Computação Cientifica e Otimização

Erros

Profs.: Mauricio Cunha Escarpinati

Erros - Existência I

- **Premissa**
  - **Impossibilidade de obtenção de soluções analíticas para vários problemas que envolvam modelos matemáticos.**
  - **Consequência**
    - **Emprego de métodos numéricos na resolução de inúmeros problemas do mundo real.**

Erros - Existência II

- ## Erro Inerente

Erro sempre presente nas soluções numéricas, devido à incerteza sobre o valor real.

Ex. 01: Representação intervalar de dados

$(50,3 \pm 0,2)$ cm
$(1,57 \pm 0,003)$ ml
$(110,276 \pm 1,04)$ Kg

Cada medida é um intervalo e não um número.

Erros - Existência III

- **Método Numérico**

Método adotado na resolução de um problema físico, mediante a execução de uma sequência finita de operações aritméticas.

  - **Consequência**

    - **Obtenção de um resultado aproximado, cuja diferença do resultado esperado (exato) denomina-se *erro*.**

Erros - Existência IV

- **Natureza dos Erros I**
  - **Erros inerentes ao *processo de aquisição dos dados***
    - **Relativos à imprecisão no processo de aquisição/entrada, externos ao processo numérico.**

Erros Inerentes aos Dados

- **Proveniência ⇨ Processo de *aquisição*/ *entrada* (medidas experimentais)**
  - **Sujeitos às limitações/aferição dos instrumentos usados no processo de mensuração**
  - **Erros *inerentes* são inevitáveis!**

Erros - Existência V

- **Natureza dos Erros II**
  - **Erros inerentes ao *modelo matemático* adotado**
    - **Relativos à impossibilidade de representação exata dos fenômenos reais a partir de modelos matemáticos**
      - **Necessidade de adotar condições que simplifiquem o problema, a fim de torná-lo numericamente solúvel**

Erros Inerentes ao Modelo

- **Proveniência ⇨ Processo de *modelagem* do problema**
  - **Modelos matemáticos raramente oferecem representações exatas dos fenômenos reais**
  - **Equações e relações, assim como dados e parâmetros associados, costumam ser simplificados**
    - **Factibilidade e viabilidade das soluções**

Erros - Existência VI

- **Natureza dos Erros III**
  - **Erros de *truncamento***
    - **Substituição de um processo infinito de operações por outro finito**

