

2. INTEGRALES TRIPLES

En esta sección se presenta la integral triple para funciones de tres variables, funciones del tipo $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal como se hizo en la sección anterior para las integrales dobles. Así como se define la integral triple a partir de una triple suma de Riemann y se ilustra el proceso de resolución de la misma, de manera similar se puede esbozar la definición y el cálculo de integrales múltiples de funciones del tipo $f : Q \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

2.1 INTEGRAL TRIPLE SOBRE UNA CAJA RECTANGULAR

Sea f una función definida sobre la caja rectangular B , esto es $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde B está definida como:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \quad (\text{II.1})$$

o también:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge r \leq z \leq s\} \quad (\text{II.2})$$

La caja rectangular B , también recibe el nombre de rectángulo en \mathbb{R}^3 , O intervalo tridimensional, aunque el nombre más apropiado para B es paralelepípedo.

Sea P una partición del paralelepípedo B , la cual se logra con el producto cartesiano de las particiones P_x , P_y y P_z y de los intervalos $[a, b]$, $[c, d]$ y $[r, s]$, respectivamente, como se muestra a continuación:

$$P_x = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n\} \quad (\text{II.3})$$

$$P_y = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_j, \dots, y_{m-1}, y_m\} \quad (\text{II.4})$$

$$P_z = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{l-1}, z_l\} \quad (\text{II.5})$$

entonces

$$P = P_x \times P_y \times P_z \quad (\text{II.6})$$

La partición P del paralelepípedo B , entonces se obtiene al dividirla en pequeñas cajas rectangulares tal como se muestra en la siguiente figura.

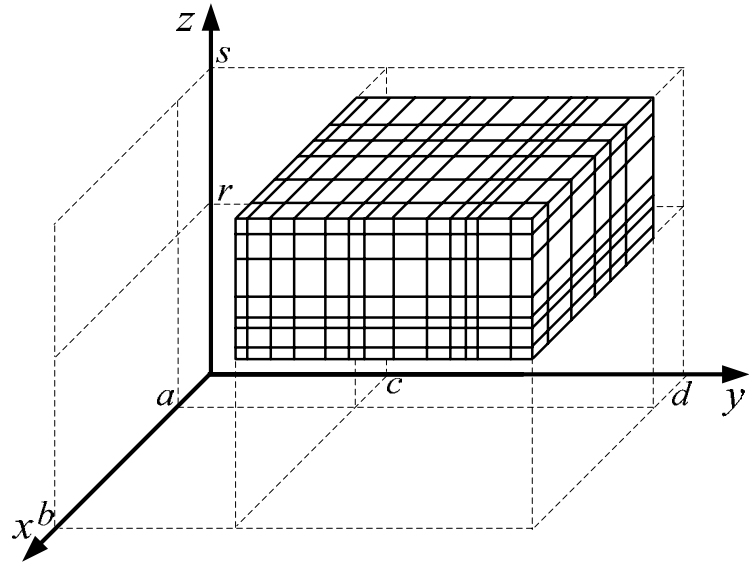


Figura 2.1

Partición P de una caja rectangular B .

Si la partición P_x tiene $n+1$ elementos y n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; la partición P_y tiene $m+1$ elementos y m subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de longitud $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ y la partición P_z tiene $l+1$ elementos y l subintervalos $[z_{k-1}, z_k]$ de longitud $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, entonces la caja rectangular B queda dividida por la partición P en $n \cdot m \cdot l$ paralelepípedos denominados B_{ijk} , donde el volumen de cada una de estas pequeñas cajas o subparalelepípedos, denotado ΔV_{ijk} , se obtiene de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k \quad (\text{II.7})$$

Al evaluar la función f en un punto arbitrario (x_i^*, y_j^*, z_k^*) del subparalelepípedo B_{ijk} , se puede establecer la **triple suma de Riemann** para la función f en la partición P , denotada como S_T :

$$S_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk} \quad (\text{II.8})$$

En la figura 2.2, se aprecia que:

$$x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$$

$$y_{j-1} \leq y_j^* \leq y_j$$

$$z_{k-1} \leq z_k^* \leq z_k$$

En la figura 2.2 se observa el punto (x_i^*, y_j^*, z_k^*) contenido en el elemento B_{ijk} de la partición P .

