Atividade 3

Sequências de eventos e o lema de Borel-Cantelli.

Paulo Ricardo Seganfredo Campana

19 de abril de 2023

1.

Sejam (A_n) e (B_n) sequências de eventos no mesmo espaço de probabilidade. Prove que:

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n) = p \\ \implies \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B_n) = p\end{gathered}$$

Note que $\mathrm{P}(A_n \cap B_n)$ está limitado entre $\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(B_n) - 1$ e $\mathrm{P}(B_n)$ pois:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_n \cap B_n) &= \mathrm{P}((A_n^c \cup B_n^c)^c) \\ &= 1 - \mathrm{P}(A_n^c \cup B_n^c) \\ &\geq 1 - (\mathrm{P}(A_n^c) + \mathrm{P}(B_n^c)) \\ &= 1 - (1 - \mathrm{P}(A_n) + 1 - \mathrm{P}(B_n)) \\ &= \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(B_n) - 1\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}A_n \cap B_n \subset B_n \\ \mathrm{P}(A_n \cap B_n) \leq \mathrm{P}(B_n)\end{gathered}$$

Pelas leis de Morgan e subaditividade, portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(B_n) - 1 \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B_n) &\leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(B_n) \\ 1 + p - 1 \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B_n) &\leq p \\ p \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B_n) &\leq p\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n \cap B_n) = p$ Pelo teorema do sandwiche

2.

Sejam (A_n) e (B_n) sequências de eventos no mesmo espaço de probabilidade. Mostre que:

a)

$(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \liminf A_n^c$$

b)

$(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$

$$(\liminf A_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \limsup A_n^c$$

c)

$\limsup(A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$

$$\begin{aligned}
&\omega \in \limsup(A_n \cap B_n) \\
&\omega \in A_k \cap B_k \text{ para índices infinitos} \\
&\omega \in A_k \text{ e } \omega \in B_k \text{ para índices infinitos} \\
&\omega \in (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)
\end{aligned}$$

Porém, seja:

$$A_n = \begin{cases} \{0\}, & n \text{ impar} \\ \{1\}, & n \text{ par} \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} \{1\}, & n \text{ impar} \\ \{0\}, & n \text{ par} \end{cases} \qquad A_n \cap B_n = \emptyset,\ \forall n$$

$$\limsup(A_n \cap B_n) = \limsup \emptyset = \emptyset$$
$$\limsup A_n = \limsup B_n = \{0,1\}$$
$$\limsup(A_n \cup B_n) \not\supseteq (\limsup A_n) \cup (\sup\inf B_n)$$

d)

$\limsup(A_n \cup B_n) = (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$

$$\begin{aligned} & \omega \in (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) \\ \iff & \omega \in A_k \text{ ou } \omega \in B_k \text{ para índices infinitos} \\ \iff & \omega \in A_k \cup B_k \text{ para índices infinitos} \\ \iff & \omega \in \limsup(A_n \cup B_n) \end{aligned}$$

e)

$\liminf(A_n \cap B_n) = (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n)$

$$\begin{aligned} & \omega \in (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) \\ \iff & \omega \notin A_k \text{ e } \omega \notin B_k \text{ para índices finitos} \\ \iff & \omega \in A_k,\ \forall k > N_A \text{ e } \omega \in B_k,\ \forall k > N_B \\ \iff & \omega \in A_k \cap B_k,\ \forall k > \max\{N_A, N_B\} \\ \iff & \omega \notin A_k \cap B_k,\ \text{para índicies finitos} \\ \iff & \omega \in \liminf(A_n \cap B_n) \end{aligned}$$

f)

$\liminf(A_n \cup B_n) \supset (\liminf A_n) \cup (\liminf B_n)$

$$\begin{aligned} & \omega \in (\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) \\ & \omega \notin A_k \text{ ou } \omega \notin B_k \text{ para índices finitos} \\ & \omega \in A_k,\ \forall k > N_A \text{ ou } \omega \in B_k,\ \forall k > N_B \\ & \omega \in A_k \cup B_k,\ \forall k > \max\{N_A, N_B\} \\ & \omega \notin A_k \cup B_k,\ \text{para índicies finitos} \\ & \omega \in \liminf(A_n \cup B_n) \end{aligned}$$

Porém, seja:

$$A_n = \begin{cases} \{0\},\ n \text{ impar} \\ \{1\},\ n \text{ par} \end{cases} \qquad B_n = \begin{cases} \{1\},\ n \text{ impar} \\ \{0\},\ n \text{ par} \end{cases} \qquad A_n \cup B_n = \{0,1\},\ \forall n$$

$$\liminf(A_n \cup B_n) = \liminf\{0,1\} = \{0,1\}$$
$$\liminf A_n = \liminf B_n = \emptyset$$
$$\liminf(A_n \cup B_n) \not\subseteq (\liminf A_n) \cup (\liminf B_n)$$

3.

