**PAULO KIYOSHI OYAMA FILHO - 11911BCC022**

**Exercício 1**. *Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados*

P(A)

$$P(A) = 1 - P(A)^c = P(A)^c$$
$$= P(A)^c = [(1,1),(1,2),(2,1)] = \frac{3}{36}$$
$$P(A) = 1 - \frac{3}{36} \Rightarrow \frac{33}{36}$$

P(B|C)

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{6/36}{11/36} = \frac{6}{11}$$

P(A intersecção D)

$$P(D) = [(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(3,3)] = \frac{5}{36}$$
$$P(A \cap D) = \frac{5}{36}$$

P( C U D )

$$P(C) = [(2,1),(1,2),(2,2)\ldots,(6,2)] = \frac{11}{36}$$
$$P(C \cup D) = [(2,3),(3,2)] = \frac{2}{36}$$
$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$$
$$= \frac{11}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} \Rightarrow \frac{14}{36}$$

**Exercício 2***Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 93% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,6% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?*

$$Doenca = D\ e\ Positivo = P\ e\ Sadio = S$$
$$P(D|P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)}$$
$$P(P \cap D) = P(D) * P(P|D)$$
$$P(P \cap S) = P(S) * P(P|S)$$
$$P(P) = P(P \cap D) + P(P \cap S)$$
$$Pela\ informado =$$
$$P(P|D) = 93\%\ , P(P|S) = 1\%\ , P(S) = 1 - P(D) = 99,4\%,\ P(D) = 0,6\%$$
$$Logo,$$
$$P(D|P) = \frac{P(D) * P(P|D)}{P(D) * P(P|D) + P(S) * P(P|S)}$$
$$P(D|P) = \frac{0,6 * 93}{0,6 * 93 + 99,4 * 1} = \frac{55,8}{155,2} \Rightarrow 36\%$$

**Exercício 3**- *Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 5 bolas pretas, 3 brancas e 4 vermelhas; a urna II contém 3 bolas pretas, 5 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 2 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2, 3 ou 6, então uma bola da urna III é retirada.*

(a) *Calcule a probabilidade da bola retirada ser vermelha*.

(b) *Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna II, sabendo-se que a bola retirada foi vermelha*.

$$a)\ P(Vermelhas) = \frac{1}{6} * \frac{4}{12} + \frac{2}{6} * \frac{2}{10} + \frac{3}{6} * \frac{2}{8} = \frac{1}{18} + \frac{1}{15} + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{89}{360}$$
$$b)\ U1, U2, U3 = Urna\ 1, 2\ e\ 3$$
$$P(U2|V) = \frac{P(U2 \cap V)}{P(V)} = \frac{P(U2) * P(V|U2)}{P(V)}$$
$$P(V) = P(U1 \cap V) + P(U2 \cap V) + P(U3 \cap V) = \frac{89}{360}(Letra\ \ "\ a\ ")$$
$$Logo,$$
$$P(U2|V) = \frac{2/6 * 2/10}{89/360} = \frac{4/60}{89/360} = \frac{24}{89}$$

**Exercício 4**-*Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior do que a probabilidade de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determine:*

(a) *O espaço amostral*.

$$\Omega = [(Coroa, Cara), (Cara, Coroa), (Coroa, Coroa), (Cara, Cara)]$$

(b) *A probabilidade de sair somente uma cara*.

$$P(Cara) = 4 * P(Coroa)$$
$$P(Cara) + P(Coroa) = 1 \Rightarrow P(Cara) = 4/5 \; e \; P(Coroa) = 1/5$$
$$p(x) = P[X = K] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$n = 2 \; e \; k = 1 \; e \; p = P(Coroa)$$
$$logo, \; p(x) = \binom{2}{1} \frac{4}{5}(1 - \frac{4}{5})$$
$$p(x) = 2 * \frac{4}{5} * \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{8}{25}$$

(c) *A probabilidade de sair pelo menos uma cara*.

