Universidade de São Paulo

SFI5704 - Mecânica Estatística A - primeiro semestre de 2019
Primeira Prova
Professor: Diogo O. Soares-Pinto

1. Determine a distribuição de probabilidades e os momentos correspondentes à função característica $g(k) = a + b\cos k$, em que $a + b = 1$.

2. Determine a função característica da distribuição de Poisson. Mostre que todos os cumulantes são iguais.

3. Considere o passeio aleatório unidimensional descrito pela sequência de variáveis aleatórias independentes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ que tomam os valores $+1$ (passo à direita), -1 (passo à esquerda) e 0 (permanência na mesma posição). A probabilidade de permanência, $\sigma_i = 0$, é p, enquanto a probabilidade de salto à direita, $\sigma_i = +1$, é $q/2$, e de salto à esquerda, $\sigma_i = -1$, também é $q/2$, em que $q = 1 - p$. Determine a probabilidade $P_n(m)$ de encontrar a partícula que executa movimento na posição m depois de n passos. Calcule a distribuição de probabilidades para n grande.

4. Considere o passeio aleatório unidimensional descrito pela sequência de variáveis aleatórias independentes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$ que tomam os valores $+1$ (passo à direita) e -1 (passo à esquerda). Suponha que a probabilidade de $\sigma_j = +1$ seja p se j for ímpar e q se j for par, com $p+q = 1$. Consequentemente, para $\sigma_j = -1$, será q se j for ímpar e p se j for par. Determine, para n grande, a distribuição de probabilidades da posição $x = h(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n)$ da partícula que executa o passeio aleatório.

5. Para o movimento browniano ordinário, as equações de evolução para os segundos momentos são dadas por

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = 2\langle x\, v\rangle \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\, v\rangle = \langle v^2\rangle - \gamma\,\langle x\, v\rangle \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\langle v^2\rangle = -2\,\gamma\,\langle v^2\rangle + \Gamma \tag{3}$$

Resolva essas equações para obter $\langle x^2\rangle$, $\langle x\, v\rangle$ e $\langle v^2\rangle$ como funções do tempo. Suponha que no instante $t = 0$ a posição e a velocidade da partícula sejam x_0 e v_0, respectivamente.

6. Considere uma partícula que executa movimento browniano ao longo da direção x e está sujeita a uma foraça elástica. As equações de evolução para os segundos momentos são dadas por

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = 2\langle x\, v\rangle \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\,v\rangle = \langle v^2\rangle - k\,\langle x^2\rangle - \gamma\,\langle x\,v\rangle \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\langle v^2\rangle = -2\,k\,\langle x\,v\rangle - 2\,\gamma\,\langle v^2\rangle + \Gamma \tag{6}$$

Resolva essas equações para obter $\langle x^2\rangle$, $\langle x\,v\rangle$ e $\langle v^2\rangle$ como funções do tempo. Suponha que no instante $t = 0$ a posição e a velocidade da partícula sejam x_0 e v_0, respectivamente.

7. Mostre explicitamente que no regime estacioário o lado direito da equação

$$\Phi = \sum_i \left(\frac{2}{\Gamma_i} \langle f_i^2\rangle + \langle f_{ii}\rangle \right) \tag{7}$$

se anula para forças conservativas, isto é, quando o estado estacionário é um estado de equilíbrio.

8. Considerando um sistema de muitas partículas em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é o conjunto das posições e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$ o conjunto das velocidades. Admitindo a equação de Kramers de várias variáveis, o regime estacionário e forças conservativas, encontre a expressão para a distribuição de equilíbrio, discutindo a condição de reversibilidade microscópica,

9. Os elementos não nulos de uma matriz estocástica T, correspondente a uma cadeia de Markov entre três estados $n = 1, 2, 3$, são dados por $T(2, 1) = 1$, $T(3, 2) = 1$, $T(1, 3) = p$ e $T(2, 3) = q = 1 - p$. Determine a probabilidade $P_l(n)$ para qualquer instante l para uma condição inicial qualquer.

10. Considerando que a distribuição de probabilidade P_n respeita uma equação mestra e que existem vínculos para a entropia e energia média para essa dinâmica, encontre a relação entre a função H de Boltzmann e a energia livre do sistema. Interprete. (Dica: seção 7.10 do livro texto.)