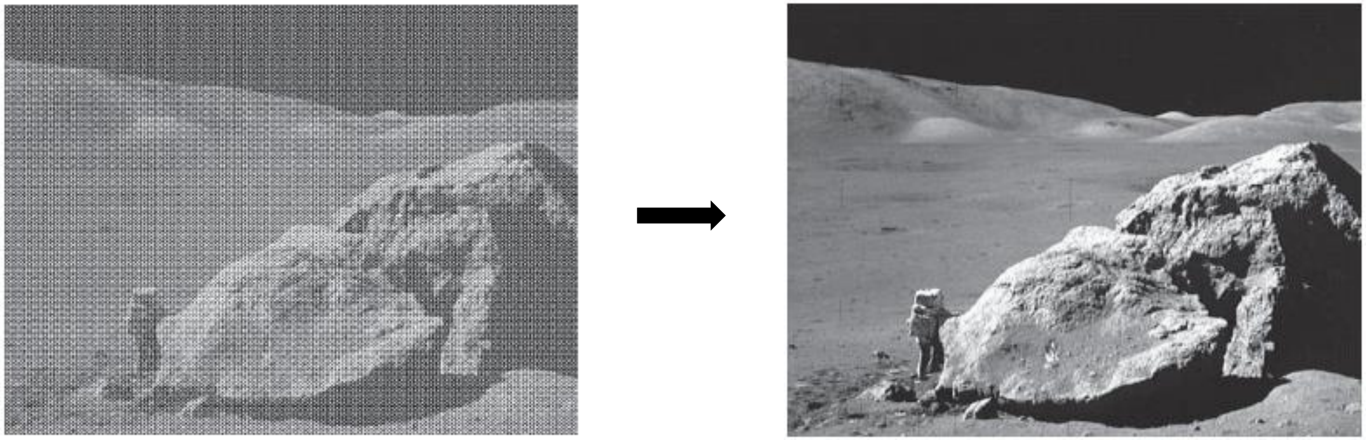
Filtragem no domínio da frequência

PROF. CESAR HENRIQUE COMIN

Motivação

Filtragem no domínio da frequência pode levar a resultados que são praticamente impossíveis de serem obtidos no domínio espacial.

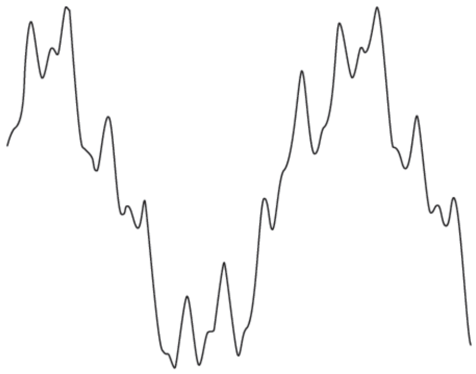


Domínio da frequência

Para entendermos melhor a utilidade de trabalharmos no domínio da frequência, vamos primeiro analisar a chamada *série de Fourier.*

Série de Fourier

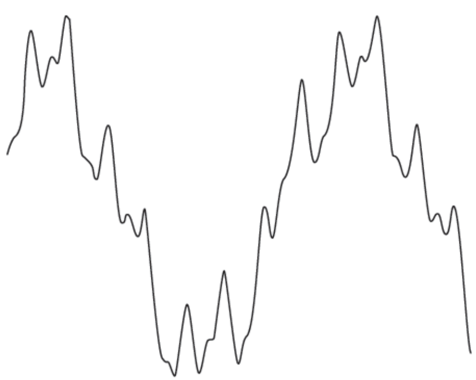
Função genérica



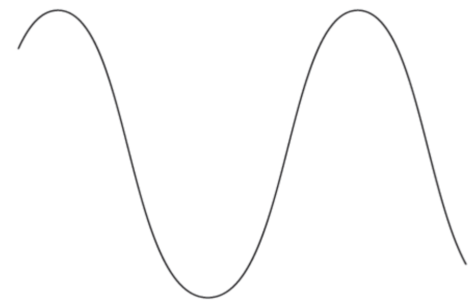
Série de Fourier

Funções base

Função genérica



=



+

+

+

Série de Fourier

- A série de Fourier pode ser utilizada para representarmos qualquer* função periódica;
- A função de interesse é representada como uma combinação linear de senos e cosenos;
- Os senos e cosenos utilizados são chamados de **funções base**.

Série de Fourier

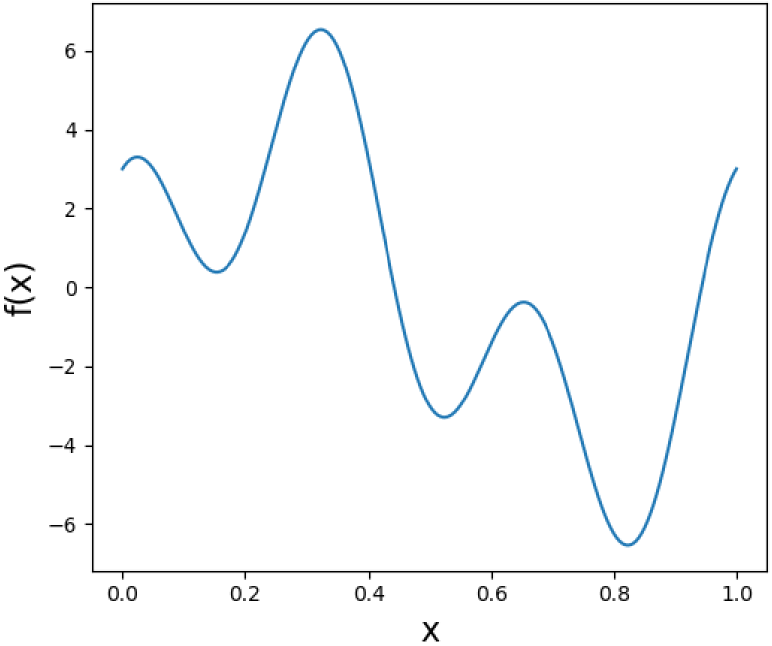
- A série de Fourier pode ser utilizada para representarmos qualquer* função periódica;
- A função de interesse é representada como uma combinação linear de senos e cosenos;
- Os senos e cosenos utilizados são chamados de **funções base**.

Equação utilizada para representar uma função:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{P} x + \phi_n\right)$$

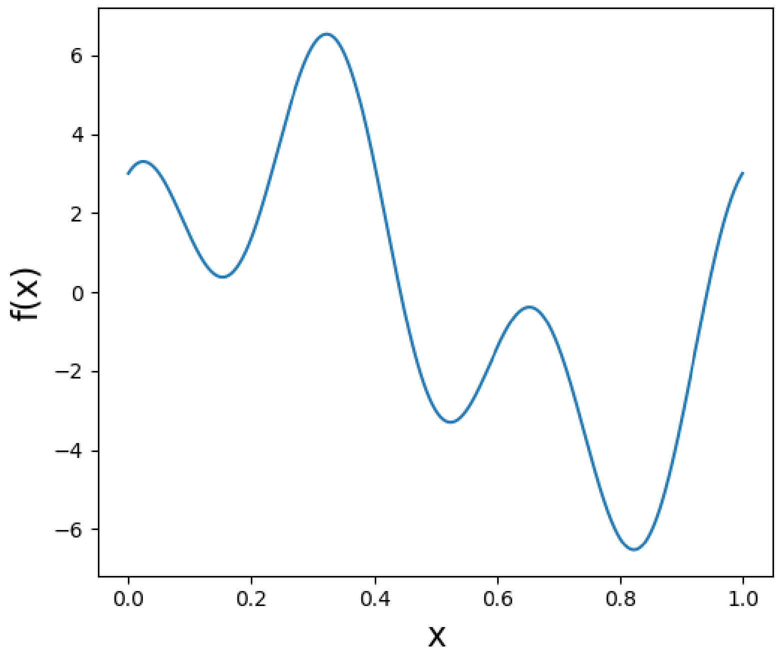
Isto é, $f(x)$ é representada como uma soma de senos possuindo diferentes amplitudes (A_n), frequências ($\frac{2\pi n}{P}$) e fases (ϕ_n).