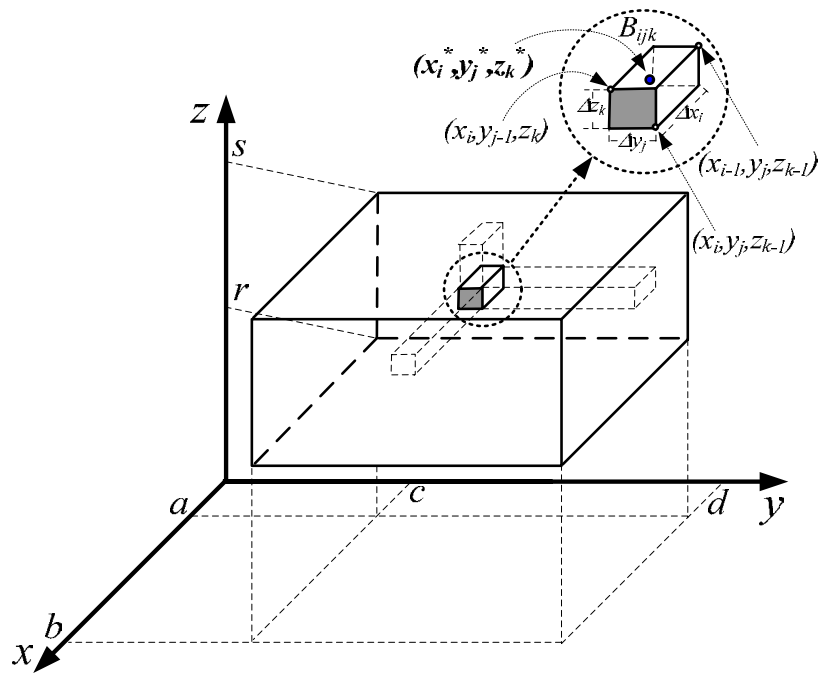


Figura 2.2

Paralelepípedo genérico B_{ijk} de la partición P .

La norma de la partición P , denotada como $\|P\|$, es la longitud de la diagonal más grande de todos los paralelepípedos B_{ijk} . Si se

selecciona una partición más fina, de manera que la norma de la partición tienda a cero, esto es $\|P\| \rightarrow 0$, entonces la expresión (II.8) cambia y recibe el nombre del límite de la triple suma de Riemann, como se muestra a continuación:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_T = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk} \quad (\text{II.9})$$

A partir del límite de la triple suma de Riemann se establece la definición de la integral triple de una función f en un paralelepípedo B .

DEFINICIÓN: Integral triple de f sobre B

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre un paralelepípedo B del espacio. La integral triple de f sobre B , denotada por $\iiint_B f(x, y, z) dV$, se define como:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V_{ijk} \quad (\text{II.10})$$

si el límite existe.

2.2 TEOREMA DE FUBINI

El teorema de Fubini proporciona un método práctico para evaluar una integral triple por medio de integrales iteradas, tal como se mostró para las integrales dobles en el capítulo anterior.

TEOREMA de Fubini para Integrales Triples

Sea f una función continua en el paralelepípedo $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad (\text{II.11})$$

Al igual que en el capítulo anterior; para la resolución de integrales triples, se emplearán los siguientes símbolos para identificar los límites de integración:



: Valor de la variable a la salida de la región B (límite superior).



: Valor de la variable a la entrada de la región B (límite superior).

La integral iterada presente en la ecuación (II.11) del teorema de Fubini también puede ser escrita de otras cinco formas diferentes, que se obtienen al cambiar el orden de integración de las variables x , y y z . Estas integrales iteradas son:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \quad (\text{II.12})$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{II.13})$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx \quad (\text{II.14})$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{II.15})$$

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x, y, z) dz dx dy \quad (\text{II.16})$$

EJEMPLO 2.1

Evalúe la integral triple $\iiint_B f(x, y, z) dV$ y dibuje el paralelepípedo

B , donde $f(x, y, z) = xz^3(1 - y)$ y $B = [2, 3] \times [-2, 1] \times [0, \sqrt{2}]$.

Solución:

Para resolver la integral triple de la función f se debe seleccionar primero el orden de integración. En la figura 2.3 se muestra el paralelepípedo B , donde además se señala, mediante la flecha que atraviesa verticalmente a la región B , que la integración se comienza con la variable z .

Es común llamar I a la integral triple que desea resolverse.

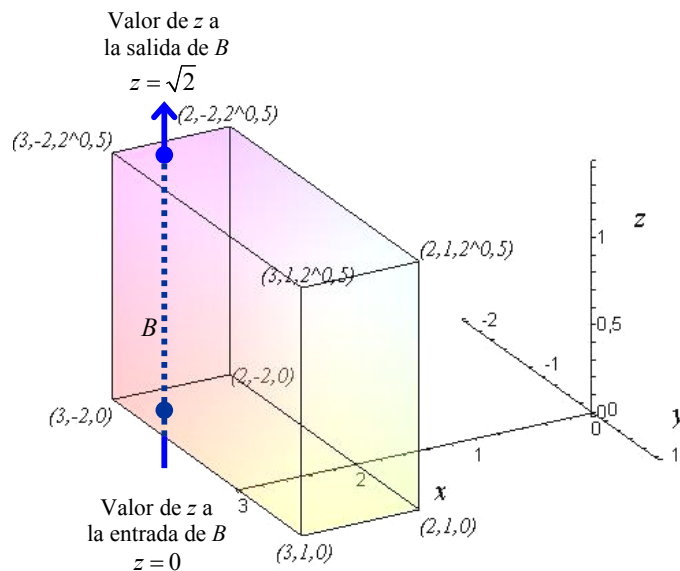


Figura 2.3

Paralelepípedo B del ejemplo 2.1.