$$P(Cara) = P(Na \; primeira \; e \; não \; na \; segunda) + P(Na \; segunda \; e \; não \; na \; primeira) + P(Nas \; duas)$$
$$P(Cara) = 4/5 * 1/5 + 1/5 * 4/5 * 4/5 * 4/5 = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{24}{25}$$

(d) *A probabilidade de dois resultados iguais*.

$$P(Iguais) = P(Duas \; caras) + P(Duas \; Coroas)$$
$$= 1/5 * 1/5 + 4/5 * 4/5 = \frac{1}{25} + \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{17}{25}$$

**Exercício 5**-*Os amigos David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page desejam fazer um amigo oculto entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto não d^e errado*.
**Obs:** *um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma*.

Os participantes David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page são respectivamente, 1,2,3 e 4.

Probabilidade de dar errado.

| P(1) | P(2) | P(3) | P(4) |
|---|---|---|---|
| 1234 | ***1234*** | ***1234*** | ***1234*** |
| 1243 | **1243** | **1432** | **1324** |
| 1324 | 3214 | 2134 | **2134** |
| 1343 | 3241 | 2431 | 2314 |
| 1423 | 4213 | 4132 | 3124 |
| 1432 | 4231 | **4231** | **3214** |

Considerando os números em negrito como repetidos temos a probabilidade de não acontecer temos que:

$$P(Acontecer) = 1 - P(Acontecer)^c$$
$$P(Acontecer)^c = \frac{15}{24}$$
$$Logo, \; P(Acontecer) = 1 - \frac{15}{24} \Rightarrow \frac{9}{24}$$

**Exercício 6**- *Seja X uma variável aleatória tal que*:

$$P(X = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{2}{8} \quad \text{e} \quad P(X = 5) = \frac{5}{8}.$$

(a) Calcule $P(X > 2)$.

(b) Calcule $P(X \leq 2)$.

(c) Calcule a esperança e a variância de $X$.

(d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de $X$.

$$a)\ P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 5) = \frac{2}{8} + \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{7}{8}$$

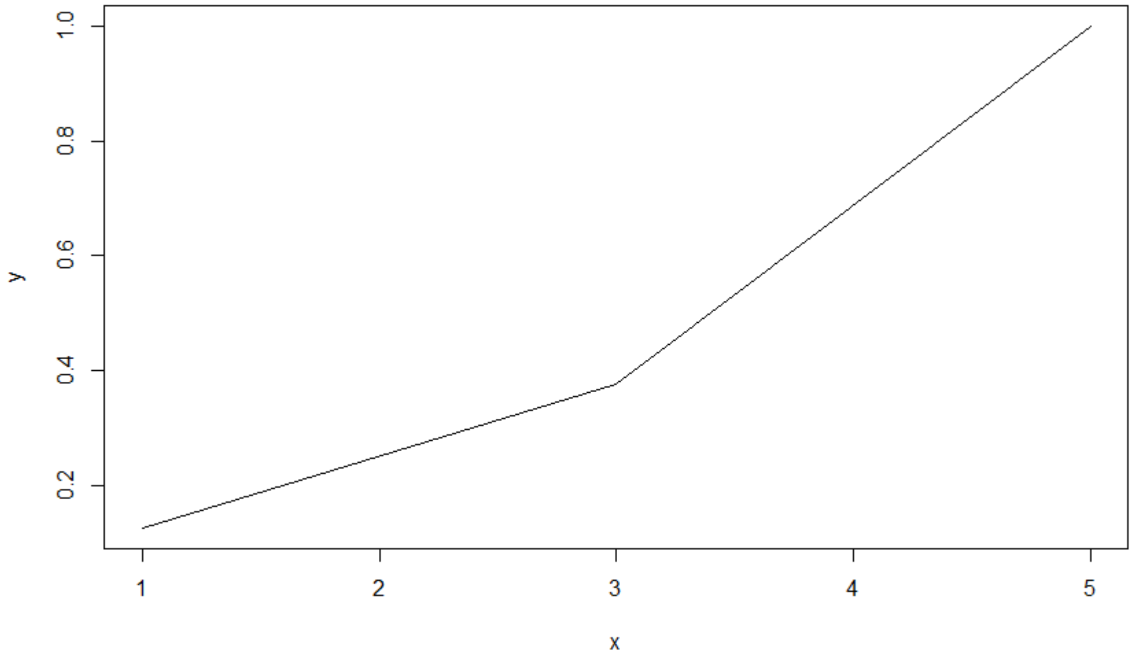
$$b)\ P(X > 2) = P(X = 1) = \frac{1}{8}$$

