Filtragem no domínio da frequência 2

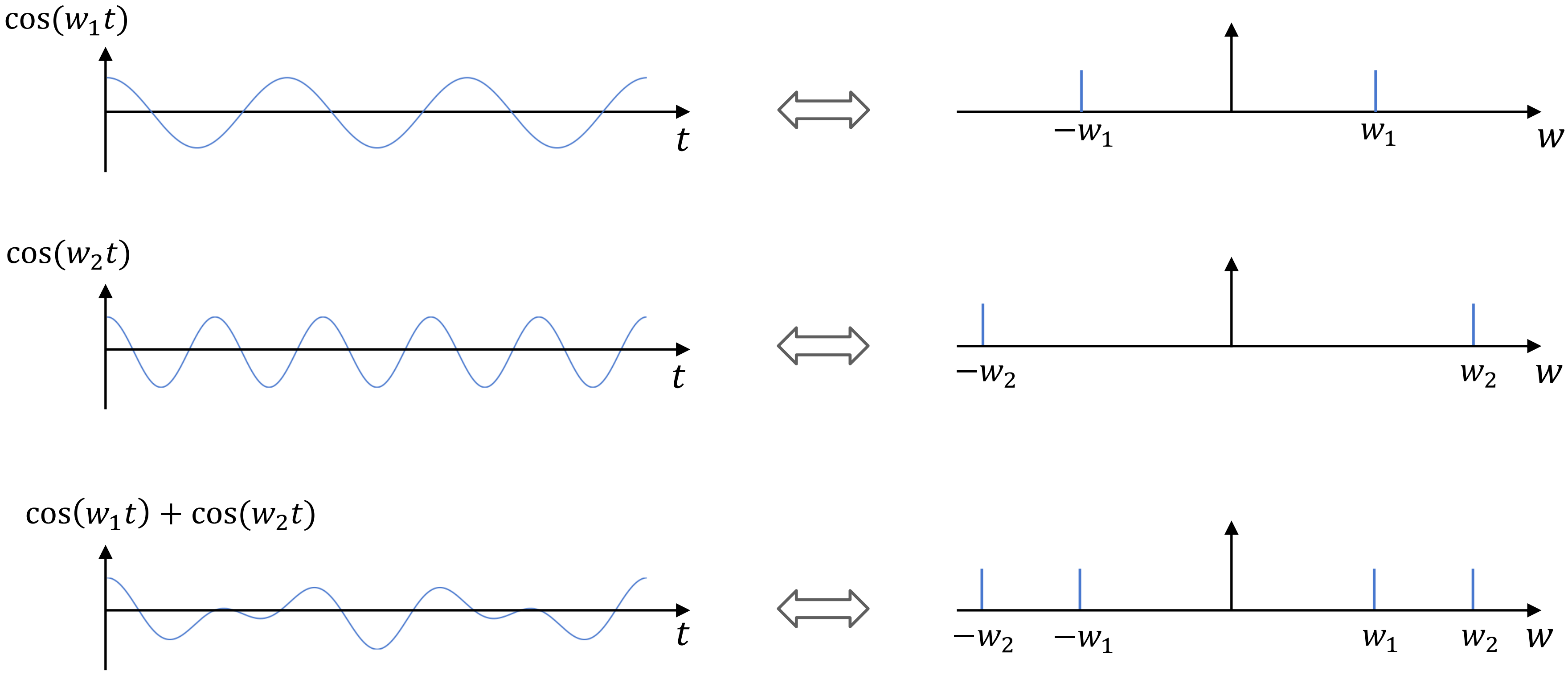
PROF. CESAR HENRIQUE COMIN

Transformada de Fourier

- Vimos que a transformada de Fourier é uma representação do sinal no domínio da frequência. Chamamos essa representação de **espectro** do sinal
- Em muitos casos, essa representação é mais simples e intuitiva do que a representação no domínio espacial.

Transformada de Fourier, exemplo

Sinal original　　　　Transformada de Fourier



A transformada discreta de Fourier 2D

Transformada de Fourier 2D:

$$F(\mu, \nu) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i(\mu x/M + \nu y/N)}$$

onde $f(x, y)$ é uma imagem de tamanho $M \times N$. A equação deve ser calculada para todos os valores $\mu = 0,1,2, \dots, M-1$ e $\nu = 0,1,2, \dots, N-1$.

Transformada de Fourier inversa:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\mu, \nu) e^{2\pi i(\mu x/M + \nu y/N)}$$

Filtragem no domínio da frequência

Filtragem no domínio da frequência

- Já vimos que é possível utilizar a transformada de Fourier para filtrar imagens
- Mas como a filtragem no domínio da frequência se relaciona com a filtragem no domínio espacial?
- Essa relação é revelada pelo **teorema da convolução**!

O teorema da convolução

- Uma das principais razões da importância da transformada de Fourier para o processamento de imagens (e de sinais) é o teorema da convolução.
- A convolução entre duas funções contínuas é escrita como

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(k-x)dk$$

O teorema da convolução

- Uma das principais razões da importância da transformada de Fourier para o processamento de imagens (e de sinais) é o teorema da convolução.
- A convolução entre duas funções contínuas é escrita como

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(k-x)dk$$

- O teorema da convolução diz que

$$f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)G(\mu)\}$$

onde $\mathcal{F}^{-1}$ é a transformada inversa de Fourier e F e G são as transformadas de Fourier das funções f e g.

O teorema da convolução

- O teorema da convolução diz que podemos calcular a convolução, uma operação bem custosa, através da multiplicação da transformada de Fourier de duas funções (e do cálculo da transformada inversa).

$$f(x) * g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu)G(\mu)\}$$

- Isso quer dizer que qualquer filtro linear pode ser aplicado a uma imagem através da multiplicação das transformadas de Fourier da imagem e do filtro.

