Lista 1

Probabilidade I - 2023.1

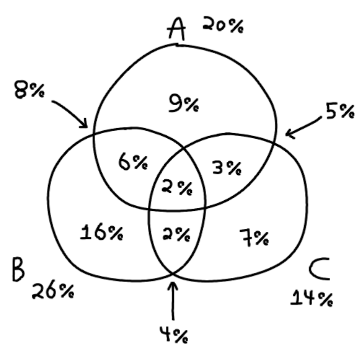
19. Uma válvula a vácuo pode provir de três fabricantes, com probabilidades $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.50$ e $p_3 = 0.25$. As probabilidades de que, durante determinado período de tempo, a válvula funcione bem são, respectivamente, 0.1, 0.2 e 0.4 para cada um dos fabricantes. Calcule a probabilidade de que uma válvula escolhida ao acaso funcione bem durante o período de tempo especificado.

Válvula	V_1	V_2	V_3
P(válvula)	0.25	0.50	0.25
P(funcionar | válvula)	0.10	0.20	0.40

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{funcionar}) \\
&= \mathrm{P}(\text{funcionar} \cap V_1) + \mathrm{P}(\text{funcionar} \cap V_2) + \mathrm{P}(\text{funcionar} \cap V_3) \\
&= \mathrm{P}(\text{funcionar} \mid V_1)\,\mathrm{P}(V_1) + \mathrm{P}(\text{funcionar} \mid V_2)\,\mathrm{P}(V_2) + \mathrm{P}(\text{funcionar} \mid V_3)\,\mathrm{P}(V_3) \\
&= 0.10 \cdot 0.25 + 0.20 \cdot 0.50 + 0.40 \cdot 0.25 \\
&= 0.225
\end{aligned}$$

20. Três jornais A, B e C são publicados em uma cidade e uma recente pesquisa entre os leitores indica o seguinte: 20% lêem A; 26% lêem B; 14% lêem C; 8% lêem A e B, 5% lêem A e C; 2% lêem A, B e C e 4% lêem B e C. Para um adulto escolhido ao acaso, calcule a probabilidade de que:

a) Ele não leia qualquer dos jornais.
b) Ele leia exatamente um dos jornais.
c) Ele leia pelo menos um dos jornais.



a) $1 - 0.09 - 0.16 - 0.07 - 0.06 - 0.02 - 0.03 - 0.02 = 0.55$
b) $0.09 + 0.16 + 0.07 = 0.32$
c) $0.09 + 0.16 + 0.07 + 0.06 + 0.02 + 0.03 + 0.02 = 0.55$

21. Uma fábrica produz uma peça através de duas operações: Inicialmente a peça é moldada numa máquina M e, em seguida, passa por uma de duas impressoras, I_1 ou I_2, sendo que 70% das peças são impressas em I_1. A probabilidade de uma peça apresentar defeito de moldagem é 0.03. Além disso, a probabilidade de surgir um defeito de impressão é de 0.05 para I_1 e de 0.02 para I_2. Note que os defeitos de moldagem e de impressão são independentes entre si. No final de um dia, retira-se daprodução total da fábrica uma peça ao acaso.
a) Qual a probabilidade da peça apresentar um defeito qualquer?
b) Supondo que a peça apresenta um defeito de impressão, qual a probabilidade de ter sido impressa em I_1.

$\mathrm{P}(\text{defeito de moldagem}) = 0.03$

Impressora	I_1	I_2
$\mathrm{P}(\text{impressora})$	0.70	0.30
$\mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \mid \text{impressora})$	0.05	0.02

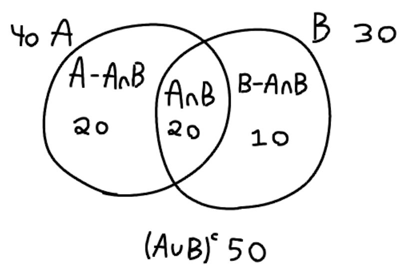
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{defeito}) \\
&= \mathrm{P}(\text{defeito de moldagem} \cup \text{defeito de impressão}) && \text{União disjunta} \\
&= \mathrm{P}(\text{defeito de moldagem}) + \mathrm{P}(\text{defeito de impressão}) \\
&= 0.03 + \mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \cap I_1) + \mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \cap I_2) \\
&= 0.03 + \mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \mid I_1)\,\mathrm{P}(I_1) + \mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \mid I_2)\,\mathrm{P}(I_2) \\
&= 0.03 + 0.05 \cdot 0.70 + 0.02 \cdot 0.30 \\
&= 0.071
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{P}(I_1 \mid \text{defeito de impressão}) = \frac{\mathrm{P}(I_1 \cap \text{defeito de impressão})}{\mathrm{P}(\text{defeito de impressão})} =
$$

$$
\frac{\mathrm{P}(\text{defeito de impressão} \mid I_1)\,\mathrm{P}(I_1)}{\mathrm{P}(\text{defeito de impressão})} = \frac{0.05 \cdot 0.70}{0.041} = \frac{35}{41}
$$

