

GBC051 - CCO

Sistemas de Equações Lineares (SEL)



Métodos Iterativos

■ **Motivação I**

- **Ocorrência em larga escala de sistemas lineares em cálculos de Engenharia e modelagem científica**

■ **Exemplos:**

- **Simulações de processos químicos**
- **Simulações de dispositivos e circuitos**
- **Modelagem de processos geocientíficos e geoambientais**
- **Análise estrutural**
- **Biologia estrutural**
- **Modelagem de processos físicos**

■ Motivação II

- Tendência à existência de matrizes de coeficientes à grandes e esparsas
 - **Grandes** \Rightarrow Comum para $n > 100.000$
 - **Esparsas** \Rightarrow Maioria dos coeficientes **nulos**
- Resolução de sistemas **esparsos** por métodos **diretos**
 - Processos de **triangularização** e **fatoração** \Rightarrow Onerosos, por não preservarem a esparsidade original, que pode ser útil por facilitar a resolução do sistema.



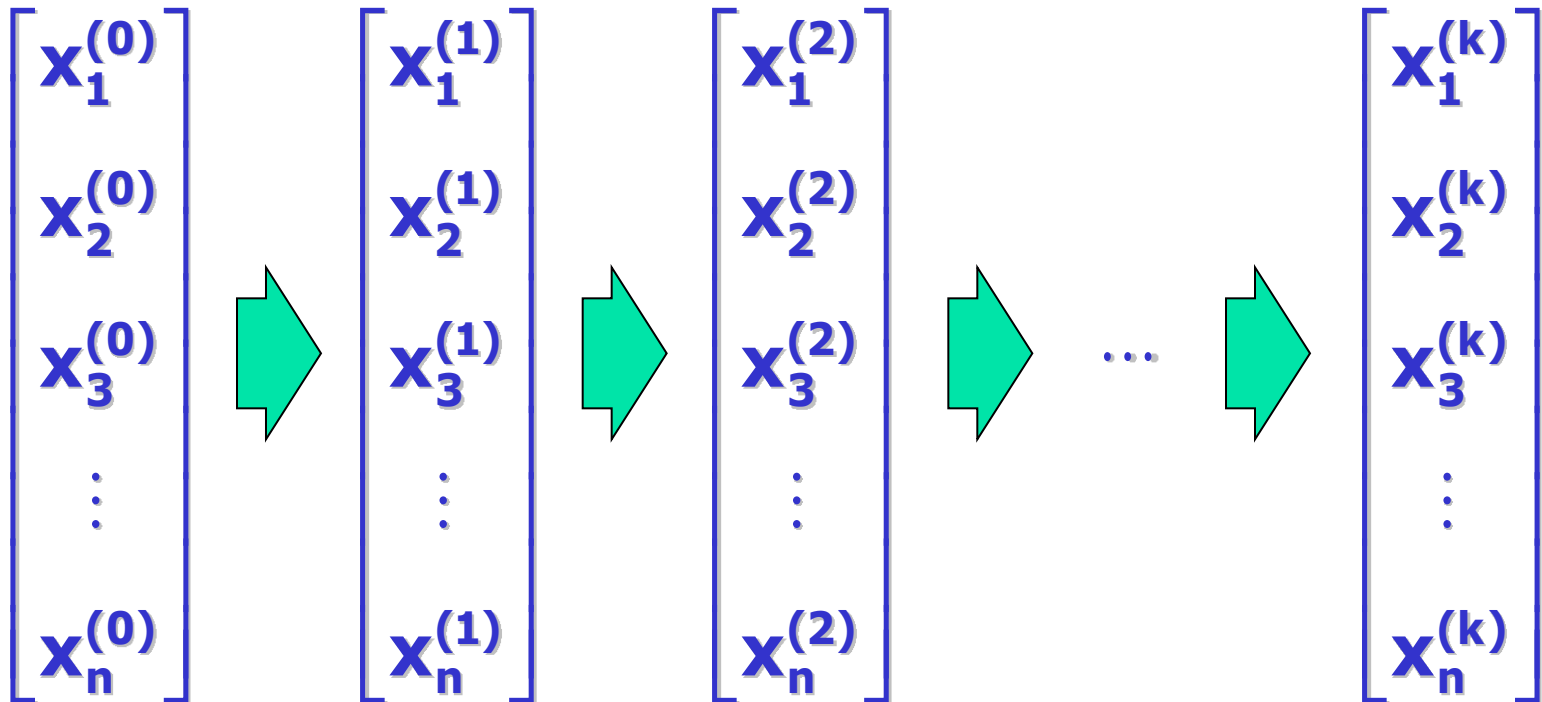
Métodos Iterativos

- **Motivação III**

- **Métodos mais apropriados para a resolução de sistemas de natureza esparsa \Rightarrow Métodos **iterativos****
 - **Gauss-Jacobi**
 - **Gauss-Seidel**