Nota: o teorema da convolução também garante a operação inversa

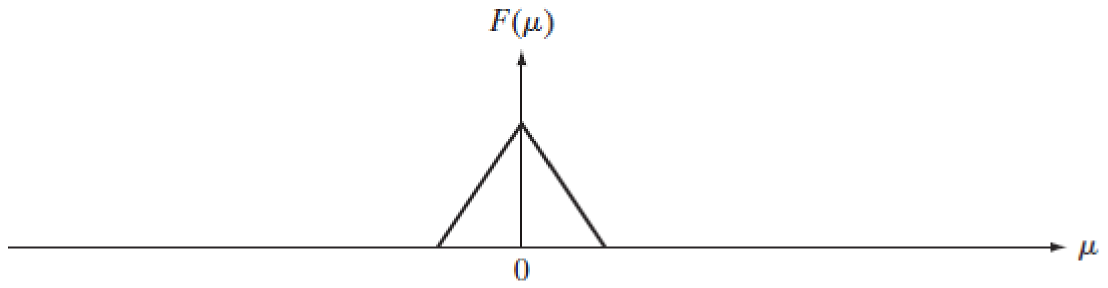
$$F(\mu) * G(\mu) = \mathcal{F}\{f(x)g(x)\}$$

O teorema da convolução

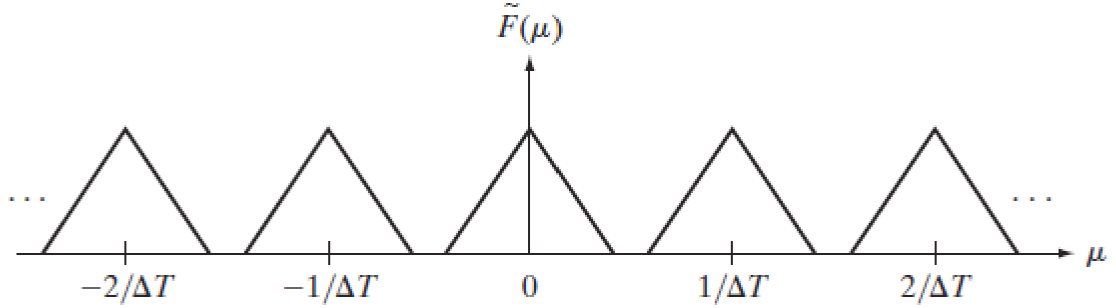
- A aplicação prática do teorema da convolução possui alguns problemas, causados porque
  - O espaço é discreto (sinal digital)
  - O sinal é finito (o teorema da convolução considera sinais de extensão infinita)

Relembrando - Efeito da amostragem

Vamos supor que um sinal contínuo possui a seguinte transformada de Fourier



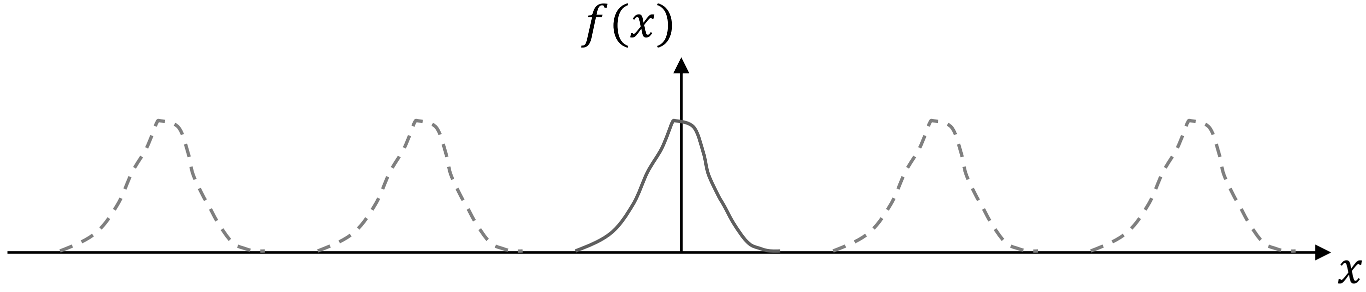
É possível mostrar que a versão discreta (amostrada) desse sinal possuirá a seguinte transformada de Fourier



ΔT é o intervalo de amostragem.
$1/\Delta T$ é chamado de taxa de amostragem

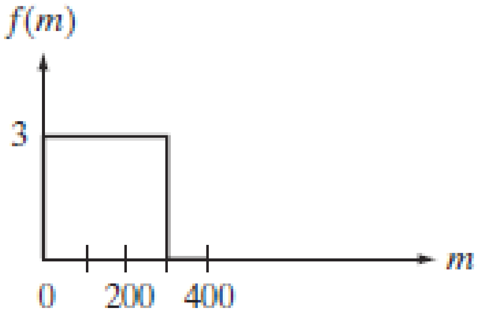
Efeito da amostragem

O oposto também é verdadeiro. Isto é, a transformada de Fourier inversa de um sinal discreto resulta na repetição do sinal diversas vezes no domínio espacial.

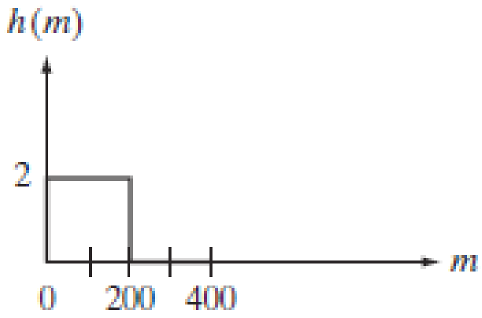


Isso pode causar problemas para a convolução aplicada no domínio da frequência.

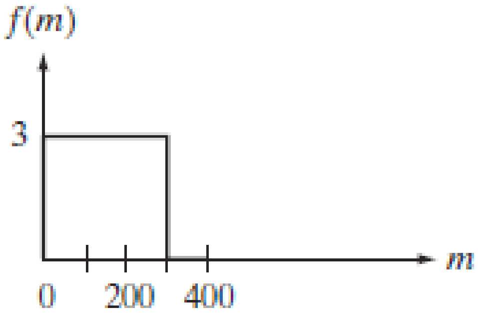
Convolução de dois sinais no domínio espacial



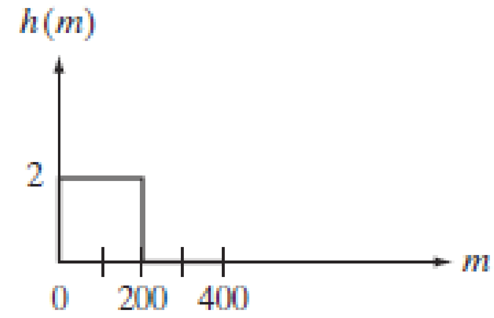
*



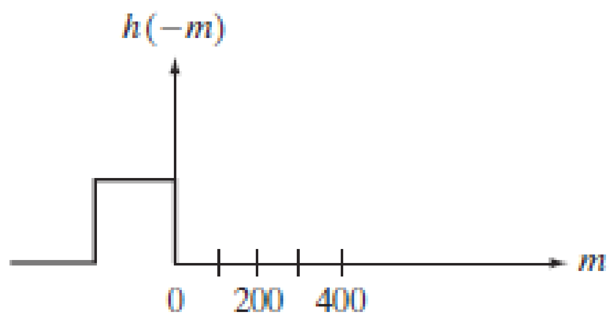
Convolução de dois sinais no
domínio espacial



