Filtragem Espacial - Derivada

CESAR HENRIQUE COMIN

Filtragem espacial - Derivada

- A derivada de uma função pode ser aproximada por:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- No caso de imagens, o domínio espacial (valores de x) é, em geral, o índice do array. Portanto, $\Delta x = 1$.
- Nesse caso, a derivada de uma função pode ser escrita como

$$\frac{df}{dx} \approx f(x + 1) - f(x)$$

Filtragem espacial - Derivada

- A derivada de uma função pode ser aproximada por:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- No caso de imagens, o domínio espacial (valores de x) é, em geral, o índice do array. Portanto, $\Delta x = 1$.
- Nesse caso, a derivada de uma função pode ser escrita como

$$\frac{df}{dx} \approx f(x+1) - f(x)$$

- A operação de derivada por ser representada por uma convolução!

Filtragem espacial - Derivada

- A derivada de uma função pode ser aproximada por:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x = 1} \frac{df}{dx} \approx f(x+1) - f(x)$$

- Definindo o filtro

w =

-1	1

Filtragem espacial - Derivada

- A derivada de uma função pode ser aproximada por:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x = 1} \frac{df}{dx} \approx f(x+1) - f(x)$$

- Definindo o filtro

w =

-1	1

- A derivada de uma função pode ser escrita como

$$\frac{df}{dx} \approx f \circ w$$

onde $\circ$ representa a correlação-cruzada entre f e w

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Sinal

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Calculando a derivada utilizando a fórmula $f'(x) = \frac{df}{dx} \approx f(x+1) - f(x)$:

$$f'(0) = f(1) - f(0) = 2 - 1 = 1$$

$$f'(1) = f(2) - f(1) = 4 - 2 = 2$$

$$f'(2) = f(3) - f(2) = 2 - 4 = -2$$

...

$$f'(8) = f(9) - f(8) = 0 - 3 = -3$$

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Sinal

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Derivada

1	2	-2	-1	4	-2	-2	2	-3

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$	1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$	-1	1

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{a} w(s) f(x + s - \frac{a}{2})$$

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{a} w(s) f(x + s - \frac{a}{2})$$

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{1} w(s) f(x + s)$$

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{a} w(s) f(x + s - \frac{a}{2})$$

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{1} w(s) f(x + s)$$

$$f(x) \circ w(x) = w(0) f(x) + w(1) f(x + 1)$$

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$	1	2	4	2	1	5	3	1	3	0	Sinal

$w =$	-1	1

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{a} w(s) f\left(x + s - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(x) \circ w(x) = \sum_{s=0}^{1} w(s) f(x + s)$$

$$f(x) \circ w(x) = w(0) f(x) + w(1) f(x + 1) = f(x + 1) - f(x)$$

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

1								

Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

1	2							

Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

1	2	-2						

Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

1	2	-2	-1					

Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Exemplo:

Calculando a derivada utilizando a correlação-cruzada $f \circ w$:

$f =$

1	2	4	2	1	5	3	1	3	0

Sinal

$w =$

-1	1

1	2	-2	-1	4	-2	-2	2	-3

Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Para funções de duas variáveis (imagens), o filtro derivada pode ser aplicado na direção horizontal e vertical.

