim, $dim = 1$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
c) Sim, $dim = 2$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
d) Sim, $dim = 1$, $(1, 1, \cdots, 1)$
e) Não, não terá vetor nulo
f) Não, não terá vetor nulo
g) Sim, $dim = 1$, $(1, 2, 3)$

7.
a) Sim, se $a = 0$ e $b = -1$
b) Não, pois o terceiro elemento tem de ser 0 para ser parte deste subespaço.

9.
São LI pois a única solução do sistema é a trivial $(a = b = c = d = 0)$ e geram o espaço através de:
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11.
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Longrightarrow z = x, \quad y = -x$$
$$x + x + x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}$$

13.
Se estes 4 vetores são LI, irão gerar uma base em P^3
$a(1 - t^3) + b(1 - t)^2 + c(1 - t) + d = 0$
$a - at^3 + b - bt^2 - 2bt + c - ct + d = 0$
$-at^3 + bt^2 - (2b + c)t + (a + b + c + d) = 0$
Só assume solução $a = b = c = d = 0$, portanto são LI, formam base, e geram P^3

15.
A terceira matriz é combinação linear dos dois primeiros, para as outras ma-

trizes gerarem o subespaço W, basta serem LI.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -5x+y-7z=0 \\ -4x-y-5z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow x=-4y, \quad z=3y$$

$$-4y\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + 3y\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta segunda matriz também é combinação linear, a primeira e a quarta são LI, portanto geram W, $dimW = 2$.

17.

a) Sim, pois B foi obtido pela redução da matriz A.

b) Sim, pois seguirão a forma padrão de uma matriz diagonal de vetores LI que geram um subespaço.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

19.

Porquê esses três vetores são LI, e três vetores LI são suficientes para gerar $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ -y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Longrightarrow y=z$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Longrightarrow y=0, \quad x=0, \quad z=0, \text{ São LI.}$$

21.

a) $a=b=c=0$ para que estes vetores sejam LI.

b) $x=(-\frac{5}{3},0,0), \quad y=(0,\frac{7}{3},0), \quad z=(0,0,1)$

c) Quanto maior a dimensão de W, mais variáveis livres o sistema terá.

23.

$w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$

$w_1' + w_2' \in W_1 + W_2$

$u + v = w_1 + w_2 + w_1' + w_2'$
$w_1 + w_2 + w_1' + w_2' \in W_1 + W_2$
$u + v \in W_1 + W_2$ $\blacksquare$

$ku = kw_1 + kw_2$
$kw_1 + kw_2 \in W_1 + W_2$
$ku \in W_1 + W_2$ $\blacksquare$

25.
a)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \implies y = -x, \quad z = t, \quad x + x - z + z = 0$$
$x = y = 0, \quad z = t \in \mathbb{R}$
$W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$
b) exemplo de base: $(0, 0, 22, 22)$.
c) Feito em sala por escalonamento
$W_1 + W_2 = [(1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, -1), (0, 0, -1, 2), (0, 0, 0, 3)]$
d) Não, pois $W_1 \cap W_2 \neq (0, 0, 0, 0)$
e) Sim, pois são quatro vetores LI, que pelas propriedades, geram $\mathbb{R}^4$

27. a)
$(x, y, -x - 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -2)$
$V_1 = [(1, 0, -1), (0, 1, -2)]$
$V_2 = [(0, 0, 1)]$
b) A soma nunca será direta, pois dois subespaços de dimensão dois terão 4 vetores LI, porém $\mathbb{R}^3$ necessita de 3 e somente 3 vetores LI para ser gerado.
$V_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
$V_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$

29.
a) i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
$(-1, 1) = a(1, 0) + b(0, 1) \implies a = -1, \quad b = 1$
$(1, 1) = c(1, 0) + d(0, 1) \implies c = d = 1$
a) ii) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$(1, 0) = a(-1, 1) + b(1, 1) \implies a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$

$(0,1) = c(-1,1) + d(1,1) \Longrightarrow c = d = \frac{1}{2}$

a) iii) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$(1,0) = a(\sqrt{3},1) + b(\sqrt{3},-1) \Longrightarrow a = b = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$(0,1) = c(\sqrt{3},1) + d(\sqrt{3},-1) \Longrightarrow c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}$

a) iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$(1,0) = a(2,0) + b(0,2) \Longrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = 0$

$(0,1) = c(2,0) + d(0,2) \Longrightarrow c = 0, \quad d = \frac{1}{2}$

b) i) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(1,0) + b(0,1) \Longrightarrow a = 3, \quad b = -2$

b) ii) $\begin{bmatrix} -\frac{5}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(-1,1) + b(1,1) \Longrightarrow a = -\frac{5}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$

b) iii) $\begin{bmatrix} \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(\sqrt{3},1) + b(\sqrt{3},-1) \Longrightarrow a = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

b) iv) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

$(3,-2) = a(2,0) + b(0,2) \Longrightarrow a = \frac{3}{2}, \quad b = -1$

c) i) $\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) ii) $\begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{3}+6}{3} \\ \frac{-2\sqrt{3}-6}{3} \end{bmatrix}$

c) iii) $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

31.

a)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & \sin(-\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

33.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Longrightarrow a = 1, \quad b = c = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Longrightarrow a = b = 1, \quad c = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \Longrightarrow a = b = c = 1$$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

35. Matriz Indentidade I.