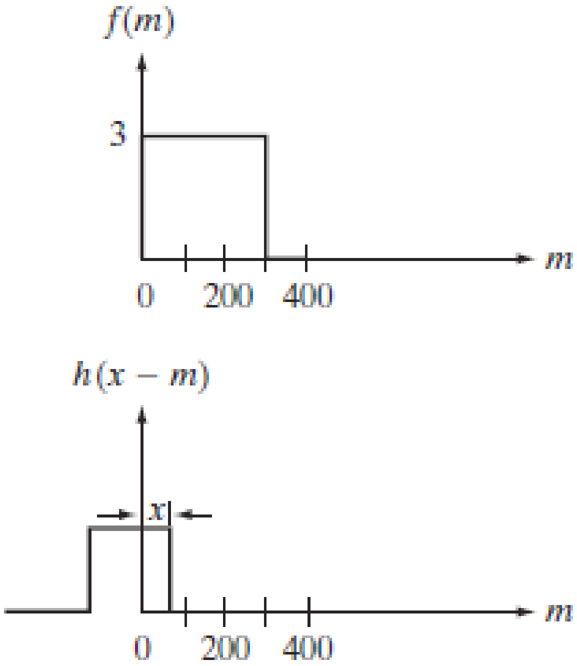
*



Inversão de
um dos sinais

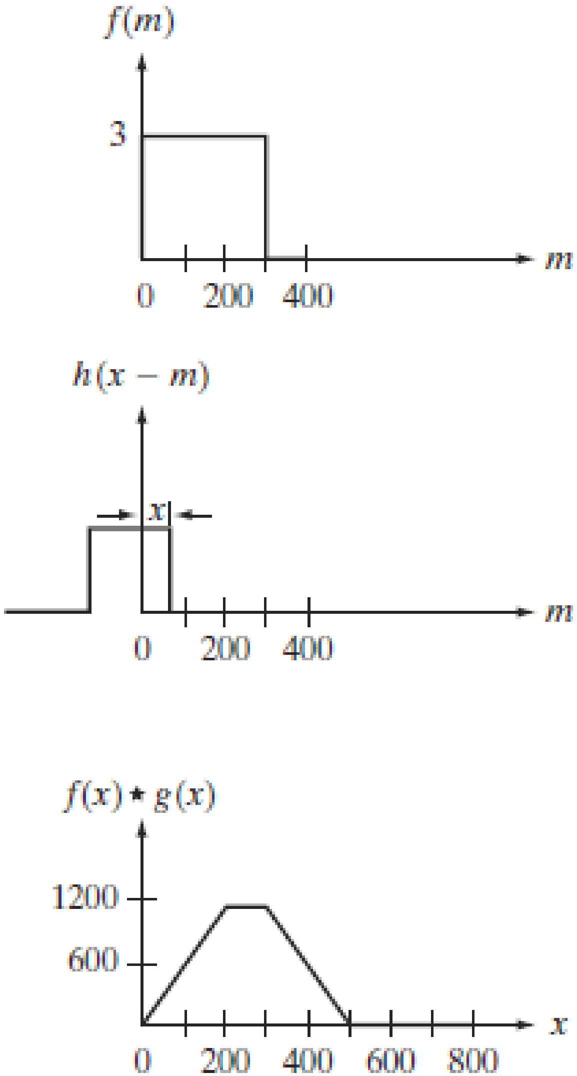


Convolução de dois sinais no domínio espacial



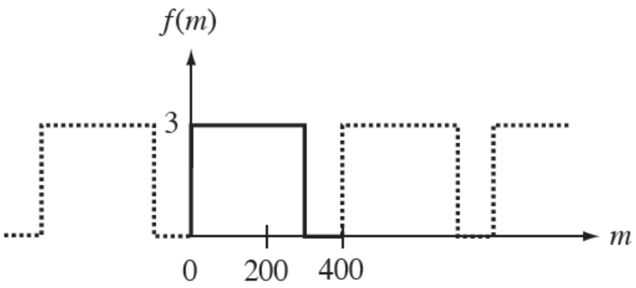
Translada o sinal h, multiplica ponto-a-ponto os dois sinais e soma

Convolução de dois sinais no domínio espacial

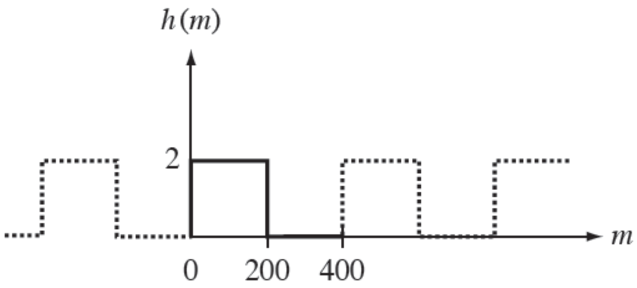


Resultado

O que ocorre com a convolução no domínio da frequência

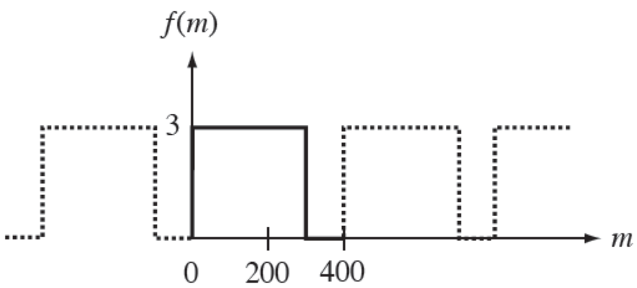


*

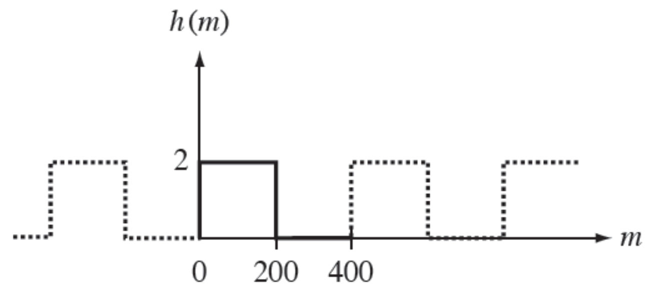


Os dois sinais são vistos como uma repetição infinita dos sinais originais.