-1	1

$$\frac{df}{dx}$$

-1
1

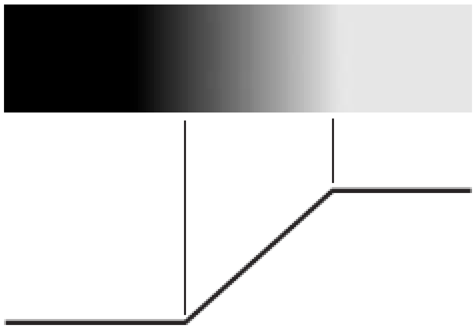
$$\frac{df}{dy}$$

Filtragem espacial – Detecção de borda

- A derivada pode ser utilizada para detecção de borda

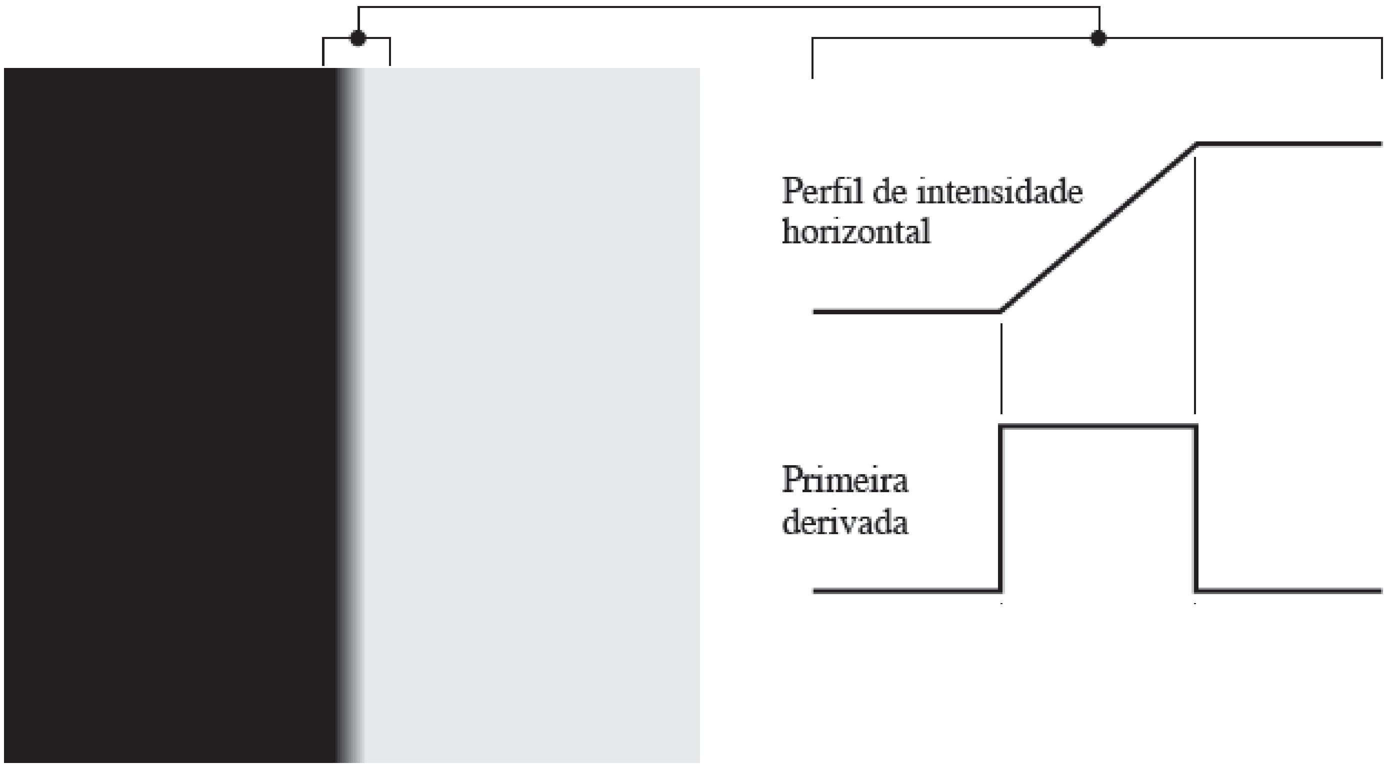
Borda “perfeita”