Série de Fourier - Exemplo



$$f(x) = 4\sin(2\pi x) + 3\sin(6\pi x + \pi/2)$$

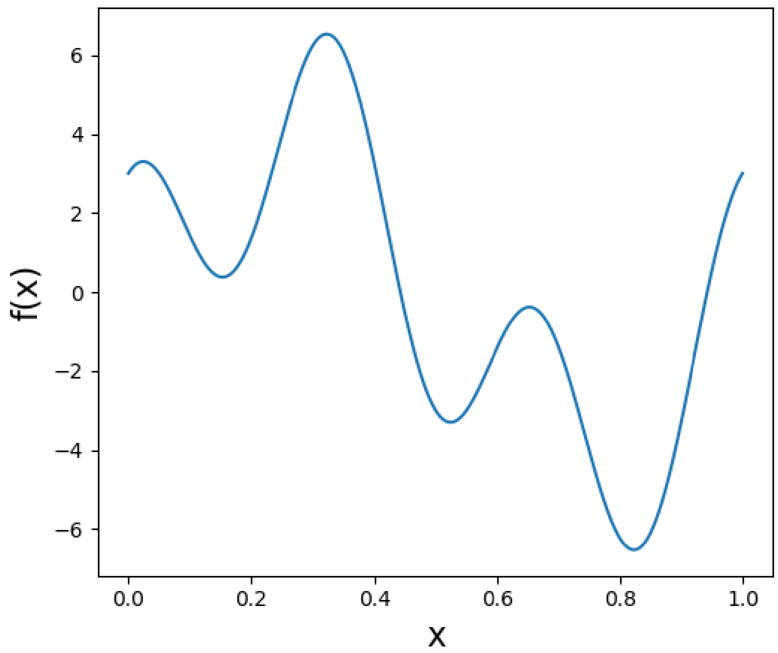
Série de Fourier - Exemplo



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + \phi_n\right)$$

$$f(x) = 4\sin(2\pi x) + 3\sin(6\pi x + \pi/2)$$

Série de Fourier - Exemplo



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + \phi_n\right)$$

$$A_0 = 0$$

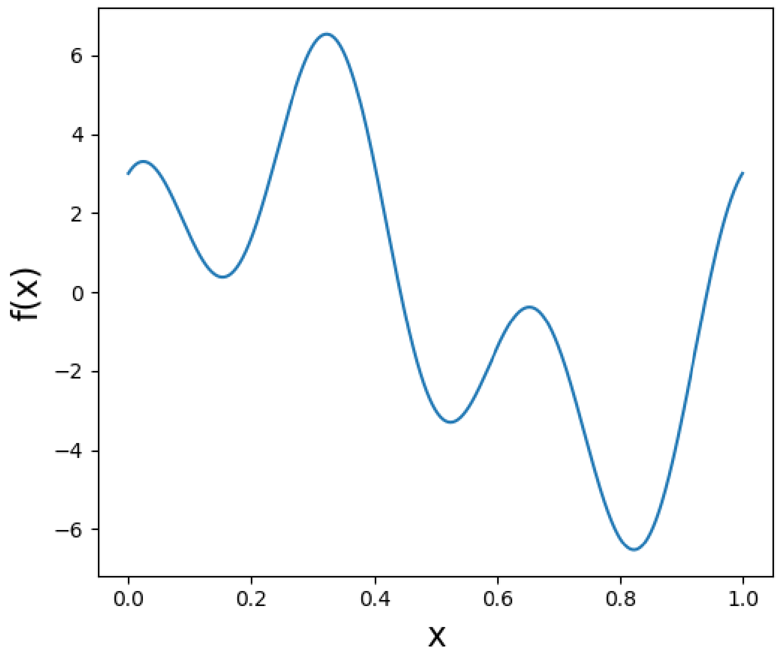
$$A_1 = 4 \qquad \phi_1 = 0$$

$$A_2 = 0 \qquad \phi_2 = 0$$

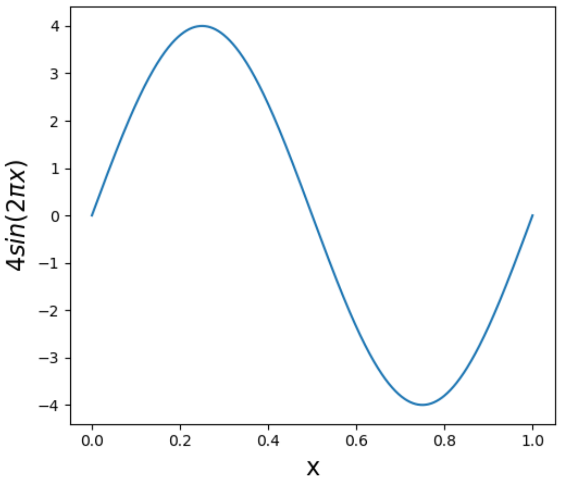
$$A_3 = 3 \qquad \phi_3 = \pi/2$$

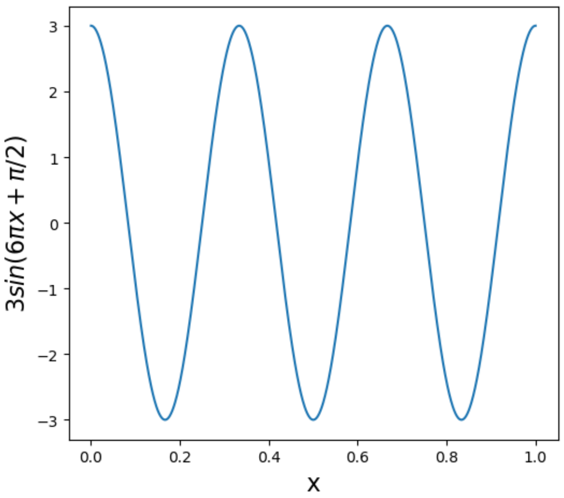
$$f(x) = 4\sin(2\pi x) + 3\sin(6\pi x + \pi/2)$$

Série de Fourier - Exemplo

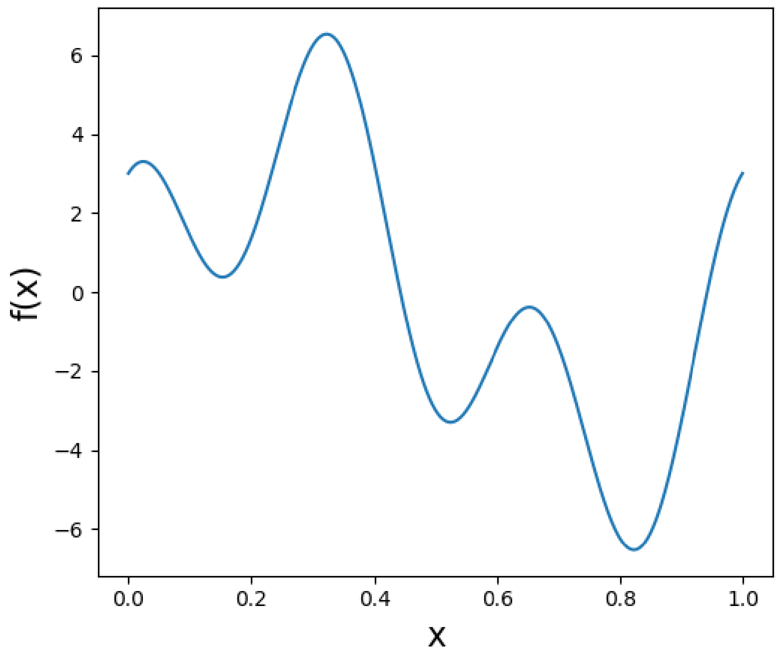


$$f(x) = 4\sin(2\pi x) + 3\sin(6\pi x + \pi/2)$$





Série de Fourier - Exemplo



Essa função complicada pode ser representada por apenas 3 números!

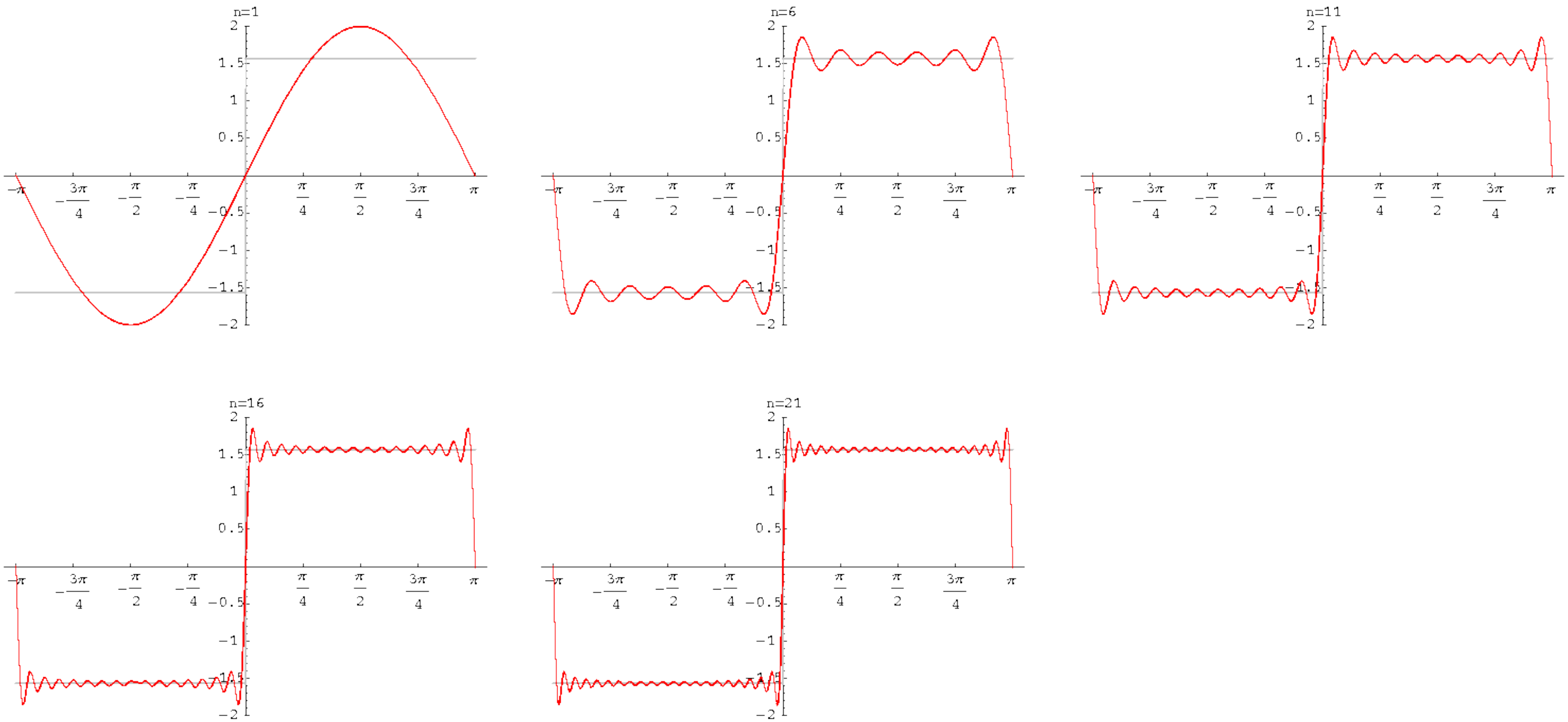
$A_1 = 4$

$A_3 = 3 \qquad \phi_3 = \pi/2$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + \phi_n\right)$$

Série de Fourier - Exemplo

Para funções “mal comportadas”, podem ser necessárias muitas funções base para representar a função.