Métodos Iterativos

- A partir de uma estimativa inicial x_i^0 , consistem em encontrar uma seqüência de estimativas x_i^k que convirja para uma solução do SEL após um número suficientemente grande de iterações.





Métodos Iterativos

- **Vantagem \Rightarrow Menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento do que o método de Eliminação de Gauss.**
- **Lembretes importantes:**
 - **Como todo processo iterativo, estes métodos sempre apresentarão um resultado aproximado, que será tão próximo do resultado real conforme o número de iterações realizadas.**
 - **Além disto, também é preciso ter cuidado com a convergência destes métodos.**



Sistemas de Equações Lineares

Métodos Iterativos

- Transformação do sistema linear $Ax=b$ em $x=Cx+g$
 - A : matriz dos coeficientes, $n \times m$
 - x : vetor das variáveis, $n \times 1$;
 - b : vetor dos termos constantes, $n \times 1$;
 - C : matriz, $n \times n$; e
 - g : vetor, $n \times 1$.
- Métodos a estudar
 - *Gauss-Jacobi*
 - *Gauss-Seidel*



Método de Gauss-Jacobi

Método de Gauss-Jacobi

- Conhecida a estimativa inicial, $\mathbf{x}^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g}, \quad (\text{primeira aproximação})$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{g}, \quad (\text{segunda aproximação})$$

⋮

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}, \quad (k - \text{ésima aproximação})$$

- De um modo geral, a aproximação $\mathbf{x}^{(k+1)}$ é calculada pela fórmula:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k=0, 1, \dots$$



Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
 - **Da primeira equação do sistema:**

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\text{obtém-se: } x_1 = (1/a_{11}) (b_1 - a_{12} x_2 - \dots - a_{1n} x_n)$$

e, analogamente,

$$x_2 = (1/a_{22}) (b_2 - a_{21} x_1 - \dots - a_{2n} x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = (1/a_{nn}) (b_n - a_{n1} x_1 - \dots - a_{nn-1} x_{n-1})$$

Método de Gauss-Jacobi

- Método de Gauss-Jacobi
 - Desta forma, para $\mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{g}$, obtém-se:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \ddots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$



Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi**
 - **Distância entre duas iterações**

$$\mathbf{d}^{(k)} = \max |\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}|$$

- **Critério de Parada**

$$\mathbf{d}_r^{(k)} = \frac{\mathbf{d}^{(k)}}{\max |\mathbf{x}_i^{(k)}|} < \varepsilon$$



Método de Gauss-Jacobi

- Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13

- Seja o sistema:

$$10x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$$

$$2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6$$

- Determinação de **C** e **g**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -3/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$



Método de Gauss-Jacobi

- **Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13**
 - **Assim, considerando como estimativa inicial:**

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}$$

e $\varepsilon = 0,05$, obtém-se:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0,84 \\ 1,34 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_1^{(1)} - \mathbf{x}_1^{(0)}| &= 0,14 \\ |\mathbf{x}_2^{(1)} - \mathbf{x}_2^{(0)}| &= 2,94 \\ |\mathbf{x}_3^{(1)} - \mathbf{x}_3^{(0)}| &= 0,34 \end{aligned}$$



Método de Gauss-Jacobi

▪ Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13

▪ Assim:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0,150 \\ 1,244 \\ 0,030 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}_r^{(2)} = \frac{0,91}{1,244} = 0,7315 > \varepsilon$$

e, analogamente:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0,4422 \\ 1,5640 \\ 0,1968 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{d}_r^{(3)} = \frac{0,32}{1,5640} = 0,2046 > \varepsilon$$