Borda típica em imagens



Filtragem espacial – Detecção de borda

- A derivada pode ser utilizada para detecção de borda



Exemplo de derivadas de uma imagem

Original

Derivada vertical

Derivada horizontal

Exemplo de derivadas de uma imagem

Original

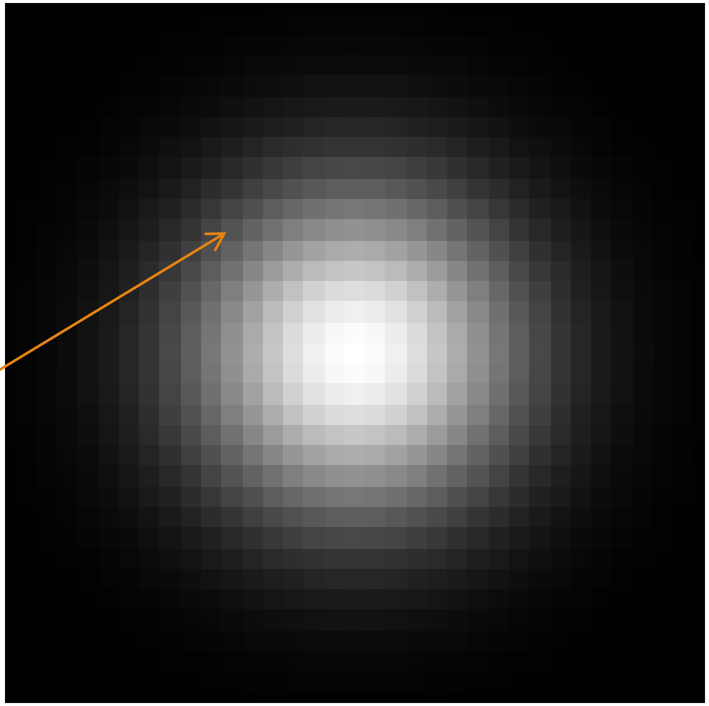
Derivada vertical

Derivada horizontal

- Para cada pixel da imagem, temos 2 valores de derivada (horizontal e vertical)
- Chamamos esse par de valores de gradiente do pixel
- O gradiente é representado por um vetor, que aponta na direção de maior crescimento de intensidade

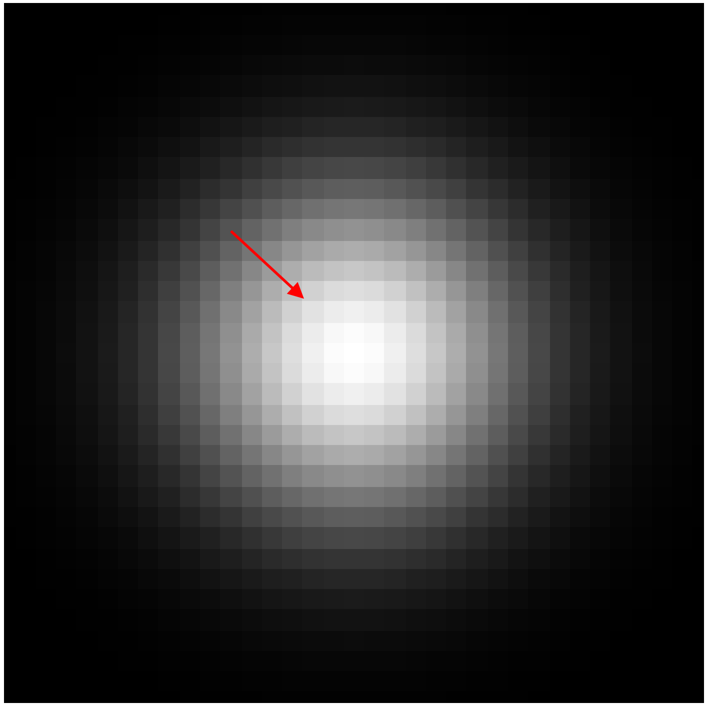
Gradiente

Por exemplo, para o pixel indicado pela seta, qual a direção do gradiente?



Gradiente

Por exemplo, para o pixel indicado pela seta, qual a direção do gradiente?