$\lim_{n\to\infty} A_n = A,\ \lim_{n\to\infty} B_n = B$, mostre que:

Note que para qualquer sequência X_n convergente: $\lim_{n\to\infty} X_n = \limsup X_n = \liminf X_n$

a)

$\lim_{n\to\infty} A_n^c = A^c$

$$\begin{aligned} \limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c = A^c = (\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c \\ \limsup A_n^c = A^c = \liminf A_n^c \\ \lim_{n\to\infty} A_n = A^c \end{aligned}$$

b)

$\lim_{n\to\infty} A_n \cup B_n = A \cup B$

$$\begin{aligned} \limsup(A_n \cup B_n) &= (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n) = A \cup B \\ \liminf(A_n \cup B_n) &\supset (\liminf A_n) \cup (\liminf B_n) = A \cup B \\ \liminf(A_n \cup B_n) &\supset \limsup(A_n \cup B_n) \\ \text{porém } \liminf(A_n \cup B_n) &\subset \limsup(A_n \cup B_n) \\ \liminf(A_n \cup B_n) &= \limsup(A_n \cup B_n) \end{aligned}$$

c)

$\lim_{n\to\infty} A_n \cap B_n = A \cap B$

$$\begin{aligned} \liminf(A_n \cap B_n) &= (\liminf A_n) \cap (\liminf B_n) = A \cap B \\ \limsup(A_n \cap B_n) &\subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) = A \cap B \\ \liminf(A_n \cap B_n) &\supset \limsup(A_n \cap B_n) \\ \text{porém } \liminf(A_n \cap B_n) &\subset \limsup(A_n \cap B_n) \\ \liminf(A_n \cap B_n) &= \limsup(A_n \cap B_n) \end{aligned}$$

4.

Seja (A_n) sequência de eventos no mesmo espaço de probabilidade tal que $\mathrm{P}(A_n) \geq c > 0,\ \forall n$. Mostre que $\mathrm{P}(\limsup A_n) \geq c$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_n) &\geq c \\ \limsup \mathrm{P}(A_n) &\geq \limsup c \\ \limsup \mathrm{P}(A_n) &\geq c \end{aligned}$$

Porém, $\mathrm{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathrm{P}(A_n) \leq \limsup \mathrm{P}(A_n) \leq \mathrm{P}(\limsup A_n)$

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(\limsup A_n) \geq \limsup \mathrm{P}(A_n) \geq c \\ &\mathrm{P}(\limsup A_n) \geq c \end{aligned}$$

5.

Achar o limite das seguintes sequências de eventos:

a)

$$A_n = \left[-\frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n}\right),\ \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0,\ -\frac{1}{n} \uparrow 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1,\ \frac{n+1}{n} \downarrow 1$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$$

b)

$$A_n = \left(0,\ \frac{1}{n}\right),\ \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \frac{1}{n} \downarrow 0$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (0, 0) = \emptyset$$

c)

$$A_n = \left(-\frac{n}{2},\ \frac{n^2}{n+1}\right),\ \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n}{2} = -\infty,\ -\frac{n}{2} \downarrow -\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}} = +\infty,\ \frac{n^2}{n+1} \uparrow +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (-\infty, +\infty)$$

6.

Calcule $\mathrm{P}(\limsup A_n)$ nos seguintes casos:

a)

$\mathrm{P}(A_n) = \dfrac{1}{n^2},\ \forall n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Então pelo lema de Borel-Cantelli, $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$

b)

$\mathrm{P}(A_n) = \dfrac{1}{n},\ \forall n,\ A_n$ mutualmente independentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

E os eventos A_n são mutualmente independentes, então pelo lema de Borel-Cantelli, $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 1$

7.

Suponha que uma moeda honesta é lançada de forma independente repetidas vezes. Qual a probabilidade de se obter cara de forma sucessiva infinitamente?

Defina A_n como o evento de se obter cara nos primeiros n lançamentos: $\mathrm{P}(A_n) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 < \infty$$

Então $\mathrm{P}(\limsup A_n)$, ou a probabilidade de se obter cara de forma sucessiva infinitamente é zero pelo lema de Borel-Cantelli.

8.

Considere o espaço amostral $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ com $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathrm{P}(\Omega)$ (partes de Ω) e $\mathrm{P}(\{n\}) = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $\forall n$. Para cada n, considere o evento $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$. Mostre que:

a)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$ diverge

Note que A_n pode ser representado como uma união disjunta: $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} \{k\}$.

$$\mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \{k\}\right) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(\{k\}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+N} + \\ - \frac{1}{n+1} - \dots - \frac{1}{n+N} - \frac{1}{n+N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+N+1} = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

b)

$\mathrm{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$

Note que A_n é monótona decrescente: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ e toda sequência de eventos monótona converge.

$$\mathrm{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = \mathrm{P}(\limsup A_n) = \mathrm{P}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

c)

Isso contradiz o lema de Borel-Cantelli?

Não, a série das probabilidades ser divergente só implica que $\mathrm{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$ pelo lema de Borel-Cantelli quando os eventos A_n são mutualmente independentes.

$$\mathrm{P}(A_3|A_2) = \frac{\mathrm{P}(A_3 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_2)} = \frac{\mathrm{P}(A_3)}{\mathrm{P}(A_2)} \neq \mathrm{P}(A_3), \text{ não são independentes.}$$