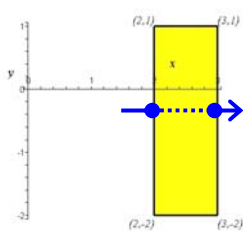


Figura 2.4
Proyección del paralelepípedo B del ejemplo 2.1 en el plano xy

La proyección de B mostrada en la figura 2.4, indica que la segunda integración se realiza respecto a la variable x .

A continuación se resuelve la integral triple:

$$I = \iiint_B f(x, y, z) dV = \int_{-2}^1 \int_2^3 \int_0^{\sqrt{2}} xz^3(1 - y) dz dx dy$$

$$I = \int_{-2}^1 \int_2^3 \frac{1}{4} [xz^4(1 - y)]_0^{\sqrt{2}} dx dy = \int_{-2}^1 \int_2^3 x(1 - y) dx dy$$

$$I = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} [x^2(1 - y)]_2^3 dy = \frac{5}{2} \int_{-2}^1 (1 - y) dy = -\frac{5}{4} [(1 - y)^2]_{-2}^1 = \frac{45}{4}$$

$$\int_{-2}^1 \int_2^3 \int_0^{\sqrt{2}} xz^3(1-y) dz dx dy = \frac{45}{4}$$

EJEMPLO 2.2

Evalúe la integral triple $\iiint_B f(x, y, z) dV$ y dibuje el paralelepípedo

B , donde $f(x, y, z) = x + y \cos z$ y $B = [-1, 2] \times [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

En la figura 2.5 se muestra el paralelepípedo B y se indica, además, que la primera integración parcial se realiza respecto a la variable x .

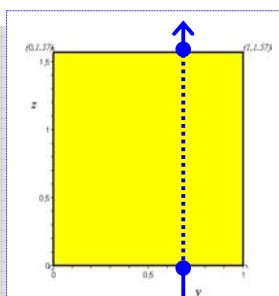


Figura 2.6
Proyección del
paralelepípedo B del
ejemplo 2.2 en el
plano yz

La proyección de B en el plano yz , muestra que la segunda integración parcial se realiza respecto a la variable z .

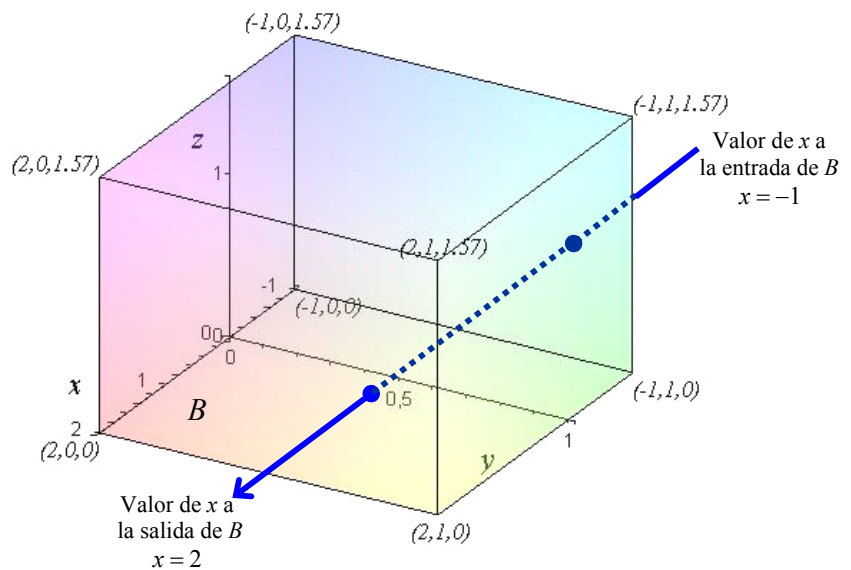


Figura 2.5

Paralelepípedo B del ejemplo 2.2.

$$I = \iiint_B f(x, y, z) dV = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^2 (x + y \cos z) dx dz dy$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^2}{2} + xy \cos z \right]_{-1}^2 dz dy = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{2} + 3y \cos z \right] dz dy$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{3}{2}z + 3y \operatorname{sen} z \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 \left[\frac{3\pi}{4} + 3y \right] dy = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{4} + y \right]^2 \bigg|_0^1$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{3}{2}z + 3y \operatorname{sen} z \right] \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^1 \left[\frac{3\pi}{4} + 3y \right] dy = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{4} + y \right]^2 \bigg|_0^1$$

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^2 (x + y \cos z) dx dz dy = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

2.3 INTEGRALES TRIPLES SOBRE REGIONES MÁS GENERALES

Así como en el capítulo anterior se definió la integral doble sobre regiones generales, en esta sección se amplía la definición de la integral triple de una función f sobre una región general B acotada del espacio tridimensional.