Gradiente

Definições:

$f'_x(x, y)$: derivada da imagem na direção horizontal no pixel (x, y)
$f'_y(x, y)$: derivada da imagem na direção vertical no pixel (x, y)

O gradiente no pixel (x, y) é dado pelo vetor $(f'_x(x, y), f'_y(x, y))$

Gradiente

Exemplo:

Imagem:

1	2	3	1	0
3	2	1	2	1
0	2	1	3	1
0	3	2	2	1
1	0	1	2	1

Derivada horizontal

1	1	-2	-1
-1	-1	1	-1
2	-1	2	-2
3	-1	0	-1
-1	1	1	-1

Derivada vertical

2	0	-2	1	1
-3	0	0	1	0
0	1	1	-1	0
1	-3	-1	0	0

Gradiente

Exemplo:

Imagem:

1	2	3	1	0
3	2	1	2	1
0	2	1	3	1
0	3	2	2	1
1	0	1	2	1

Derivada horizontal

1	1	-2	-1
-1	-1	1	-1
2	-1	2	-2
3	-1	0	-1
-1	1	1	-1

Derivada vertical

2	0	-2	1	1
-3	0	0	1	0
0	1	1	-1	0
1	-3	-1	0	0

O gradiente do pixel (1,2) é (1,0)

Gradiente

Exemplo:

Imagem:

1	2	3	1	0
3	2	$\boxed{1}$	2	1
0	2	1	3	1
0	3	2	2	1
1	0	1	2	1

Derivada horizontal

1	1	-2	-1
-1	-1	$\boxed{1}$	-1
2	-1	2	-2
3	-1	0	-1
-1	1	1	-1

Derivada vertical

2	0	-2	1	1
-3	0	$\boxed{0}$	1	0
0	1	1	-1	0
1	-3	-1	0	0

Gradientes

(1,2)	(1,0)	(-2,-2)	(-1,1)
(-1,-3)	(-1,0)	(1,0)	(-1,0)
(2,0)	(-1,1)	(2,-1)	(-2,0)
(3,1)	(-1,-3)	(0,0)	(-1,0)

Gradiente

- Como mencionado, o gradiente de um pixel pode ser representado por um vetor
- Portanto, o gradiente possui magnitude e direção

Magnitude do gradiente:

$$M(x,y) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}$$

- A magnitude do gradiente indica o quão notável a borda é em cada pixel da imagem.

Gradiente

- Como mencionado, o gradiente de um pixel pode ser representado por um vetor
- Portanto, o gradiente possui magnitude e direção

Original

Magnitude do gradiente:

$$M(x,y) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}$$

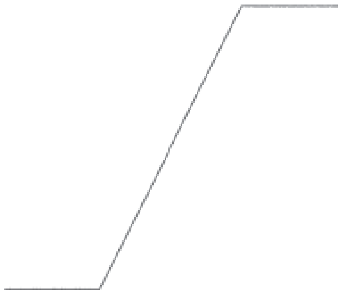
Derivada vertical

Derivada horizontal

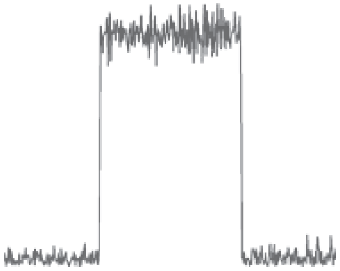
Magnitude do gradiente

Filtragem espacial - Derivada

- Problema: derivadas são muito sensíveis a ruídos



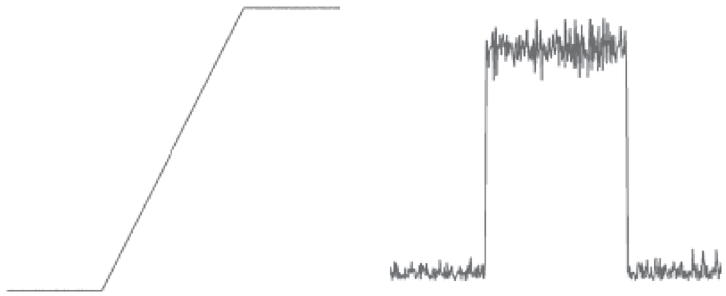
Sinal



Derivada

Filtragem espacial - Derivada

- Problema: derivadas são muito sensíveis a ruídos



- Solução: suavizar a imagem antes de derivar!

- Efetivamente, se definirmos máscara maiores de derivada, estamos suavizando a imagem

Filtragem espacial - Derivada

Filtros de Prewitt

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Filtros de Sobel

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

- Notem que a soma dos valores nas máscaras é sempre 0.

