

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Introdução à Álgebra Linear
Segunda Lista de Exercícios
Paulo Ricardo Segnanfredo Campana

Questão 1.

a)

Sendo $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2, 3x_1 + 3x_2 - y_1 - y_2)$$

$$(x_1 + 2y_1, 3x_1 - y_1) + (x_2 + 2y_2, 3x_2 - y_2) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1 + 2\alpha y_1, 3\alpha x_1 - \alpha y_1) = \alpha(x_1 + 2y_1, 3x_1 - y_1)$$

$$\alpha T(x_1, y_1) = \alpha T(u) \quad \blacksquare$$

b)

Sendo $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2 + z_1 + z_2, y_1 + y_2 - 4z_1 - 4z_2)$$

$$(2x_1 - y_1 + z_1, y_1 - 4z_1) + (2x_2 - y_2 + z_2, y_2 - 4z_2) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (2\alpha x_1 - \alpha y_1 + \alpha z_1, \alpha y_1 - 4\alpha z_1) = \alpha(2x_1 - y_1 + z_1, y_1 - 4z_1)$$

$$\alpha T(x_1, y_1, z_1) = \alpha T(u) \quad \blacksquare$$

c)

$$T(A + A') = (A + A') \cdot B = AB + A'B = T(A) + T(A')$$

$$T(\alpha A) = (\alpha A) \cdot B = \alpha(AB) = \alpha T(A) \quad \blacksquare$$

d)

$$T(A + B) = tr(A + B) = (a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + \dots + a_{nn} + b_{nn})$$

$$(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) = tr(A) + tr(B) = T(A) + T(B)$$

$$T(\alpha A) = tr(\alpha A) = (\alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \dots + \alpha a_{nn}) = \alpha(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = \alpha tr(A) = \alpha T(A) \quad \blacksquare$$

e)

$$\text{Não é transformação pois } T(0) = T(0 + 0x + 0x^2) = (1, x, x^2) \text{ ou seja, } T(0) \neq 0 \quad \blacksquare$$

Questão 2.

$$T(1, 1, 1) = (2, -1, 4) \quad T(1, 1, 0) = (3, 0, 1) \quad T(1, 0, 0) = (-1, 5, 1)$$

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) = (a + b + c, a + b, a)$$

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a + b = y \\ a = z \end{cases} \quad a = z, \quad b = y - z, \quad c = x - y$$

$$T(x, y, z) = zT(1, 1, 1) + (y - z)T(1, 1, 0) + (x - y)T(1, 0, 0)$$

$$z(2, -1, 4) + (y - z)(3, 0, 1) + (x - y)T(-1, 5, 1)$$

$$(2z, -z, 4z) + (3y - 3z, 0, y - z) + (-x + y, 5x - 5y, x - y) = (-x + 4y - z, 5x - 5y - z, x + 3z)$$

$$T(2, 4, -1) = (15, -9, -1)$$

Questão 3.

$$T(2v_1 - 4v_2 + 5v_3) = T(2v_1) + T(-4v_2) + T(5v_3) = 2T(v_1) - 4T(v_2) + 5T(v_3)$$

$$2(1, -1, 2) - 4(0, 3, 2) + 5(-3, 1, 2) = (2, -2, 4) + (0, -12, -8) + (-15, 5, 10) = (-13, -9, 6)$$

Questão 4.

n^n pois a transformação T pode levar qualquer v_i em qualquer v_j incluindo $i = j$, ou seja, cada vetor v_i pode ser mapeado a n diferentes vetores, e existem n vetores v_i , portanto existem n^n transformações.

Questão 5.

a)

$$Im(T) = \{(a, b, c); a = (4x + y - 2z - 3t), b = (2x + y + z - 4t), c = (6x - 9z + 9t)\}$$

$$\{(4x + y - 2z - 3t, 2x + y + z - 4t, 6x - 9z + 9t) \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$\{x(4, 2, 6) + y(1, 1, 0) + z(-2, 1, -9) + t(-3, -4, 9) \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

$$[(4, 2, 6), (1, 1, 0), (-2, 1, -9), (-3, -4, 9)]$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -9 \\ -3 & -4 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -9 \\ 0 & -7 & 36 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Im(T) = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3, \text{ os três vetores estão dentro de } Im(T)$$

b)

$$N(T) \implies (4x + y - 2z - 3t, 2x + y + z - 4t, 6x - 9z + 9t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & -9 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \implies t = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 8x + 3y = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \implies [(8\alpha, -3\alpha, 12\alpha, 0)]$$

$$\dim N + \dim \text{Im} = \dim \mathbb{R}^4 \quad 1 + 3 = 4 \quad \checkmark$$

c)

$$\text{Apenas } u = (3, -8, 2, 0) \text{ pois } (12 - 8 - 4 - 0, 6 - 8 + 2 + 0, 18 - 18 + 0) = (0, 0, 0)$$