Por ejemplo, considere una región B , más general que un paralelepípedo, del espacio tridimensional, tal como se ilustra en la figura 2.6.

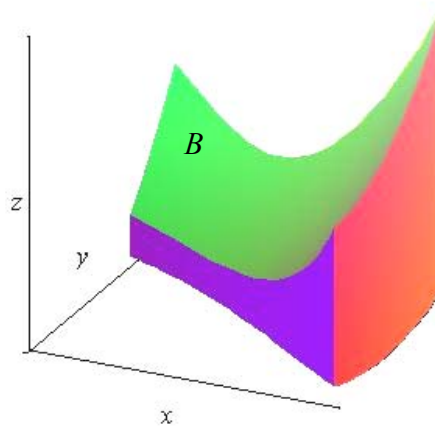


Figura 2.6

Región general B del espacio tridimensional

Para evaluar la integral triple de la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre la región general B , usando una integral iterada, primero debe seleccionarse el orden de integración. En la figura 2.7, donde se aprecian las superficies que acotan superior e inferiormente a la región B , se señala el orden de integración sugerido para esta región.

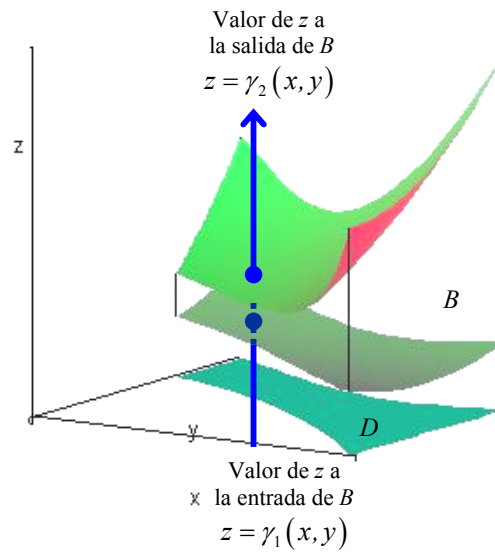


Figura 2.7

Primer orden de integración para una región general B

Es decir, la región general B está acotada inferior y superiormente por las superficies γ_1 y γ_2 , respectivamente, y por lo tanto puede definirse como:

$$B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \wedge \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\} \quad (\text{II.17})$$

Luego, la integral triple de la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sobre la región general B , puede obtenerse como:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \iint_D \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz dA \quad (\text{II.18})$$

Para seleccionar el segundo orden de integración, se debe proyectar a la región B sobre el plano xy , obteniéndose así una región bidimensional D , que se observa en la figura 2.8.

Observe, en la figura 2.8, que la proyección de la región B sobre el plano xy , es una región D bidimensional de tipo 1.

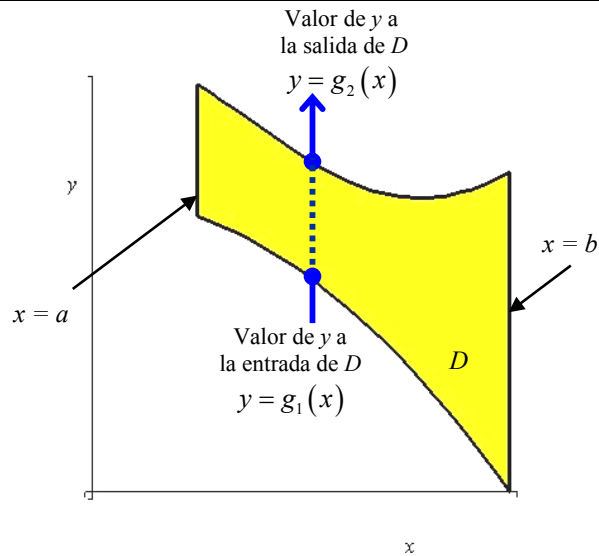


Figura 2.8

Proyección de la región general B sobre el plano xy

Entonces, como la región general B está definida de la siguiente manera:

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\} \quad (\text{II.19})$$

Se tiene que:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{II.20})$$

Por otra parte, si la región general B se define como:

$$B = \{(x, y, z) \mid h_1(z) \leq x \leq h_2(z), \quad \beta_1(x, z) \leq y \leq \beta_2(x, z), \quad r \leq z \leq s\} \quad (\text{II.21})$$

Entonces:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_{h_1(z)}^{h_2(z)} \int_{\beta_1(x, z)}^{\beta_2(x, z)} f(x, y, z) dy dx dz \quad (\text{II.22})$$

O también, para una región B como la siguiente:

$$B = \{(x, y, z) \mid \omega_1(y, z) \leq x \leq \omega_2(y, z), \quad c \leq y \leq d, \quad j_1(y) \leq z \leq j_2(y)\}$$

(II.23)

La integral triple es:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{j_1(y)}^{j_2(y)} \int_{\omega_1(y, z)}^{\omega_2(y, z)} f(x, y, z) dx dz dy \quad (\text{II.24})$$

EJEMPLO 2.3

Evalúe la integral triple $\iiint_B dV$, donde B es la región del espacio tridimensional definida como:

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, \quad x \leq y \leq x^2, \quad x + y \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

Solución:

Para evaluar $\iiint_B dV$, se debe seleccionar la variable con respecto a la cual se realiza la primera integración parcial. En la siguiente figura se visualiza la región B .