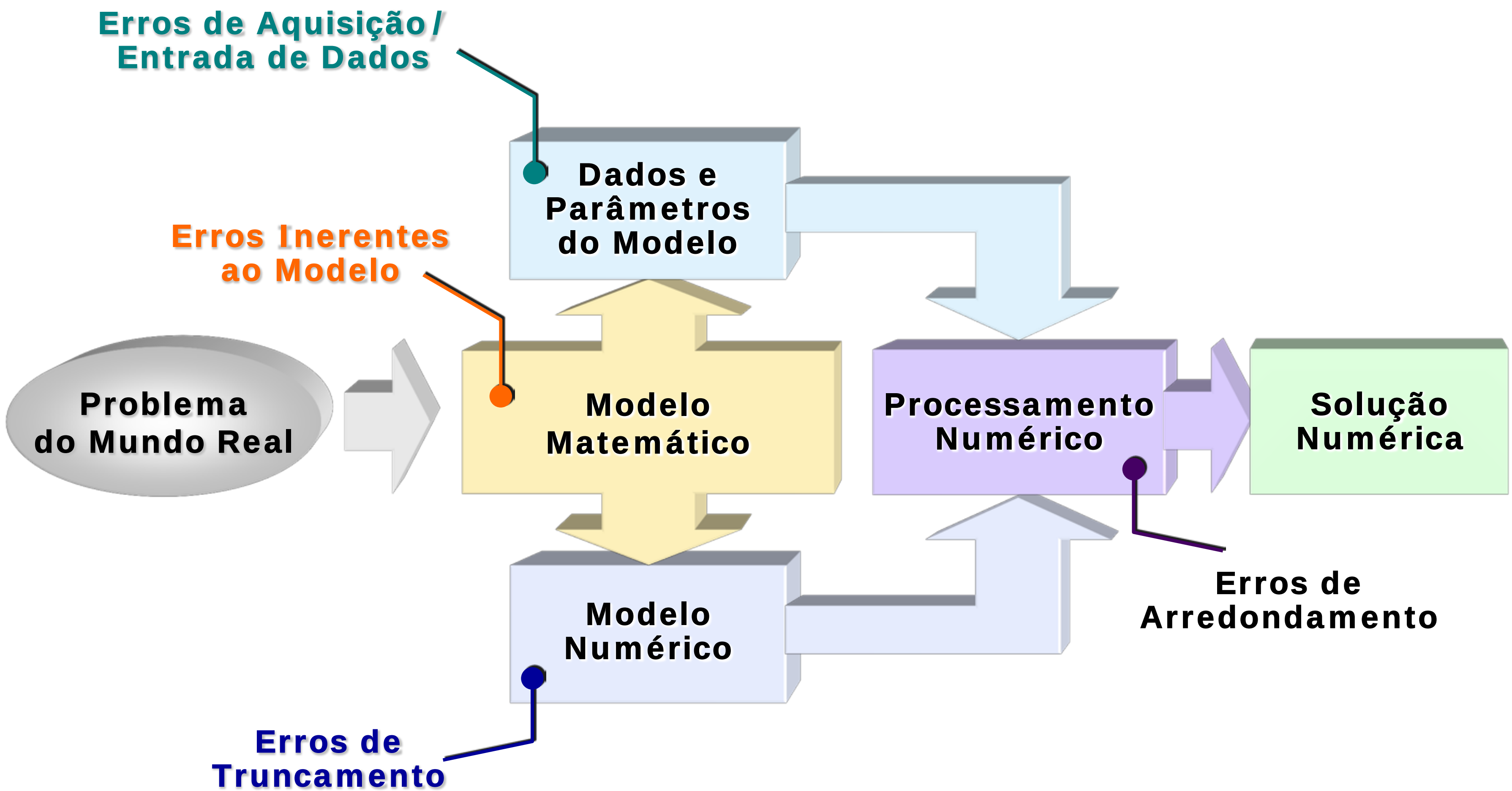
Em muitos casos, o erro de *truncamento* é precisamente a diferença entre o modelo matemático e o modelo numérico.

Erros - Existência VII

- **Natureza dos Erros IV**
  - **Erros de *arredondamento***
    - **Inerentes à estrutura da máquina e à utilização de uma aritmética de precisão finita**

