Atividade 5

Cadeias Martingale e cadeias de nascimento e morte

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

22 de setembro de 2023

1) Considere a ruina do jogador com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$ e função de transição (para $0 < x < d$)

$$\mathrm{P}(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{se } y = x - 1 \text{ ou } y = x + 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que essa cadeia de Markov é um martingale.

Para $x = 0$, $\mathrm{P}(x, y) \neq 0$ apenas para $y = 0$, onde é igual a 1.

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} y\mathrm{P}(0, y) = 0\mathrm{P}(0, 0) = 0$$

Para $x = d$, $\mathrm{P}(x, y) \neq 0$ apenas para $y = d$, onde é igual a 1.

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} y\mathrm{P}(d, y) = d\mathrm{P}(d, d) = d$$

Para $0 < x < d$:

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} y\mathrm{P}(x, y) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \begin{cases} y/2, & \text{se } y = x - 1 \text{ ou } y = x + 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} =$$

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} \begin{cases} y/2, & \text{se } y = x - 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} + \sum_{y \in \mathcal{S}} \begin{cases} y/2, & \text{se } y = x + 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} =$$

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2} = x$$

Como para todos os casos, temos a propriedade $\sum_{y \in \mathcal{S}} y\mathrm{P}(x, y) = x$, então a cadeia é martigale.

2) Uma cadeia de Markov sobre o espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots, 2d\}$ muito usada em genética tem função de transição dada por

$$\mathrm{P}(x,y) = \binom{2d}{y}\left(\frac{x}{2d}\right)^y\left(1-\frac{x}{2d}\right)^{2d-y}.$$

Calcule $\rho_{\{0\}}(x), 0 < x < 2d$.

Para $0 < x < 2d$, $\sum_{y\in\mathcal{S}} y\mathrm{P}(x,y) = x$.
Para $x = 0$:

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} y\mathrm{P}(x,y) = \sum_{y\in\mathcal{S}} y\binom{2d}{y}0^y 1^{2d-y} = 0$$

Para $x = 2d$:

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} y\mathrm{P}(x,y) = 2d\mathrm{P}(2d,2d) + \sum_{y=0}^{2d-1} y\mathrm{P}(2d,y) =$$

$$2d + \sum_{y=0}^{2d-1} y\binom{2d}{y}1^y 0^{2d-y} = 2d$$

Como para todo $x \in \mathcal{S}$, $\sum\limits_{y\in\mathcal{S}} y\mathrm{P}(x,y) = x$, esta é uma cadeia martingale.

Então $\rho_{\{0\}}(x) = \rho_{x0}$ pode ser calculado como $1 - \dfrac{x}{2d}$.

3) Considere a ruina do jogador com espaço de estados $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \cdots, d\}$.
Calcule $\mathrm{P}_x(T_0 < T_d)$, para $0 < x < d$.

Como a ruína do jogador se trata de uma cadeia de nascimento e morte com p_x e q_x constantes:

$$\mathrm{P}_x(T_0 < T_d) = u(x) = \sum_{n=x}^{d-1} \gamma_n \Big/ \sum_{n=0}^{d-1} \gamma_n$$

Onde $\gamma_n = \dfrac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_1 p_2 \cdots p_n} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$

$$\sum_{n=0}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1 - (q/p)^d}{1 - q/p}$$

$$\sum_{n=x}^{d-1} = \sum_{n=0}^{d-1} - \sum_{n=0}^{x-1}$$

$$\sum_{n=x}^{d-1} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1 - (q/p)^d}{1 - q/p} - \frac{1 - (q/p)^x}{1 - q/p} = \frac{(q/p)^x - (q/p)^d}{1 - q/p}$$

$$u(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^d}{1 - q/p} \Big/ \frac{1 - (q/p)^d}{1 - q/p}$$

$$\mathrm{P}_x(T_0 < T_d) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^d}{1 - (q/p)^d}$$

4) Considere uma cadeia de nascimento e morte irredutível sobre os inteiros não negativos.
Prove que se $p_x \leqslant q_x$ para todo $x \geqslant 1$, então a cadeia é recorrente.

$$p_x \leqslant q_x \implies \frac{q_x}{p_x} \geqslant 1 \implies \frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_1 p_2 \cdots p_n} \geqslant 1 \implies \gamma_n \geqslant 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$$

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty$ então a cadeia é recorrente.

5) Na roleta, o jogador tem chance 9/19 de ganhar uma aposta. Um jogador faz apostas de um real e decide sair do jogo se ele ficar com um real a mais ou perder seu capital inicial de R$ 1000. Calcule a probabilidade do jogador sair do jogo por ter perdido seu capital inicial.

$\mathcal{S} = \{0, 1, \cdots, 1001\}$, $X_0 = 1000$, $p_x = 9/19$, $q_x = 10/19$, $\gamma_n = (10/9)^n$

$$\mathrm{P}_{1000}(T_0 < T_{1001}) = u(1000) = \sum_{n=1000}^{1000} \gamma_n \Big/ \sum_{n=0}^{1000} \gamma_n$$

$$\sum_{n=1000}^{1000} \gamma_n = \gamma_{1000} = (10/9)^{1000}$$

$$\sum_{n=0}^{1000} \gamma_n = \frac{1 - (10/9)^{1001}}{1 - (10/9)}$$

$$u(1000) = (10/9)^{1000} \frac{1 - (10/9)}{1 - (10/9)^{1001}}$$

$$\mathrm{P}_{1000}(T_0 < T_{1001}) \approx 0.1$$