

Lista 1

Probabilidade I

Paulo Campana

23. A gaveta de um aluno de Probabilidade I possui 8 pares de meia sendo 5 brancas e 3 pretas. No cesto de roupa suja encontramos 3 pares brancas e 4 pares pretas. O aluno utilizou dois pares de meia durante a semana e posteriormente colocou-as no cesto de roupa suja. Em seguida, um par de meias é retirado do cesto para ser lavada. Qual a probabilidade do par de meias ser branca?

São 4 casos possíveis:

- Usar dois pares de meias brancas

- $P(BB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$

- Serão 5 pares brancas e 4 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid BB) = \frac{5}{9}$

- Usar dois pares de meias pretas

- $P(PP) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$

- Serão 3 pares brancas e 6 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid PP) = \frac{3}{9}$

- Usar uma par branca depois uma par preta

- $P(BP) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

- Serão 4 pares brancas e 5 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid BP) = \frac{4}{9}$

- Usar uma par preta depois uma par branca

- $P(PB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$

- Serão 4 pares brancas e 5 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid PB) = \frac{4}{9}$

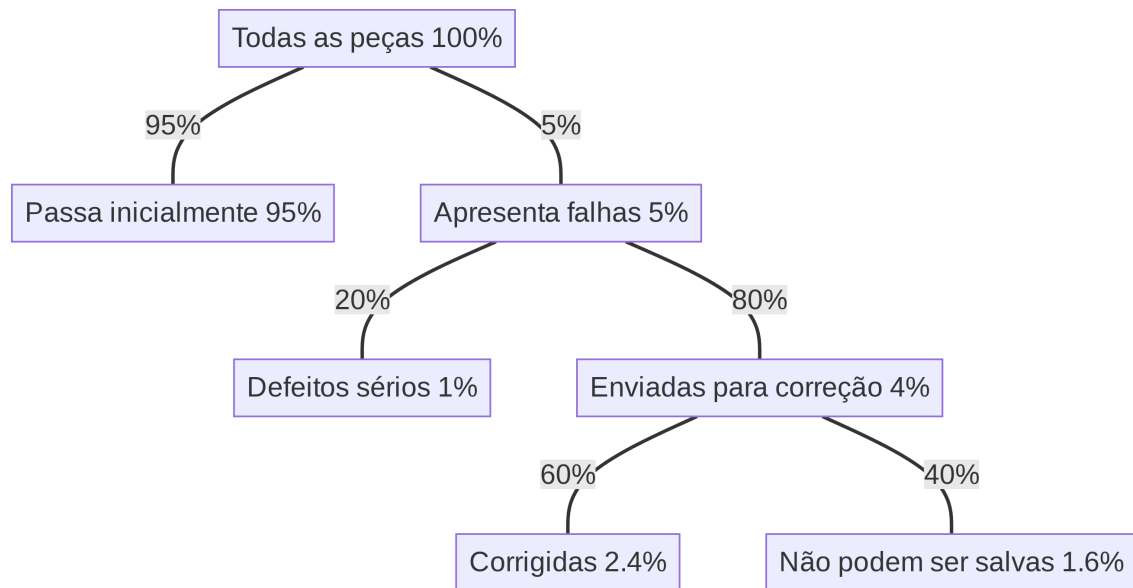
Somando os produtos de probabilidade de ocorrer cada caso com a probabilidade interesse temos:

$$P(\text{Branca}) = \frac{20}{56} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{56} \cdot \frac{3}{9} + \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{9} + \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{36}$$

24. Uma peça usada na fabricação de carros podem apresentar um certo defeito de fabricação. Suponha que 95% de todas as peças passem na inspeção inicial. Das 5% com falhas, 20% possuem defeitos tão sérios que devem ser descartadas. As peças restantes são enviados para correção, onde 40% não podem ser salvas e são descartadas. As outras 60% são corrigidas e, depois, passam na inspeção.

a) Qual a probabilidade de uma peça selecionada aleatoriamente passar na inspeção inicialmente ou após a correção?

b) Dado que a peça tenha passado na inspeção, qual é a probabilidade dela ter passado na inspeção inicial e não ter precisado de correção?



$$P(\text{Passou inspeção}) = P(\text{Passa inicialmente}) + P(\text{Corrigidas}) = 95\% + 2.4\% = 97.4\%$$

$$P(\text{Passa inicialmente} \mid \text{Passou inspeção}) = \frac{P(\text{Passa inicialmente} \cap \text{Passou inspeção})}{P(\text{Passou inspeção})} =$$

$$\frac{95\%}{97.4\%} = 97.535\%$$

25. Dentre 6 números positivos e 8 negativos, escolhem-se ao acaso (sem reposição) 4 números e multiplicam-se esses números. Qual será a probabilidade de que o produto seja um número positivo?