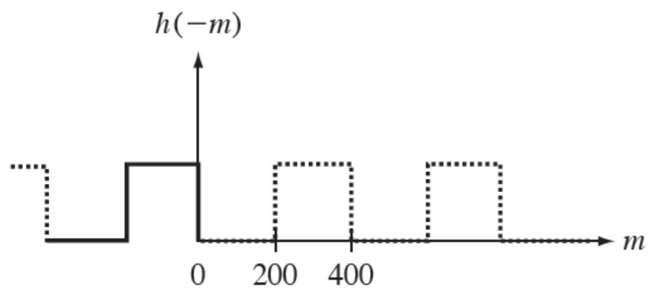
O que ocorre com a convolução no domínio da frequência



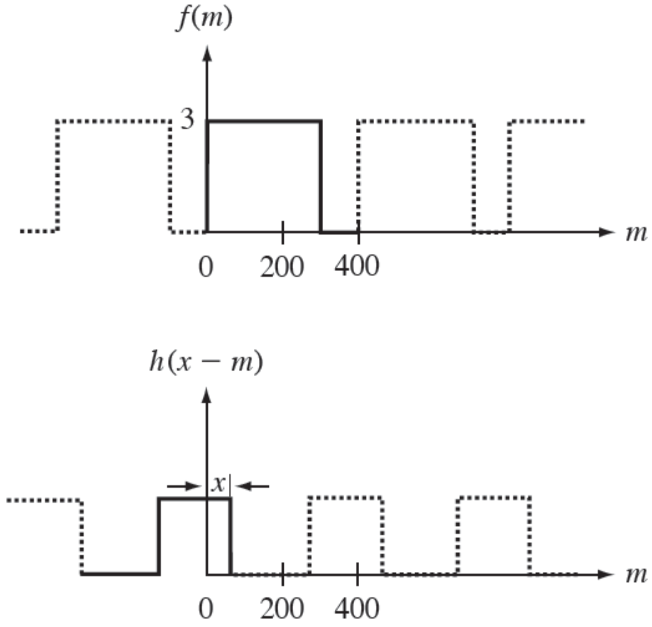
*



Inversão de
um dos sinais

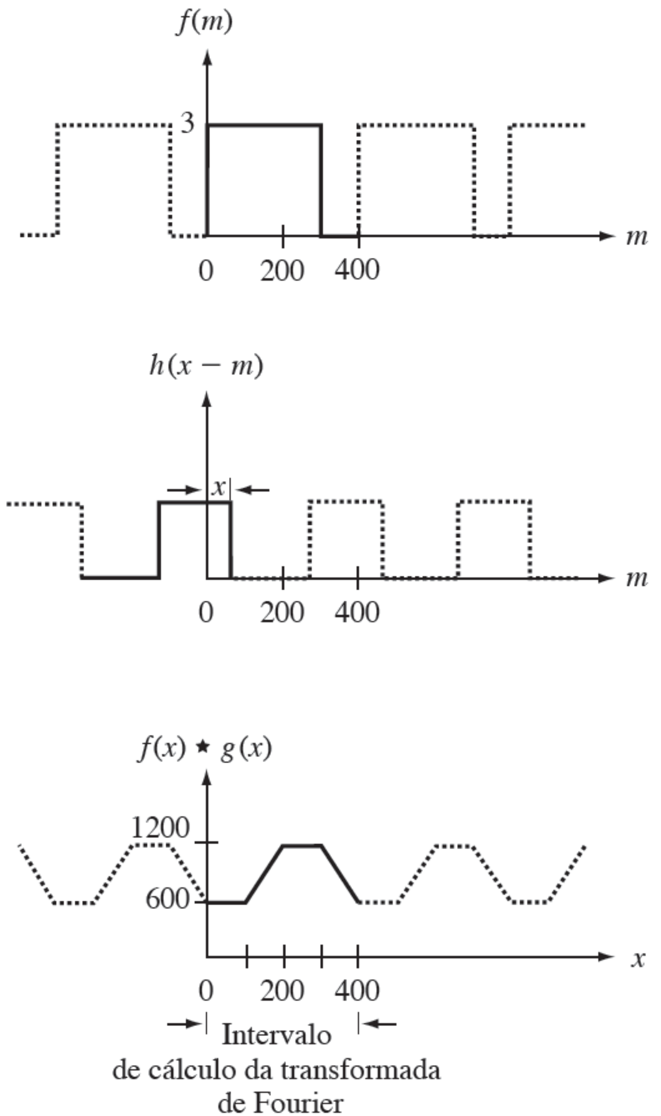


O que ocorre com a convolução no domínio da frequência

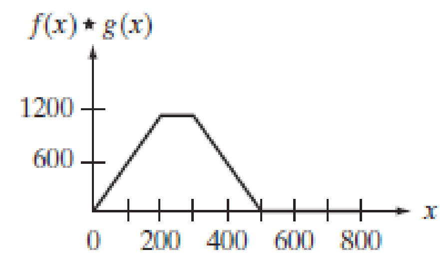


Translada o sinal h, multiplica ponto-a-ponto os dois sinais e soma

O que ocorre com a convolução no domínio da frequência



Resultado



Resultado esperado

Convolução 2D – Muito importante!!!

- Devido à periodicidade causada pela discretização do espaço, antes de aplicar a convolução devemos sempre preencher o sinal com zeros.
- Para duas imagens de tamanhos $M \times N$ e $Q \times L$, devemos adicionar zeros ao redor das imagens de forma que ambas tenham, pelo menos, tamanho $(M + Q - 1) \times (N + L - 1)$.

Filtros 2D no domínio da frequência

- Lembrando que, no domínio espacial, aplicamos a convolução utilizando a equação:

$$g(x,y) = f(x,y) \star w(x,y) = \sum_{s=0}^{a} \sum_{t=0}^{b} w(s,t) f(x - s + \frac{a}{2}, y + t + \frac{b}{2})$$

- No domínio da frequência, a mesma operação pode ser feita utilizando a equação:

$$g(x,y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mu,\nu)W(\mu,\nu)\}$$

onde $F(\mu,\nu)$ e $W(\mu,\nu)$ são a transformada de Fourier da imagem $f(x,y)$ e do filtro $w(x,y)$

Transformada rápida de Fourier (FFT)

- A transformada rápida de Fourier é um algoritmo que acelera em muito o cálculo da transformada de Fourier
- Para uma imagem com N linhas e N colunas, a transformada rápida de Fourier (FFT) pode ser utilizada para calcular a transformada de Fourier com complexidade $O(N^2 \log(N))$.

