

Primeira Lista de Exercícios: Revisão de Probabilidade

Tente justificar e/ou desenvolver os cálculos de suas respostas.

Exercício 1. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Considere os seguintes eventos aleatórios:

- A = soma maior ou igual a 4.
- B = soma ímpar.
- C = um dos lançamentos foi 2.
- D = o máximo das faces é 3.

Calcule as seguintes probabilidades: $P(A)$, $P(B|C)$, $P(A \cap D)$ e $P(C \cup D)$.

Exercício 2. Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 93% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,6% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?

Exercício 3. Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 5 bolas pretas, 3 brancas e 4 vermelhas; a urna II contém 3 bolas pretas, 5 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 2 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2, 3 ou 6, então uma bola da urna III é retirada.

- (a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser vermelha.
- (b) Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna II, sabendo-se que a bola retirada foi vermelha.

Exercício 4. Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior do que a probabilidade de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determine:

- (a) O espaço amostral.
- (b) A probabilidade de sair somente uma cara.
- (c) A probabilidade de sair pelo menos uma cara.
- (d) A probabilidade de dois resultados iguais.

Exercício 5. Os amigos David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page desejam fazer um *amigo oculto* entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto não dê errado.

Obs: um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma.

Exercício 6. Seja X uma variável aleatória tal que

$$P(X = 1) = \frac{1}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{2}{8} \quad \text{e} \quad P(X = 5) = \frac{5}{8}.$$

- (a) Calcule $P(X > 2)$.
- (b) Calcule $P(X \leq 2)$.
- (c) Calcule a esperança e a variância de X .
- (d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X .

Exercício 7. Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i, j) , em que $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória X que é dada por:

$$X = \text{o máximo das faces dos dois dados.}$$

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi $(2, 4)$, teremos que o valor de X neste ponto será 4, pois

$$X(2, 4) = \text{máximo}\{2, 4\} = 4.$$

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi $(5, 5)$, então X assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória X , responda:

- (a) Quais os valores que X assume?
- (b) Para cada valor k que X assume, determine $P(X = k)$.
- (c) Calcule $P(X < 3)$ e $P(X \geq 3)$.
- (d) Calcule $P(X > 2 | X < 5)$.
- (e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X .

Exercício 8. Seja $X \sim \mathcal{N}(5, 16)$. Obtenha:

- (a) $P(X \leq 13)$.

- (b) $P(X > 1)$.
- (c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).
- (d) O valor de a tal que $P(X \leq a) = 0.04$.

Exercício 9. Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera T , tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t - 4), & 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{20}, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de f .
- (b) Prove que f é, de fato, uma função densidade.
- (c) Calcule $P(0 < T \leq 12)$.
- (d) Calcule $P(9 < T \leq 12)$.