Filtragem espacial - Derivada

Filtros de Prewitt

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Filtros de Sobel

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

- Muito utilizado
- Valor 2 representa um peso maior para os vizinhos imediatos do pixel

- Notem que a soma dos valores nas máscaras é sempre 0.

Ruídos em derivada

- Dependendo do nível de ruído, filtros maiores podem ser necessários (o que é bem comum acontecer).
- Mas não precisamos necessariamente criar filtros de derivada maiores
- Podemos suavizar a imagem utilizando um filtro gaussiano de tamanho adequado, o que diminui o ruído, e depois aplicar um filtro derivada.

Exemplo de aplicação do filtro de Sobel após suavização da imagem

	Derivada vertical	Derivada horizontal	Magnitude do gradiente
Com suavização			
Sem suavização			

Filtragem espacial –Derivada

Notebooks “**Derivada**” e “**Derivada e ruído**”

Filtragem espacial – Segunda Derivada

Filtragem espacial – Segunda Derivada

- Podemos também aproximar a segunda derivada de uma função:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \approx \frac{d}{dx}\big(f(x+1) - f(x)\big) \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

Filtragem espacial – Segunda Derivada

- Podemos também aproximar a segunda derivada de uma função:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \approx \frac{d}{dx}\big(f(x+1) - f(x)\big) \approx f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$$

- Portanto, podemos calcular a segunda derivada utilizando o filtro

1	-2	1
$f(x-1)$	$f(x)$	$f(x+1)$

Filtragem espacial – Laplaciano

- Para funções de duas variáveis, o operador Laplaciano é utilizado para a obtenção da variação da função “em todas as direções”

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Através da aproximação do Laplaciano em um domínio discreto, pode-se definir máscaras apropriadas:

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Invariante a rotações de 45º

Filtragem espacial – Laplaciano

- Para funções de duas variáveis, o operador Laplaciano é utilizado para a obtenção da variação da função “em todas as direções”

$$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Através da aproximação do Laplaciano em um domínio discreto, pode-se definir máscaras apropriadas:

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

Invariante a rotações de 45º

- A segunda derivada é mais sensível a pequenas variações na imagem do que a primeira derivada.

Realce de imagens

Realce de imagens

- Filtros de derivada são utilizados para identificar regiões de alto detalhe em imagens
- Detalhes em imagens estão usualmente associadas com imagens de maior qualidade
- Portanto, filtros de derivada podem ser utilizados para “realçar” uma imagem

Realce de imagens

Original

Imagem realçada

Realce laplaciano

- Uma forma simples de realce de imagens é através do filtro laplaciano
- Seja $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \nabla^2 F(x, y)$ o resultado da aplicação do laplaciano em uma imagem, podemos realçar a imagem fazendo

$$G(x, y) = F(x, y) + cL(x, y)$$

- O parâmetro *c* ajusta o nível de realce

Realce highboost

- Outra forma de realce é através da subtração entre a imagem e o resultado da suavização da própria imagem
- Seja F_σ o resultado da aplicação de um filtro gaussiano de largura σ em uma imagem F, a imagem diferença entre F_σ e F pode ser calculada como

$$F_{diff}(x,y) = F(x,y) - F_\sigma(x,y)$$

- Essa imagem diferença possui valores altos em regiões de variação na imagem e valores próximos de zero em regiões de baixa variação.
- Com isso, podemos realçar a imagem calculando

$$G(x,y) = F(x,y) + cF_{diff}(x,y)$$

Realce de imagens

Notebook “**Realce de imagens**”