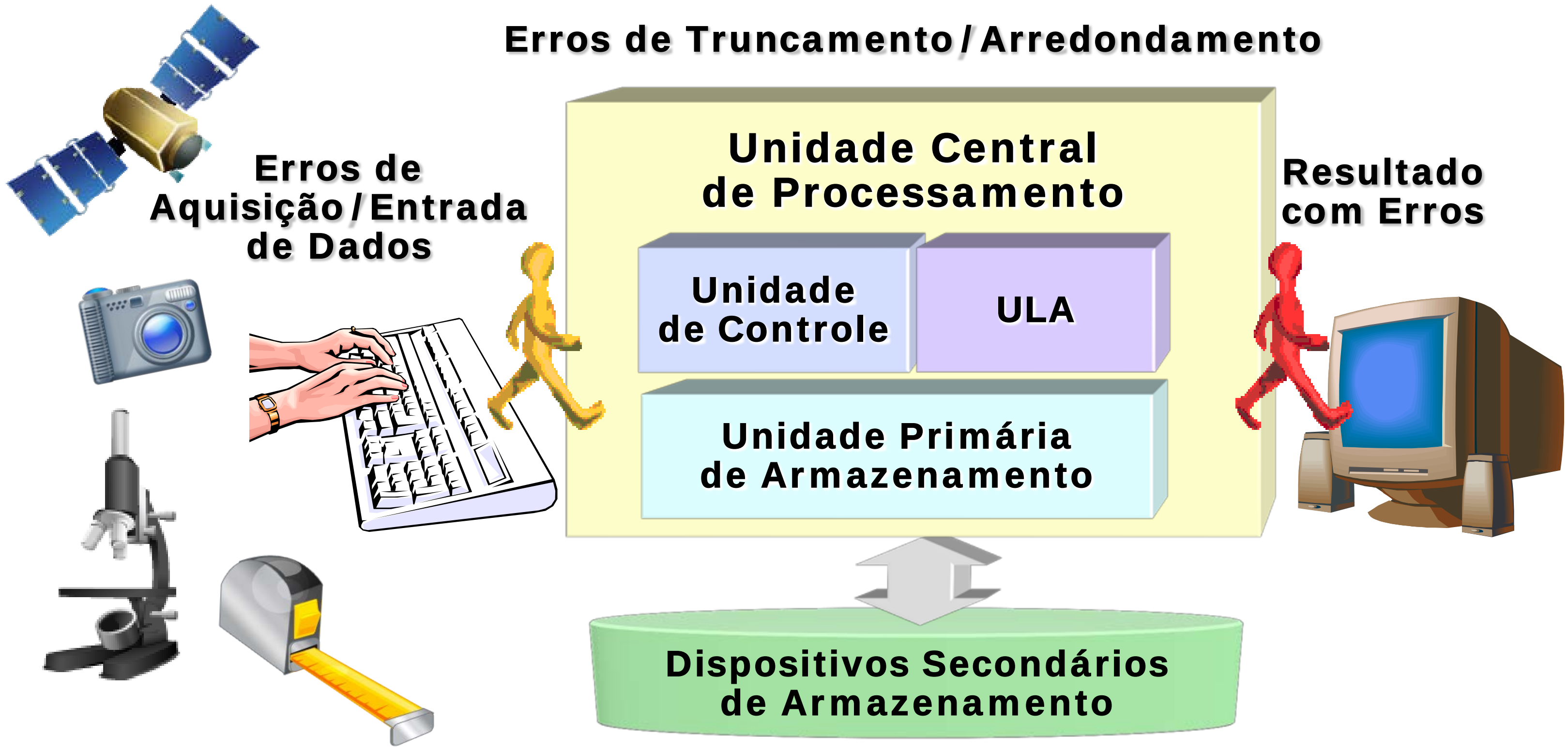
Erros - Existência VIII

- **Fontes de Erros I**



Erros - Existência IX

- **Fontes de Erros II**



Erros - Existência X

- **Representação Numérica em Máquinas Digitais I**
  - **Discreta ⇨ Conjunto finito de números em qualquer intervalo *[a, b]* de interesse**
    - **Implicação imediata ⇨ Possibilidade de comprometimento da precisão dos resultados, mesmo em representações de dupla precisão**

Erros - Existência XI

- Resultado na Saída
  - Incorporação de todos os erros do processo
  - Quão confiável é o resultado aproximado?
    - Quanto erro está presente no resultado?
    - Até que ponto o erro presente no resultado é tolerável?

