Método de Newton-Raphson

- **Método de *Newton-Raphson***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.

x_0 - atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Newton-Raphson

Analisemos

$$L(x) = \alpha x + \beta$$

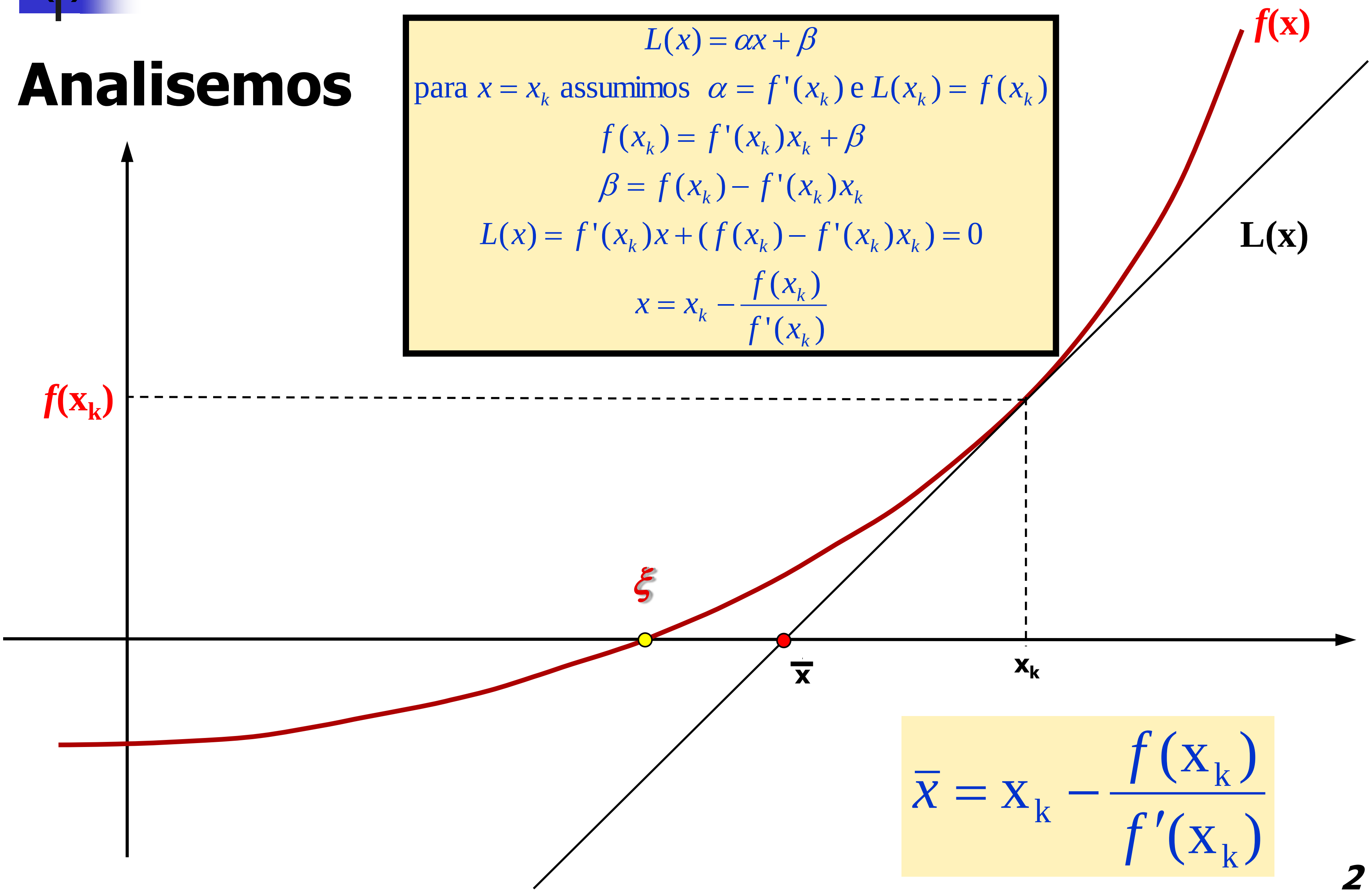
$$\text{para } x = x_k \text{ assumimos } \alpha = f'(x_k) \text{ e } L(x_k) = f(x_k)$$

$$f(x_k) = f'(x_k)x_k + \beta$$

$$\beta = f(x_k) - f'(x_k)x_k$$

$$L(x) = f'(x_k)x + (f(x_k) - f'(x_k)x_k) = 0$$

$$x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



$$\bar{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton-Raphson

- **Considerações Iniciais**
  - **Deste modo, escolhido x_0, a seqüência $\{x_k\}$ será determinada por**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad ,$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Newton-Raphson