Laplaciano da Gaussiana

- Abordagem muito comum para o cálculo do laplaciano de uma imagem utilizando suavização gaussiana
- O cálculo do laplaciano de uma imagem que foi suavizada por uma gaussiana é representado por

$$r(x, y) = \nabla^2[G(x, y) \star f(x, y)]$$

Laplaciano da Gaussiana

- Abordagem muito comum para o cálculo do laplaciano de uma imagem utilizando suavização gaussiana
- O cálculo do laplaciano de uma imagem que foi suavizada por uma gaussiana é representado por

$$r(x,y) = \nabla^2[G(x,y) \star f(x,y)]$$

- Essa equação pode ser reescrita como

$$r(x,y) = [\nabla^2 G(x,y)] \star f(x,y)$$

sendo que $\nabla^2 G(x,y)$ é o laplaciano da gaussiana, que pode ser calculado analiticamente:

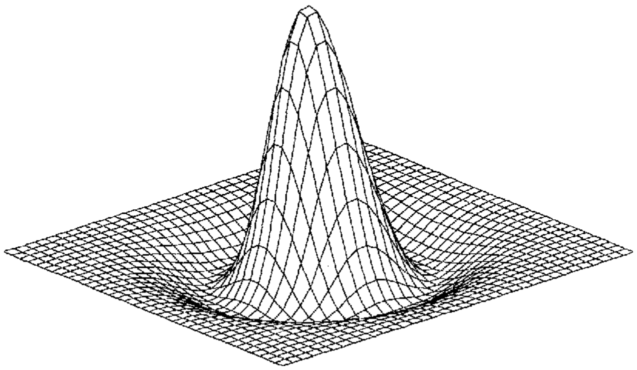
$$\nabla^2 G(x,y) = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial y^2} = \left[\frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4}\right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Laplaciano da Gaussiana

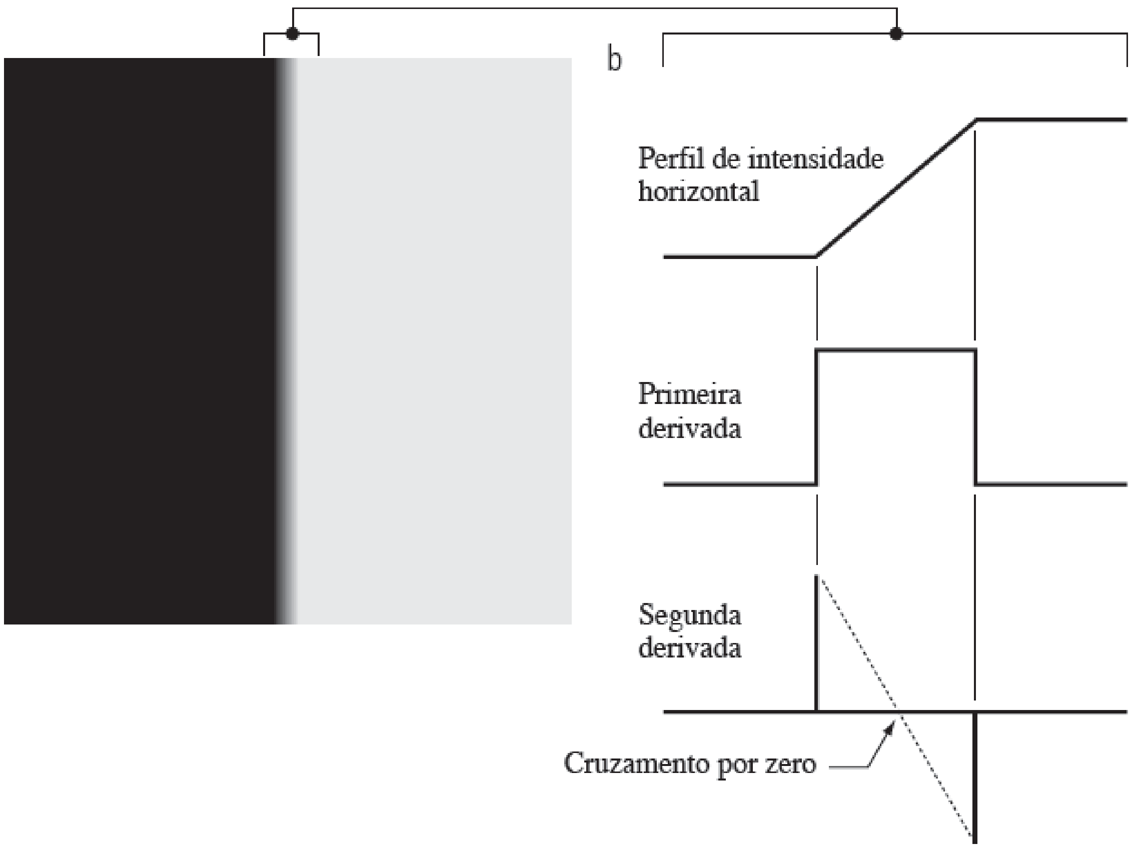
- Portanto, ao convoluirmos a função $\nabla^2 G(x,y)$ com a imagem, estamos suavizando a imagem e calculando o laplaciano, simultaneamente!