Método de Gauss-Jacobi

▪ Método de Gauss-Jacobi – Exemplo 13

▪ Igualmente:

$$\mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(3)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0,3282 \\ 1,4722 \\ 0,0424 \end{bmatrix} \Rightarrow d_r^{(4)} = \frac{0,1544}{1,4722} = 0,1049 > \varepsilon$$

e, finalmente:

$$\mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(4)} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0,3929 \\ 1,5259 \\ 0,0927 \end{bmatrix} \Rightarrow d_r^{(5)} = \frac{0,0647}{1,5259} = 0,0424 < \varepsilon$$



Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Similarmente ao método de **Gauss-Jacobi**, conhecida a estimativa inicial, $\mathbf{x}^{(0)}$, obtém-se consecutivamente os vetores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, ..., $\mathbf{x}^{(k)}$
- Todavia, ao se calcular $\mathbf{x}_j^{(k+1)}$, usa-se todos os valores $\mathbf{x}_1^{(k+1)}$, $\mathbf{x}_2^{(k+1)}$, ..., $\mathbf{x}_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados e os valores $\mathbf{x}_{j+1}^{(k)}$, $\mathbf{x}_{j+2}^{(k)}$, ..., $\mathbf{x}_n^{(k)}$ restantes.



Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

■ Descrição I

- Seja o seguinte sistema de equações:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \cdots + a_{1n-1} \cdot x_{n-1} + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \cdots + a_{2n-1} \cdot x_{n-1} + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \cdots + a_{3n-1} \cdot x_{n-1} + a_{3n} \cdot x_n = b_3$$

$$\vdots$$
$$\ddots$$
$$\vdots$$

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + a_{n3} \cdot x_3 + \cdots + a_{nn-1} \cdot x_{n-1} + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

■ Descrição II

- Isolando x_i a partir da linha i , tem-se:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \cdots - a_{1n-1} \cdot x_{n-1} - a_{1n} \cdot x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \cdots - a_{2n-1} \cdot x_{n-1} - a_{2n} \cdot x_n)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} \cdot x_1 - a_{32} \cdot x_2 - \cdots - a_{3n-1} \cdot x_{n-1} - a_{3n} \cdot x_n)$$

\vdots

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \cdots - a_{nn-1} \cdot x_{n-1})$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

■ Descrição III

- O processo iterativo se dá a partir das equações:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} \cdot x_2^k - a_{13} \cdot x_3^k - \dots - a_{1,n-1} \cdot x_{n-1}^k - a_{1n} \cdot x_n^k)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} \cdot x_1^{k+1} - a_{23} \cdot x_3^k - \dots - a_{2,n-1} \cdot x_{n-1}^k - a_{2n} \cdot x_n^k)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31} \cdot x_1^{k+1} - a_{32} \cdot x_2^{k+1} - \dots - a_{3,n-1} \cdot x_{n-1}^k - a_{3n} \cdot x_n^k)$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} \cdot x_1^{k+1} - a_{n2} \cdot x_2^{k+1} - \dots - a_{n,n-1} \cdot x_{n-1}^{k+1})$$

Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

■ Critério de Parada I

- Diferença **relativa** entre duas iterações consecutivas, dada por:

$$M_R^{k+1} = \begin{cases} \text{Máx.}_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right|, & \text{se } x_i^{k+1} \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x_i^{k+1} = x_i^k = 0 \\ 1 & , \text{ se } \begin{cases} x_i^{k+1} = 0 \\ x_i^k \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$



Método de Gauss-Seidel

Método de Gauss-Seidel

- Critério de Parada II

- Fim do processo iterativo \Rightarrow Valor de M_R^{k+1} **suficientemente pequeno** para a precisão desejada



Método de Gauss-Seidel

▪ Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14

▪ Resolver:

$$5x + y + z = 5$$

$$3x + 4y + z = 6$$

$$3x + 3y + 6z = 0, \quad \text{com} \quad M_R^k \leq 5 \cdot 10^{-2}.$$

▪ Solução:

$$x = \frac{1}{5}(5 - y - z)$$

$$y = \frac{1}{4}(6 - 3x - z)$$

$$z = \frac{1}{6}(-3x - 3y) \Rightarrow z = -\frac{1}{2}(x + y)$$



Método de Gauss-Seidel

- Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14
 - Quadro de resultados do processo iterativo

x^k	M_x^k	y^k	M_y^k	z^k	M_z^k	M_R^k
-1	-	0	-	1	-	-
0,8	2,25	0,65	1	-0,725	2,379	2,379
1,015	0,212	0,92	0,293	-0,967	0,250	0,293
1,009	0,006	0,985	0,066	-0,997	0,030	0,066
1,002	0,007	0,998	0,0013	-1	0,003	0,0013