Questão 6.

$$T(P_2) = T(a + bx + cx^2) = x(a + bx + cx^2) = ax + bx^2 + cx^3$$

$$N(T) \implies ax + bx^2 + cx^3 = 0 \text{ possui única solução trivial } (a, b, c) = (0, 0, 0) \quad N(T) = 0$$

$$\text{Im}(T) \implies \{ax + bx^2 + cx^3\} = \{a(x) + b(x^2) + c(x^3)\} = [(x, x^2, x^3)]$$

Boldrini - Capítulo 5

Questão 3.

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (a, b, c) \quad x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) =$$

$$x(2, 0) + y(1, 1) + z(0, -1) = (2x + y, y - z) = (3, 2)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad z = 1 - 2x, \quad y = 3 - 2x \quad v = (x, 3 - 2x, 1 - 2x)$$

Questão 4.

a)

$$(x, y) = a(1, 1) + b(0, -2) = (a, a - 2b) \quad x = a, \quad y = x - 2b, \quad b = \frac{x - y}{2}$$

$$T(x, y) = xT(1, 1) + \left(\frac{x - y}{2}\right)T(0, -2) = x(3, 2, 1) + \left(\frac{x - y}{2}\right)(0, 1, 0) = \left(3x, \frac{5x - y}{2}, x\right)$$

b)

$$T(1, 0) = \left(3, \frac{5}{2}, 1\right) \quad T(0, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

c)

$$(x, y, z) = a(3, 2, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = (3a, 2a + b, a + c)$$

$$a = \frac{x}{3}, \quad b = y - \frac{2x}{3}, \quad c = z - \frac{x}{3}$$

$$S(x, y, z) = \frac{x}{3}S(3, 2, 1) + (y - \frac{2x}{3})S(0, 1, 0) + (z - \frac{x}{3})S(0, 0, 1)$$

$$\frac{x}{3}(1, 1) + (y - \frac{2x}{3})(0, -2) + (z - \frac{x}{3})(0, 0) = (\frac{x}{3}, -2y + \frac{5x}{3})$$

d)

$$P(x, y) = S(T(x, y)) = S(3x, \frac{5x - y}{2}, x) = (x, y)$$

Questão 5.

$$T(x, y) = (y, x)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 10.

$$R = S(T) \quad T = S^{-1}(R)$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 4 \\ -13 & 2 & -15 \end{bmatrix}$$

Questão 11.

a)

$$(x, y) = a(1, -1) + b(0, 2) = (a, 2b - a) \quad a = x, \quad b = \frac{x + y}{2}$$

$$[T]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} [V]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{x + y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3x + y}{2} \\ -\frac{x - y}{2} \end{bmatrix}$$

$$T = x(1, 0, -1) + (\frac{3x + y}{2})(0, 1, 2) + (\frac{-x - y}{2})(1, 2, 0) = (\frac{x - y}{2}, \frac{x - y}{2}, 2x - y)$$

b)

$$S(1, -1) = (-2, 2, 1) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 2) + c(1, 2, 0) = (a + c, b + 2c, 2b - a)$$

$$\begin{cases} a + c = -2 \\ b + 2c = 2 \\ 2b - a = 1 \end{cases} \quad a = \frac{-11}{3}, \quad b = \frac{-4}{3}, \quad c = \frac{5}{3}$$

$$S(1, -1) = (4, -2, 0) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, 2) + c(1, 2, 0) = (a + c, b + 2c, 2b - a)$$

$$\begin{cases} a + c = 4 \\ b + 2c = -2 \\ 2b - a = 0 \end{cases} \quad a = \frac{20}{3}, \quad b = \frac{10}{3}, \quad c = \frac{-8}{3}$$

$$[S]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{3} & \frac{20}{3} \\ \frac{-4}{5} & \frac{10}{-8} \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix}$$

c)

$$[T]_{\gamma} = [T]_{\gamma}^{\alpha} [T]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{x+y}{2} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \{(1, 1, 1), (x, y, z), (-1, -1, 2)\}$$