$$c)\ E[X] = \sum xi * P(X = xi)$$
$$E[X] = 1 * \frac{1}{8} + 3 * \frac{2}{8} + 5 * \frac{5}{8} \Rightarrow 4$$

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

$$E[X^2] = \sum xi^2 * P(X = xi)$$
$$E[X^2] = 1^2 * \frac{1}{8} + 3^2 * \frac{2}{8} + 5^2 * \frac{5}{8}$$
$$E[X^2] = \frac{1}{8} + \frac{18}{8} + \frac{125}{8} \Rightarrow \frac{144}{8}\ ou\ 18$$
$$Logo,\ Var(X) = 18 - 4^2 = 18 - 16 \Rightarrow 2$$

d)




**Exercício 7.** Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados $(i, j)$, em que $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória $X$ que é dada por:

$$X = \text{o máximo das faces dos dois dados.}$$

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi $(2, 4)$, teremos que o valor de $X$ neste ponto será 4, pois

$$X(2, 4) = \text{máximo}\{2, 4\} = 4.$$

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi $(5, 5)$, então $X$ assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória $X$, responda:

(a) Quais os valores que $X$ assume?

(b) Para cada valor $k$ que $X$ assume, determine $P(X = k)$.

(c) Calcule $P(X < 3)$ e $P(X \geq 3)$.

(d) Calcule $P(X > 2|X < 5)$.

(e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de $X$.

$$a)\; X = \Omega = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

$$b)\ P(X=1) = [(1,1)] = \frac{1}{36}$$

$$P(X=2) = [(2,1),(2,2),(1,2)] = \frac{3}{36}$$

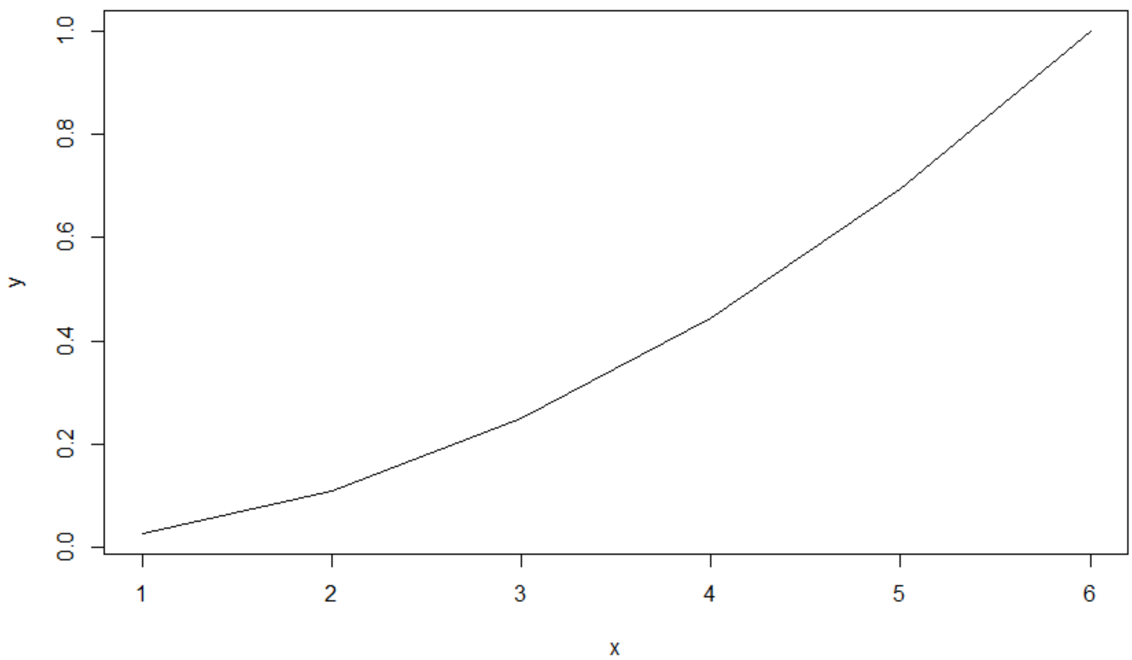
$$P(X=3) = [(3,1),(3,2),(3,3)(2,3),(1,3)] = \frac{5}{36}$$