Erros - Existência XII

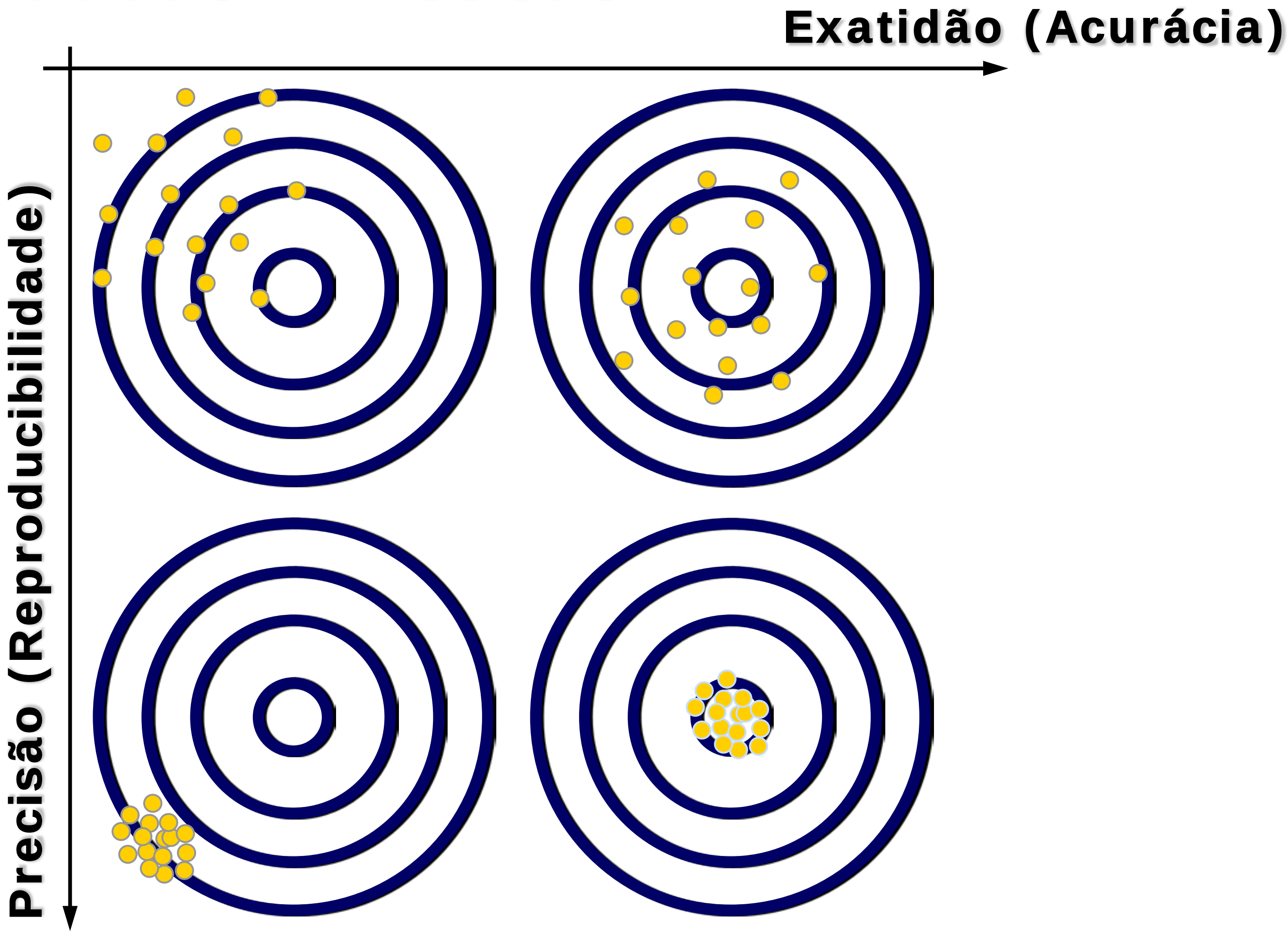
- *Acurácia* (ou *Exatidão*)
  - Quão próximo um valor computado/mensurado se encontra do valor real (verdadeiro)
- *Precisão* (ou *Reproducibilidade*)
  - Quão próximo um valor computado/mensurado se encontra de valores previamente computados/mensurados

Erros - Existência XIII

- ***Inacurácia*** **(ou *Inexatidão*)**
  - **Desvio sistemático do valor real**
- ***Imprecisão*** **(ou *Incerteza*)**
  - **Magnitude do espalhamento dos valores**

Erros - Existência XIV

- *Exatidão* **x** *Precisão*



Erros - Existência XV

- **Indicador de *Precisão* de um Resultado**
  - **Número de algarismos significativos**
    - **Algarismos significativos (*as*)**
      - **Algarismos que podem ser usados com *confiança***

Erros - Existência XVI

- *As* de um número I
  - Exemplo 02: Considerem-se os seguintes valores de *médias* obtidas em um experimento estatístico
    - $\mu = 138$ — 0 casas decimais (cd)
    - $\mu = 138{,}7$ — 1 cd
    - $\mu = 138{,}76$ — 2 cd
    - $\mu = 138{,}76875$ — 5 cd
    - $\mu = 138{,}\ 7687549$ — 7 cd
    - $\mu = 138{,}\ 768754927$ — 9 cd

Erros - Existência XVII

- *As* de um número II
  - Exemplo 02: Os valores das médias podem ser representadas como:
    - $\mu = 138$ ⇨ $\mu = 0{,}138 \,.\, 10^3$
    - $\mu = 138{,}7$ ⇨ $\mu = 0{,}1387 \,.\, 10^3$
    - $\mu = 138{,}76$ ⇨ $\mu = 0{,}13876 \,.\, 10^3$
    - $\mu = 138{,}76875$ ⇨ $\mu = 0{,}13876875 \,.\, 10^3$
    - $\mu = 138{,}\ 7687549$ ⇨ $\mu = 0{,}1387687549 \,.\, 10^3$
    - $\mu = 138{,}\ 768754927$ ⇨ $\mu = 0{,}138768754927 \,.\, 10^3$