$x = 1,002$ $y = 0,998$ $z = -1$



Método de Gauss-Seidel

- **Método de Gauss-Seidel – Exemplo 14**
 - **Verificação (substituição no sistema)**

$$\mathbf{x} = 1,002 \quad \mathbf{y} = 0,998 \quad \mathbf{z} = -1$$

$$5.(1,002) + 1.(0,998) + 1.(-1) = 5,008 \approx 5 \quad \mathbf{OK}$$

$$3.(1,002) + 4.(0,998) + 1.(-1) = 5,998 \approx 6 \quad \mathbf{OK}$$

$$3.(1,002) + 3.(0,998) + 6.(-1) = 0 \quad \mathbf{OK}$$



Método de Gauss-Seidel

- **Critérios de Convergência**
 - **Processo iterativo \Rightarrow Convergência para a solução exata **não** garantida para qualquer sistema.**
 - **Necessidade de determinação de certas condições que devem ser satisfeitas por um SEL para a garantia da convergência do método.**
 - **Critérios de determinação das condições de convergência**
 - **Critério de Sassenfeld**
 - **Critério das Linhas**



Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Sassenfeld I**

- **Sejam as quantidades β_i dadas por:**

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{a_{11}} \right| \cdot \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \quad \text{e} \quad \beta_i = \left| \frac{1}{a_{ii}} \right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right]$$

para $i = 2, 3, \dots, n$

n - ordem do sistema linear que se deseja resolver

a_{ij} - coeficientes das equações do sistema



Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Sassenfeld II**

- Este critério garante que o método de Gauss-Seidel convergirá para um dado SEL se a quantidade **M**, definida por:

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i$$

for menor que **1** (**$M < 1$**).

Método de Gauss-Seidel

- Critério de Sassenfeld III

- Exemplo 15: Seja **A** a matriz dos coeficientes e **b** o vetor dos termos constantes, dados por:

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{a}_{24} & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{a}_{42} & \mathbf{a}_{43} & \mathbf{a}_{44} & \mathbf{b}_4 \end{array}$$



$$\beta_1 = \left| \frac{1}{\mathbf{a}_{11}} \right| \cdot (\mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_{13} + \mathbf{a}_{14})$$

$$\beta_2 = \left| \frac{1}{\mathbf{a}_{22}} \right| \cdot (|\mathbf{a}_{21}| \beta_1 + |\mathbf{a}_{23}| + |\mathbf{a}_{24}|)$$


$$\beta_3 = \left| \frac{1}{\mathbf{a}_{33}} \right| \cdot (|\mathbf{a}_{31}| \beta_1 + |\mathbf{a}_{32}| \beta_2 + |\mathbf{a}_{34}|)$$

$$\beta_4 = \left| \frac{1}{\mathbf{a}_{44}} \right| \cdot (|\mathbf{a}_{41}| \beta_1 + |\mathbf{a}_{42}| \beta_2 + |\mathbf{a}_{43}| \beta_3)$$

Método de Gauss-Seidel

- Critério de Sassenfeld IV

- Exemplo 15: Seja **A** a matriz dos coeficientes e **b** o vetor dos termos constantes, dados por:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1		$\beta_1 = \left \frac{1}{a_{11}} \right \cdot (a_{12} + a_{13} + a_{14})$
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2		$\beta_2 = \left \frac{1}{a_{22}} \right \cdot (a_{21} \beta_1 + a_{23} + a_{24})$
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3		$\beta_3 = \left \frac{1}{a_{33}} \right \cdot (a_{31} \beta_1 + a_{32} \beta_2 + a_{34})$
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4		$\beta_4 = \left \frac{1}{a_{44}} \right \cdot (a_{41} \beta_1 + a_{42} \beta_2 + a_{43} \beta_3)$

Mostrar que a solução do SEL a seguir convergirá pelo método de Gauss-Seidel.