Questão 14.

a)

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 0) \quad T(0, 1, 0, 0) = (0, 1) \quad T(0, 0, 1, 0) = (0, 1) \quad T(0, 0, 0, 1) = (1, 0)$$

$$(1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) \quad (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$S(x, y) = \begin{bmatrix} 2x+y & x-y \\ -x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = y \quad x = 0 \quad y = 1 \quad \text{impossível.}$$

Questão 19.

a) $z = 0 \quad x = y \quad [(1, 1, 0)]$

b) $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim \mathbb{R}^3 \quad 1 + \dim Im(T) = 3 \quad \dim Im(T) = 2$

c) não pois $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$

d) Núcleo é uma reta no \mathbb{R}^3 e Imagem é um plano no \mathbb{R}^3

Questão 20.

a) $T(x, y, z) = (y, z)$

b) não existe pois $\dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2$

c) $L(x, y, z) = (0, 0)$

d) $M(x, y) = (0, 0)$

e) $H(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Questão 22.

$$D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (6a_3x + 2a_2)$$

$$D(a + b) = (6(a_3 + b_3)x + 2(a_2 + b_2)) = (6a_3x + 2a_2) + (6b_3x + 2b_2) = D(a) + D(b)$$

$$D(\alpha a) = (6\alpha a_3x + 2\alpha a_2) = \alpha(6a_3x + 2a_2) = \alpha D(a)$$

$$N(D) = (0 + 0 + a_1x + a_0) = \{x, 1\}$$

Segunda lista

Questão 1.

a) $T(x, y) = (2x + 2x, x + 3y)$ $T(-2, 1) = (-2, 1)$ $T(v) = \lambda v$ ($\lambda = 1$) ✓

b) $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$ $T(1, 1, 2) = (4, 4, 8)$ $T(v) = \lambda v$ ($\lambda = 4$) ✓

Questão 2.

a) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda = \{2, 3\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \quad x = 2y \quad v = [(2, 1)]$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \quad x = y \quad v = [(1, 1)]$$

b) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda \notin \mathbb{R}$$

c) $[T]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2(1 - \lambda)$$

$$(1 - \lambda)((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2) \quad (1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) \quad \lambda = \{1, 4\}$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad z = -y \quad v = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)]$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad 2y = z, y = x \quad v = [(1, 1, 2)]$$

Questão 3.

a)

$$T(v) = \lambda v \quad T(v) = 0 \quad v \in N(T) \quad N(T) \neq 0$$

Se $N(T) \neq 0$, T não é injetora, portanto não é bijetora e não é invertível.

b) $\det A = \det A^t \longrightarrow \det(A - I\lambda) = \det(A^t - I\lambda) = 0$ terão as mesmas soluções.

c) O determinante para matrizes triangulares e diagonais é o produto da diagonal principal.

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0 \quad \lambda = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$$

Questão 4.

a)

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) \dots (1 - \lambda) = 0 \quad \lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \\ 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \\ \vdots \\ 0a + 0b + \dots + 0z = 0 \end{cases}$$

$$v = [(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)] = \mathbb{R}^n$$

b)

$$T(\alpha u - \beta v) = \alpha T(u) - \beta T(v) = \alpha(\lambda u) - \beta(\lambda v)$$

$$T(\alpha u - \beta v) = \lambda(\alpha u - \beta v)$$

Boldrini - Capítulo 6

Questão 9.

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \{-1, 1\}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \quad y = -x \quad v = [(1, -1)]$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad y = 0 \quad v = [(1, 0)]$$

Questão 11.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \quad \lambda = 1$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad z = 0, y = 0 \quad v = [(1, 0, 0)]$$

Questão 14.