$$Logo,$$

$$P(X=k) = \frac{1+2(k-1)}{36}$$

$$\begin{aligned} c)\ P(X<3) &= P(X=1) + P(X=2) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{3}{36} = \frac{4}{36} \\ Como, P(X>=3) &= 1 - P(X<3) \\ &= 1 - \frac{4}{36} \Rightarrow \frac{32}{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\ P(X>2|X<5) &= \frac{P(2<X<5)}{P(X<5)} \\ &= \frac{5/36 + 7/36}{1-(9/36+11/36)} = \frac{12/36}{16/36} \Rightarrow \frac{3}{4} \end{aligned}$$




**Exercício 8.** Seja $X \sim \mathcal{N}(5, 16)$. Obtenha:

(a) $P(X \leq 13)$.

(b) $P(X > 1)$.

(c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).

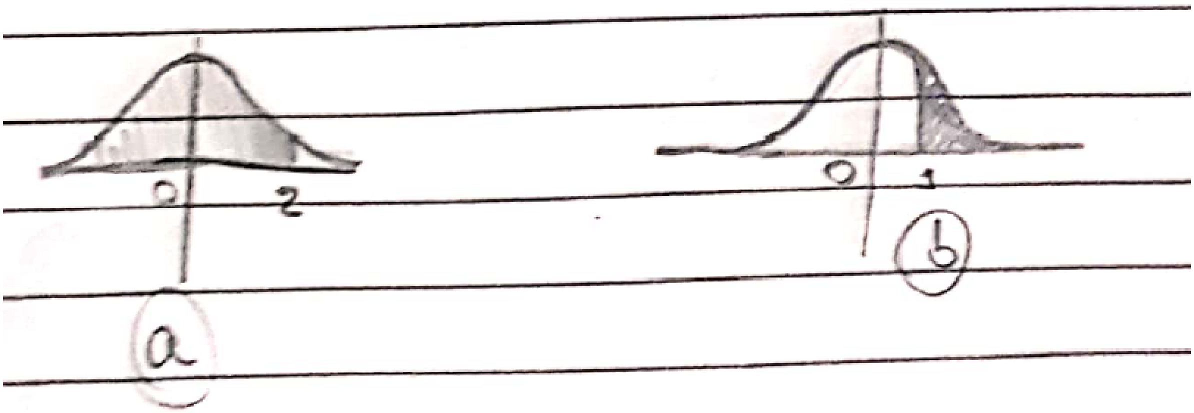
(d) O valor de $a$ tal que $P(X \leq a) = 0.04$.

$$a)\ P(\frac{X-5}{4} <= \frac{13-5}{4})a)\ P(X <= 13) = P(\frac{X-5}{4} <= 2) \Rightarrow P(Z <= 2)$$

$$\begin{aligned} P(Z <= 2) &= 0.5 + P(0 < X <= 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ P(X > 1) &= 0.5 - P(0 < X < 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

C)




$$\begin{gathered} d)\ P(X <= a) = 0.04 \\ P(X <= a) = 0.5 + P(0 < X < a) \\ P(0 < X < a) = 0.04 - 0.5 \\ P(0 < X < a) = -0.460 \Rightarrow a = 1.75 \\ Logo,\ P(X <= -1.75) = 0.04 \end{gathered}$$