En la figura 2.9, se aprecia que el recinto B está limitado superiormente por la superficie $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por la superficie $z = x + y$.

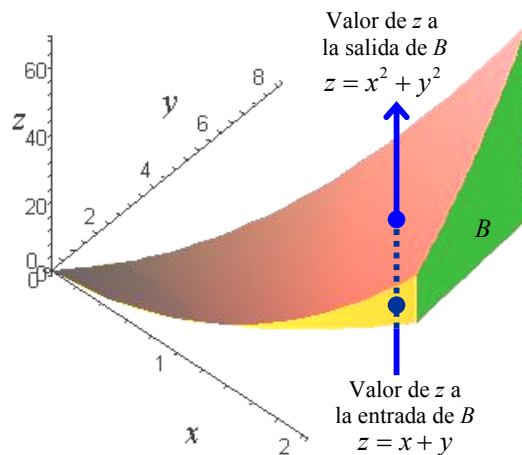


Figura 2.9

Región B del ejemplo 2.3

Por lo tanto, la primera integración se realiza respecto a la variable z , considerando a x y a y constantes.

En la figura 2.10 se muestra la proyección de la región B sobre el plano xy . Adicionalmente se ilustra el segundo orden de integración seleccionado.

Cuando se proyecta la región B sobre el plano xy , tal como se muestra en la figura 2.10, se obtiene una región D bidimensional de tipo 1.

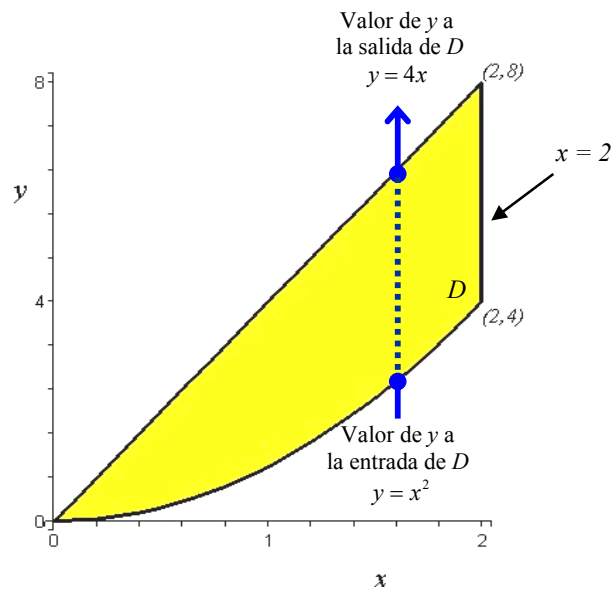


Figura 2.10

Proyección de la región B del ejemplo 2.3 en el plano xy

Resolviendo la integral triple, se tiene:

$$I = \iiint_B dV = \int_0^2 \int_{4x}^{x^2} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^2 \int_{4x}^{x^2} (y^2 + x^2 - x - y) dy dx$$

$$I = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{79x^3}{3} - 12x^2 \right) dx$$

$$\int_0^2 \int_{4x}^{x^2} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dy dx = \frac{6724}{105}$$

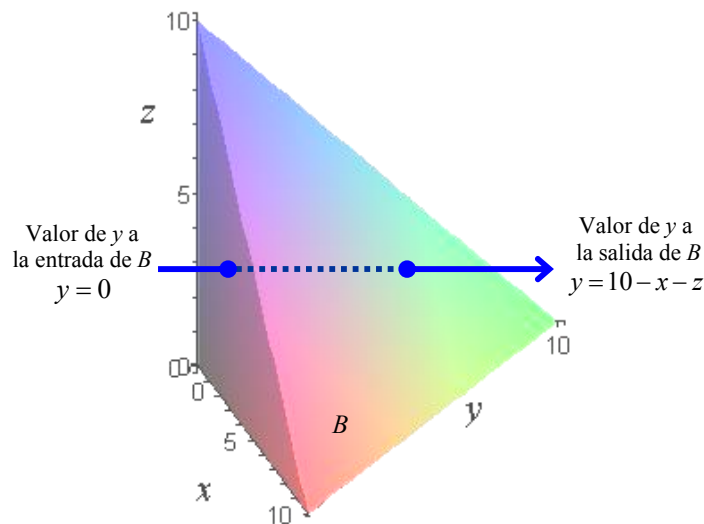
EJEMPLO 2.4

Evalúe la integral triple $\iiint_B dV$, donde B es la región tridimensional comprendida entre los planos cartesianos y el plano $x + y + z = 10$.