Transformada rápida de Fourier (FFT)

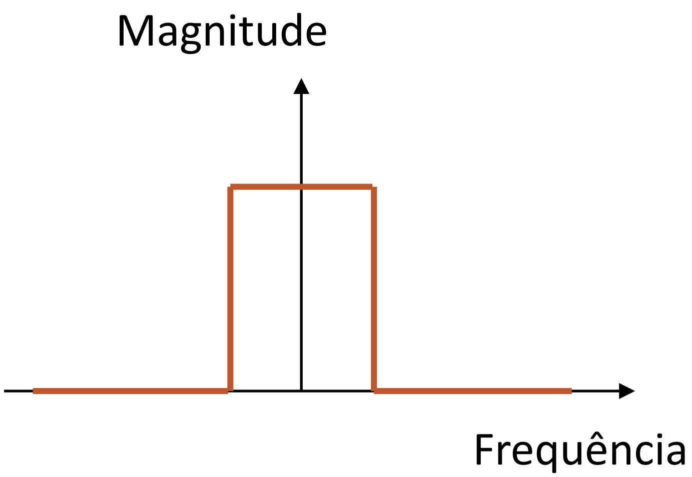
- A transformada rápida de Fourier é um algoritmo que acelera em muito o cálculo da transformada de Fourier
- Para uma imagem com N linhas e N colunas, a transformada rápida de Fourier (FFT) pode ser utilizada para calcular a transformada de Fourier com complexidade $O(N^2 \log(N))$.
- Portanto, a convolução também pode ser calculada em $O(N^2 \log(N))$ operações (no entanto, há uma constante multiplicativa de alto valor dentro do $O()$).
- A convolução espacial é calculada em $\mathrm{O}(N^2 k^2)$ operações, onde k é o tamanho do filtro.

- Para filtros de tamanho pequeno, é mais eficiente utilizar a convolução espacial. **Para filtros grandes, a FFT proporciona resultados muito mais rápidos.**

Filtros no domínio da frequência

- Veremos a seguir alguns filtros no domínio da frequência
- É importante que a forma do filtro seja entendida, a equação que o define pode sempre ser consultada quando necessário.

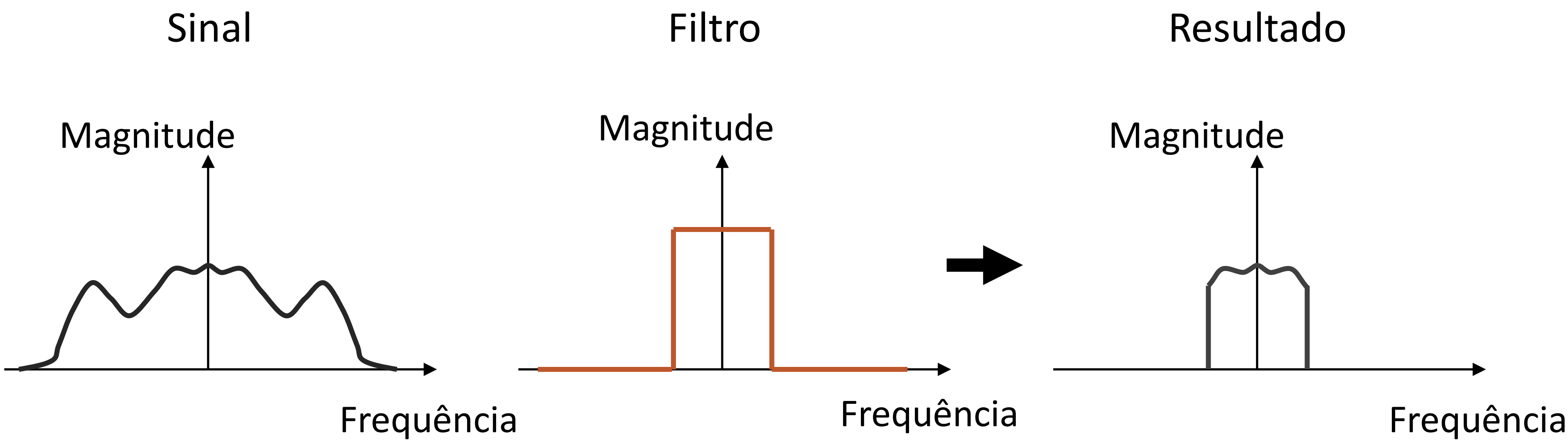
Filtro passa-baixa ideal



0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

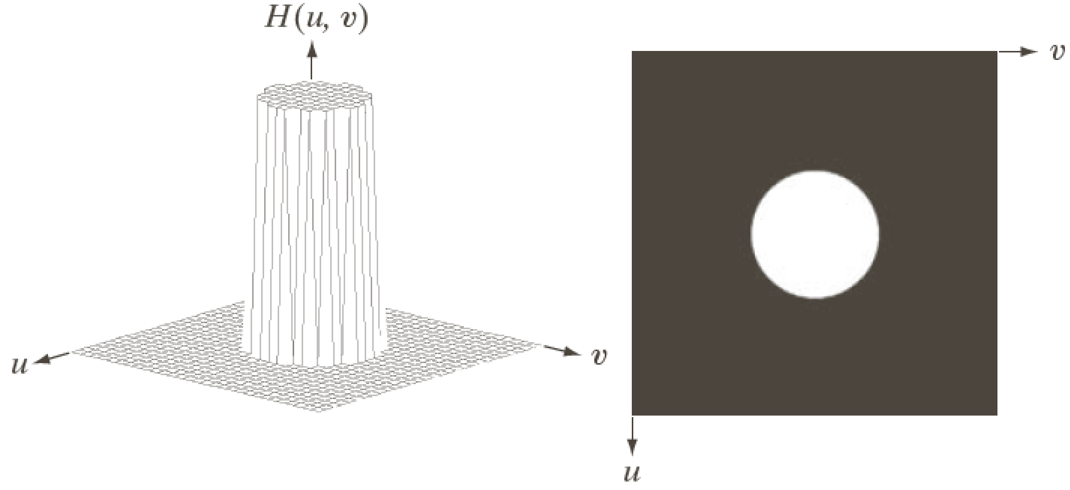
Elimina altas frequências da imagem, que estão associadas com detalhes (variações abruptas de intensidade)

Filtro passa-baixa ideal



Elimina altas frequências da imagem, que estão associadas com detalhes (variações abruptas de intensidade)