$$\nabla^2 G(x,y) = \left[\frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4}\right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Esta função possui o seguinte formato:



Detecção de borda



Um limiar aplicado na primeira derivada pode ser utilizado para detectar bordas

Podemos também buscar cruzamentos por zero na segunda derivada

Addendum – Trabalhando com imagens coloridas e diferentes formatos de imagens

O notebook "**Imagens coloridas e formatos de imagem**" possui alguns exemplos de processamento de imagens coloridas e de leitura de imagens no formato tiff, png e jpeg.

Projeto 1

- Não utilizar funções prontas para implementar o principal conceito associado ao tema. Na dúvida, pergunte que funções/bibliotecas podem ser utilizadas no projeto.
- Entregáveis:
  - Código produzido (a organização do código também será avaliada!)
  - Um artigo escrito em Latex (~6 páginas em coluna dupla ou ~10 em coluna única) contendo:
    - Resumo
    - Introdução
      - Motivação do uso do método (porque usar? Em que situações ele é importante?)
    - Objetivos
      - O que será analisado sobre o método?
    - Metodologia
      - Explicação sobre a teoria do método
      - Explicação sobre a parte mais importante do código
    - Resultados
    - Conclusões
- Data de entrega: 13/01

Projeto 1

Para escrever o artigo em Latex, recomendo o uso do Overleaf e do seguinte template:

https://www.overleaf.com/latex/templates/chi2020-proceedings/qtdvrwbtqxww

Projeto 1 – Tema 1

Implementar os filtros de média geométrica e mediana

Filtro média geométrica

$$\hat{f}(x,y) = \left[\prod_{(s,t)\in S_{xy}} f(s,t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$

Filtro mediana

$$\hat{f}(x,y) = \underset{(s,t)\,\in\, S_{xy}}{\text{mediana}}[f(s,t)]$$

Identificar situações nas quais esses dois filtros dão resultados diferentes do filtro Gaussiano

Projeto 1 – Tema 2

1. Implementar o filtro de suavização gaussiana em imagens coloridas.
   - Cada canal de cor é suavizado separadamente, formando uma nova imagem colorida.
   - Verificar o que acontece se níveis de suavização diferentes forem utilizados em cada canal.
2. Implementar o filtro de derivada de Sobel em imagens coloridas
   - Cada canal de cor é derivado separadamente, formando três novas imagens em nível de cinza. Não precisa retornar uma imagem colorida.

Projeto 1 – Tema 3

- Implementar as duas técnicas abaixo de preenchimento de borda em imagens

Original

2	3	1	4
1	5	3	7
2	9	2	0
8	7	2	4

Mais próximo

2	2	2	3	1	4	4	4
2	2	2	3	1	4	4	4
2	2	2	3	1	4	4	4
1	1	1	5	3	7	7	7
2	2	2	9	2	0	0	0
8	8	8	7	2	4	4	4
8	8	8	7	2	4	4	4
8	8	8	7	2	4	4	4

Espelhado

2	9	2	9	2	0	2	9
3	5	1	5	3	7	3	5
1	3	2	3	1	4	1	3
3	5	1	5	3	7	3	5
2	9	2	9	2	0	2	9
2	7	8	7	2	4	2	7
2	9	2	9	2	0	2	9
3	5	1	5	3	7	3	5