Solución:

Para resolver la integral triple, $\iiint_B dV$, es necesario ilustrar el orden de integración. En la siguiente figura, mediante la flecha que atraviesa horizontalmente a la región B , se ilustra el valor que toma la variable y a la entrada y la salida de la misma.

En la figura 2.11, se aprecia que el recinto B está limitado por la izquierda por el plano cartesiano xz y por la derecha por el plano de ecuación $y = 10 - x - z$.

**Figura 2.11****Región B del ejemplo 2.4**

Al proyectar la región B en el plano cartesiano xz , se obtiene una región bidimensional mostrada en la figura 2.12. En esta figura, se ilustra además, el segundo orden de integración seleccionado para resolver la integral triple $\iiint_B dV$.

En la figura 2.12 se observa que la proyección de la región B sobre el plano xz , es una región D de tipo 1 o tipo 2; sin embargo, se trabaja como una región tipo 1.

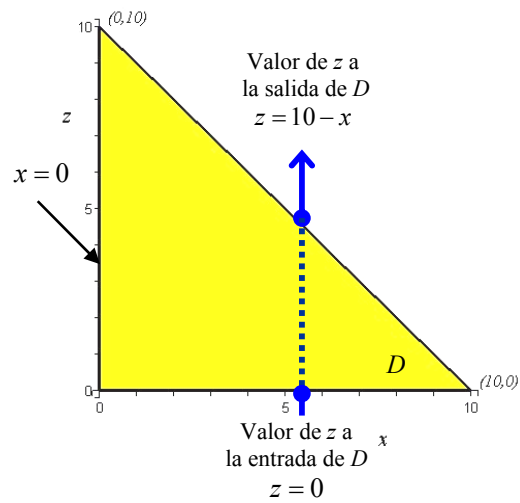


Figura 2.12

Proyección de la región B del ejemplo 2.4 en el plano xz

Resolviendo la integral triple:

$$I = \iiint_B dV = \int_0^{10} \int_0^{10-x} \int_0^{10-x-z} dy dz dx = \int_0^{10} \int_0^{10-x} (10-x-z) dz dx$$

$$I = \int_0^{10} \left(50 + \frac{x^2}{2} - 10x \right) dx$$

$$\int_0^{10} \int_0^{10-x} \int_0^{10-x-z} dy dz dx = \frac{500}{3}$$

2.4 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL TRIPLE

A continuación se presentan las propiedades de la integral triple de una función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ real de tres variables sobre una región general B del espacio tridimensional. Estas propiedades son similares a las propiedades de las integrales dobles.

2.4.1 Propiedad de linealidad

Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales y continuas definidas en una región tridimensional B , y sean α y β dos números reales cualesquiera, entonces:

$$\boxed{\iint_B [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] dV = \iint_B [\alpha f(x, y, z)] dV + \iint_B [\beta g(x, y, z)] dV} \quad (\text{II.25})$$

2.4.2. Propiedad de orden

Sean $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales y continuas definidas en una región tridimensional B , tales que $f(x, y, z) \geq g(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in B$, entonces:

$$\boxed{\iint_B f(x, y, z) dV \geq \iint_B g(x, y, z) dV} \quad (\text{II.26})$$

2.4.3. Propiedad aditiva respecto a la región de integración

Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función real y continua definida en una región general tridimensional B . Si la región B está dividida en dos subregiones B_1 y B_2 (es decir $B = B_1 \cup B_2$), entonces:

$$\boxed{\iint_B f(x, y, z) dv = \iint_{B_1} f(x, y, z) dV + \iint_{B_2} f(x, y, z) dV} \quad (\text{II.27})$$

EJEMPLO 2.5

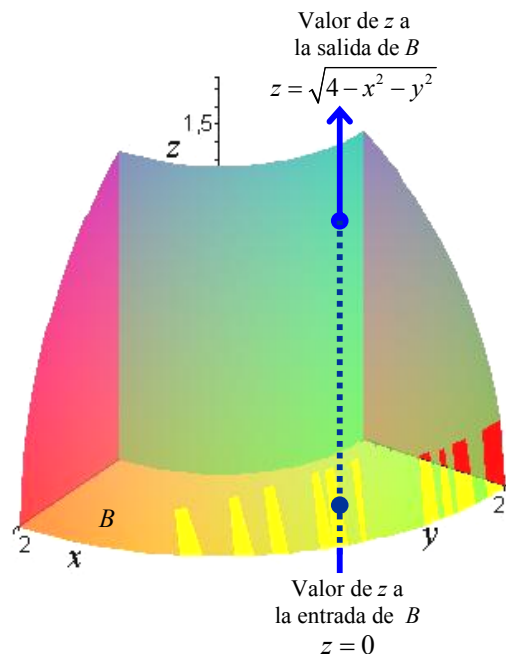
Evalúe la integral triple $\iiint_B f(x, y, z) dV$, donde $f(x, y, z) = xyz$ y B es el recinto definido como:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad x^2 + y^2 \geq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}$$

Solución:

El recinto B es la región del primer octante que se encuentra dentro de la esfera, de radio 4 y centro en el origen del sistema de coordenadas; y fuera del cilindro circular recto de radio 1 y que tiene como eje directriz al eje z . En la figura 2.13 se muestra el recinto B .