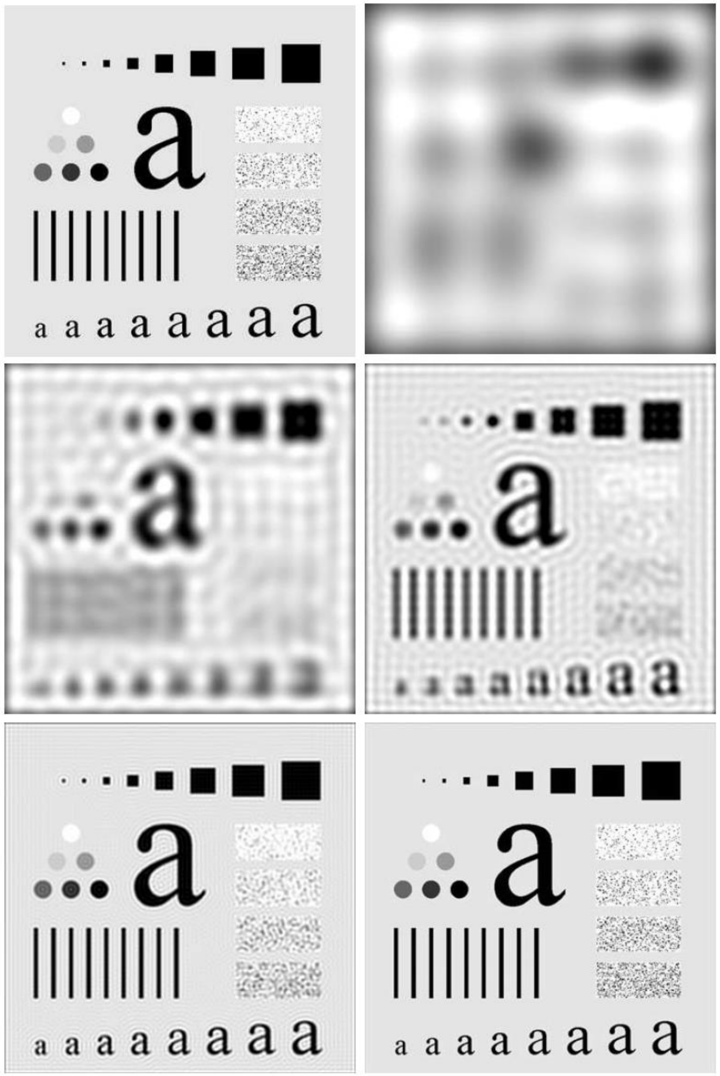
Filtro passa-baixa ideal 2D



Elimina altas frequências da imagem, que estão associadas com detalhes (variações abruptas de intensidade)

Filtro passa-baixa ideal 2D

- Exemplos de filtragem passa-baixa ideal utilizando diferentes raios para o filtro
- Notem as “ondas” (ringing) que aparecem nas bordas dos objetos



Filtro passa-baixa ideal

- Porque as ondas aparecem?
- Lembrem-se que multiplicar o espectro de uma imagem por um filtro é equivalente a convoluir a imagem com a transformada inversa do filtro, isto é:

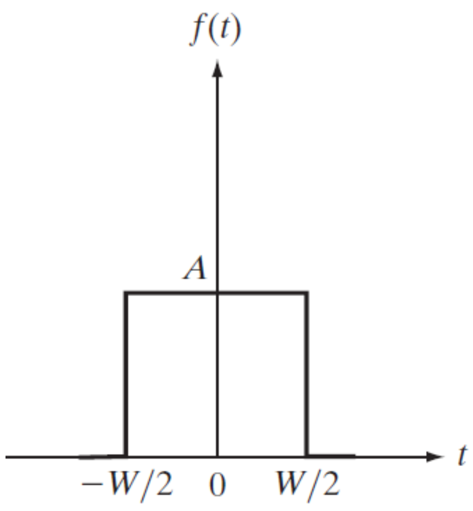
$$H(\mu, v)F(\mu, v) = \mathcal{F}\{f(x, y) * h(x, y)\}$$

Filtro passa-baixa ideal

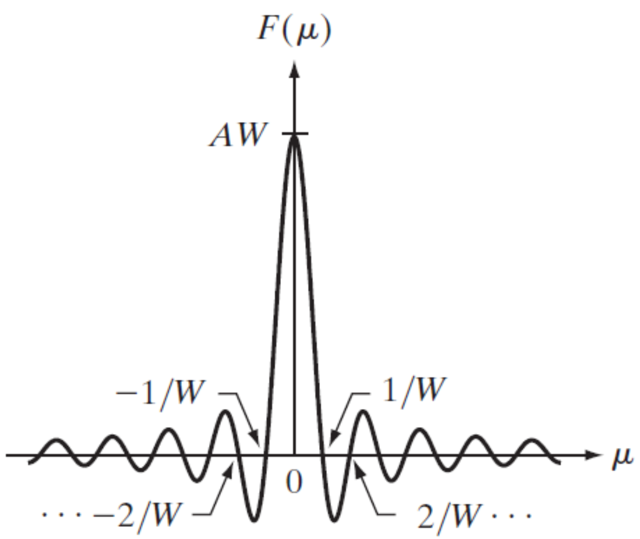
- Porque as ondas aparecem?
- Lembrem-se que multiplicar o espectro de uma imagem por um filtro é equivalente a convoluir a imagem com a transformada inversa do filtro, isto é

$$H(\mu, v)F(\mu, v) = \mathcal{F}\{f(x, y) * h(x, y)\}$$

A transformada de Fourier de um filtro caixa



É essa função estranha! (a função sinc)



Filtro passa-baixa ideal

Portanto, o filtro passa baixa ideal faz a convolução ("mistura") da imagem original com a função sinc.