22. Em uma seleção para uma vaga de estatístico de uma grande empresa verificou-se que dos 100 candidatos 40 tinham experiência anterior e 30 possuíam curso de especialização. Vinte dos candidatos possuíam tanto experiência profissional como também algum curso de especialização. Escolhendo um candidato ao acaso, qual a probabilidade de que:
a) Ele tenha experiência ou algum curso de especialização?
b) Ele tenha experiência ou algum curso de especialização, mas não ambos?
c) Ele tenha experiência anterior, dado que ele tenha algum curso de especialização?
d) Ele não tenha nem experiência anterior nem curso de especialização?
e) Os eventos ter experiência anterior e possuir curso de especialização são independentes?

Seja os eventos A: experiência anterior e B: curso de especialização, desenhando o diagrama de Venn com as quantidades de elementos de cada evento fica claro o cálculo das probabilidades.



a) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.2 = 0.5$

b) $\mathrm{P}((A - A \cap B) \cup (B - A \cap B)) = 0.2 + 0.1 = 0.3$

c) $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \dfrac{0.2}{0.3} = \dfrac{2}{3}$

d) $\mathrm{P}((A \cup B)^c) = 0.5$

e) não pois $\mathrm{P}(A \mid B) \neq \mathrm{P}(A)$

23. A gaveta de um aluno de Probabilidade I possui 8 pares de meia sendo 5 brancas e 3 pretas. No cesto de roupa suja encontramos 3 pares brancas e 4 pares pretas. O aluno utilizou dois pares de meia durante a semana e posteriormente colocou-as no cesto de roupa suja. Em seguida, um par de meias é retirado do cesto para ser lavada. Qual a probabilidade do par de meias ser branca?

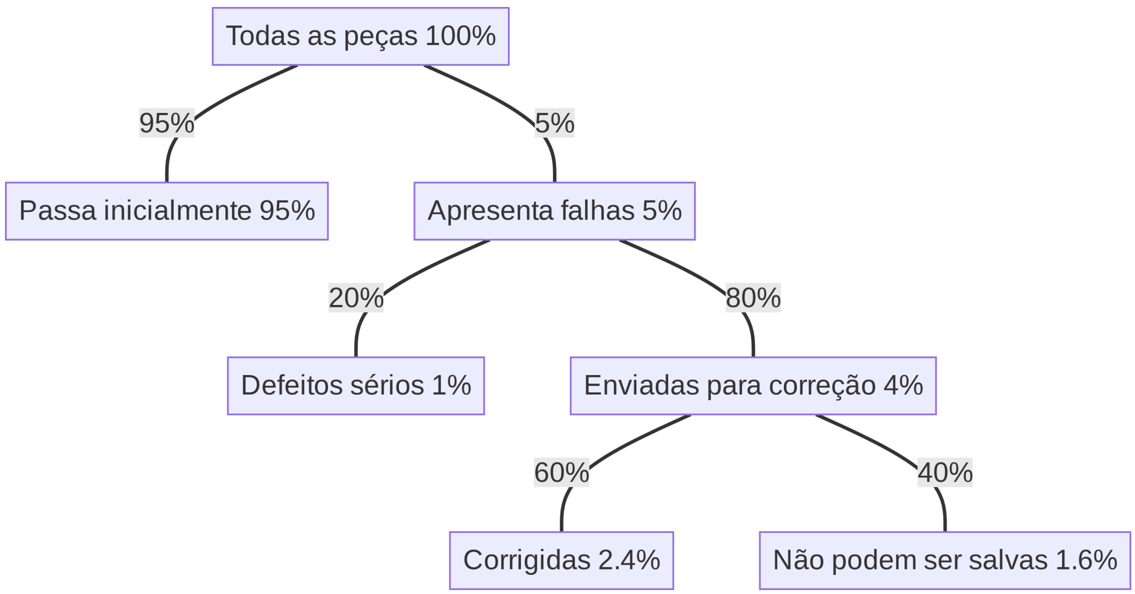
São 4 casos possíveis:

- Usar dois pares de meias brancas
  - $P(BB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$
  - Serão 5 pares brancas e 4 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid BB) = \frac{5}{9}$
- Usar dois pares de meias pretas
  - $P(PP) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$
  - Serão 3 pares brancas e 6 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid PP) = \frac{3}{9}$
- Usar uma par branca depois uma par preta
  - $P(BP) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$
  - Serão 4 pares brancas e 5 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid BP) = \frac{4}{9}$
- Usar uma par preta depois uma par branca
  - $P(PB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$
  - Serão 4 pares brancas e 5 pares pretas no cesto, $P(\text{Branca} \mid PB) = \frac{4}{9}$

Somando os produtos de probabilidade de ocorrer cada caso com a probabilidade interesse temos:

$$P(\text{Branca}) = \frac{20}{56} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{56} \cdot \frac{3}{9} + \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{9} + \frac{15}{56} \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{36}$$

24. Uma peça usada na fabricação de carros podem apresentar um certo defeito de fabricação. Suponha que 95% de todas as peças passem na inspeção inicial. Das 5% com falhas, 20% possuem defeitos tão sérios que devem ser descartadas. As peças restantes são enviados para correção, onde 40% não podem ser salvas e são descartadas. As outras 60% são corrigidas e, depois, passam na inspeção.
a) Qual a probabilidade de uma peça selecionada aleatoriamente passar na inspeção inicialmente ou após a correção?
b) Dado que a peça tenha passado na inspeção, qual é a probabilidade dela ter passado na inspeção inicial e não ter precisado de correção?



$$\text{P(Passou inspeção)} = \text{P(Passa inicialmente)} + \text{P(Corrigidas)} = 95\% + 2.4\% = 97.4\%$$

$$\text{P(Passa inicialmente} \mid \text{Passou inspeção)} = \frac{\text{P(Passa inicialmente} \cap \text{Passou inspeção)}}{\text{P(Passou inspeção)}} =$$

$$\frac{95\%}{97.4\%} = 97.535\%$$

25. Dentre 6 números positivos e 8 negativos, escolhem-se ao acaso (sem reposição) 4 números e multiplicam-se esses números. Qual será a probabilidade de que o produto seja um número positivo?

Obter um número positivo a partir de 4 números é possível em 3 casos:

- 4 números negativos
  - $P(\{- - --\}) = \frac{8}{14}\frac{7}{13}\frac{6}{12}\frac{5}{11} = \frac{70}{1001}$
- 4 números positivos
  - $P(\{+ + ++\}) = \frac{6}{14}\frac{5}{13}\frac{4}{12}\frac{3}{11} = \frac{15}{1001}$
- 2 negativos e 2 positivos
  - São 6 casos: $\{--++\}, \{-+-+\}, \{-++-\}, \{+--+\}, \{+-+-\}, \{++--\}$, como a ordem não importa e a quantidade de números positivos e negativos são iguais, eles terão a mesma probabilidade
  - $6P(\{- - ++\}) = 6\left(\frac{8}{14}\frac{7}{13}\frac{6}{12}\frac{5}{11}\right) = \frac{420}{1001}$

Somando as probabilidades, temos que $P(\text{produto positivo}) = \frac{505}{1001}$

26. Na elaboração de um algoritmo quantos códigos de quatro símbolos poderão ser formados se temos um total de seis símbolos:
a) Se nenhum símbolo puder ser repetido?
b) Qualquer símbolo puder ser repetido qualquer número de vezes?

Temos 6 símbolos, precisamos escolher 4, a ordem importa.

- Sem reposição: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.
- Com reposição: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

27. Em uma sala, 10 pessoas estão usando emblemas numerados de 1 até 10. Três pessoas são escolhidas ao acaso e convidadas a saírem da sala simultaneamente. O número de seu emblema é anotado.
a) Qual é a probabilidade de que o menor número do emblema seja 5?
b) Qual é a probabilidade de que o maior número do emblema seja 5?

Suponha que a primeira pessoa escolhida seja o 5, para que 5 seja o menor, a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, a chance é de $5/9$ da segunda pessoa estar entre 6 e 10, e a chance é de $4/8$ para a terceira pessoa. Porém a suposição da primeira pessoa ser o 5 é arbitrária, ela poderia ser o segundo ou terceiro, então multiplicamos a probabilidade total por 3.

$$3\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}\right) = \frac{1}{12}$$

De forma análoga, agora porém a segunda e terceira pessoa escolhida terão que ser entre $\{1, 2, 3, 4\}$, a chance é de $4/9$ para a segunda pessoa e $3/8$ para a terceira.

