Universidade Federal da Paraíba
Bacharelado em Estatística
Probabilidade II - Exercícios de teoria de conjuntos
Paulo Ricardo Seganfredo Campana

1. Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

Apenas os conjuntos
$B = \{x : x > \frac{9}{4} \text{ e } x < \frac{6}{5}\}$ e $D = \{x : x \text{ divisível por zero}\}$

2. Construa o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$

$A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, A\}$

3. Diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo. Se a sentença for falsa deverá ser justificada.

a) V
b) F, o elemento a pertence ao conjunto $\{a, b\}$, porém o conjunto $\{a\}$ não pertence
c) V
d) F, zero não pertence ao conjunto vazio pois o mesmo não possui elementos
e) F, pois apenas o elemento $\varnothing$ pertence ao conjunto $\varnothing$
f) V
g) V
h) V
i) V
j) F, os elementos do conjunto $\{a, b\}$ pertencem a $\{\{a, b, c, d\}\}$ porém o conjunto $\{a, b\}$ não pertence

4. Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, determine $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$. Verifique também se cada reunião é disjunta.

$A \cap B = \{b, c, d\}$
$A \cap C = \{c\}$
$B \cap C = \{c, e\}$

$A \cap B \cap C = \{c\}$
$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
$A \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$
$B \cup C = \{b, c, d, e, f\}$
$A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$

Não, todas possuem o elemento c.

5. Prove que $A \subset (A \cup B)$, $(A \cap B) \subset A$ e que $(A - B) \subset A$, $\forall A$

a) $A \subset (A \cup B)$, pelas definições de subconjunto e união:
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in (A \cup B))$
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B)$
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in A)$

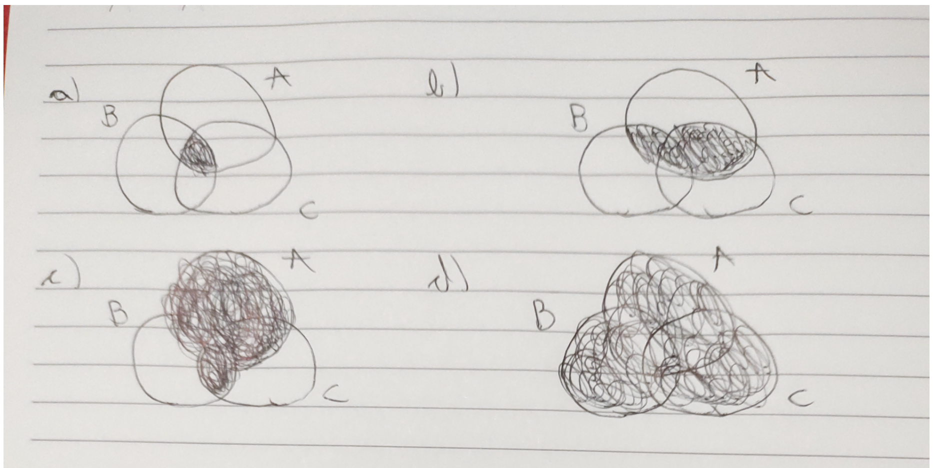
b) $(A \cap B) \subset A$ pelas definições de subconjunto e interseção:
$\forall x, (x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A)$
$\forall x, (x \in A \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in A)$
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in A)$

c) $(A - B) \subset A$, $\forall A$, pelas definições de subconjunto e diferença:
$\forall x, (x \in (A - B) \Rightarrow x \in A)$
$\forall x, (x \in (A \cap B^c) \Rightarrow x \in A)$
$\forall x, (x \in A \text{ e } x \in B^c) \Rightarrow x \in A)$
$\forall x, (x \in A \Rightarrow x \in A)$

6. Admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F) as seguintes sentenças:

a) V b) F c) F d) V e) V f) V
g) V h) F i) F j) V k) V l) V

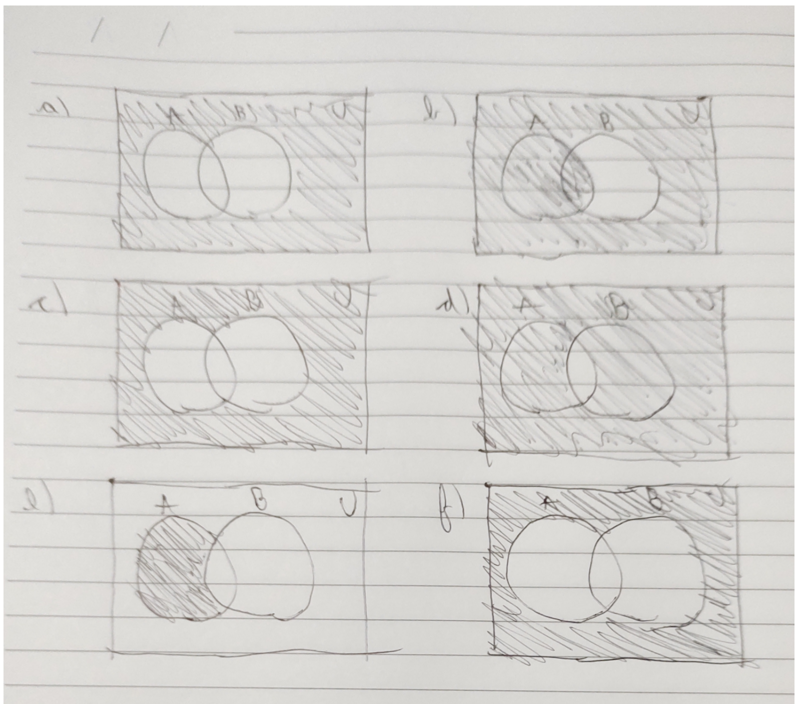
7. Indique no diagrama abaixo, um de cada vez, os seguintes conjuntos:



8. Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f, g\}$ e $C = \{b, d, e, g\}$. determine:

a) $A - B = \{c, d\}$
b) $B - A = \{e, f, g\}$
c) $C - B = \{b\}$
d) $(A \cup C) - B = \{a, b\}$
e) $A - (B \cap C) = \{a, b, c\}$
f) $(A \cup B) - (A \cap C) = \{a, c, e, f, g\}$

9. Faça um diagrama para indicar cada um dos conjuntos abaixo:



10. Dados dois conjuntos A e B, chama-se a diferença simétrica de A com B o conjunto tal que: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Prove que:

a) $A \Delta \varnothing = A$
$(A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A$
$(A \cap \varnothing^c) \cup (\varnothing \cap A^c) = A$
$(A \cap U) \cup (\varnothing) = A$
$A = A$

b) $A \Delta A = \varnothing$
$(A - A) \cup (A - A) = \varnothing$

$\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
$\varnothing = \varnothing$

c) $A \Delta B = B \Delta A$ para A e B quaisquer.
$(A - B) \cup (B - A) = B \Delta A$
$(B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$
$B \Delta A = B \Delta A$

11. Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Demonstre que:

a) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
$(A \cap C^c) \cup (B \cap C^c) = (A \cup B) \cap C^c$
$C^c \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap C^c$
$C^c \cap (A \cup B) = C^c \cap (A \cup B)$

b) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
$(A \cap C^c) \cap (B \cap C^c) = (A \cap B) \cap C^c$
$A \cap B \cap C^c = (A \cap B) \cap C^c$
$(A \cap B) \cap C^c = (A \cap B) \cap C^c$

12. Sejam A e B conjuntos quaisquer. Demonstre que A e $B - A$ são disjuntos, e que $A \cup B = A \cup (B - A)$. Isso mostra como representar $A \cup B$ como uma união disjunta.

Assuma que A e B não são disjuntos, isso significa que:
$A \cap (B - A) \neq \varnothing$
$A \cap (B \cap A^c) \neq \varnothing$
$(A \cap A^c) \cap B \neq \varnothing$
$\varnothing \cap B \neq \varnothing$
$\varnothing \neq \varnothing$
Há uma contradição, que significa que A e B são de fato disjuntos.

$A \cup B = A \cup (B - A)$
$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
$A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$

$$A \cup B = (A \cup B) \cap U$$
$$A \cup B = A \cup B$$