En la figura 2.13, se muestra el recinto B , del ejemplo 2.5. Esta región está acotada superiormente por la superficie de ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por el plano cartesiano xy ($z = 0$).

**Figura 2.13****Región B del ejemplo 2.5**

Seleccionando a z como la primera variable de integración se tiene:

$$I = \iiint_B xyz dV = \iint_D \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz dA$$

Donde D es la proyección del recinto B sobre el plano xy . Esta región se muestra en la figura 2.14.

Cuando se proyecta la región B sobre el plano xy , se obtiene una región D que no es de tipo 1 ni de tipo 2, por lo que se divide en dos subregiones tipo 1.

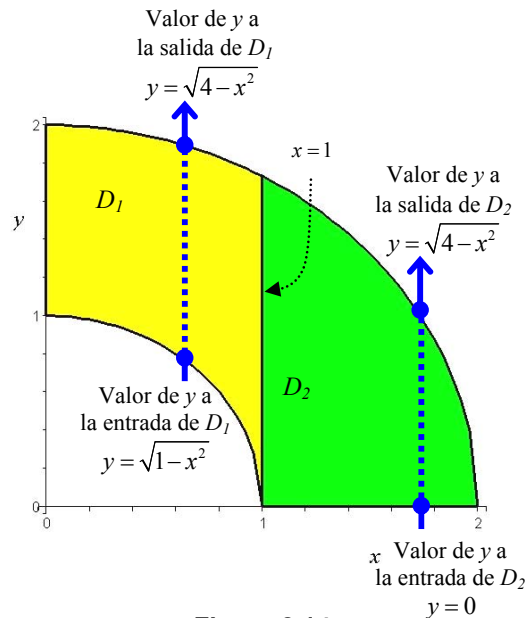


Figura 2.14

Proyección de la región B del ejemplo 2.5 en el plano xy

Luego, $D = D_1 \cup D_2$, donde:

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge \sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Resolviendo la integral triple, se tiene:

$$I = \iiint_B xyz dV = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz dy dx$$

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{xy}{2} (4-x^2-y^2) \right] dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{xy}{2} (4-x^2-y^2) \right] dy dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{9x}{8} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{x^5}{8} - x^3 + 2x \right) dx = \frac{9}{16} + \frac{9}{16}$$

$$\boxed{\iiint_B xyz dV = \frac{9}{8}}$$

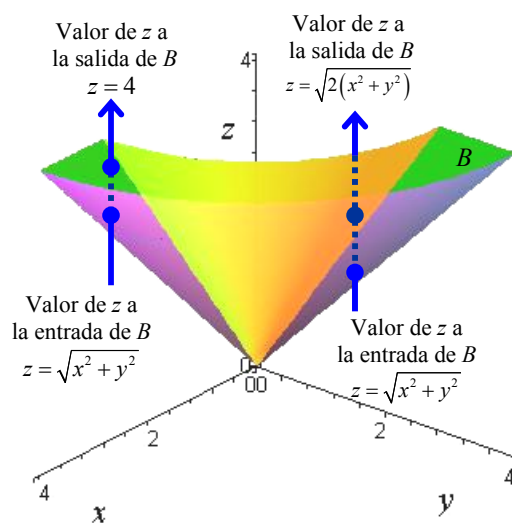
EJEMPLO 2.6

Evalúe la integral triple $\iiint_B (xyz) dV$, donde B es la región del primer octante comprendida entre los conos, cuyas ecuaciones son $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; y el plano $z = 4$.

Solución:

Al graficar el recinto B se obtiene el sólido mostrado en la figura 2.15.

En la figura 2.15, se muestra el recinto B . Observa que la flecha que se encuentra a la izquierda sale de la región en el plano de ecuación $z = 4$, mientras que la flecha de la derecha sale de la región por la superficie del cono $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

**Figura 2.15****Región B del ejemplo 2.6**

Según la gráfica anterior, la variable z , toma diferentes valores a la salida del recinto B , por lo cual la integral triple debe resolverse empleando la propiedad 4.3.

$$\iiint_B (xyz) dV = \iint_{D_1} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dA + \iint_{D_2} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2(x^2+y^2)}} (xyz) dz dA$$

Para la primera de estas integrales, donde el límite superior para z es 4, la proyección de la región B en el plano xy , es una región denominada D_1 se muestra a continuación:

La región D_1 , de la figura 2.16, no es de tipo 1 ni de tipo 2, por lo que se divide en dos subregiones tipo 1.