- Apresentar imagens nas quais cada metodologia é mais adequada

Projeto 1 – Tema 4

- Implementar o filtro laplaciano utilizando diferença de gaussianas
- Cada valor do filtro é dado pela diferença entre as duas funções abaixo

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_2^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_2^2}}$$

onde $\sigma_1 = c * \sigma_2$

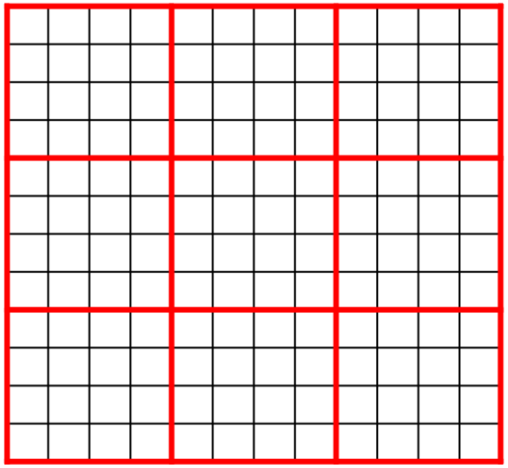
- Após criar o filtro, subtraia a média para que a soma do mesmo seja 0:

$$\mathrm{w} = \mathrm{w} - \mathrm{np.mean(w)}$$

- Identificar a influência do parâmetro c no resultado

Projeto 1 – Tema 5

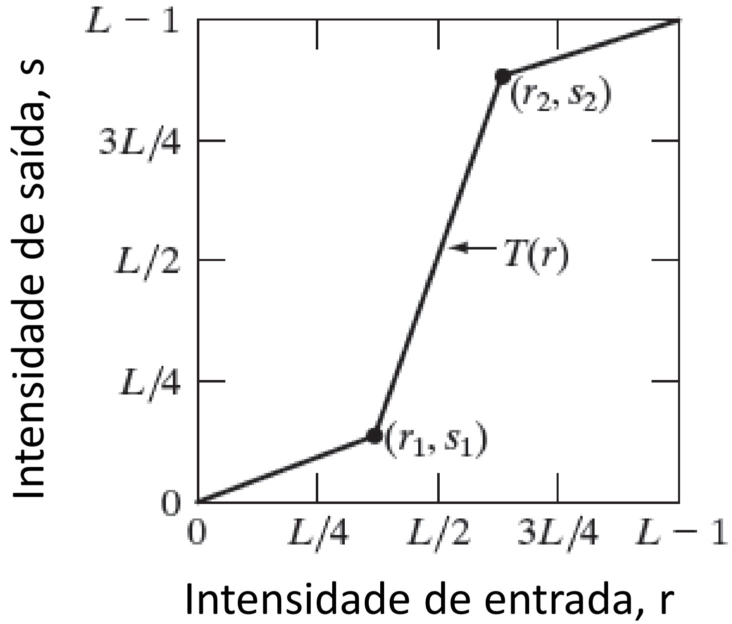
- Implementar a técnica de equalização local de histograma
- A imagem é dividida em sub-regiões, e a técnica de equalização de histograma é aplicada a cada sub-região separadamente.



- Esse método não funcionará muito bem! Compare com o resultado da função *skimage.exposure.equalize_adapthist* da biblioteca scikit-image

Projeto 1 – Tema 6

- Implementar a técnica de alargamento de contraste com dois pontos
- Dados dois pontos, é definida uma função de transformação composta por três retas



$$y_0(x) = \frac{s_1}{r_1} x$$

$$y_1(x) = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{r_2 - r_1}(x - r_1)$$

$$y_2(x) = s_2 + \frac{L - 1 - s_2}{L - 1 - r_2}(x - r_2)$$

Projetos

1. Filtros não-lineares
2. Suavização e derivada em imagens coloridas
3. Preenchimento de borda
4. Filtro laplaciano utilizando diferença de gaussianas
5. Equalização local de histograma
6. Alargamento de contraste