- **Motivação Geométrica**
  - **Dado o ponto (x_k , $f(x_k)$)**
    - **Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:**

      $$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k)$$

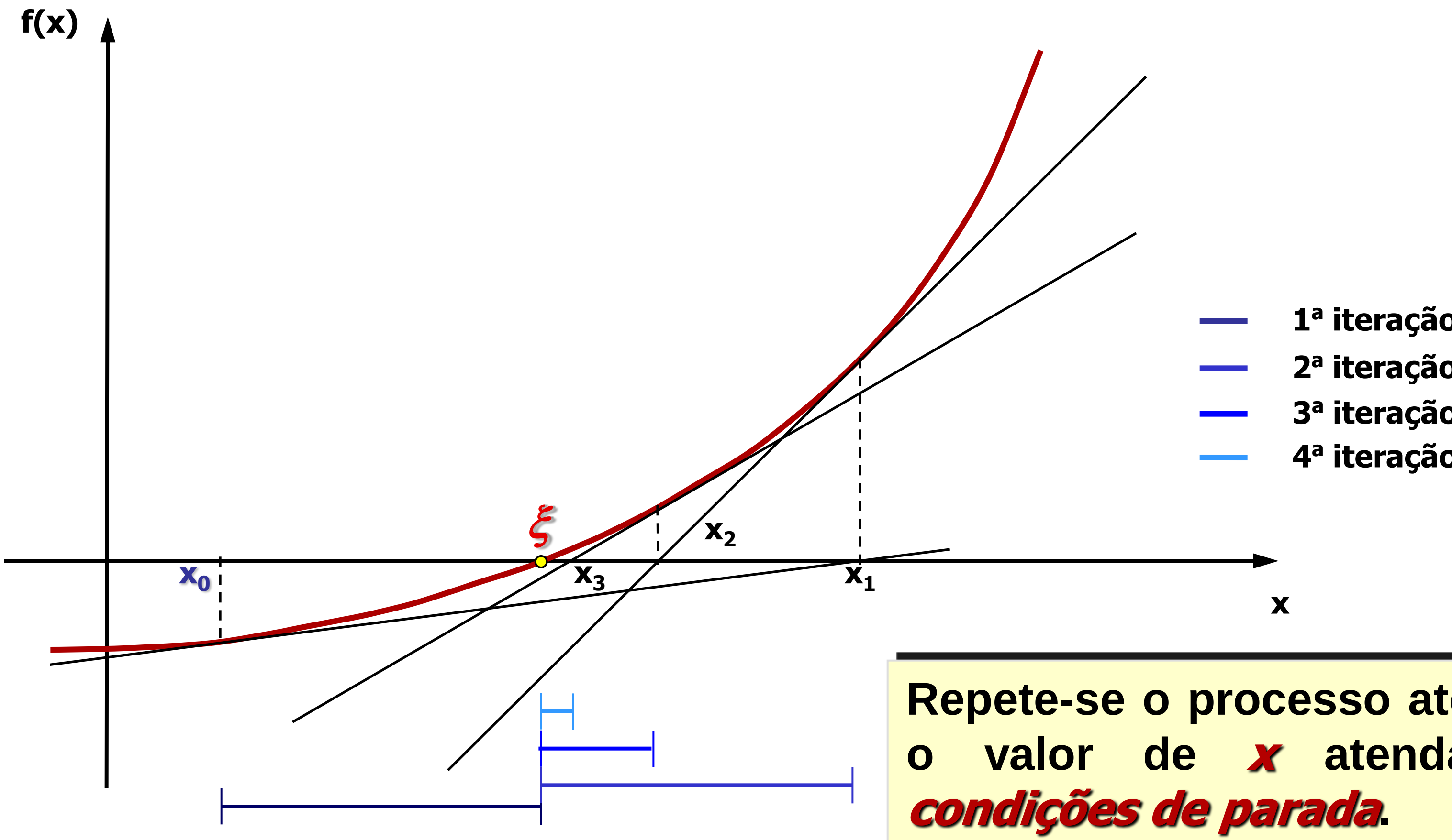
    - **Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima $f(x)$ em uma vizinhança x_k**

      $$L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

    - **Faz-se $x_{k+1} = x$**

Newton-Raphson

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de ***x*** atenda às ***condições de parada***.