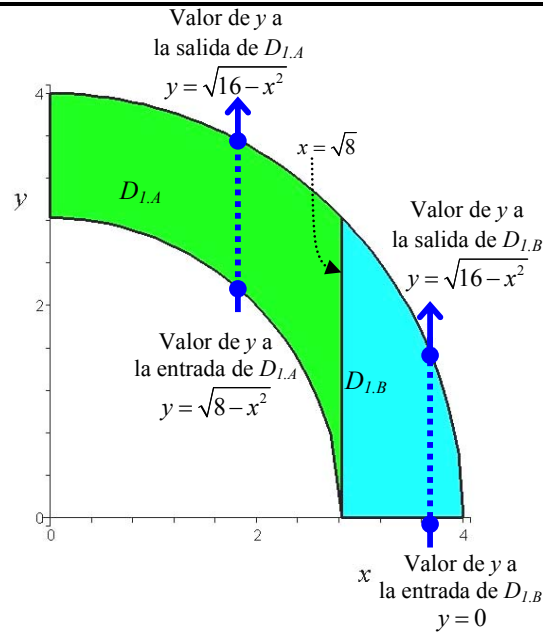


Figura 2.16

Primera proyección de la región B del ejemplo 2.6 en el plano xy

Luego, $D_1 = D_{1,A} \cup D_{1,B}$, donde:

$$D_{1,A} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{8} \wedge \sqrt{8-x^2} \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

$$D_{1,B} = \{(x, y) \mid \sqrt{8} \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}\}$$

Con la figura anterior se establece el segundo orden de integración de la primera integral triple planteada, resultando:

$$\iint_{D_1} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dA = \int_0^{\sqrt{8}} \int_{\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dy dx + \int_{\sqrt{8}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dy dx$$

Para definir el segundo orden de integración en la integral

$$\iint_{D_2} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2(x^2+y^2)}} (xyz) dz dA, \text{ se proyecta la región } B, \text{ sobre el plano } xy$$

en la siguiente figura.

La región D_2 , mostrada en la figura 2.17, es una región de tipo 1.

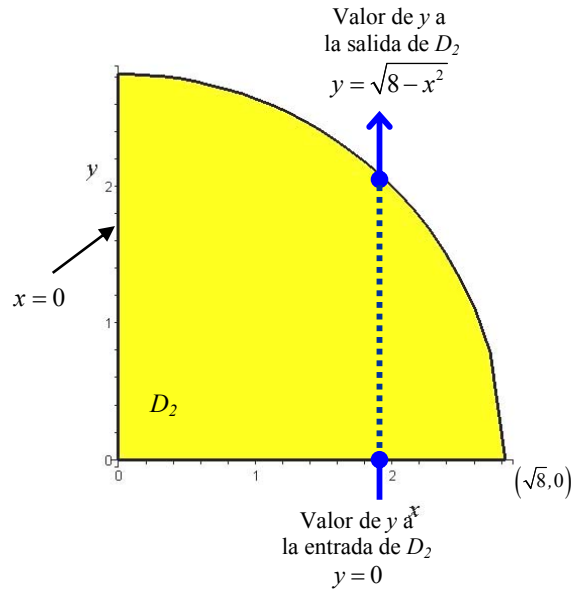


Figura 2.17

Segunda proyección de la región B del ejemplo 2.6 en el plano xy

Donde:

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{8} \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq \sqrt{8 - x^2}\}$$

Resultando:

$$\iint_{D_2} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2(x^2+y^2)}} (xyz) dz dA = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2(x^2+y^2)}} (xyz) dz dy dx$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I = \iiint_B (xyz) dV &= \int_0^{\sqrt{8}} \int_{\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dy dx + \\ &+ \int_{\sqrt{8}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^4 (xyz) dz dy dx + \\ &+ \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2(x^2+y^2)}} (xyz) dz dy dx \end{aligned}$$

Resolviendo, se tiene:

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} \int_{\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{xy}{2} (16 - y^2 - x^2) dy dx + \int_{\sqrt{8}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{xy}{2} (16 - y^2 - x^2) dy dx + \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \frac{xy}{2} (y^2 + x^2) dy dx$$

$$I = \int_0^{\sqrt{8}} 8x dx + \int_{\sqrt{8}}^4 \left(\frac{x^5}{8} - 4x^3 + 32x \right) dx + \int_0^{\sqrt{8}} \left(-\frac{x^5}{8} + 8x \right) dx$$

$$I = 32 + \frac{32}{3} + \frac{64}{3} = 64$$

Entonces, la integral triple pedida es:

$$I = \iiint_B (xyz) dV = 64$$