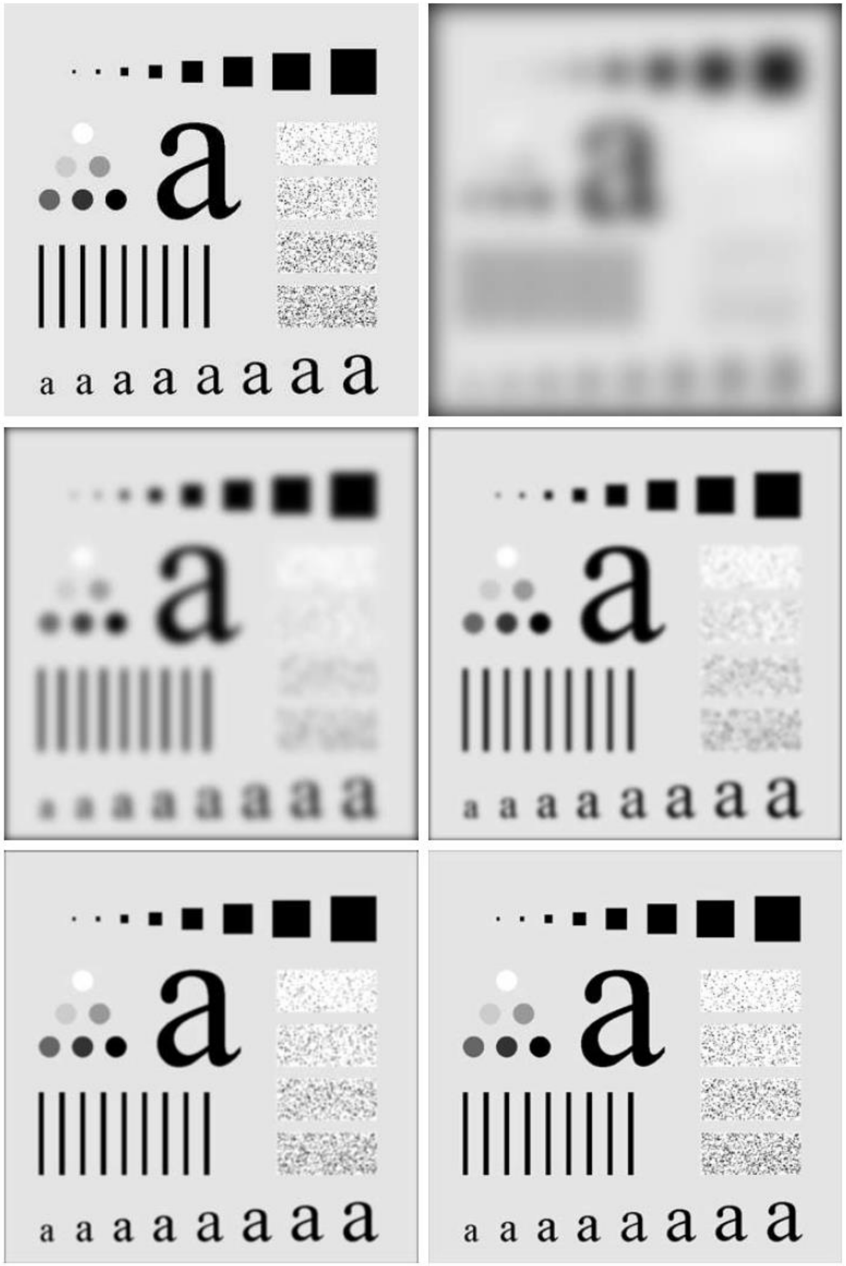
Filtro passa-baixa ideal

Notebook “**Filtros passa-baixa**”

Filtro passa-baixa

- Como podemos eliminar altas frequências sem causar artefatos?
- Fazemos com que o filtro passa-baixa tenha uma transição mais suave entre as frequências que são bloqueadas e as que são permitidas.
- Isso pode ser feito com uma função Gaussiana

Filtragem no domínio da frequência utilizando filtros gaussianos com diferentes tamanhos:



Filtro passa-baixa Gaussiano

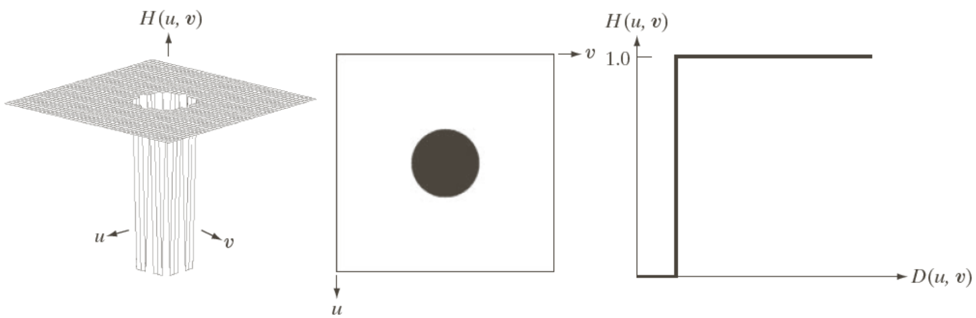
Notebook “**Filtros passa-baixa**”

Filtros passa-alta

- Filtros passa-alta permitem que apenas frequências altas sejam mantidas.
- Frequências altas estão associadas com detalhes, que por sua vez estão associados com derivadas
- Portanto, filtros passa alta possuem um efeito similar ao cálculo da derivada do sinal!

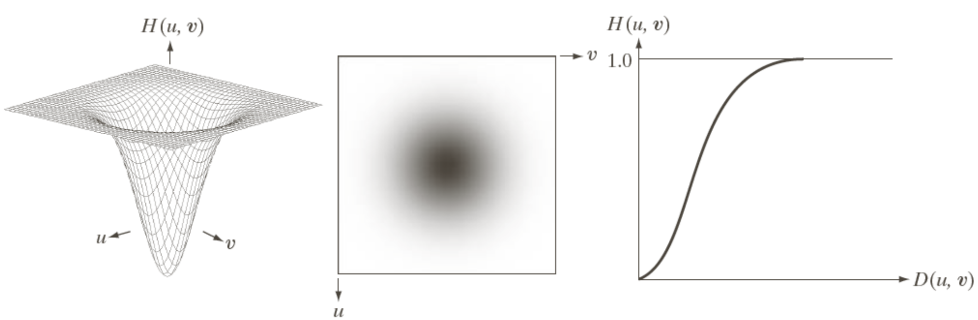
Filtros passa-alta

Filtro passa-alta ideal:



$$H(\mu,\nu) = \begin{cases} 0, & se\ D(\mu,\nu) \le D_0 \\ 1, & se\ D(\mu,\nu) > D_0 \end{cases}$$

Filtro passa-alta gaussiano:



$$H(\mu,\nu) = 1 - e^{-D(\mu,\nu)^2/2D_0^2}$$

$$D(\mu,\nu) = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$$

Resultado do filtro passa-alta gaussiano

- Quando maior a largura da gaussiana, mais frequências são eliminadas.
- Quando a largura é muito alta, apenas frequências muito altas, associadas com detalhes muito pequenos da imagem, são mantidas.