Newton-Raphson

- **Estudo da Convergência**

TEOREMA 3:

Sendo $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz.

Newton-Raphson

- **Testes de Parada**
  - **A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.**
    - $|f(x_k)| \leq$ *tolerância*
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq$ *tolerância*

Newton-Raphson

Exemplo 17: No Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- Seja a raiz $\xi_2 = 2$ e $x_0 = 1{,}5$
- Assim:
  - $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 + x - 6)/(2x + 1)$
  - $x_1 = g(x_0) = 1{,}5 - (1{,}5^2 + 1{,}5 - 6)/(2.1{,}5 + 1)$

    $x_1 = 2{,}062500000$
  - $x_2 = g(x_1) = 2{,}000762195$
  - $x_3 = g(x_2) = 2{,}000000116$

$\vdots$

Newton-Raphson

Exemplo 17: Comentários:

- **A parada poderá ocorrer na 3ª iteração (*$x = 2{,}000000116$*), caso a precisão do cálculo com 6 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho**

Newton-Raphson

Exemplo 18: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$ **, e** $tol = 0{,}002$ **cujos zeros encontram-se nos intervalos:**

$$\xi_1 \in I_1 = (-1, 0), \quad \xi_2 \in I_2 = (1, 2)$$

- **Seja** $x_0 = 1$
- $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
- **e** $g(x) = x - (x^3 - x - 1)/(3x^2 - 1)$

Newton-Raphson

Exemplo 18:

- **Cálculo da 1ª aproximação**

$$g(x_0) = 1 - \frac{[\,(1)^3 - 1 \;- 1\,]}{[\,3*(1)^2 - 1\,]} = 1,5$$

  - **Teste de Parada**

    - $|f(x_0)| = |\ 0,875\ | = 0,875 > \varepsilon$

Newton-Raphson

Exemplo 18:

- Cálculo da 2ª aproximação

$$g(x_1) = 1.5 - \frac{[\,(1.5)^3 - 1.5\ - 1\,]}{[\,3*(1.5)^2 - 1\,]} = 1,3478261$$

- Teste de Parada
  - $|f(x_1)| = |\ 0,100682\ | = 0,100682 > \varepsilon$

Newton-Raphson

Exemplo 18:

- **Cálculo da 3ª aproximação**

$$g(x_2) = 1{,}3478261 - \frac{[\,(1{,}3478261)^3 - 1{,}3478261 - 1\,]}{[\,3*(1{,}3478261)^2 - 1\,]}$$

$$g(x_2) = 1{,}3252004$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |\ 0{,}0020584\ | = 0{,}0020584 > \varepsilon$

Newton-Raphson

Exemplo 18:

A seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton será:

Iteração	x	F(x)
1	1,5	0,875
2	1,3478261	0,1006822
3	1,3252004	0,0020584
4	1,3247182	$9{,}24378.10^{-7}$
5	1,3247178	$1{,}86517.10^{-13}$

$\varepsilon = 0{,}002$

Newton-Raphson

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Desempenho elevado.

Newton-Raphson

Desvantagens:

- **Necessidade da obtenção de *f'(x)* , *o que pode ser impossível em determinados casos;***
- **O cálculo do valor numérico de *f'(x)* a cada iteração;**
- **Difícil implementação.**

Método da Secante

- **Método da *Secante***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da secante à curva em dois pontos x_0 e x_1 com o eixo das abscissas.

x_0 e x_1 - atribuídos em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Método da Secante