Série de Fourier

Equação utilizada para representar uma função:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + \phi_n\right)$$

- Na equação acima, precisamos trabalhar com a amplitude das funções e também com a fase, que são quantias muito diferentes entre si
- Apesar de apenas a função seno aparecer na equação, ela na verdade representa uma soma de funções seno e coseno
- Por exemplo, sabemos que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Série de Fourier

Equação utilizada para representar uma função:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{P} + \phi_n\right)$$

- Na equação acima, precisamos trabalhar com a amplitude das funções e também com a fase, que são quantias muito diferentes entre si
- Apesar de apenas a função seno aparecer na equação, ela na verdade representa uma soma de funções seno e coseno
- Por exemplo, sabemos que $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
- Uma forma mais simples (sério!) de escrever a equação acima:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n x}{P}}$$

Série de Fourier

Lembrando que

$$Ae^{\theta i} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Portanto

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi nx}{P}} = \sum_{n=-N}^{N} c_n \left(\cos\left(\frac{2\pi nx}{P}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi nx}{P}\right)\right)$$

Ou seja, ao escrevermos a série de Fourier na forma complexa, ainda estamos trabalhando com uma soma de senos e cosenos.

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier pode ser calculada na sua forma contínua ou na forma discreta (meio digital).

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier de uma função contínua é dada por

$$\mathcal{F}\big(\mathrm{f(x)}\big) = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \mu} dx$$

- A transformada de Fourier de uma função periódica discreta é dada por

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-2\pi i n m / M}$$

onde M é o tamanho do sinal e m representa a frequência dos senos e cosenos utilizados para representar o sinal

- Lembrando que sinais em um meio digital são sempre discretos.

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier de uma função periódica discreta é dada por

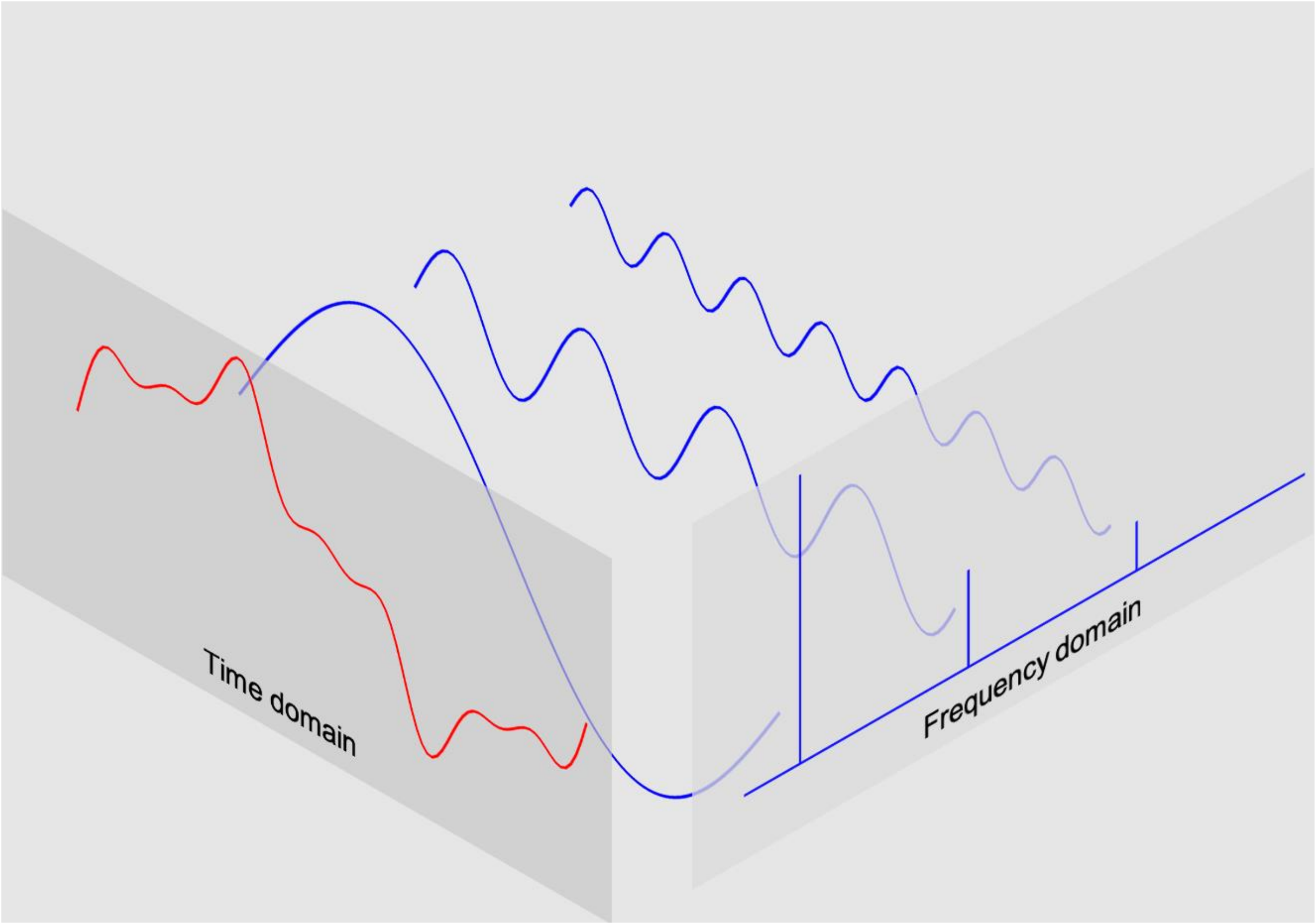
$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-2\pi i n m/M}$$

Note a similaridade entre a equação acima e a série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x/P}$$

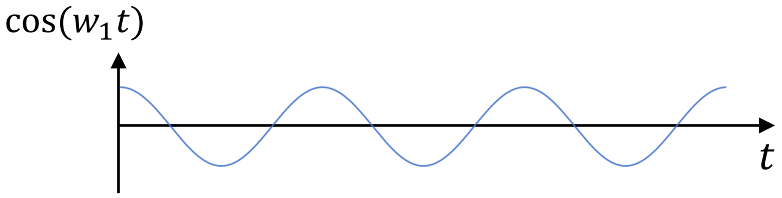
O valor F_m representa quanto as funções coseno e seno de frequência $\frac{m}{M}$ contribuem para formar a função f_n