Método de Gauss-Seidel

- **Critério de Sassenfeld V**

- **Exemplo 15:**

$$\begin{aligned}2,0 \cdot x_1 + x_2 - 0,2 \cdot x_3 + 0,2 \cdot x_4 &= 0,4 \\0,6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 0,6 \cdot x_3 - 0,3 \cdot x_4 &= -7,8 \\-0,1 \cdot x_1 - 0,2 \cdot x_2 + x_3 + 0,2 \cdot x_4 &= 1,0 \\0,4 \cdot x_1 + 1,2 \cdot x_2 + 0,8 \cdot x_3 + 4,0 \cdot x_4 &= -10,0\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

▪ Critério de Sassenfeld VI

▪ Exemplo 15: Solução

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,2 + 0,2) = 0,7$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \cdot (0,6 \cdot 0,7 + 0,6 + 0,3) = 0,44$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1} \cdot (0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,44 + 0,2) = 0,358$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4} \cdot (0,4 \cdot 0,7 + 1,2 \cdot 0,44 + 0,8 \cdot 0,358) = 0,2736$$

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \beta_i = 0,7$$

A				b
2.0	1.0	-0.2	0.2	0.4
0.6	3.0	-0.6	-0.3	-7.8
-0.1	-0.2	1.0	0.2	1.0
0.4	1.2	0.8	4.0	-10.0

M < 1 \Rightarrow Convergência da
solução do sistema a partir do
método de Gauss-Seidel



Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas**

- Segundo este critério, um determinado sistema irá convergir pelo método de Gauss-Seidel, se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$



Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas**

- **Exemplo 16:** O SEL do Exemplo 14 satisfaz o *Critério das Linhas*, sendo a verificação quase imediata, se for observado que:

$$|a_{11}| = 2 > |a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| = 1 + 0,2 + 0,2 = 1,4$$

$$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = 0,6 + 0,6 + 0,3 = 1,5$$

$$|a_{33}| = 1 > |a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5$$

$$|a_{44}| = 4 > |a_{41}| + |a_{42}| + |a_{43}| = 0,4 + 1,2 + 0,8 = 2,4$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.$$



Considerações Finais

- Tanto o **Critério de Sassenfeld** quanto o **Critério das Linhas** são condições **suficientes**, porém **não necessárias**, para a convergência do método de Gauss-Seidel para um dado SEL
 - Um dado SEL pode **não** satisfazer estes critérios e **ainda** convergir
 - Um sistema pode **não** satisfazer o **Critério das Linhas**, porém sua convergência será garantida se satisfizer o **Critério de Sassenfeld**



Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas x Critério de Sassenfeld**

- **Exemplo 17: Seja o seguinte SEL:**

$$10 \cdot x_1 + x_2 = 23$$

$$6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 18$$

- **O Critério das Linhas não é satisfeito, visto que:**

$$|a_{22}| = 2 < |a_{21}| = 6$$

- **Todavia, o Critério de Sassenfeld é satisfeito, uma vez que:**

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{10} \right| \cdot 1 = 0,1 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \left| \frac{1}{2} \right| \cdot (6 \cdot 0,1) = 0,3$$



Método de Gauss-Seidel

- **Critério das Linhas x Critério de Sassenfeld**
 - **Exemplo 17:** Assim sendo, a convergência do SEL é **garantida**.



Considerações Finais

- Embora não altere a solução do SEL, a ordem de aparecimento das equações pode alterar sua convergência pelo método da Gauss-Seidel.

- Exemplo 18: Seja o SEL:

$$-4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = 19$$

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 15$$

- Observa-se que na ordem atual de aparecimento das equações, o SEL não satisfaz o **Critério das Linhas** (**verificar!!!**); logo, sua convergência **não** é **garantida**.
- A inversão da ordem das duas equações do SEL fará com que o **Critério das Linhas** seja **satisfeito** e sua convergência pelo método de Gauss-Seidel **garantida** (**verificar também!!!**).

- Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. *Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*. MAKRON Books, 1996, 2ª ed.
- Asano, C. H. & Colli, E. *Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações*. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- Sanches, I. J. & Furlan, D. C. *Métodos Numéricos*. DI/UFPR, 2006.
- Paulino, C. D. & Soares, C. Erros e Propagação de Erros, *Notas de aula*, SE/ DM/ IST [Online] http://www.math.ist.utl.pt/stat/pe/qeb/semestr_e_1_2004-2005/PE_erros.pdf [Último acesso 07 de Junho de 2007].