- **Considerações Iniciais**
  - **Método de *Newton-Raphson***
    - **Um grande inconveniente é a necessidade da obtenção de $f'(x)$ e o cálculo de seu valor numérico a cada iteração**
  - **Forma de desvio do inconveniente**
    - **Substituição da derivada $f'(x_k)$ pelo quociente das diferenças**

$$f'(x_k) \approx [f(x_k) - f(x_{k-1})]/(x_k - x_{k-1})$$

onde x_{k-1} e x_k são duas aproximações para a raiz

Método da Secante

- **Considerações Iniciais**
  - **A função de iteração será**

$$g(x) = x_k - f(x_k)/[(f(x_k) - f(x_{k-1}))/(x_k - x_{k-1})]$$

$$= (x_k - x_{k-1}) \,.\, f(x_k)/[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

$$= [x_{k-1}.f(x_k) - x_k.f(x_{k-1})]/[f(x_k) - f(x_{k-1})]$$

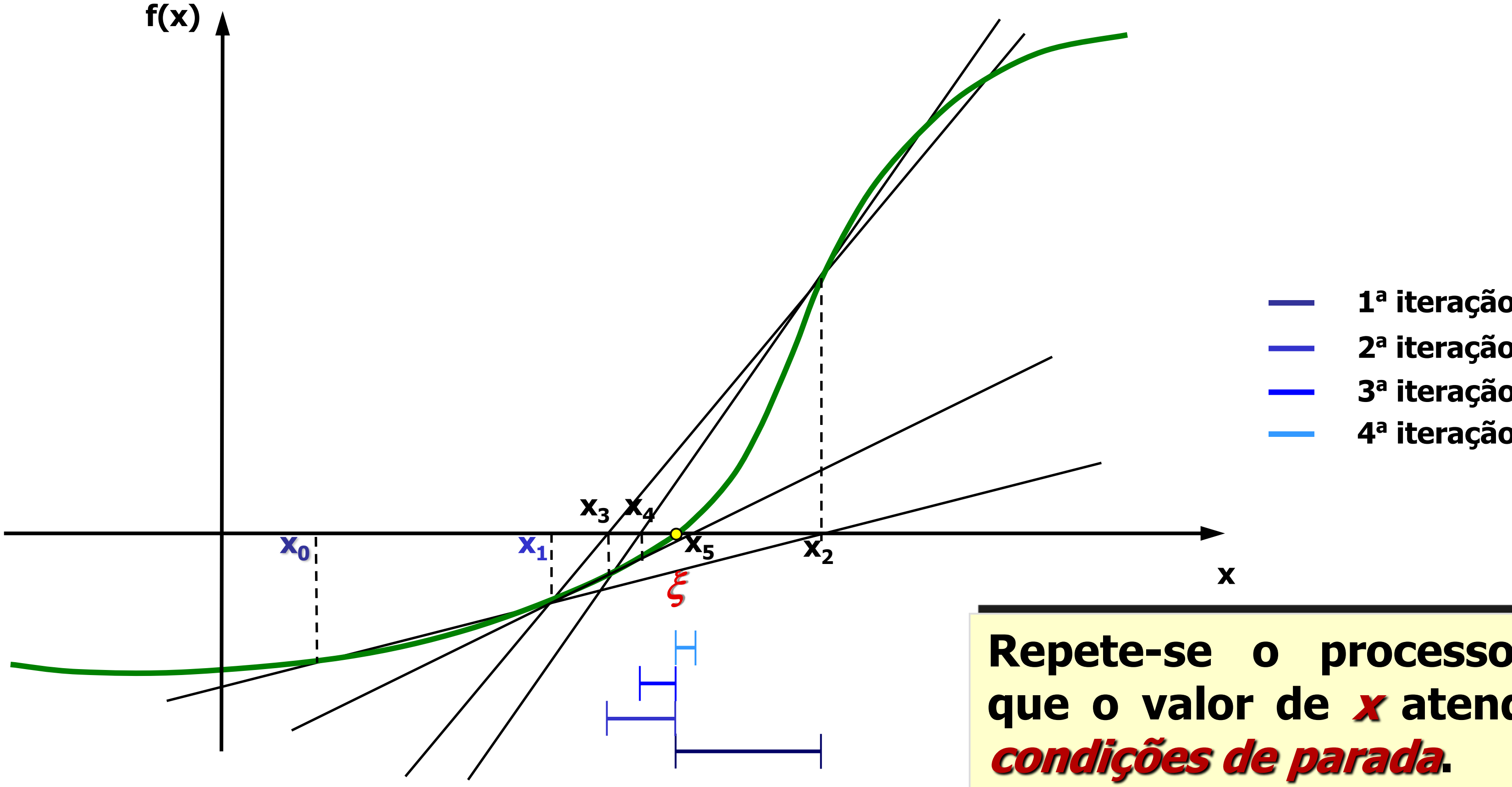
$$g(x) = \frac{[x_{k-1}.f(x_k) - x_k.f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}$$