Transformada de Fourier



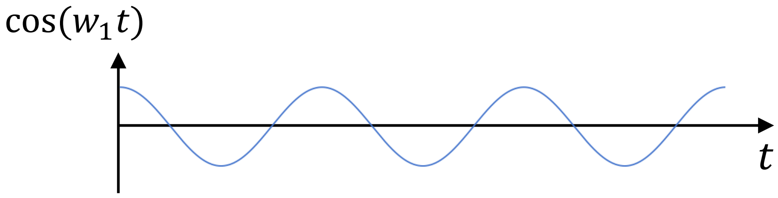
Transformada de Fourier, exemplo

Sinal original



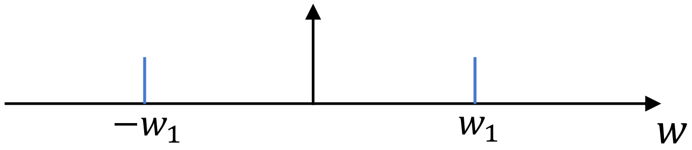
Transformada de Fourier, exemplo

Sinal original



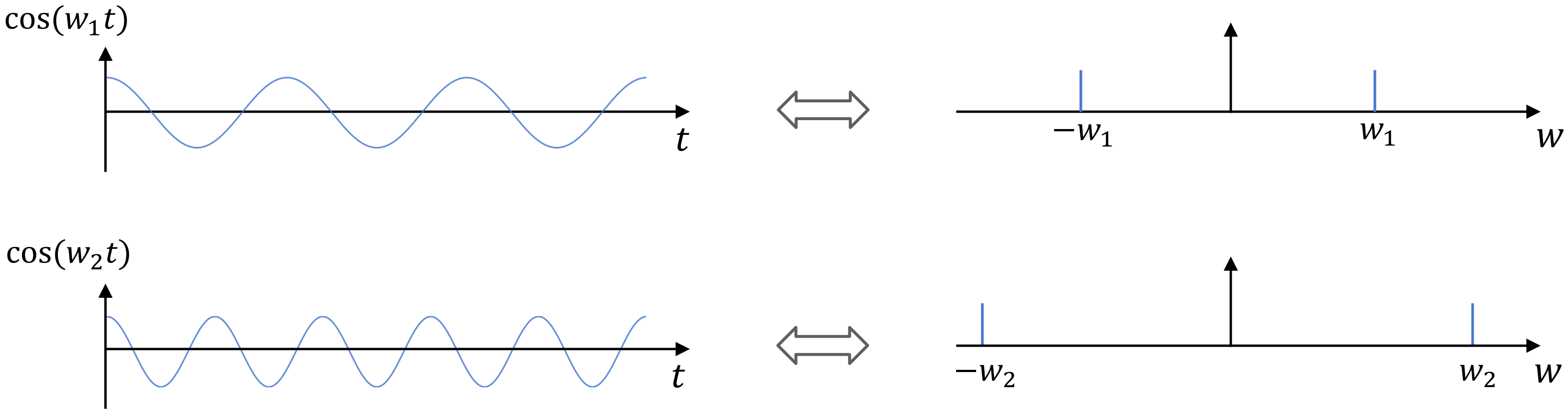
$\Longleftrightarrow$

Transformada de Fourier



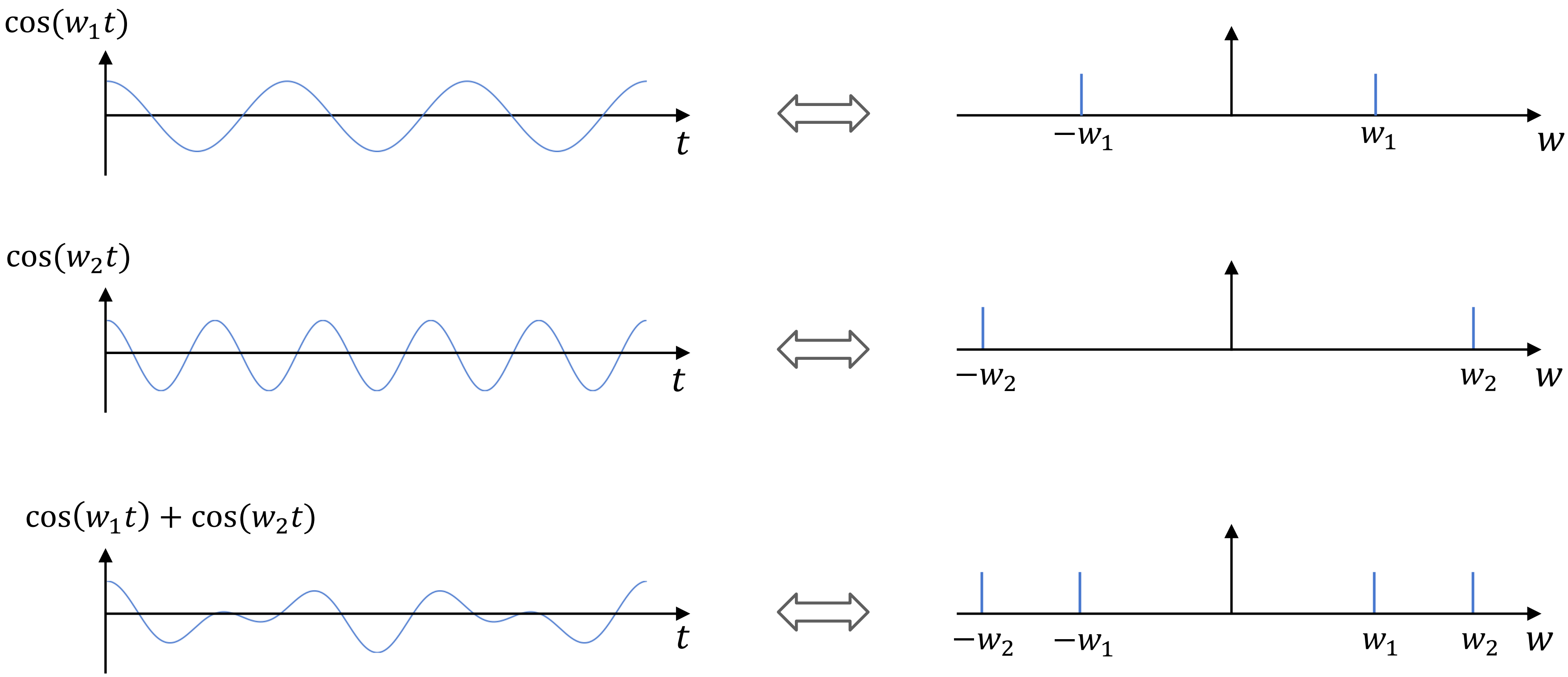
Transformada de Fourier, exemplo

Sinal original — Transformada de Fourier



Transformada de Fourier, exemplo

Sinal original | Transformada de Fourier

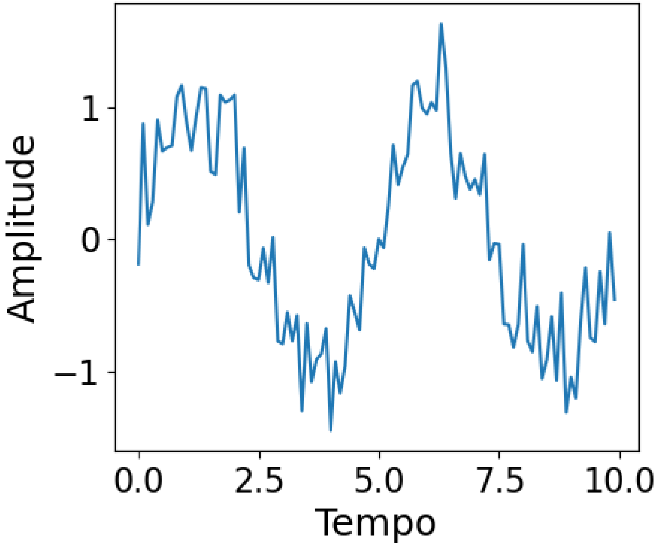


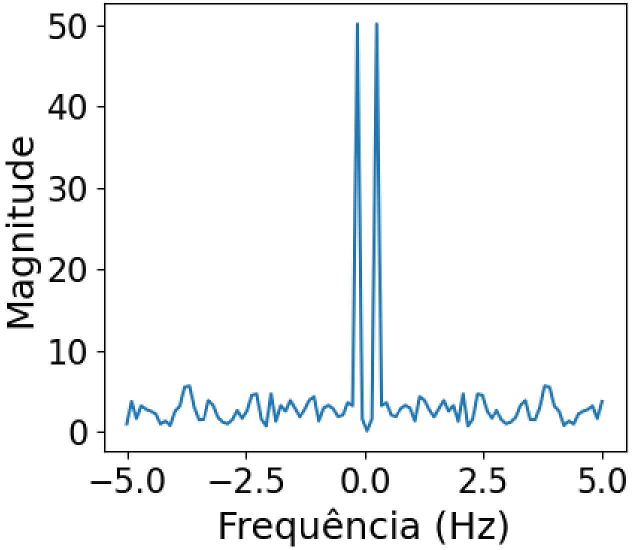
Notem que a transformada de Fourier do coseno é simétrica em relação à origem

Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é uma representação do sinal no domínio da frequência. Chamamos essa representação de **espectro** do sinal
- Em muitos casos, essa representação é mais simples e intuitiva do que a representação no domínio espacial.

Transformada de Fourier





Transformada inversa de Fourier

- A transformada inversa de Fourier de uma função contínua é dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{2\pi i x \mu} d\mu$$

- Para um sinal discreto:

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{2\pi i m n / M}$$

A transformada de Fourier inversa recupera o sinal no domínio espacial a partir dos valores no domínio da frequência.

Transformada inversa de Fourier

- A transformada inversa de Fourier de uma função contínua é dada por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu) e^{2\pi i x \mu} d\mu$$

- Para um sinal discreto:

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{2\pi i m n / M}$$

Transformada de Fourier

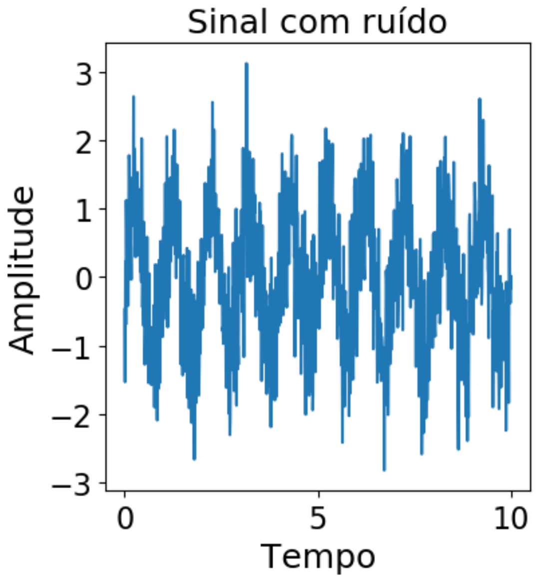
$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-2\pi i m n / M}$$

A transformada de Fourier inversa recupera o sinal no domínio espacial a partir dos valores no domínio da frequência.

