

## Terceira Lista de Exercícios

Esta lista contém exercícios relacionados ao Método de Monte Carlo (MC) e à Simulação de Variáveis Aleatórias.

**Exercício 1.** Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Estime, via MC, a seguinte probabilidade: a soma dos dois resultados é 7 ou 11.

**Exercício 2.** Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 6 bolas pretas, 3 brancas e 4 vermelhas; a urna II contém 3 bolas pretas, 5 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 2 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4 ou 6, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2 ou 3, então uma bola da urna III é retirada. Estime, via MC, a probabilidade da bola retirada ser vermelha.

**Exercício 3.** No jogo de *Craps* dois dados são lançados:

- se a soma for 7 ou 11, então você ganha o jogo;
- se a soma for 2,3 ou 12, então você perde o jogo;
- caso contrário, os dois dados são rolados novamente até obter-se 7 (você perde) ou até obter-se a soma inicial (você ganha).

Estime, via MC, a probabilidade de você vencer o jogo de Craps.

**Exemplo:** as seguintes sequências (cada entrada é a soma dos dois dados) resultam em vitória: (9), (11), (5, 4, 5), (4, 5, 6, 12, 4); as seguintes sequências resultam em derrota: (2), (4, 11, 7), (8, 5, 2, 3, 9, 7).

**Exercício 4.** Considere o seguinte jogo: Bran e Arya escolherão, cada um, uma sequência de tamanho 3 em que cada entrada é cara ou coroa; logo em seguida, uma moeda será lançada até que apareça a sequência que um dos dois escolheu; se aparecer primeiro a sequência de Bran, ele ganha; se aparecer primeiro a sequência de Arya, ela vence. Convencione que cara seja 1 e que coroa seja zero. Supondo que Bran escolheu a sequência (0, 1, 0) e que Arya escolheu a sequência (0, 0, 1), estime através do Método de Monte Carlo a probabilidade de Arya vencer.

**Observação:** as sequências (0, 1, 0), (1, 0, 1, 0) e (1, 1, 0, 1, 0) deixam Bran vitorioso; as sequências (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) e (1, 0, 0, 0, 1) deixam Arya vitoriosa.

**Exercício 5.** Luke Skywalker está na origem de uma reta. Um esboço da situação pode ser visto na Figura 1. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição -1 da reta); se sair cara, ele dá um passo para a direita (e termina na posição 1 da reta). Suponha que no primeiro lançamento tenha saído cara. Aí, agora na posição 1, ele lança novamente a moeda: se cara, um passo para a direita; se coroa um passo para a esquerda. Suponha que novamente tenha saído cara. Na posição 2 da reta ele irá jogar novamente a moeda e irá proceder da mesma forma que nos dois passos anteriores e assim sucessivamente.

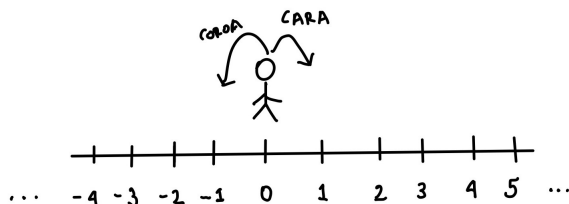


Figura 1: Passeio aleatório simétrico na reta.

- (a) Yoda diz: *Luke só pode voltar à origem depois de um número par de rodadas.* Você concorda com Yoda? Justifique sua resposta.
- (b) Estime via Monte Carlo a probabilidade de Luke retornar à origem depois de: (i) 4 passos; (ii) 6 passos; (iii) 10 passos; (iv) 20 passos.

**Exercício 6.** Utilize o método de MC para estimar as seguintes integrais:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx.$$

**Exercício 7.** Escreva uma função para gerar  $n$  valores de uma variável aleatória  $X$  que possui a seguinte lei de probabilidade:  $P(X = 1) = 1/3$  e  $P(X = 2) = 2/3$ . Em seguida, utilize  $n = 100$  em sua função e determine a proporção de valores que são iguais a 2. Obtenha a proporção também para  $n = 1000$  e para  $n = 10000$ .

**Exercício 8.** Considere a variável  $Y$  que indica o número de tentativas necessárias para se obter  $k$  sucessos de igual probabilidade  $p$  ao fim de  $n$  experimentos de sucesso/fracasso. É possível provar que a lei de probabilidade de  $Y$  é dada por:

$$P(Y = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}, \quad n = k, k+1, \dots$$

Escreva uma função cujas entradas são  $p$  e  $k$  e que a saída retorne um valor de  $Y$ . Use sua função com  $p = 4/7$  e  $k = 3$ , para estimar  $P(Y > 8)$ .

Dica: para gerar um valor de  $Y$ , tente relacionar essa variável com a variável  $X$  que possui distribuição geométrica (estudamos essa distribuição  $X$  em uma das aulas).

**Exercício 9.** Escreva uma função cuja entrada seja um número natural  $n$  e que a saída retorne  $n$  valores gerados de uma variável aleatória contínua  $X$  cuja função de distribuição acumulada é

$$F(x) = \frac{x^2 + x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Em seguida, utilize  $n = 10000$  em sua função para fornecer estimativas para  $P(X < 0.7)$  e para  $E[X]$ .