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 2 + 2 - (8 - 4\lambda + 1 - \lambda + 1 - \lambda)$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) - 6(1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 6) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda) = 0 \quad \lambda = \{-1, 1, 4\}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad y = 0, z = -x \quad v = [(1, 0, -1)]$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad y = -2x, z = x \quad v = [(1, -2, 1)]$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad y = z, x = y \quad v = [(1, 1, 1)]$$

Questão 18.

$$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda-6) = 0 \quad \lambda = \{-1, 1, 6\}$$

$$\lambda = -1 \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 3x + z = 0 \\ 3y + t = 0 \\ 12x + 4z = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases} \quad y = t = 0, z = -3x \quad v = [(1, 0, -3, 0)]$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ 12x + 2z = 0 \\ -y - t = 0 \end{cases} \quad z = -x = 0, t = -y \quad v = [(0, 1, 0, -1)]$$

$$\lambda = 6 \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \begin{cases} -4x + z = 0 \\ -4y + t = 0 \\ 12x - 3z = 0 \\ -y - 6t = 0 \end{cases} \quad t = 4y = 0, z = 4x \quad v = [(1, 0, 4, 0)]$$

Questão 20.

a) $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$

b)

$$v = \{v \in V; T(v) = \lambda v\} \cup \{0\}, x, y \in v$$

$$T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y) = \lambda x + \alpha \lambda y = \lambda(x + \alpha y) \quad x + \alpha y \in v, \forall v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Questão 25.

a) $T(v) = \lambda v \quad T(v) = 0 \quad v \in N(T) \quad N(T) \neq 0 \longrightarrow T \text{ não é injetora.}$

b) Sim, se T não é injetora, $\exists v \in V \neq 0; v \in N(T) \longrightarrow T(v) = 0 \longrightarrow 0 = 0v \longrightarrow \lambda = 0$

Boldrini - Capítulo 7

Questão 3.

a)

$$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2-\lambda)^3(3-\lambda) = 0 \quad \lambda = \{2, 3\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad v = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \quad v = (0, 0, 0, 1)$$

$$v = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)] \quad \text{não é base do } \mathbb{R}^4 \text{ portanto não é diagonalizável.}$$

b)

$$m(x) = (2-x)^2(3-x) = 0 \text{ pois } m(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Questão 5.

a)

$$(1-\lambda)(a-\lambda) \quad \lambda = \{1, a\} \quad a \neq 1 \text{ pois } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ não é diagonalizável.}$$

b)

$$(1-\lambda)^2 \quad \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{só é diagonalizável para } a = 0$$

Questão 6.

a)

$$(2 - \lambda)(-3 - \lambda)^2 \quad \lambda = \{2, -3\}$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{cases} z = 0 \\ -5y + z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases} \quad v = (1, 0, 0)$$

$$\lambda = -3 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} -x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad v = (0, 1, 0)$$

b)

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -\frac{5}{2} \\ -1 & -4 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2 - \lambda)(-3 - \lambda)^2 \quad \text{o mesmo polinômio.}$$

c) Não existe, pois T não é diagonalizável já que os autovetores não formam base do \mathbb{R}^3 .

Questão 11.

$$a) \quad T(v) = T(T(v)) \quad \lambda v = \lambda^2 v \quad (\lambda^2 - \lambda)v = 0 \quad \lambda = \{0, 1\}$$

b) A matriz identidade pois $T(T(x, y)) = T(x, y) = (x, y)$ e $\lambda = 1$

c) O polinômio característico sera da forma $-\lambda^n(1 - \lambda)^m$ e o polinômio mínimo da forma $-x(1 - x) = x(x - 1)$ ou seja, fatores lineares distintos, portanto é diagonalizável.

Questão 12.

$$\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 5(3 - \lambda) = 0$$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 5 = 0 \quad (3 - \lambda)(\lambda^2 + 1) \quad \lambda = 3$$

$$\lambda = 3 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{cases} -y - 5z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \quad y = z = 0 \quad v = (1, 0, 0)$$

$$\lambda = i \quad \begin{vmatrix} 3 - i & 0 & 0 \\ 0 & 2 - i & -5 \\ 0 & 1 & -2 - i \end{vmatrix} \begin{cases} (3 - i)x = 0 \\ (2 - i)y - 5z = 0 \end{cases} \quad y = z = 0 \quad v = (1, 0, 0)$$

Que por si só não forma base, portanto não é diagonalizável, porém há soluções complexas para $(\lambda^2 + 1)$, $\lambda = \pm i$, o autovetor $(1, 0, 0)$ junto com os autovetores de $\lambda = \pm i$ formam base portanto A pode ser diagonalizável com uma base complexa.