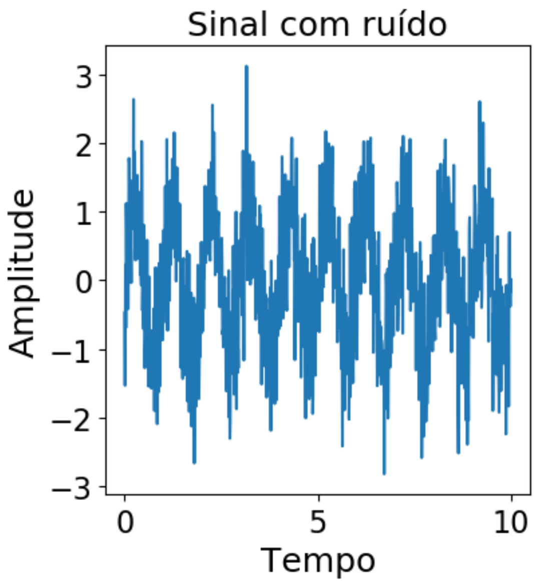
Filtragem no domínio da frequência

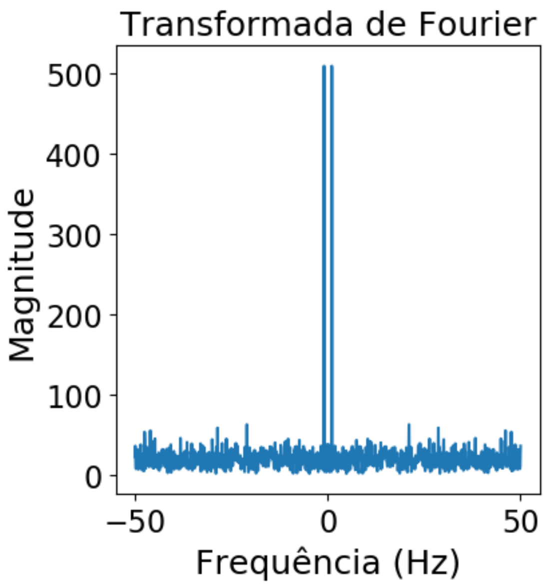
- Podemos utilizar a transformada de Fourier para filtrar sinais
- Algoritmo básico:
  - Aplique a transformada de Fourier em um sinal para obter a representação do mesmo no domínio da frequência
  - Mantenha apenas algumas frequências de interesse
  - Aplique a transformada inversa para obter um novo sinal

Filtragem no domínio da frequência



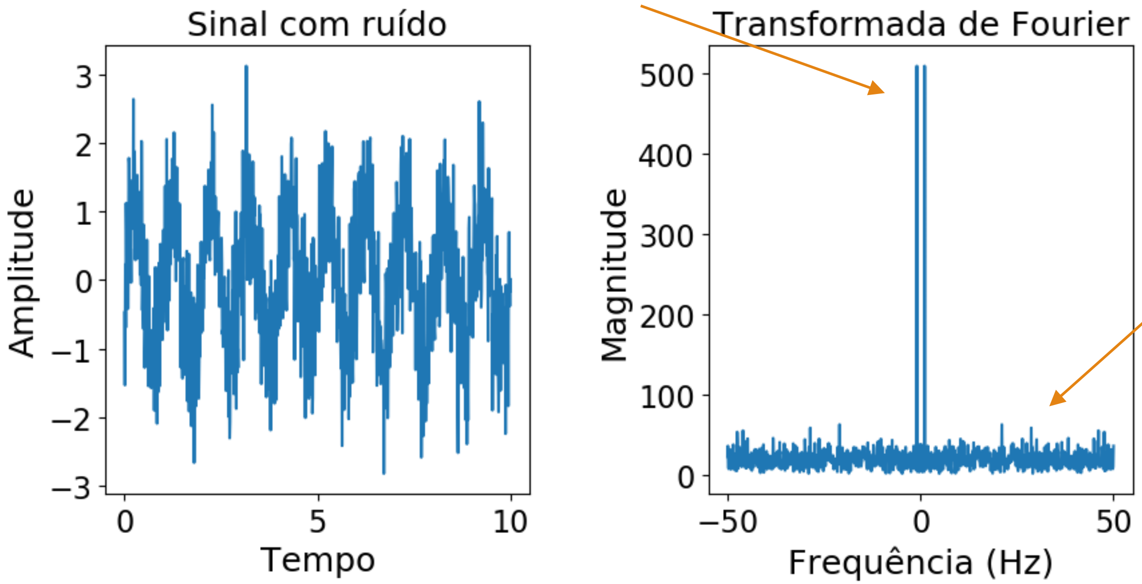
Filtragem no domínio da frequência





Filtragem no domínio da frequência

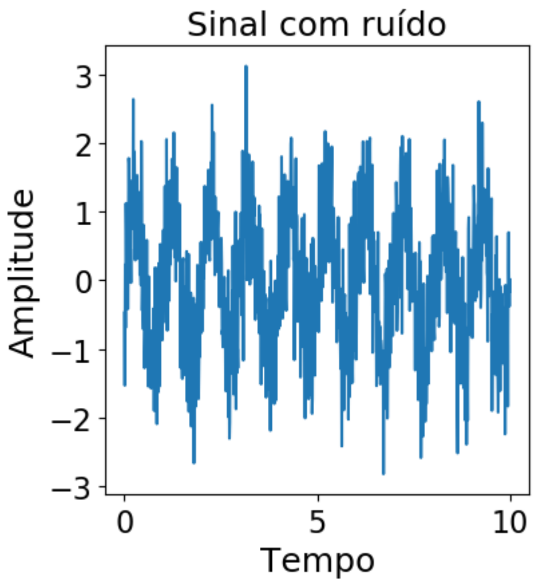
Frequência principal do sinal (1 Hz)

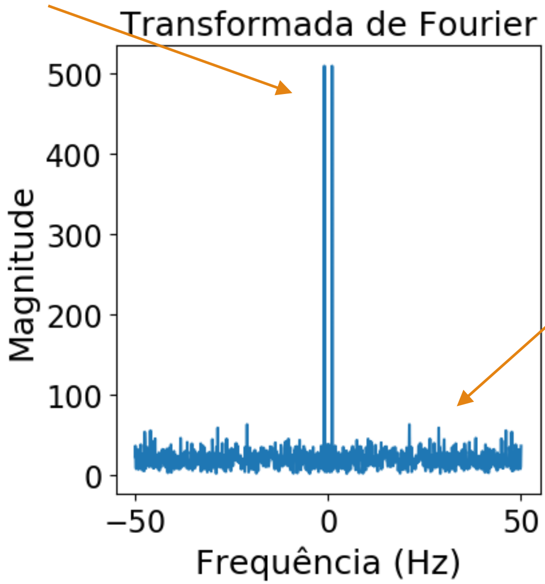


Vários componentes de frequência causados pelo ruído

Filtragem no domínio da frequência

Frequência principal do sinal (1 Hz)





Vários componentes de frequência causados pelo ruído

Podemos filtrar o sinal através do seguinte algoritmo:

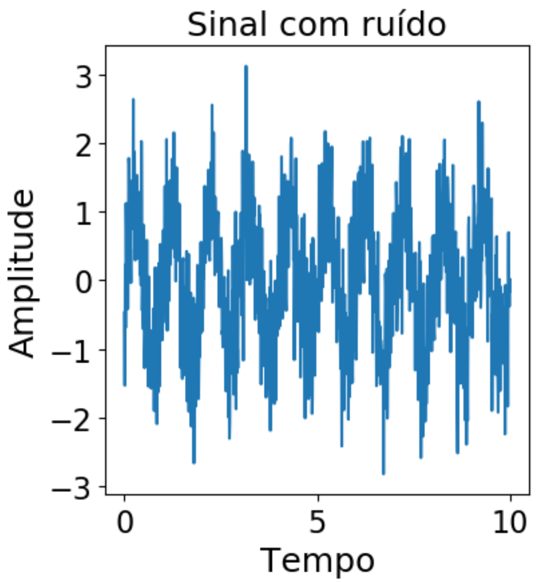
Para cada frequência f do sinal:

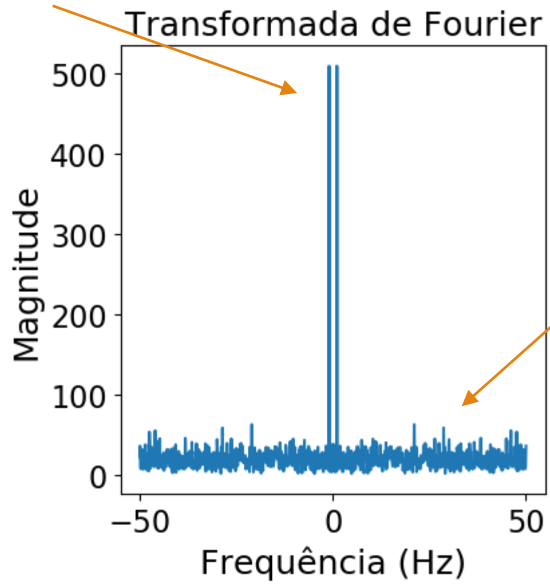
Se f não é igual a 1:

Magnitude(f)=0

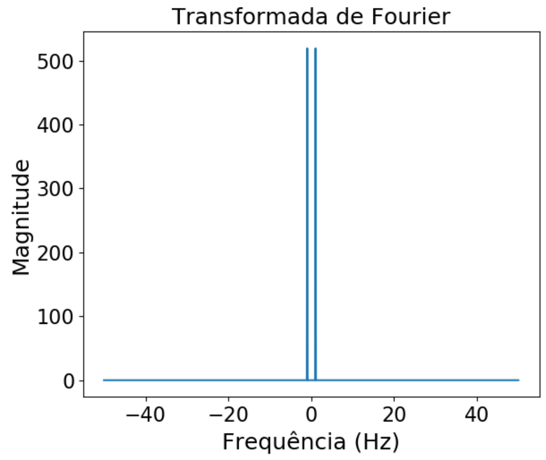
Filtragem no domínio da frequência

Frequência principal do sinal (1 Hz)





Vários componentes de frequência causados pelo ruído



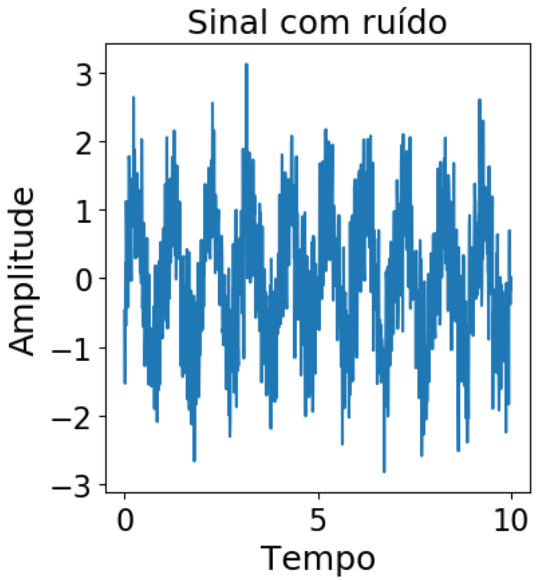
Podemos filtrar o sinal através do seguinte algoritmo:

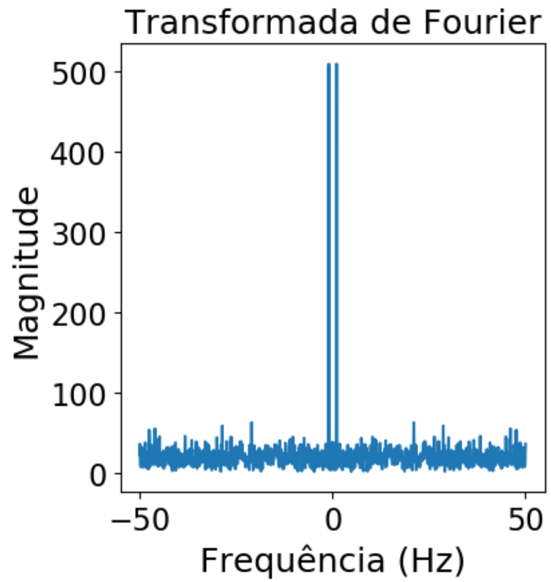
Para cada frequência f do sinal:

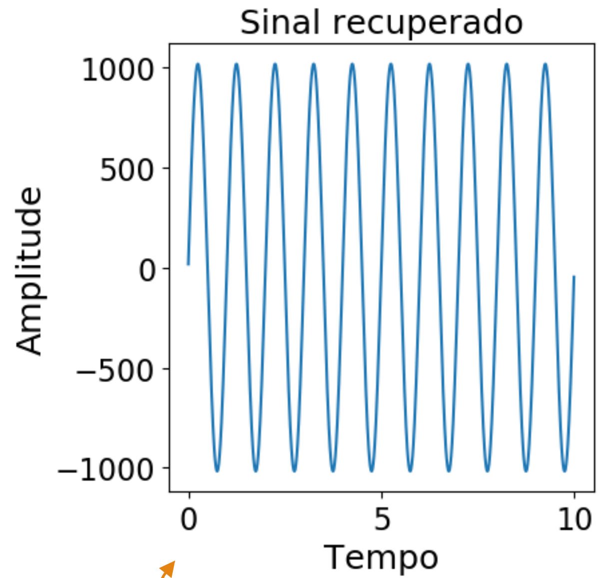
Se f não é igual a 1:

Magnitude(f)=0

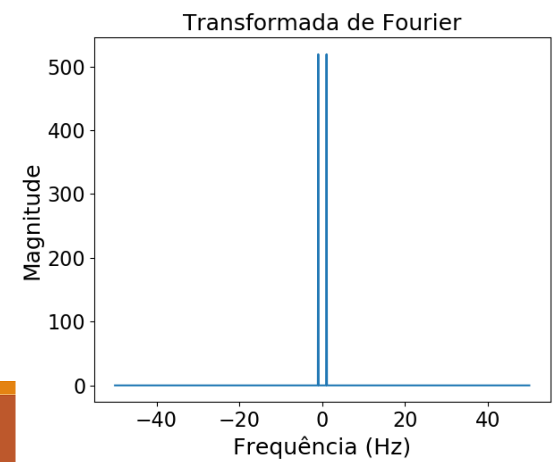
Filtragem no domínio da frequência







Transforma inversa de Fourier



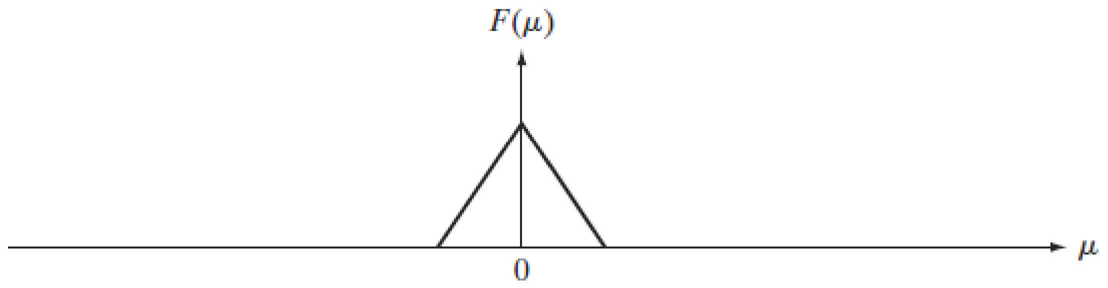
Algoritmo Para Calcular a Transformada Discreta de Fourier

Notebook “**Transformada discreta de Fourier (DFT)**”

Efeito da amostragem (discretização) no meio digital

Efeito da amostragem

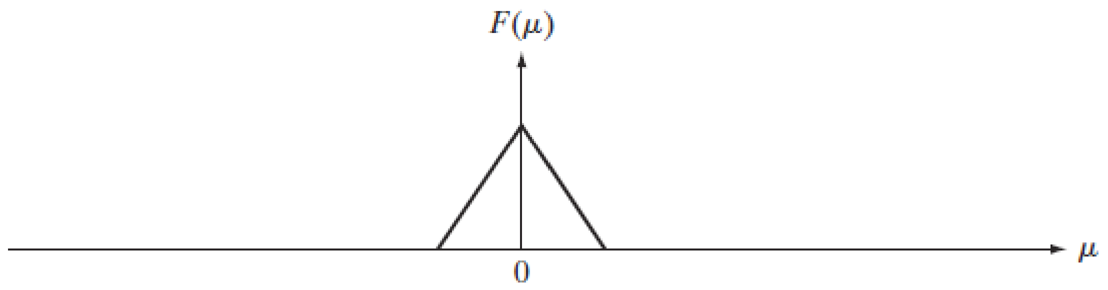
Vamos supor que um sinal contínuo possui a seguinte transformada de Fourier



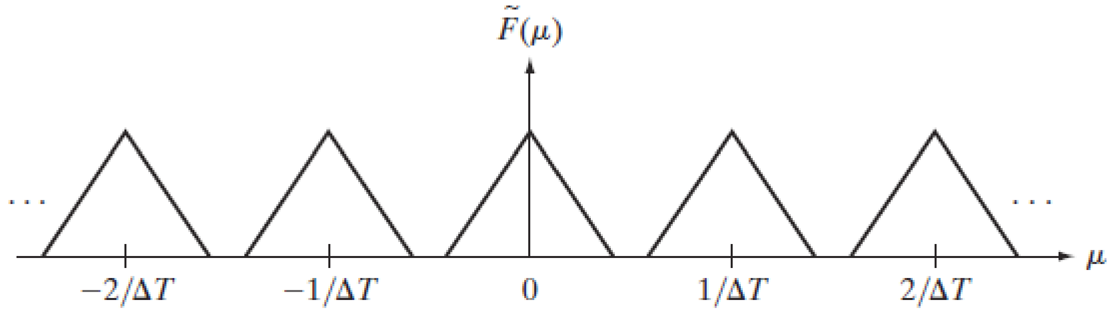
Para representarmos o sinal no computador, precisamos amostrá-lo. Isto é, definimos um intervalo de amostragem ΔT e armazenamos em um array os valores do sinal nas posições 0, ΔT, $2\Delta T$, $3\Delta T$, ...

Efeito da amostragem

Vamos supor que um sinal contínuo possui a seguinte transformada de Fourier



É possível mostrar que a versão discreta (amostrada) desse sinal possuirá a seguinte transformada de Fourier