Erros - Existência XVIII

- *As* de um número III
  - Exemplo 02:
    - $\mu = 0{,}138 \times 10^3$ ⇨ 3 as
    - $\mu = 0{,}1387 \times 10^3$ ⇨ 4 as
    - $\mu = 0{,}13876 \times 10^3$ ⇨ 5 as
    - $\mu = 0{,}13876875 \times 10^3$ ⇨ 8 as
    - $\mu = 0{,}1387687549 \times 10^3$ ⇨ 10 as
    - $\mu = 0{,}138768754927 \times 10^3$ ⇨ 12 as

Erros nos Métodos I

- **Método Numérico**
  - **Aproximação da solução de um problema de Matemática**
    - **Truncamento de uma solução em série, considerando apenas um número finito de termos**
    - **Exemplo 03:** $exp(x)$

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Erros nos Métodos II

- **Exemplo 03: Determinação do valor de e.**

Lembrar que $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$**. Logo:**

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cong 2{,}71828182845905$$

um truncamento no sexto termo gera:

$$e = \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} = 2{,}71666666666667$$

Erros nos Métodos III

- **Exemplo 03:**

Então, o erro de truncamento, E_T, será:

$$E_T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$$

$$E_T = 2{,}718281828459045 - 2{,}716666666666667$$

$$\Rightarrow \quad E_T = 0{,}001615161792378$$

Erros nos Métodos IV

- **Exemplo 04: Determinação do número de termos para a aproximação de $\cos(x)$ com 8 as, considerando $x=\pi/3$.**

  Lembrar que:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Erros nos Métodos V

- **Exemplo 04: Então**

$$\frac{x^2}{2} = \frac{(0.3\pi)^2}{2} = 0.4444132198 \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} = 0.555867802$$

$$\frac{x^4}{4!} = \frac{(0.3\pi)^4}{24} = 0.032875568 \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = 0.588743370$$

$$\frac{x^6}{6!} = \frac{(0.3\pi)^6}{720} = 0.000973407 \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} = 0.587769964$$

Observe-se que o segundo as não mais se alterará.

Erros nos Métodos VI

- **Exemplo 04: E que o quarto as não mais se alterará a partir de:**

$$\frac{x^8}{8!}=\frac{(0.3\pi)^8}{40320}=0.00001544 \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}=0.587785404$$

- **nem o sexto as a partir de:**

$$\frac{x^{10}}{10!}=\frac{(0.3\pi)^{10}}{3628800}=0.000000152387 \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}=0.587785251$$

- **nem o oitavo as a partir de:**

$$\frac{x^{12}}{12!}=\frac{(0.3\pi)^{12}}{479001600}=0.00000000102545 \qquad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}=0.587785251$$

Erros nos Métodos VII

- **Exemplo 04:**

  Assim sendo, o número de termos para a aproximação de $cos(x)$ com 8 *as* é igual a 7 (incluindo o termo de ordem 0, igual a 1)

Erros nos Métodos VIII

- **Exercício 01: Determinar o número de termos para a aproximação de**

  1. $ln(1+x)$ **com 8 as, considerando** $x = 0,09$
  2. $sen(x)$ **com 6 as, considerando** $x = 4\pi/3$
  3. $exp(x)$ **com 7 as, considerando** $x = 1/3$

  Qual a conclusão a que se chega a partir destes cálculos?

Erros - Existência XIX

- Erro de *Representação* x Erro de *Truncamento de Dígitos*
  - Erro de *Representação*
    - Associado à conversão numérica entre bases (representação humana e de máquina) ou à realização de operações aritméticas
  - Erro de *Truncamento de Dígitos*
    - Associado à quantidade de informação que a máquina pode conter sob a forma de um número

Erros - Existência XX

- **Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação)**

  Ex. 05: Cálculo da área de uma circunferência de raio $100\ m$

  Possíveis resultados:

  (1) $A = 31400\ m^2$

  (2) $A = 31416\ m^2$

  (3) $A = 31415{,}92654\ m^2$

Erro de Representação

π **não tem representação finita -** $3{,}14$ **(1),** $3{,}1416$ **(2) e** $3{,}141592654$ **(3)**

Erros - Existência XXI

- Representação dos números reais com um número finito de dígitos (aproximação)
  - Dependência da representação numérica da máquina utilizada

$$0{,}1_{10} = 0{,}0\,0011\,0011\,0011\,0011\ldots_2$$

Um número pode ter representação finita em uma base e não finita em outra

Erro de Representação

Operações com dados imprecisos ou incertos acarretam a propagação do erro.