Obter um número positivo a partir de 4 números é possível em 3 casos:

- 4 números negativos

$$- P(\{- - - -\}) = \frac{8}{14} \frac{7}{13} \frac{6}{12} \frac{5}{11} = \frac{70}{1001}$$

- 4 números positivos

$$- P(\{+ + + +\}) = \frac{6}{14} \frac{5}{13} \frac{4}{12} \frac{3}{11} = \frac{15}{1001}$$

- 2 negativos e 2 positivos

– São 6 casos: $\{- - + +\}$, $\{- + - +\}$, $\{- + + -\}$, $\{+ - - +\}$, $\{+ - + -\}$, $\{+ + - -\}$, como a ordem não importa e a quantidade de números positivos e negativos são iguais, eles terão a mesma probabilidade

$$- 6P(\{- - + +\}) = 6 \left(\frac{8}{14} \frac{7}{13} \frac{6}{12} \frac{5}{11} \right) = \frac{420}{1001}$$

Somando as probabilidades, temos que $P(\text{produto positivo}) = \frac{505}{1001}$

26. Na elaboração de um algoritmo quantos códigos de quatro símbolos poderão ser formados se temos um total de seis símbolos:

a) Se nenhum símbolo puder ser repetido?

b) Qualquer símbolo puder ser repetido qualquer número de vezes?

Temos 6 símbolos, precisamos escolher 4, a ordem importa.

- Sem reposição: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

- Com reposição: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

27. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.

a) Qual é a probabilidade de que o menor número do emblema seja 5?

b) Qual é a probabilidade de que o maior número do emblema seja 5?

Suponha que a primeira pessoa escolhida seja o 5, para que 5 seja o menor, a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, a chance é de $5/9$ da segunda pessoa estar entre 6 e 10, e a chance é de $4/8$ para a terceira pessoa. Porém a suposição da primeira pessoa ser o 5 é arbitrária, ela poderia ser o segundo ou terceiro, então multiplicamos a probabilidade total por 3.

$$3 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{12}$$

De forma análoga, agora porém a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{1, 2, 3, 4\}$, a chance é de $4/9$ para a segunda pessoa e $3/8$ para a terceira.

$$3 \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{20}$$

28. Uma montagem eletrônica é formada de dois subsistemas A e B. De ensaios anteriores as seguintes probabilidades são admitidas conhecidas: $P(A \text{ falhar}) = 0.20$, $P(A \text{ e B falhem}) = 0.15$ e $P(B \text{ falhe sozinho}) = 0.20$. Calcule as seguintes probabilidades: $P(A \text{ falhe} \mid B \text{ tenha falhado})$ e $P(A \text{ falhe sozinho})$.

$$P(A \text{ falhe} \mid B \text{ tenha falhado}) = \frac{P(A \text{ falhe} \cap B \text{ tenha falhado})}{P(B \text{ tenha falhado})} =$$
$$\frac{P(A \text{ e B falhem})}{P(A \text{ e B falhem}) + P(B \text{ falhe sozinho})} = \frac{0.15}{0.15 + 0.2} = \frac{3}{7}$$

$$P(A \text{ falhe sozinho}) = P(A \text{ falhar}) - P(A \text{ e B falhem}) = 0.20 - 0.15 = 0.05$$

29. O Sport ganha com probabilidade 0.7 se chove e com 0.8 se não chove. Em setembro a probabilidade de chuva é de 0.3. O Sport ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

$$\begin{aligned}
 & P(\text{ganhar}) \\
 &= P((\text{chover} \cap \text{ganhar}) \cup (\text{não chover} \cap \text{ganhar})) && \text{União disjunta} \\
 &= P(\text{chover} \cap \text{ganhar}) + P(\text{não chover} \cap \text{ganhar}) \\
 &= P(\text{ganhar} \mid \text{chover}) P(\text{chover}) + P(\text{ganhar} \mid \text{não chover}) P(\text{não chover}) \\
 &= 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.77
 \end{aligned}$$

$$P(\text{chover} \mid \text{ganhar}) = \frac{P(\text{chover} \cap \text{ganhar})}{P(\text{ganhar})} = \frac{P(\text{ganhar} \mid \text{chover}) P(\text{chover})}{P(\text{ganhar})} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.77} = \frac{3}{11}$$

30. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes. Dos pedidos de um tipo de processamento cerca de 10% vem do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Caso o pedido não seja feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0.5% do cliente C, 2% do cliente D e 8% do cliente E.

a) Qual a probabilidade do sistema apresentar erro?

b) Sabendo-se que o processo apresentou erro calcule a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E.

