Atividade 4

Particionamento do espaço de estados

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

21 de agosto de 2023

1) Considere a cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e matriz de transição.
a) Particione o espaço de estados
b) Calcule $\rho_{0y},\ y = 0, 1, \cdots, 6$.

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Os conjuntos de estados $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$ só levam a outros estados dentro do seu conjunto, então $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{4, 5, 6\}$.
O estado 0 leva a sí mesmo e a estados dos conjuntos C_1 e C_2, então ele é transiente.

$$\mathcal{S}_{\mathsf{T}} = \{0\}, \quad \mathcal{S}_{\mathsf{R}} = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{4, 5, 6\}$$

Como $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5, 6\}$ pertencem a uma mesma classe de equivalência, $\rho_{0C_1} = \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03}$ e $\rho_{0C_2} = \rho_{04} = \rho_{05} = \rho_{06}$, Além de que $\rho_{0C_2} = 1 - \rho_{0C_1}$ e $\rho_{00} = 1/2$.

$$\rho_{xC} = \sum_{y \in C} \mathrm{P}(x, y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_{\mathsf{T}}} \mathrm{P}(x, y)\, \rho_{yC}$$

$$\rho_{0C_1} = \mathrm{P}(0, 1) + \mathrm{P}(0, 2) + \mathrm{P}(0, 3) + \mathrm{P}(0, 0)\, \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 0 + 1/8 + 1/4 + 1/2 \cdot \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 3/4, \quad \rho_{0C_2} = 1/4$$

$$\rho_{00} = 1/2, \quad \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = 3/4, \quad \rho_{04} = \rho_{05} = \rho_{06} = 1/4$$

2) Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e matriz de transição.
a) Particione o espaço de estados.
b) Calcule $\rho_{0y}, y = 1, \cdots, 5$.

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Os conjuntos de estados $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5\}$ só levam a outros estados dentro do seu conjunto, então $C_1 = \{1, 2, 3\}$ e $C_2 = \{4, 5\}$.
O estado 0 leva a sí mesmo e a estados dos conjuntos C_1 e C_2, então ele é transiente.

$$\mathcal{S}_{\mathsf{T}} = \{0\}, \quad \mathcal{S}_{\mathsf{R}} = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{4, 5\}$$

Como $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5\}$ pertencem a uma mesma classe de equivalência, $\rho_{0C_1} = \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03}$ e $\rho_{0C_2} = \rho_{04} = \rho_{05}$, Além de que $\rho_{0C_2} = 1 - \rho_{0C_1}$ e $\rho_{00} = 1/3$.

$$\rho_{xC} = \sum_{y \in C} \mathrm{P}(x, y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_{\mathsf{T}}} \mathrm{P}(x, y)\, \rho_{yC}$$

$$\rho_{0C_1} = \mathrm{P}(0, 1) + \mathrm{P}(0, 2) + \mathrm{P}(0, 3) + \mathrm{P}(0, 0)\, \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 0 + 1/3 + 0 + 1/3 \cdot \rho_{0C_1}$$

$$2/3 \cdot \rho_{0C_1} = 1/3$$

$$\rho_{0C_1} = 1/2, \quad \rho_{0C_2} = 1/2$$

$$\rho_{00} = 1/3, \quad \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = 1/2, \quad \rho_{04} = \rho_{05} = 1/2$$

3) Implemente um loop Monte Carlo para estimar numericamente as probabilidades de absorção de um conjunto irredutível C para as cadeias dos itens 1 e 2.

```r
simular_de_0 <- function(n, transição) {
    X <- "0"
    for(i in 2:n) {
        j <- X[i - 1]
        p <- transição[j, ]
        X[i] <- sample(names(p), size = 1, prob = p)
    }
    as.numeric(X)
}

absorção <- function(C, transição) {
    simular_de_0(50, transição) |>   # Simular até X50
    replicate(n = 10000) |>          # 10000 vezes
    apply(                           # para cada simulação
        MARGIN = 2,
        \(col) any(C %in% col[-1])   # TRUE se C está na cadeia
    ) |>
    mean()                           # proporção de TRUEs
}
```

```r
absorção(c(1,2,3), P1)
## [1] 0.7497
absorção(c(4,5,6), P1)
## [1] 0.2559
absorção(0, P1)
## [1] 0.5006

absorção(c(1,2,3), P2)
## [1] 0.4887
absorção(c(4,5), P2)
## [1] 0.4996
absorção(0, P2)
## [1] 0.3382
```

4) Seja $y \in \mathcal{S}_{\mathsf{T}}$. Usando o fato de que $G(x,y) = \dfrac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}}$, mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}^n(x,y) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}^n(y,y)\,, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S}$$

$1 + G(y,y) \geqslant G(x,y)$ pois:

$$1 + G(y,y) = 1 + \frac{\rho_{yy}}{1-\rho_{yy}} = \frac{1}{1-\rho_{yy}} \geqslant \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} = G(x,y)$$

Então:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}^n(x,y) = \mathrm{P}^0(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^n(x,y) = \mathrm{P}^0(x,y) + G(x,y) =$$

$$\begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases} + G(x,y) = \begin{cases} 1 + G(y,y), & \text{se } x = y \\ G(x,y), & \text{se } x \neq y \end{cases} \leqslant 1 + G(y,y) =$$

$$\mathrm{P}^0(y,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}^n(y,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}^n(y,y)$$

5) Na videoaula 3 mostramos que

$$\mathrm{P}_x\big(T_y = 1\big) = \mathrm{P}(x, y)$$

$$\mathrm{P}_x\big(T_y = n+1\big) = \sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\big(T_y = n\big)\,, \quad n \geqslant 1$$

Aplique esse resultado para provar a seguinte igualdade:

$$\rho_{xy} = \mathrm{P}(x, y) + \sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \rho_{zy}$$

$$\rho_{xy} = \mathrm{P}_x\big(T_y < \infty\big) = \mathrm{P}_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_x\big(T_y = n\big)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\big(T_y = n-1\big) =$$

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z) \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}_z\big(T_y = n-1\big) =$$

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n-1\right)$$

O caso $n = 1$ tem probabilidade 0, pois $T_y > 0$, então:

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} T_y = n-1\right) =$$

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) =$$

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \mathrm{P}_z\big(T_y < \infty\big) =$$

$$\sum_{z \neq y} \mathrm{P}(x, z)\, \rho_{zy}$$