

# Atividade 4

## Particionamento do espaço de estados

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

28 de agosto de 2023

1) Considere a cadeia de Markov com espaço de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e matriz de transição.

a) Particione o espaço de estados

b) Calcule  $\rho_{0y}$ ,  $y = 0, 1, \dots, 6$ .

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Os conjuntos de estados  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{4, 5, 6\}$  só levam a outros estados dentro do seu conjunto, então  $C_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $C_2 = \{4, 5, 6\}$ .

O estado 0 leva a si mesmo e a estados dos conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , então ele é transiente.

$$\mathcal{S}_T = \{0\}, \quad \mathcal{S}_R = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{4, 5, 6\}$$

Como  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{4, 5, 6\}$  pertencem a uma mesma classe de equivalência,  $\rho_{0C_1} = \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03}$  e  $\rho_{0C_2} = \rho_{04} = \rho_{05} = \rho_{06}$ , Além de que  $\rho_{0C_2} = 1 - \rho_{0C_1}$  e  $\rho_{00} = 1/2$ .

$$\rho_{xC} = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_T} P(x, y) \rho_{yC}$$

$$\rho_{0C_1} = P(0, 1) + P(0, 2) + P(0, 3) + P(0, 0) \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 0 + 1/8 + 1/4 + 1/2 \cdot \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 3/4, \quad \rho_{0C_2} = 1/4$$

$$\rho_{00} = 1/2, \quad \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = 3/4, \quad \rho_{04} = \rho_{05} = \rho_{06} = 1/4$$

2) Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  e matriz de transição.

a) Particione o espaço de estados.

b) Calcule  $\rho_{0y}, y = 1, \dots, 5$ .

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Os conjuntos de estados  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{4, 5\}$  só levam a outros estados dentro do seu conjunto, então  $C_1 = \{1, 2, 3\}$  e  $C_2 = \{4, 5\}$ .

O estado 0 leva a si mesmo e a estados dos conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , então ele é transiente.

$$\mathcal{S}_T = \{0\}, \quad \mathcal{S}_R = C_1 \cup C_2, \quad C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{4, 5\}$$

---

Como  $\{1, 2, 3\}$  e  $\{4, 5\}$  pertencem a uma mesma classe de equivalência,  $\rho_{0C_1} = \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03}$  e  $\rho_{0C_2} = \rho_{04} = \rho_{05}$ , Além de que  $\rho_{0C_2} = 1 - \rho_{0C_1}$  e  $\rho_{00} = 1/3$ .

$$\rho_{xC} = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in \mathcal{S}_T} P(x, y) \rho_{yC}$$

$$\rho_{0C_1} = P(0, 1) + P(0, 2) + P(0, 3) + P(0, 0) \rho_{0C_1}$$

$$\rho_{0C_1} = 0 + 1/3 + 0 + 1/3 \cdot \rho_{0C_1}$$

$$2/3 \cdot \rho_{0C_1} = 1/3$$

$$\rho_{0C_1} = 1/2, \quad \rho_{0C_2} = 1/2$$

$$\rho_{00} = 1/3, \quad \rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = 1/2, \quad \rho_{04} = \rho_{05} = 1/2$$

3) Implemente um loop Monte Carlo para estimar numericamente as probabilidades de absorção de um conjunto irredutível  $C$  para as cadeias dos itens 1 e 2.

```
simular_de_0 <- function(n, transição) {  
  X <- "0"  
  for(i in 2:n) {  
    j <- X[i - 1]  
    p <- transição[j, ]  
    X[i] <- sample(names(p), size = 1, prob = p)  
  }  
  as.numeric(X)  
}  
  
absorção <- function(C, transição) {  
  simular_de_0(50, transição) |> # Simular até X50  
  replicate(n = 10000) |>      # 10000 vezes  
  apply(                        # para cada simulação  
    MARGIN = 2,  
    \((col) any(C %in% col)    # TRUE se C está na cadeia  
  ) |>  
  mean()                      # proporção de TRUEs  
}  
  
set.seed(65)  
  
absorção(c(1,2,3), P1)  
## [1] 0.7473  
absorção(c(4,5,6), P1)  
## [1] 0.25  
  
absorção(c(1,2,3), P2)  
## [1] 0.5003  
absorção(c(4,5), P2)  
## [1] 0.4973
```

4) Seja  $y \in \mathcal{S}_T$ . Usando o fato de que  $G(x, y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}$ , mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, y), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{S}$$

$1 + G(y, y) \geq G(x, y)$  pois:

$$1 + G(y, y) = 1 + \frac{\rho_{yy}}{1 - \rho_{yy}} = \frac{1}{1 - \rho_{yy}} \geq \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}} = G(x, y)$$

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) &= P^0(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, y) = P^0(x, y) + G(x, y) = \\ \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases} + G(x, y) &= \begin{cases} 1 + G(y, y), & \text{se } x = y \\ G(x, y), & \text{se } x \neq y \end{cases} \leq 1 + G(y, y) = \\ P^0(y, y) + \sum_{n=1}^{\infty} P^n(y, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, y) \\ \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, y) \end{aligned}$$

5) Na videoaula 3 mostramos que

$$P_x(T_y = 1) = P(x, y)$$

$$P_x(T_y = n + 1) = \sum_{z \neq y} P(x, z) P_z(T_y = n), \quad n \geq 1$$

Aplique esse resultado para provar a seguinte igualdade:

$$\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z \neq y} P(x, z) \rho_{zy}$$

$$\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty) = P_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y = n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \neq y} P(x, z) P_z(T_y = n - 1) =$$

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) \sum_{n=1}^{\infty} P_z(T_y = n - 1) =$$

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) P_z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n - 1\right)$$

O caso  $n = 1$  tem probabilidade 0, pois  $T_y > 0$ , então:

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) P_z\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} T_y = n - 1\right) =$$

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) P_z\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_y = n\right) =$$

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) P_z(T_y < \infty) =$$

$$\sum_{z \neq y} P(x, z) \rho_{zy}$$