$$3\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{1}{20}$$

28. Uma montagem eletrônica é formada de dois subsistemas A e B. De ensaios anteriores as seguintes probabilidades são admitidas conhecidas: $\mathrm{P(A\ falhar)} = 0.20, \mathrm{P(A\ e\ B\ falhem)} = 0.15$ e $\mathrm{P(B\ falhe\ sozinho)} = 0.20$. Calcule as seguintes probabilidades: $\mathrm{P(A\ falhe} \mid \mathrm{B\ tenha\ falhado)}$ e $\mathrm{P(A\ falhe\ sozinho)}$.

$$\mathrm{P(A\ falhe} \mid \mathrm{B\ tenha\ falhado)} = \frac{\mathrm{P(A\ falhe} \cap \mathrm{B\ tenha\ falhado)}}{\mathrm{P(B\ tenha\ falhado)}} =$$

$$\frac{\mathrm{P(A\ e\ B\ falhem)}}{\mathrm{P(A\ e\ B\ falhem)} + \mathrm{P(B\ falhe\ sozinho)}} = \frac{0.15}{0.15 + 0.2} = \frac{3}{7}$$

$$\mathrm{P(A\ falhe\ sozinho)} = \mathrm{P(A\ falhar)} - \mathrm{P(A\ e\ B\ falhem)} = 0.20 - 0.15 = 0.05$$

29. O Sport ganha com probabilidade 0.7 se chove e com 0.8 se não chove. Em setembro a probabilidade de chuva é de 0.3. O Sport ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{ganhar}) \\
&= \mathrm{P}((\text{chover} \cap \text{ganhar}) \cup (\text{não chover} \cap \text{ganhar})) && \text{União disjunta} \\
&= \mathrm{P}(\text{chover} \cap \text{ganhar}) + \mathrm{P}(\text{não chover} \cap \text{ganhar}) \\
&= \mathrm{P}(\text{ganhar} \mid \text{chover})\, \mathrm{P}(\text{chover}) + \mathrm{P}(\text{ganhar} \mid \text{não chover})\, \mathrm{P}(\text{não chover}) \\
&= 0.7 \cdot 0.3 + 0.8 \cdot 0.7 = 0.77
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{P}(\text{chover} \mid \text{ganhar}) = \frac{\mathrm{P}(\text{chover} \cap \text{ganhar})}{\mathrm{P}(\text{ganhar})} = \frac{\mathrm{P}(\text{ganhar} \mid \text{chover})\, \mathrm{P}(\text{chover})}{\mathrm{P}(\text{ganhar})} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.77} = \frac{3}{11}$$

30. Uma rede local de computadores é composta por um servidor e cinco clientes. Dos pedidos de um tipo de processamento cerca de 10% vem do cliente A, 15% do B, 15% do C, 40% do D e 20% do E. Caso o pedido não seja feito de forma adequada, o processamento apresentará erro. Usualmente ocorrem os seguintes percentuais de pedidos inadequados: 1% do cliente A, 2% do cliente B, 0.5% do cliente C, 2% do cliente D e 8% do cliente E.
a) Qual a probabilidade do sistema apresentar erro?
b) Sabendo-se que o processo apresentou erro calcule a probabilidade de que o processo tenha sido pedido pelo cliente E.

Cliente	A	B	C	D	E
P(cliente)	0.10	0.15	0.15	0.40	0.20
P(erro | cliente)	0.01	0.02	0.005	0.02	0.08

$$\mathrm{P}(\text{erro}) = 0.10 \cdot 0.01 + 0.15 \cdot 0.02 + 0.15 \cdot 0.005 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.20 \cdot 0.08 = 0.02875$$

$$\mathrm{P}(\text{cliente E} \mid \text{erro}) = \frac{\mathrm{P}(\text{cliente E} \cap \text{erro})}{\mathrm{P}(\text{erro})} =$$

$$\frac{\mathrm{P}(\text{erro} \mid \text{cliente E})\, \mathrm{P}(\text{cliente E})}{\mathrm{P}(\text{erro})} = \frac{0.08 \cdot 0.20}{0.02875} = 0.5565217$$

31. Nos cursos de Estatística 5% dos homens e 2% das mulheres estão acima dos pesos ideais. Um estudante é escolhido aleatoriamente. Sabe-se também que 60% dos estudantes são homens. Sorteando-se aleatoriamente um estudante, calcule a probabilidade de que ele:
a) esteja acima do peso;
b) seja mulher, sabendo que o mesmo está acima do peso.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{acima do peso}) \\
&= \mathrm{P}((\text{acima do peso } \cap \text{ mulher}) \cup (\text{acima do peso } \cap \text{ homem})) && \text{União disjunta} \\
&= \mathrm{P}(\text{acima do peso } \cap \text{ mulher}) + \mathrm{P}(\text{acima do peso } \cap \text{ homem}) \\
&= \mathrm{P}(\text{acima do peso} \mid \text{mulher})\,\mathrm{P}(\text{mulher}) + \mathrm{P}(\text{acima do peso} \mid \text{homem})\,\mathrm{P}(\text{homem}) \\
&= 0.02 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.6 \\
&= 0.038
\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(\text{mulher} \mid \text{acima do peso}) = \frac{\mathrm{P}(\text{mulher } \cap \text{ acima do peso})}{\mathrm{P}(\text{acima do peso})} =$$