ΔT é o intervalo de amostragem.
$1/\Delta T$ é chamado de taxa de amostragem

Efeito da amostragem

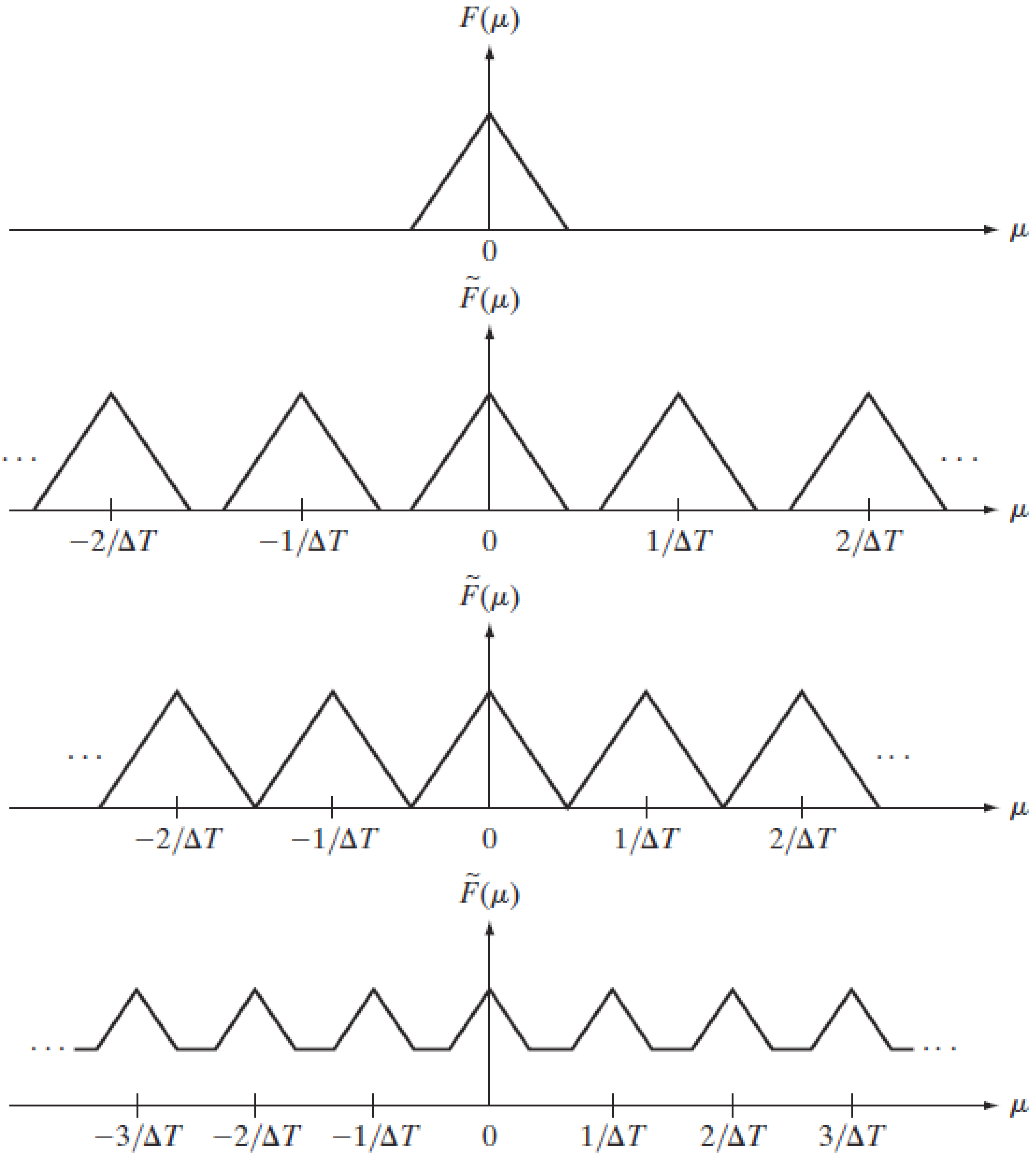
A amostragem do sinal faz com que sua transformada de Fourier seja “copiada” diversas vezes ao longo do domínio da frequência.

O que acontece se aumentarmos ΔT?

ΔT pequeno

ΔT intermediário

ΔT grande



Efeito da amostragem

A amostragem do sinal faz com que sua transformada de Fourier seja “copiada” diversas vezes ao longo do domínio da frequência.

O que acontece se aumentarmos ΔT?

Perdemos informação sobre as frequências que compõe o sinal! Isso porque ocorre uma “mistura” entre as diferentes cópias do espectro.

Como podemos então selecionar um ΔT adequado para o sinal que estamos filtrando?

Teorema da amostragem

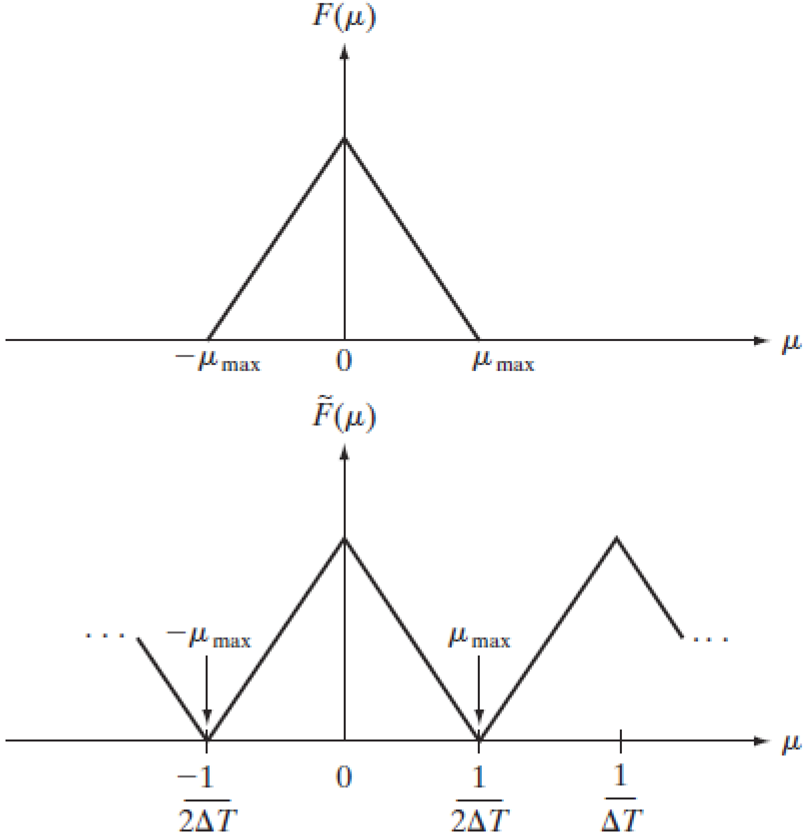
Teorema da amostragem de Nyquist:

A maior frequência, μ_{max}, que podemos representar em um sinal digital discreto é igual a $1/2\Delta T$. Isto é,

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\Delta T}$$

De forma equivalente, se queremos representar frequências de até μ_{max}, devemos amostrar o sinal em intervalos de no máximo $\Delta T = 1/2\mu_{max}$

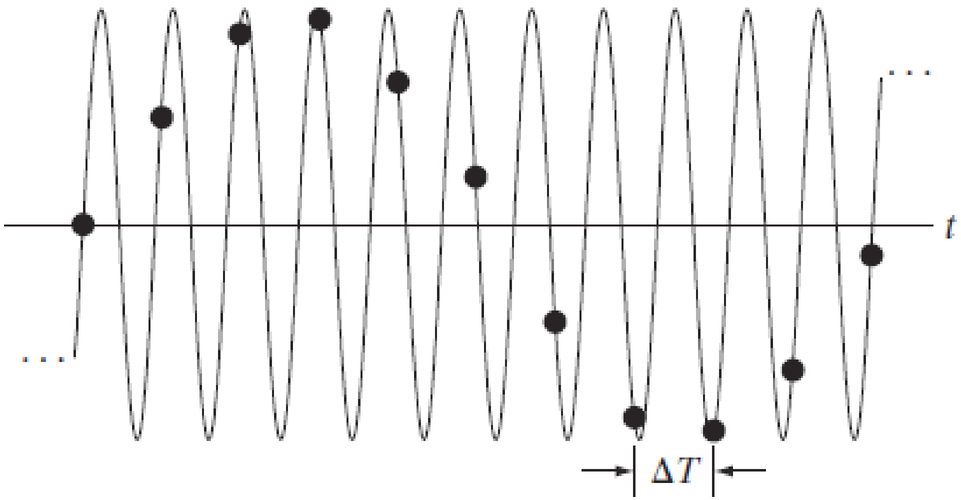
Teorema da amostragem



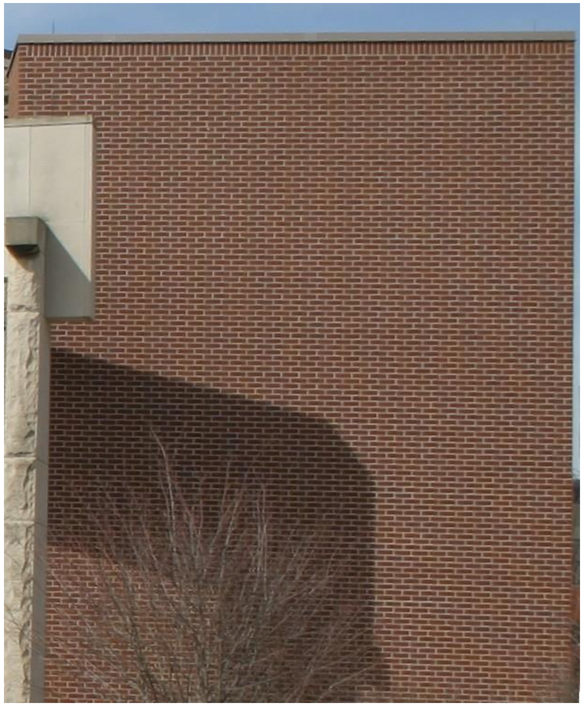
Aliasing

A amostragem de um sinal em intervalos maiores que $1/2\mu_{max}$ causa o fenômeno de aliasing.

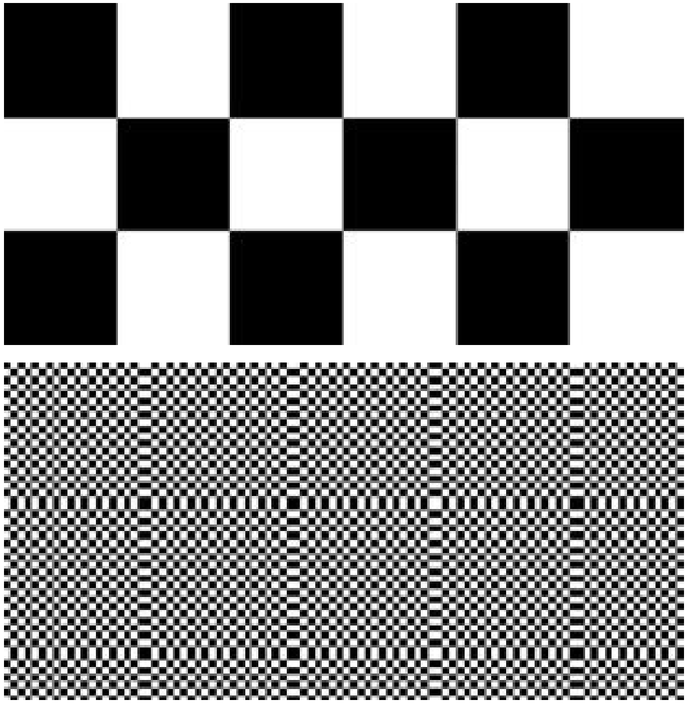
Por exemplo



Aliasing em imagens



Aliasing em imagens



Aliasing em imagens


Aliasing em imagens

Aliasing em imagens

Como Podemos eliminar aliasing?

