

Atividade 4

Convergência estocástica

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

3 de maio de 2023

1.

Seja (A_n) sequência de eventos em (Ω, \mathcal{F}, P) . $\forall n$, defina $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ (indicadora de A_n).

Mostre que $P(A_n) \rightarrow 0 \iff X_n \xrightarrow{P} 0$.

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{P} 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| > \varepsilon) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\mathbb{1}_{A_n}| > \varepsilon) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathbb{1}_{A_n} = 1) = 0 \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0 \\ &\iff P(A_n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias tal que $E(X_n) = \alpha$ para todo n e $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Mostre que $X_n \xrightarrow{P} \alpha$ (Dica: use a desigualdade clássica de Chebyshev).

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer:

$$\begin{aligned} P(|X_n - E(X_n)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) &\leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - \alpha| \geq \varepsilon) &= 0 \\ X_n &\xrightarrow{P} \alpha \end{aligned}$$

3.

Seja X, X_1, X_2, X_3, \dots sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n = \frac{n}{n+1}X$, para todo n .

Mostre que a sequência converge em média quadrática para zero se $E(X^2) < \infty$, mas não em caso contrário.

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{r=2} 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - 0|^2) = 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n^2) = 0 \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} E(X^2) = 0 \\ &\implies E(X^2) = 0 \end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{r=2} 0$ apenas quando $E(X^2) = 0$.

4.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias discretas tal que

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n$$

Prove que $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, $P(\limsup[X_n = n]) = 0$

$$\begin{aligned} P(\limsup[X_n = n]) = 0 &\implies P(\limsup[X_n > \varepsilon]) = 0 \\ &\implies P(\limsup[|X_n - 0| > \varepsilon]) = 0 \\ &\implies X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \end{aligned}$$

5.

Para $n \geq 1$, sejam $X_n \sim \text{Unif}(0,1)$ variáveis aleatórias i.i.d. Defina $Y_n = X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ e $U_n = nY_n$. Mostre que

a)

$$Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

$$\begin{array}{lll} F_{Y_n}(y) & P(Y_n > \varepsilon) & \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) \\ = 1 - (1 - F_{X_n}(y))^n & = 1 - P(Y_n < \varepsilon) & = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n > \varepsilon) \\ = 1 - (1 - y)^n & = 1 - F_{Y_n}(\varepsilon) & = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^n \\ & = (1 - \varepsilon)^n & = 0 \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| > \varepsilon) = 0, \text{ portanto } Y_n \xrightarrow{P} 0.$$

b)

$$U_n \xrightarrow{D} U, \text{ sendo } U \sim \text{Exp}(1).$$

$$\begin{array}{ll} F_{U_n}(u) = P(U_n \leq u) & \lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \\ = P(nY_n \leq u) & = 1 - e^{-u} \\ = P\left(Y_n \leq \frac{u}{n}\right) & = F_U(u) \\ = F_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right) & \\ = 1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{U_n}(u) = F_U(u), \text{ portanto } U_n \xrightarrow{D} U.$$

6.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias. Mostre que

a)

Se X_n não converge em probabilidade para 0, então $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \infty$

$$\begin{aligned} X_n \not\xrightarrow{P} 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \varepsilon) \neq 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Pois séries de sequências que não convergem para 0 divergem.

b)

Se as variáveis aleatórias são independentes e $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$, então, para todo $\varepsilon > 0$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty$

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 &\implies P(\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_n| > \varepsilon) = 0 \\ &\implies \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) < \infty \end{aligned}$$

Pois são independentes e pelo lema de Borel-Cantelli.

7.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias independentes tal que $X_n \sim \text{Bernoulli}(1/n)$, $\forall n$.

Mostre que $X_n \xrightarrow{P} 0$ porém X_n não converge para zero q.c.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - P(X_n \leq \varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - F(\varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 - (1 - 1/n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1/n \rightarrow \infty \\ &\Rightarrow P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) = 1 \neq 0 \\ &\Rightarrow X_n \not\xrightarrow{\text{q.c.}} 0\end{aligned}$$

Pois são independentes e pelo lema de Borel-Cantelli.

9.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias, sendo $X_n \sim \text{Unif}(a, b_n)$, $\forall n$. Se $b_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow \infty$, mostre que $X_n \xrightarrow{D} a$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b_n-a}, & \text{se } a \leq x < b_n \\ 1, & \text{se } x \geq b_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ 1, & \text{se } x \geq a \end{cases} \\ &= F_a(x) \\ &\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} a\end{aligned}$$

8.

Seja (Ω, \mathcal{F}, P) , em que $\Omega = (0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{(0, 1]}$ (borelianos no intervalo $(0, 1]$) e P é a medida de Lebesgue em $(0, 1]$, ou seja, para todo $0 < a < b \leq 1$, temos que $P((a, b]) = b - a$. Para cada n , seja $X_n = n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]}$.

a)

Mostre que $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0$.

$$\begin{aligned} P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) &= P(\limsup[n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} > \varepsilon]) \\ &= P(\limsup[\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} > \varepsilon/n]) \\ &= P(\limsup[\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]} = 1]) \\ &= P(\limsup(0, 1/n^2]) \\ &= P((0, 0]) \\ P(\limsup[|X_n| > \varepsilon]) &= 0 \\ &\implies X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 0 \end{aligned}$$

b)

Para que valores de r temos que $X_n \xrightarrow{r} 0$?

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E((n\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]})^r) & X_n \xrightarrow{r} 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n|^r) = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r E(\mathbb{1}_{(0, 1/n^2]}) & &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-2} = 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r P((0, 1/n^2]) & &\iff r - 2 < 0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^r / n^2 & &\iff r < 2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{r-2} & &\iff r = 1, \text{ pois } r \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$X_n \xrightarrow{r} 0$ apenas para $r = 1$.

10.

Seja (X_n) sequência de variáveis aleatórias, em que para cada n , X_n tem função de distribuição acumulada dada por

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases}$$

em que $\lambda > 0$. Mostre que $X_n \xrightarrow{D} X$, sendo $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{\lambda x}{n}\right)^n, & \text{se } 0 \leq x < n/\lambda \\ 1, & \text{se } x \geq n/\lambda \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \\ &= F_X(x) \\ &\Rightarrow X_n \xrightarrow{D} X \end{aligned}$$

$$\text{Pois } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{bn} = e^{ab}.$$