$$\frac{\mathrm{P}(\text{acima do peso} \mid \text{mulher})\,\mathrm{P}(\text{mulher})}{\mathrm{P}(\text{acima do peso})} = \frac{0.02 \cdot 0.4}{0.038} = \frac{4}{19}$$

32. Mostre que $\mathrm{P}(A^c \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$.

Escrevendo B como uma união disjunta entre a parte de B que tem interseção com A e a parte que não tem interseção:

$$\begin{aligned}
B &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\
\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}((A \cap B) \cup (A^c \cap B)) \\
\mathrm{P}(B) &= \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(A^c \cap B) \\
\mathrm{P}(A^c \cap B) &= \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

Então:

$$\mathrm{P}(A^c \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A^c \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 1 - \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = 1 - \mathrm{P}(A \mid B)$$

33. Demonstre: Se $\mathrm{P}(A \mid B) > \mathrm{P}(A)$, então, $\mathrm{P}(B \mid A) > \mathrm{P}(B)$.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}(A \mid B) > \mathrm{P}(A) \\
\iff & \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} > \mathrm{P}(A) \\
\iff & \mathrm{P}(A \cap B) > \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B) \\
\iff & \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} > \mathrm{P}(B) \\
\iff & \mathrm{P}(B \mid A) > \mathrm{P}(B)
\end{aligned}
$$

34. Uma caixa contém m bolas brancas e n vermelhas. dois jogadores se alternam a retirar, ao acaso, uma bola da caixa. as retiradas são com reposição e vence quem retirar a primeira bola branca. Mostre que quem inicia o jogo tem vantagem.

A probabilidade de ganhar em um certo turno é $\frac{m}{n+m}$, seja esse valor x, a probabilidade de não ganhar é então $1 - x$.
Na primeira retirada, o jogador 1 tem x chance de ganhar, já na segunda retirada, o jogador 2 tem $(1-x)x$ chance de ganhar, pois é necessário que o jogador 1 não ganhe na retirada anterior, e assim por diante.

Retirada	Jogador	Probabilidade de ganhar
1	1	x
2	2	$(1-x)x$
3	1	$(1-x)^2x$
4	2	$(1-x)^3x$
5	1	$(1-x)^4x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A probabilidade total do jogador 1 ganhar é $P_1 = (1-x)^0x + (1-x)^2x + (1-x)^4x + \cdots$
A probabilidade total do jogador 2 ganhar é $P_2 = (1-x)^1x + (1-x)^3x + (1-x)^5x + \cdots$
Note que $P_2 = (1-x)P_1$, como x é uma probabilidade entre 0 e 1, $1-x$ também é entre 0 e 1, isso significa que P_2 sempre é menor ou igual que P_1 então o primeiro jogador sempre terá vantagem.

35. Demonstre que dois eventos com probabilidade positiva e disjuntos, nunca são independentes.

Temos que $\mathrm{P}(A) > 0, \mathrm{P}(B) > 0$ (probabilidade positiva) e $A \cap B = \emptyset$ (disjuntos).
Suponha que A e B sejam independentes:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(\emptyset)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{0}{\mathrm{P}(B)} = 0$$

Porém $\mathrm{P}(A) > 0$, é uma contradição, então A e B não são independentes.

36. Demonstre as seguintes relações:
a) $A \subset B \iff A^c \supset B^c$;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$\begin{aligned}
& A \subset B \\
\iff & \forall \omega \in A, \omega \in B && \text{Definição de subconjunto} \\
\iff & \forall \omega \notin B, \omega \notin A && \text{Negando a afirmação} \\
\iff & \forall \omega \in B^c, \omega \in A^c \\
\iff & B^c \subset A^c \\
\iff & A^c \supset B^c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (A \cup B) \cup C \\
\iff & \{\omega \mid (\omega \in A \vee \omega \in B) \vee \omega \in C\} && \text{Definição de união} \\
\iff & \{\omega \mid \omega \in A \vee (\omega \in B \vee \omega \in C)\} && \text{operador } \vee\text{, “ou” é associativo.} \\
\iff & A \cup (B \cup C)
\end{aligned}$$