Erros - Existência XXII

- **Ex. 06: Determinar**

$$S = \sum_{i=1}^{3000} x_i$$

a partir de uma calculadora e um computador, para $x_i = 0,5$ e $x_i = 0,1$

x_i	Calculadora	Computador
0,5	S= 1500	S= 1500
0,1	S= 300	S=300,00909424 (precisão *simples*)
		S=299,99999999999720 (precisão *dupla*)

Erros - Existência XXIII

Ex. 07: Conversão de $0{,}1_{10}$ para a base 2.

$$0{,}1_{10} = 0{,}0\,0\,011\,0\,011\,0\,011\,0\,011\ldots_2$$

$0{,}1_{10}$ não tem representação exata na base 2

A representação de um número depende da base em uso e do número máximo de dígitos usados em sua representação.

Erros - Tipos I

- Absoluto
  - Diferença entre o valor exato de um número e o seu valor aproximado (em módulo)

$$EA_x = | x - \bar{x} |$$

Erros - Tipos II

- **Relativo**
  - Razão entre o erro absoluto e o valor exato do número considerado (em módulo)

$$ER_x = \frac{|\,x - \bar{x}\,|}{|\,x\,|}$$

$$Erro\ Percentual_x = ER_x \,.\, 100\%$$

Erros - Tipos III

- Relativo
  - Este tipo de erro é utilizado em processos iterativos pois, sendo o processo convergente, a cada iteração o valor atual está mais próximo mais do valor exato do que o valor anterior

$$\bar{x} \equiv valor\ anterior$$

$$x \equiv valor\ atual$$

Erros - Tipos IV

- **Erro Absoluto - Considerações I**
  - EA_x só poderá ser determinado se x for conhecido com exatidão
  - Na prática, costuma-se trabalhar com um limitante superior para o erro, ao invés do próprio erro ($|E| < \varepsilon$, sendo ε é o limitante)

Ex. 08: Para $\pi \in (3{,}14;\ 3{,}15)$

$$\left|EA_{\pi}\right| = \left|\pi - \overline{\pi}\right| < 0{,}01$$

38

Erros – Tipos V

- **Erro Absoluto - Considerações II**

Ex. 08: Sejam $a = 3876{,}373$ e $b = 1{,}373$

Considerando-se a parte inteira de a (a') o erro absoluto será:

$$EA_a = \left| a - a' \right| = 0{,}373$$

e a parte inteira de b (b') , o erro absoluto será:

$$EA_b = \left| b - b' \right| = 0{,}373$$

Erros – Tipos VI

- Erro Absoluto - Considerações III
  - Obviamente, o resultado do erro absoluto é o mesmo nos dois casos
  - Entretanto, o peso da aproximação em b é maior do que em a

Erros – Tipos VII

- **Erro Relativo - Consideração**

  O erro relativo pode, entretanto, traduzir perfeitamente este fato, pois:

$$ER_a = \frac{0,373}{3876} \cong 0,000096 \leq 10^{-4}$$

$$ER_b = \frac{0,373}{1} \cong o,373 \leq 5_X 10^0$$

Erros - Tipos VIII

Ex. 09: Cálculo do erro relativo na representação dos números $a = 2112{,}9$ e $e = 5{,}3$, sendo $|EA| < 0{,}1$

$$|ER_a| = |a - \bar{a}|/|a| = 0{,}1/2112{,}9 \cong 4{,}7 \times 10^{-5}$$

$$|ER_e| = |e - \bar{e}|/|e| = 0{,}1/5{,}3 \cong 0{,}02$$

Conclusão: a é representado com *maior* precisão do que e

Erros – Tipos IX

- **Arredondamento**
- **Truncamento de Dígitos**

Quanto *menor* for o erro, maior será a precisão do resultado da operação.