**Exercício 9.** Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera $T$, tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t-4), & 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{20}, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

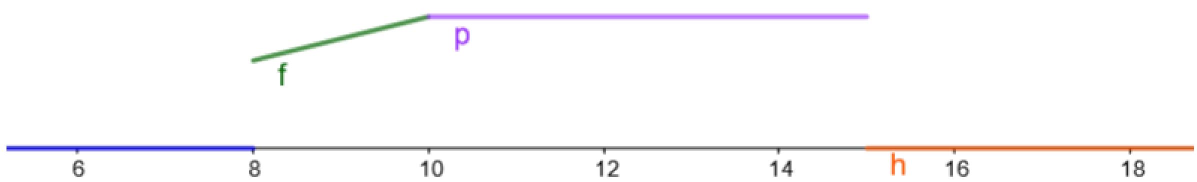
(a) Esboce o gráfico de $f$.

(b) Prove que $f$ é, de fato, uma função densidade.

(c) Calcule $P(0 < T \leq 12)$.

(d) Calcule $P(9 < T \leq 12)$.

a)



$$b)\ Pelo\, informado\, \forall f(x) \geq 0,$$

$$Agora\, veremos\, se \int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1,$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_{-\infty}^{8} 0\, dx + \int_{8}^{10} \frac{1}{40}(t-4)\, dx + \int_{10}^{15} \frac{3}{20}\, dx + \int_{15}^{\infty} 0\, dx \\
&= \frac{1}{40}\int_{8}^{10} (t-4)\, dx + \frac{3}{20}\int_{10}^{15}\, dx \\
&= \frac{1}{40}[\frac{t^2}{2} - 4t]_{8}^{10} + \frac{3}{20}[x]_{10}^{15} \\
&= \frac{1}{40}[50 - 40 - 32 + 32] + \frac{3}{20}[15 - 10] \\
&= \frac{10}{40} + \frac{15}{20} \\
&= \frac{5}{20} + \frac{15}{20} \Rightarrow 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)\ P(0 < X \leq 12) &= \int_{0}^{8} 0\, dx + \int_{8}^{10} \frac{1}{40}(t-4)\, dx + \int_{10}^{12} \frac{3}{20}\, dx \\
&= \frac{1}{40}\int_{8}^{10} (t-4)\, dx + \frac{3}{20}\int_{10}^{12}\, dx \\
&= \frac{1}{40}[\frac{t^2}{2} - 4t]_{8}^{10} + \frac{3}{20}[x]_{10}^{12} \\
&= \frac{1}{40}[50 - 40 - 32 + 32] + \frac{3}{20}[12 - 10] \\
&= \frac{10}{40} + \frac{6}{20} \\
&= \frac{5}{20} + \frac{6}{20} \Rightarrow \frac{11}{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)\ P(9 < X \leq 12) &= \int_{9}^{10} \frac{1}{40}(t-4)\, dx + \int_{10}^{12} \frac{3}{20}\, dx \\
&= \frac{1}{40}\int_{9}^{10} (t-4)\, dx + \frac{3}{20}\int_{10}^{12}\, dx \\
&= \frac{1}{40}[\frac{t^2}{2} - 4t]_{9}^{10} + \frac{3}{20}[x]_{10}^{12} \\
&= \frac{1}{40}[50 - 40 - \frac{81}{2} + 36] + \frac{3}{20}[12 - 10] \\
&= \frac{1}{40}[\frac{-81}{2} + 46] + \frac{6}{20} \\
&= \frac{1}{40}[\frac{92 - 81}{2}] + \frac{6}{20} \\
&= \frac{1}{40}\frac{11}{2} + \frac{6}{20} \\
&= \frac{11}{80} + \frac{24}{80} \Rightarrow \frac{35}{80}\ ou\ \frac{5}{16}
\end{aligned}$$