Precisamos remover altas frequências na imagem antes de amostrá-la.

Notebook “**Aliasing**”

Detalhe importante sobre a transformada discreta de Fourier (DFT)

- Ao aplicarmos a DFT, o sinal resultante fica “invertido” em relação ao esperado

Detalhe importante sobre a transformada discreta de Fourier (DFT)

- Ao aplicarmos a DFT, o sinal resultante fica "invertido" em relação ao esperado
- Por exemplo, intuitivamente esperamos que o resultado da DFT esteja organizado da seguinte forma:

Magnitude	1.2	...	...	15	23	34	100	34	23	...	...	1.2
Frequência	$-f_{max}$	...	...	-0.09	-0.06	-0.03	0	0.03	0.06	...	...	f_{max}
Índice	0	1	2	...	...	M/2-1	$M/2$	...	...	M-3	M-2	M-1

Detalhe importante sobre a transformada discreta de Fourier (DFT)

- Ao aplicarmos a DFT, o sinal resultante fica "invertido" em relação ao esperado
- Mas o resultado da DFT fica organizado de outra forma:

Magnitude	100	34	23	...	...	1.2	1.2	...	...	15	23	34
Frequência	0	0.03	0.06	...	...	f_{max}	$-f_{max}$	...	...	-0.09	-0.06	-0.03
Índice	0	1	2	...	...	M/2-1	$M/2$	...	...	M-3	M-2	M-1

Detalhe importante sobre a transformada discreta de Fourier (DFT)

- Ao aplicarmos a DFT, o sinal resultante fica "invertido" em relação ao esperado
- Mas o resultado da DFT fica organizado de outra forma:

Magnitude	100	34	23	...	...	1.2	1.2	...	...	15	23	34
Frequência	0	0.03	0.06	...	...	f_{max}	$-f_{max}$	...	...	-0.09	-0.06	-0.03
Índice	0	1	2	...	...	M/2-1	$M/2$	...	...	M-3	M-2	M-1

Portanto, pode ser necessário inverter o sinal após a aplicação da DFT:

Magnitude	1.2	...	...	15	23	34	100	34	23	...	...	1.2
Frequência	$-f_{max}$	...	...	-0.09	-0.06	-0.03	0	0.03	0.06	...	...	f_{max}
Índice	0	1	2	...	...	M/2-1	$M/2$	...	...	M-3	M-2	M-1

Cálculo da Transformada Discreta de Fourier e das Frequências do sinal

Notebook “**Transformada discreta de Fourier (DFT)**”

A transformada discreta de Fourier 2D

O cálculo da transformada em 2D é similar ao caso 1D:

$$F(\mu,\nu) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-2\pi i(\mu x/M+\nu y/N)}$$

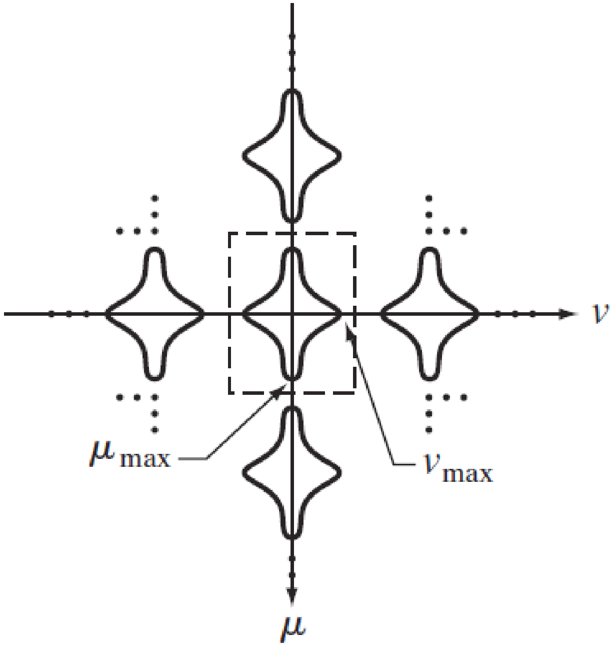
onde $f(x,y)$ é uma imagem de tamanho $M \times N$. A equação deve ser calculada para todos os valores $\mu = 0,1,2,\dots,M-1$ e $\nu = 0,1,2,\dots,N-1$.

Transformada inversa:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{\mu=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu,\nu)e^{2\pi i(\mu x/M+\nu y/N)}$$

A transformada discreta de Fourier 2D

Lembrem-se que, assim como no caso 1D, a transformada de Fourier discreta é composta por diversas cópias da transformada de Fourier da respectiva função contínua.



A transformada discreta de Fourier 2D

Máximas frequências que podem ser representadas:

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\Delta X}$$

$$\nu_{max} = \frac{1}{2\Delta Y}$$

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier geralmente resulta em valores complexos.

Portanto, $F(\mu, \nu)$ possui magnitude e fase

Magnitude (espectro de potência ou densidade espectral):

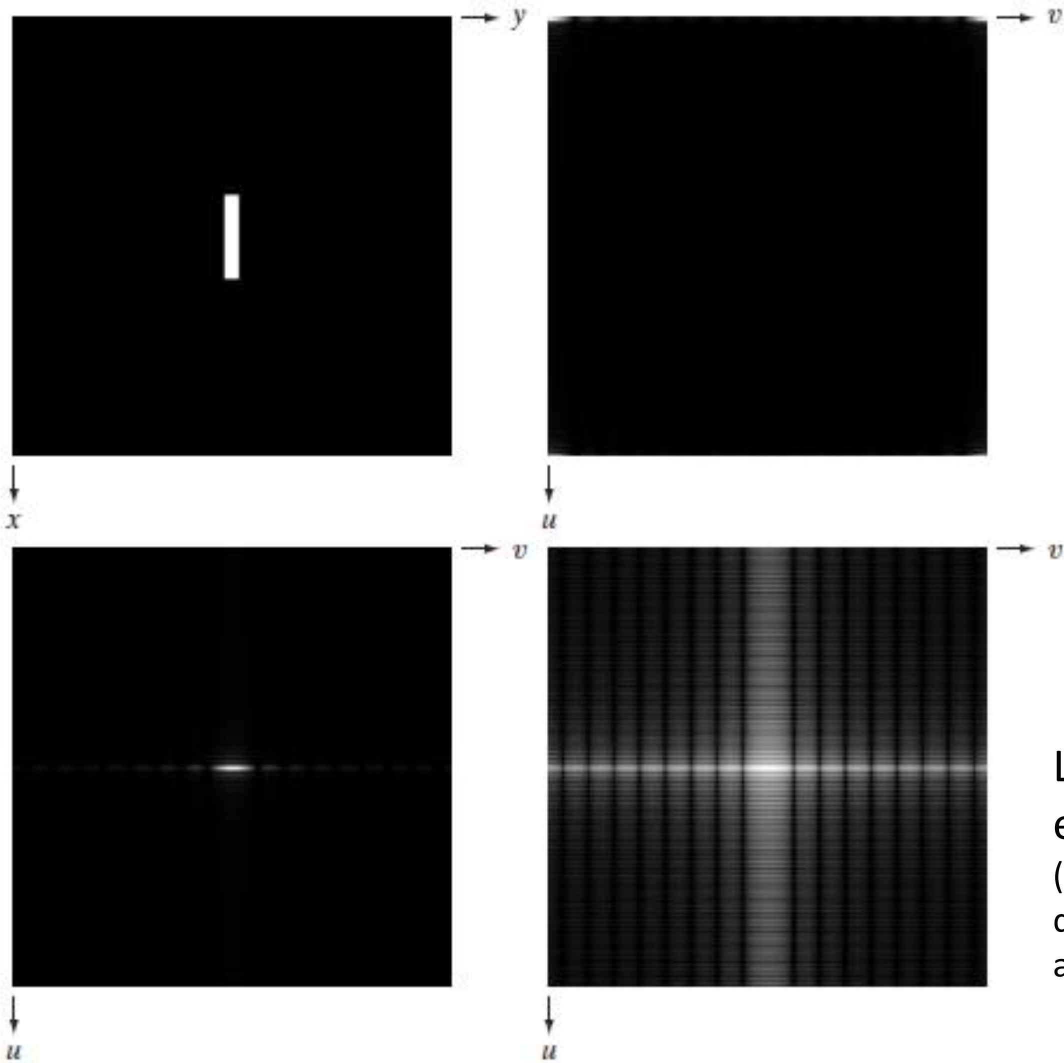
$$|F(\mu, \nu)| = \sqrt{R(\mu, \nu)^2 + I(\mu, \nu)^2}$$

Fase:

$$\phi(\mu, \nu) = \arctan\left(\frac{I(\mu, \nu)}{R(\mu, \nu)}\right)$$

$R(\mu, \nu)$ e $I(\mu, \nu)$ são a parte real e imaginária de $F(\mu, \nu)$.

Transformada de Fourier de uma barra branca



Original

Espectro

Espectro transladado para a origem

Logaritmo do espectro
(pois o valor no centro da imagem é muito alto)

Cálculo da Transformada Discreta de Fourier e das Frequências do sinal

Notebook “**Aplicando a DFT**”