

# Atividade 4

## Convergência estocástica

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

3 de maio de 2023

### 1.

Seja  $(A_n)$  sequência de eventos em  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $\forall n$ , defina  $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$  (indicadora de  $A_n$ ).

Mostre que  $P(A_n) \rightarrow 0 \iff X_n \xrightarrow{P} 0$ .

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{P} 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mathbb{1}_{A_n}| > \varepsilon) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{1}_{A_n} = 1) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega \in A_n) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0 \\ &\iff P(A_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

## 2.

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias tal que  $E(X_n) = \alpha$  para todo  $n$  e  $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Mostre que  $X_n \xrightarrow{P} \alpha$  (Dica: use a desigualdade clássica de Chebyshev).

$$\begin{aligned} P(|X_n - E(X_n)| \geq \alpha) &\leq \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(X_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \alpha) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha^2} \text{Var}(X_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \alpha) &\leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) &= 0 \\ X_n &\xrightarrow{P} \alpha \end{aligned}$$

## 3.

Seja  $X, X_1, X_2, X_3, \dots$  sequência de variáveis aleatórias tal que  $X_n = \frac{n}{n+1}X$ , para todo  $n$ .

Mostre que a sequência converge em média quadrática para zero se  $E(X^2) < \infty$ , mas não em caso contrário.

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{r=2} 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - 0|^2) = 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n^2) = 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} E(X^2) = 0 \\ &\implies E(X^2) = 0 \end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{r=2} 0$  apenas quando  $E(X^2) = 0$ .

**4.**

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias discretas tal que

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n$$

Prove que  $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Pelo lema de Borel-Cantelli,  $P(\limsup[X_n = n]) = 0$

$$\begin{aligned} P(\limsup[X_n = n]) = 0 &\implies P(\limsup[X_n > \varepsilon]) = 0 \\ &\implies P(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 0 \\ &\implies X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \end{aligned}$$

## 5.

Para  $n \geq 1$ , sejam  $X_n \sim \text{Unif}(0,1)$  variáveis aleatórias i.i.d. Defina  $Y_n = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  e  $U_n = nY_n$ . Mostre que

**a)**

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

$$\begin{array}{lll} F_{Y_n}(u) & P(Y_n > \varepsilon) & \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) \\ = 1 - (1 - F_{X_n}(u))^n & = 1 - P(Y_n < \varepsilon) & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > \varepsilon) \\ = 1 - (1 - u)^n & = 1 - F_{Y_n}(\varepsilon) & = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n \\ & = (1 - \varepsilon)^n & = 0 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = 0, \text{ portanto } Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

**b)**

$$U_n \xrightarrow{D} U, \text{ sendo } U \sim \text{Exp}(1).$$

$$\begin{array}{ll} F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u) & \lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \\ = P(nY_n \leq u) & = 1 - e^{-u} \\ = P\left(Y_n \leq \frac{u}{n}\right) & = F_U(u) \\ = F_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right) & \\ = 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = F_U(u), \text{ portanto } U_n \xrightarrow{D} U.$$

**6.**

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias. Mostre que

**a)**

Se  $X_n$  não converge em probabilidade para 0, então  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \infty$

$$\begin{aligned} X_n \not\xrightarrow{P} 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \varepsilon) \neq 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pois séries de sequências que não convergem para 0 divergem.

**b)**

Se as variáveis aleatórias são independentes e  $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$ , então, para todo  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 &\implies P(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n| > \varepsilon) = 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty \end{aligned}$$

Pois são independentes e pelo lema de Borel-Cantelli.

## 7.

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias independentes tal que  $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$ ,  $\forall n$ .

Mostre que  $X_n \xrightarrow{P} 0$  porém  $X_n$  não converge para zero q.c.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - P(X_n \leq \varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - F(\varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - (1 - 1/n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \rightarrow \infty \\ &\Rightarrow P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) = 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0\end{aligned}$$

Pois são independentes e pelo lema de Borel-Cantelli.

## 9.

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias, sendo  $X_n \sim \text{Unif}(a, b_n)$ ,  $\forall n$ . Se  $b_n \rightarrow a$  quando  $n \rightarrow \infty$ , mostre que  $X_n \xrightarrow{D} a$ .

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b_n-a}, & \text{se } a \leq x < b_n \\ 1, & \text{se } x \geq b_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ 1, & \text{se } x \geq a \end{cases} \\ &= F_a(x) \\ &\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} a\end{aligned}$$

**8.**

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , em que  $\Omega = (0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0, 1]$  (borelianos no intervalo  $(0, 1]$ ) e  $P$  é a medida de Lebesgue em  $(0, 1]$ , ou seja, para todo  $0 < a < b \leq 1$ , temos que  $P((a, b]) = b - a$ . Para cada  $n$ , seja  $X_n = n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]}$ .

**a)**

Mostre que  $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$ .

$$\begin{aligned} P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) &= P(\limsup[n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} > \varepsilon]) \\ &= P(\limsup[\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} > \varepsilon/n]) \\ &= P(\limsup[\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} = 1]) \\ &= P(\limsup(0, 1/n^2]) \\ &= P((0, 0]) \\ &= P(\emptyset) \\ P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) &= 0 \\ &\implies X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \end{aligned}$$

**b)**

Para que valores de  $r$  temos que  $X_n \xrightarrow{r} 0$ ?

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E((n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]})^r) & X_n \xrightarrow{r} 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^r) = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r E((\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]})^r) & &\iff \frac{1}{r+1} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-r-2} = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r \int_0^{1/n^2} x^r dx & &\iff -r-2 < 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r \frac{(1/n^2)^{r+1}}{r+1} & &\iff r > -2 \\ &= \frac{1}{r+1} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-r-2} \end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{r} 0$  apenas para  $r > -2$ .

## 10.

Seja  $(X_n)$  sequência de variáveis aleatórias, em que para cada  $n$ ,  $X_n$  tem função de distribuição acumulada dada por

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases}$$

em que  $\lambda > 0$ . Mostre que  $X_n \xrightarrow{D} X$ , sendo  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \\ &= F_X(x) \\ &\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X \end{aligned}$$

$$\text{Pois } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}.$$