Erros – Tipos X

- **Arredondamento I**

Ex. 10: Cálculo de $\sqrt{2}$ utilizando uma calculadora digital

Valor apresentado: $1{,}41421\mathbf{3}\mathbf{6}$

Valor real: $1{,}41421356\ldots$

Erros – Tipos XI

- Arredondamento II
  - Inexistência de forma de representação de números irracionais com uma quantidade finita de algarismos
    - Apresentação de uma aproximação do número pela calculadora
      - Erro de arredondamento

Erros – Tipos XII

- **Truncamento de Dígitos**
  - **Descarte dos dígitos finais de uma representação exata por limitações de representação em vírgula flutuante**
    - **Ex. 11: Representação truncada de $\sqrt{2}$ em vírgula flutuante com 7 dígitos**

      Valor apresentado: 1,4142135

      Valor real: 1,41421356...

Arredondamento e Truncamento I

- **Erros de Truncamento e Arredondamento - Demonstração**
  - **Em um sistema que opera em ponto flutuante de t dígitos na base 10, e seja x:**
    - $x = f_x . 10^e + g_x . 10^{e-t}$ **(**$0,1 \leq f_x < 1$ **e** $0,0 \leq g_x < 1$**)**
      - **Para** $t = 4$ **e** $x = 234,57$**, então:**

$$x = 0,2345 \, . \, 10^3 + 0,7 \, . \, 10^{-1}$$

$$f_x = 0,2345$$

$$g_x = 0,7$$

Erros - Truncamento

- **No truncamento, $g_x.10^{e-t}$ é desprezado e**

$$\bar{x} = f_x.10^e$$

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x|.10^{e-t} < 10^{e-t}$$

visto que $|g_x|<1$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|x|} = \frac{|g_x|.10^{e-t}}{|f_x|.10^e + |g_x|.10^{e-t}} < \frac{10^{e-t}}{0,1.10^e} = 10^{-t+1}$$

pois $0,1$ é o menor valor possível para f_x

Erros – Arredondamento I

- No **arredondamento** **simétrico** (forma mais utilizada):

$$\bar{x} = \begin{cases} f_x.10^e & \text{, se } |g_x| < \dfrac{1}{2} \quad (g_x \text{ é desprezado}) \\ f_x.10^e + 10^{e-t} & \text{, se } |g_x| \geq \dfrac{1}{2} \quad (\text{soma } 1 \text{ ao último dígito de } f_x) \end{cases}$$

Erros - Arredondamento II

Se $|g_x| < \dfrac{1}{2}$ **, então:**

$$|EA_x| = |x - \bar{x}| = |g_x|.10^{e-t} < \frac{1}{2}.10^{e-t}$$

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|x|} = \frac{|g_x|.10^{e-t}}{|f_x|.10^{e} + |g_x|.10^{e-t}} < \frac{0{,}5.10^{e-t}}{0{,}1.10^{e}} = \frac{1}{2}.10^{-t+1}$$

Erros – Arredondamento III

Se $|g_x| \geq \dfrac{1}{2}$, então:

$$|EA_x| = |x - \overline{x}| = \left|\left(f_x .10^{e} + g_x .10^{e-t}\right) - \left(f_x .10^{e} + 10^{e-t}\right)\right|$$

$$|EA_x| = \left|g_x .10^{e-t} - 10^{e-t}\right| = \left|\left(g_x - 1\right)\right| .10^{e-t} \leq \frac{1}{2} .10^{e-t}$$

e

$$|ER_x| = \frac{|EA_x|}{|x|} \leq \frac{1/2.10^{e-t}}{\left|f_x .10^{e} + 10^{e-t}\right|} < \frac{1/2.10^{e-t}}{|f_x| .10^{e}} \leq \frac{1/2.10^{e-t}}{0,1.10^{e}} = \left(\frac{1}{2} .10^{-t+1}\right)$$

Arredondamento e Truncamento I

- Erros de **Truncamento** e **Arredondamento**
  - Sistema operando em ponto flutuante - Base 10
    - Erro de **Truncamento**

$$|EA_x| < 10^{e-t} \quad \text{e} \quad |ER_x| < 10^{-t+1}$$

    - Erro de **Arredondamento**

$$|EA_x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t} \quad \text{e} \quad |ER_x| < \frac{1}{2} \times 10^{-t+1}$$

e - nº de dígitos inteiros
t - nº de dígitos

Arredondamento e Truncamento I

Por hoje chega.....