UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Probabilidade II
Atividade 6
Paulo Ricardo Seganfredo Campana

Questão 1.

a)

X \ Y	-1	0	1	$P(X = x)$
-1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

b)

$E(X) = (-1)\frac{1}{5} + 0\frac{3}{5} + 1\frac{1}{5} = 0$

$E(Y) = (-1)\frac{1}{5} + 0\frac{3}{5} + 1\frac{1}{5} = 0$

$E(XY) = 0,$ pois todos os valores em que X e Y $\neq 0,\ P(X, Y) = 0$

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

c)

Não pois $P_{X,Y}(x, y) \neq P_X(x) \cdot P_Y(y),$ segue o caso com $(x, y) = (1, 1)$

$P_{X,Y}(1, 1) \neq P_X(1) \cdot P_Y(1)$

$0 \neq \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

Questão 2.

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ independentes, $X_i \sim Exp(\beta)$

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$M_{S_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$

$$= \frac{\beta}{\beta - t} \cdot \frac{\beta}{\beta - t} \cdots \frac{\beta}{\beta - t}$$
$$= \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n$$
$$= \text{f.g.m}(Y), \quad Y \sim Gama(n, \beta)$$

portanto S_n tem distribuição $Gama(n, \beta)$

Questão 3.

Y / X	0	1	2	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

a)

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

$$E(X) = 0 + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$E(X^2) = 0 + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$Var(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$
$$E(Y) = 0 + 1\frac{1}{8} + 2\frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$
$$E(Y^2) = 0 + 1\frac{1}{8} + 4\frac{3}{8} = \frac{13}{8}$$
$$Var(Y) = \frac{13}{8} - \frac{49}{64} = \frac{55}{64}$$
$$E(XY) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{16}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{55}{64}}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{\sqrt{55}}{16}} = \frac{1}{\sqrt{55}}$$

b)

$$Cov(3X, 2Y) = 6 \cdot Cov(X, Y) = \frac{3}{8}$$

$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X, X-Y) + Cov(Y, X-Y) =$$
$$Cov(X, X) - Cov(X, Y) + Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) =$$
$$Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{4} - \frac{55}{64} = -\frac{39}{64}$$

Questão 4.

a)

Y / X	1	2	$P(X = x)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$$P(XY \leq 3) = 1 - P(XY > 3)$$

XY é apenas maior que 3 quando $(X, Y) = (2, 2), \quad p(2, 2) = \frac{1}{2}$

$$P(XY \leq 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X + Y) > 2 = 1 - P(X + Y \leq 2))$$

$X + Y$ é apenas menor ou igual a 2 quando $(X, Y) = (1, 1), \quad p(1, 1) = \frac{1}{8}$

$$P(X + Y) > 2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

b)

Não pois $P_{X,Y}(x, y) \neq P_X(x) \cdot P_Y(y),$ segue o caso com $(x, y) = (1, 1)$

$P_{X,Y}(1, 1) \neq P_X(1) \cdot P_Y(1)$

$\frac{1}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$

Questão 5.

x	1	2	3	4	5	6
X	-1	-1	1	1	1	1

y	1	2	3	4	5	6
Y	1	0	1	0	1	0

a)

$$P_X(X = 1) = \frac{2}{3}$$

$$P_X(X = -1) = \frac{1}{3}$$

$$P_Y(Y = 1) = P_Y(Y = 0) = \frac{1}{2}$$

b)

$P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{6}$ apenas em 1

$P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{6}$ apenas em 2

$P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3}$ apenas em 3 e 5

$P(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{3}$ apenas em 4 e 6

Y / X	1	0	$P(X = x)$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$P(Y = y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1