Método da Secante

- **Interpretação Geométrica**
  - **A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k**
    - **Obtém-se o ponto x_{k+1} como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo $\overrightarrow{ox}$ e da reta que passa pelos pontos (x_{k-1} , $f(x_{k-1})$) e (x_k , $f(x_k)$) (secante à curva da função)**

Método da Secante

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

Método da Secante

- **Testes de Parada**
  - **A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.**
    - $|f(x_k)| \leq \varepsilon$
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq \varepsilon$

Método da Secante

Exemplo 19: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $\varepsilon = 0{,}002$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

- **Seja $x_{k-1} = 1{,}5$ e $x_k = 1{,}7$**
- $$g(x) = \frac{[x_{k-1} \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k-1})]}{[f(x_k) - f(x_{k-1})]}$$

Método da Secante

Exemplo 19:

- **Cálculo da 1ª aproximação $x_0 = 1,5 \quad x_1 = 1,7$**

  $f(x_0) = 0,875 > 0$

  $f(x_1) = 2,213 > 0$

  $$x_2 = \frac{[1,5.(2,213) - 1,7.(0,875)]}{[2,213 - (0,875)]} = 1,36921$$

- **Teste de Parada**
  - $|f(x_2)| = |0,19769| = 0,19769 > \varepsilon$
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - $x_1 = 1,36921$ e $x_2 = 1,5$

Método da Secante

Exemplo 19:

- **Cálculo da 2ª aproximação: $x_1 = 1,36921$ e $x_2 = 1,5$**

$f(x_1) = 0,19769 > 0$

$f(x_2) = 0,875 > 0$

$$x_3 = \frac{[1,36921.(0,875) - 1,5.(0,19769)]}{[0,875 - (0,19769)]} \Rightarrow$$

$x_3 = 1,33104$

Método da Secante

Exemplo 19:

- Cálculo da 2ª aproximação: $x_1 = 1{,}36921$ e $x_2 = 1{,}5$
  - Teste de Parada
    - $|f(x_3)| = |0{,}02712| = 0{,}02712 > \varepsilon$
  - Escolha do Novo Intervalo
    - $x_2 = 1{,}33104$ e $x_3 = 1{,}36921$

Método da Secante

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921**

$$f(x_2) = 0{,}02712 > 0$$

$$f(x_3) = 0{,}19769 > 0$$

$$x_4 = \frac{[1{,}33104.(0{,}19769) - 1{,}36921.(0{,}02712)]}{[0{,}19769 - (0{,}02712)]}$$

$$x_4 = 1{,}324971$$

Método da Secante

Exemplo 19:

- **Cálculo da 3ª aproximação: x_2 = 1,33104 e x_3 = 1,36921**
  - **Teste de Parada**
    - **$|f(x_4)| = |0{,}00108| = 0{,}00108 < \varepsilon$**

(*valor aceitável para a raiz*)

Método da Secante

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- Sejam $x_0 = 1{,}5$ e $x_1 = 1{,}7$
- Assim:
  - $x_2 = [x_0 . f(x_1) - x_1 . f(x_0)]/[f(x_1) - f(x_0)]$
    $= [1{,}5.(-1{,}41) - 1{,}7.(2{,}25)]/(-1{,}41 + 2{,}25)$
    $= 2{,}03571$
  - $x_3 = [x_1 . f(x_2) - x_2 . f(x_1)]/[f(x_2) - f(x_1)]$
    $= 1{,}99774$

Método da Secante

Exemplo 20: Resgatando o Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- **Assim:**
  - $x_4 = [x_2 . f(x_3) - x_3 . f(x_2)]/[f(x_3) - f(x_2)]$
    $= 1{,}99999$

    ⋮

- **Comentários:**
  - **A parada poderá ocorrer na 3ª iteração ($x = 1{,}99999$), caso a precisão do cálculo com 5 casas decimais for satisfatória para o contexto do trabalho**

Método da Secante

Vantagens:

- Rapidez processo de convergência;
- Cálculos mais convenientes que do método de Newton;
- Desempenho elevado.

Método da Secante

Desvantagens:

- Se o cálculo *f'(x)* não for difícil, então o método logo será substituído pelo de Newton-Raphson*;*
- Se o gráfico da função for paralela a um dos eixos e/ou tangencia o eixo das abscissas em um ou mais pontos, logo não se deve usar o método da *Secante* ;
- Difícil implementação.