Cliente	A	B	C	D	E
P(cliente)	0.10	0.15	0.15	0.40	0.20
P(erro cliente)	0.01	0.02	0.005	0.02	0.08

$$P(\text{erro}) = 0.10 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.02 + 0.15 \cdot 0.005 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.20 \cdot 0.08 = 0.02875$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{cliente E} \mid \text{erro}) &= \frac{P(\text{cliente E} \cap \text{erro})}{P(\text{erro})} = \\
 \frac{P(\text{erro} \mid \text{cliente E}) P(\text{cliente E})}{P(\text{erro})} &= \frac{0.08 \cdot 0.20}{0.02875} = 0.5565217
 \end{aligned}$$

31. Nos cursos de Estatística 5% dos homens e 2% das mulheres estão acima dos pesos ideais. Um estudante é escolhido aleatoriamente. Sabe-se também que 60% dos estudantes são homens. Sorteando-se aleatoriamente um estudante, calcule a probabilidade de que ele:

a) esteja acima do peso;

b) seja mulher, sabendo que o mesmo está acima do peso.

$$\begin{aligned}
 & P(\text{acima do peso}) \\
 &= P((\text{acima do peso} \cap \text{mulher}) \cup (\text{acima do peso} \cap \text{homem})) && \text{União disjunta} \\
 &= P(\text{acima do peso} \cap \text{mulher}) + P(\text{acima do peso} \cap \text{homem}) \\
 &= P(\text{acima do peso} \mid \text{mulher}) P(\text{mulher}) + P(\text{acima do peso} \mid \text{homem}) P(\text{homem}) \\
 &= 0.02 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.6 \\
 &= 0.038
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{mulher} \mid \text{acima do peso}) &= \frac{P(\text{mulher} \cap \text{acima do peso})}{P(\text{acima do peso})} = \\
 &= \frac{P(\text{acima do peso} \mid \text{mulher}) P(\text{mulher})}{P(\text{acima do peso})} = \frac{0.02 \cdot 0.4}{0.038} = \frac{4}{19}
 \end{aligned}$$

32. Mostre que $P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$.

Escrevendo B como uma união disjunta entre a parte de B que tem interseção com A e a parte que não tem interseção:

$$\begin{aligned}
 B &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\
 P(B) &= P((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \\
 P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\
 P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B)
 \end{aligned}$$

Então:

$$P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B)$$

33. Demonstre: Se $P(A \mid B) > P(A)$, então, $P(B \mid A) > P(B)$.

$$\begin{aligned}
 & P(A \mid B) > P(A) \\
 \Leftrightarrow & \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A) \\
 \Leftrightarrow & P(A \cap B) > P(A)P(B) \\
 \Leftrightarrow & \frac{P(A \cap B)}{P(A)} > P(B) \\
 \Leftrightarrow & P(B \mid A) > P(B)
 \end{aligned}$$

34. Uma caixa contém m bolas brancas e n vermelhas. dois jogadores se alternam a retirar, ao acaso, uma bola da caixa. as retiradas são com reposição e vence quem retirar a primeira bola branca. Mostre que quem inicia o jogo tem vantagem.

A probabilidade de ganhar em um certo turno é $\frac{m}{n+m}$, seja esse valor x , a probabilidade de não ganhar é então $1 - x$.

Na primeira retirada, o jogador 1 tem x chance de ganhar, já na segunda retirada, o jogador 2 tem $(1 - x)x$ chance de ganhar, pois é necessário que o jogador 1 não ganhe na retirada anterior, e assim por diante.

Retirada	Jogador	Probabilidade de ganhar
1	1	x
2	2	$(1 - x)x$
3	1	$(1 - x)^2x$
4	2	$(1 - x)^3x$
5	1	$(1 - x)^4x$
\vdots	\vdots	\vdots

A probabilidade total do jogador 1 ganhar é $P_1 = (1 - x)^0x + (1 - x)^2x + (1 - x)^4x + \dots$

A probabilidade total do jogador 2 ganhar é $P_2 = (1 - x)^1x + (1 - x)^3x + (1 - x)^5x + \dots$

Note que $P_2 = (1 - x)P_1$, como x é uma probabilidade entre 0 e 1, $1 - x$ também é entre 0 e 1, isso significa que P_2 sempre é menor ou igual que P_1 então o primeiro jogador sempre terá vantagem.

35. Demonstre que dois eventos com probabilidade positiva e disjuntos, nunca são independentes.

Temos que $P(A) > 0, P(B) > 0$ (probabilidade positiva) e $A \cap B = \emptyset$ (disjuntos).
Suponha que A e B sejam independentes:

$$P(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

Porém $P(A) > 0$, é uma contradição, então A e B não são independentes.

36. Demonstre as seguintes relações:

a) $A \subset B \iff A^c \supset B^c$;

b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$A \subset B$$

$$\iff \forall \omega \in A, \omega \in B$$

Definição de subconjunto

$$\iff \forall \omega \notin B, \omega \notin A$$

Negando a afirmação

$$\iff \forall \omega \in B^c, \omega \in A^c$$

$$\iff B^c \subset A^c$$

$$\iff A^c \supset B^c$$

$$(A \cup B) \cup C$$

$$\iff \{\omega \mid (\omega \in A \vee \omega \in B) \vee \omega \in C\}$$

Definição de união

$$\iff \{\omega \mid \omega \in A \vee (\omega \in B \vee \omega \in C)\}$$

operador \vee , “ou” é associativo.

$$\iff A \cup (B \cup C)$$