* Estão mostrados o módulo dos valores

Filtro Laplaciano

O filtro laplaciano, associado com derivadas de segunda ordem, é definido da seguinte forma no domínio da frequência:

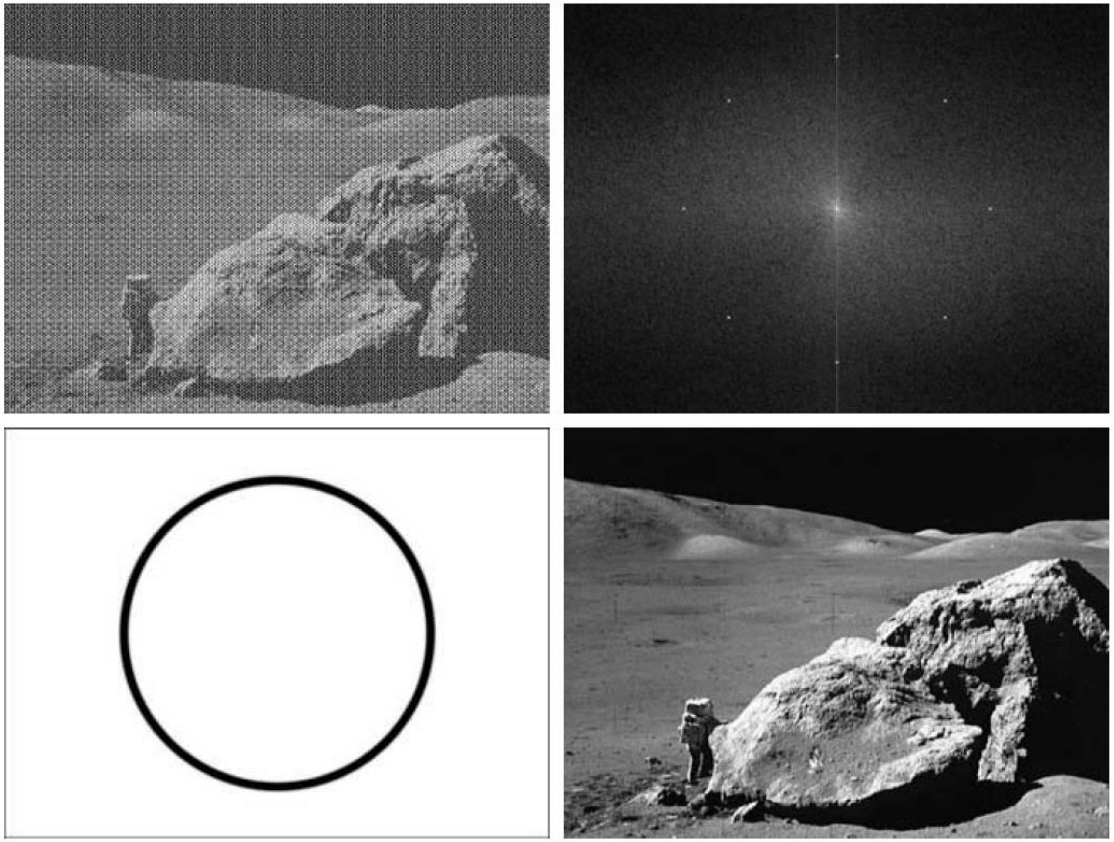
$$H(\mu, \nu) = -4\pi(\mu^2 + \nu^2)$$

Filtros passa alta

Notebook “**Filtro passa-alta gaussiano e laplaciano**”

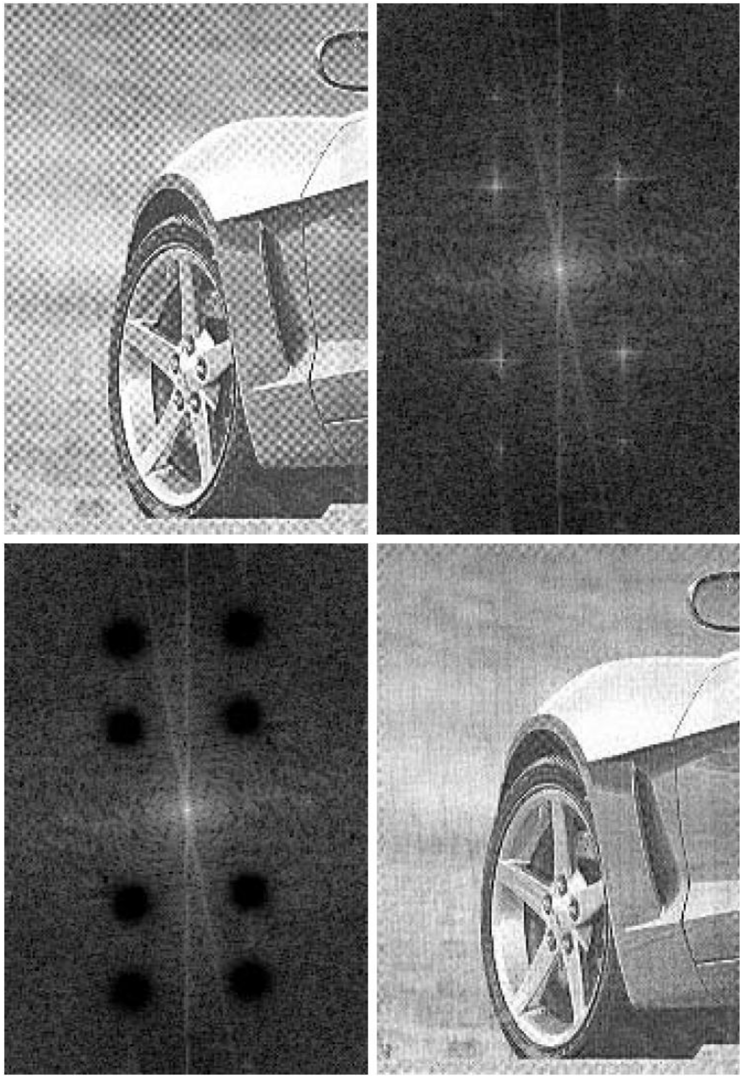
Filtro passa-faixa ou rejeita-faixa

- Apenas uma faixa de frequências é mantida ou eliminada da imagem
- O filtro é definido como um disco no domínio da frequência



Filtro notch

Elimina frequências específicas da imagem



Filtragem no domínio da frequência a partir de um filtro espacial

- Filtragem no domínio da frequência pode ser muito mais eficiente do que no domínio espacial.
- Portanto, pode ser interessante realizarmos a filtragem no domínio da frequência, mesmo que o nosso filtro esteja definido no domínio espacial.

$$\frac{1}{273}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtragem no domínio da frequência a partir de um filtro espacial

- Para isso, criamos um novo array tendo o mesmo tamanho que a imagem preenchida com zeros, e inserimos o filtro abaixo no centro desse array
- Calculamos então o produto entre a transformada de Fourier da imagem e do filtro
- A transformada de Fourier inversa do resultado é a imagem filtrada

$$\frac{1}{273}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtragem no domínio da frequência a partir de um filtro espacial

Notebook “**Criação de filtro de frequência a partir de um filtro espacial**”