Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Informática e Matemática Aplicada

Computação Gráfica I • DIM0451

◁ Notas de Aula Sobre Interseção Raio-Esfera ▷
1 de abril de 2024

1 Introdução

Estas notas de aula ilustram o procedimento básico para determinar a interseção entre um raio e uma superfície definida por sua equação explícita. Em particular, abordamos a determinação algébrica da interseção entre um raio e uma esfera.

2 Equação implícita de uma curva

No espaço bidimensional (2D), uma *curva* pode ser intuitivamente descrita como um conjunto de pontos desenhados sobre papel sem levantarmos a caneta.

Uma *curva fechada* é formada por um caminho em que o ponto inicial é igual ao ponto final. Normalmente as curvas são representadas por *equações implícitas*, as quais em 2D tem a seguinte forma geral:

$$f(x, y) = 0$$

Por exemplo, a equação do **círculo** centrado na origem é definida como

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

onde (x, y) são as coordenadas de um ponto sobre o círculo e r corresponde ao *radius*[1] do círculo (ver Figura 1).

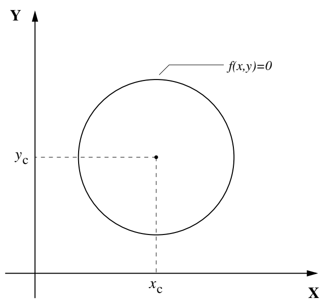

Figura 1: Círculo centrado em $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$.

[1] No texto vamos usar o termo em Inglês *radius* para representar o raio de círculo ou esfera, de maneira a diferenciar do raio como um segmento de reta orientado.

Se desejarmos um círculo localizado em um centro arbitrário $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$, então a nova equação passa a ser

$$f(x, y) = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 - r^2 \tag{1}$$

Estas equações são chamadas de implícitas porque não produzem pontos na curva diretamente. Elas são usadas para **verificar** se um dado ponto está na curva ou não. Assim, se um ponto $\mathbf{p} = (x, y)$ estiver na curva então $f(\mathbf{p}) = 0$.

3 Notação com vetor para curvas

Podemos representar curvas utilizando *vetores*. Essa representação é mais adequada quando se deseja realizar operações computacionais sobre a curva visto que é possível implementar a representação de vetor e suas operações, por exemplo, em uma classe. Adicionalmente, a notação com vetores é mais compacta e pode ser estendida para três (ou mais) dimensões trivialmente. Outra vantagem é que a equação com vetores normalmente apresenta uma interpretação geométrica que pode ser fácil de entender.

Considere o exemplo do círculo com centro $\mathbf{c} = (x_c, y_c)$, a equação utilizando vetores para pontos $\mathbf{p}$ no círculo seria

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \tag{2}$$

Se desenvolvermos algebricamente a Equação 2, vamos obter a Equação 1. Note que $(\mathbf{p} - \mathbf{c})$ é um vetor e que o *produto escalar* de um vetor com ele mesmo corresponde a sua magnitude elevada ao quadrado

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{a}\| \, \cos\theta.$$

onde θ é o ângulo entre os vetores. Como se trata do mesmo vetor, o ângulo obviamente é zero. Como $\cos 0 = \cos \pi = 1$, temos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{a}\| \, 1 = \|\mathbf{a}\|^2.$$

Portanto, a partir da Equação 2

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\|^2 - r^2 = 0.$$

ou seja, temos que

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{c}\| - r = 0.$$

Assim, uma interpretação geométrica seria: *"todos os pontos* $\mathbf{p}$ *no círculo estão a uma distância* r *do centro* $\mathbf{c}$*"*, a qual descreve perfeitamente a ideia do círculo.

O mesmo princípio aplicado a curvas pode ser trivialmente estendido para *superfícies* no espaço tridimensional (3D). Portanto, podemos representar uma **esfera** através da mesma Equação 2. A única mudança é que por estarmos descrevendo uma superfície em 3D temos $\mathbf{p} = (x, y, z)$ e $\mathbf{c} = (x_c, y_c, z_c)$.

4 Representação de um raio

Recorde que um raio (segmento de reta orientado) foi definido como sendo

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\overrightarrow{d}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + t(\mathbf{d}). \tag{3}$$

A interpretação geométrica desta equação seria *"avançamos a partir de* $\mathbf{o}$ *na direção* $\overrightarrow{d}$ *a uma distância fracional* t *para encontrarmos o ponto* $\mathbf{p}$*."* A Figura 2 ilustra esse conceito.

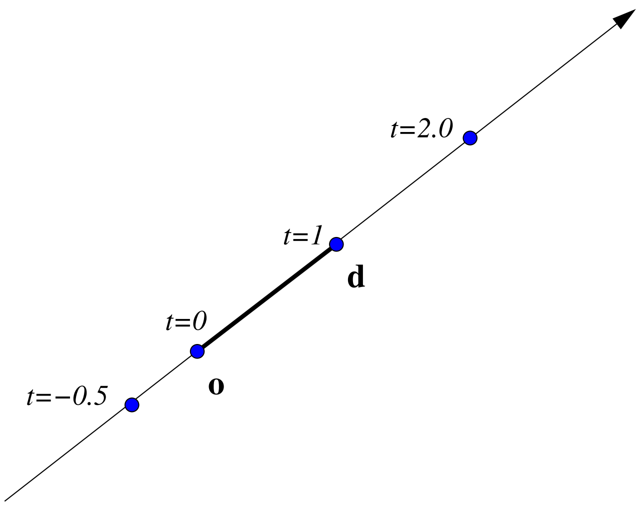

Figura 2: Raio $\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$, com origem $\mathbf{o}$ e direção $\mathbf{d}$, com alguns valores para t.

5 Interseção raio-esfera

No estágio atual de desenvolvimento do *ray tracer* já é possível determinar cada raio associado ao centro dos *pixels* da imagem para uma câmera em perspectiva simples.

Lembre que o *frame* ortonormal da câmera é especificado por *(1)* uma origem, e *(2)* os vetores unitários ortogonais entre si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. A distância do *screen window* (ou *view plane*) para a origem da câmera é a *distância focal* da nossa câmera.

Para cada raio associado a um *pixel*, é necessário verificar se o raio intersecta com algum objeto presente no mundo virtual à frente da câmera. Neste momento inicial estamos interessados em incluir **esferas** na cena que desejamos renderizar.

Portanto, precisamos determinar, para cada raio, se há interseção com as esferas que fazem parte da cena. A determinação é feita verificando se alguns dos pontos $\mathbf{p}(t)$ do raio estão sobre a superfície da esfera, representada pela Equação 2. Quando disparamos um raio na direção de uma esfera, existem apenas 3 possibilidades: *(a)* raio não toca a esfera, *(b)* raio toca a esfera tangencialmente em apenas um ponto, e *(c)* raio atravessa a esfera em dois pontos (entrada e saída). A Figura 3 demonstra os 3 casos visualmente.

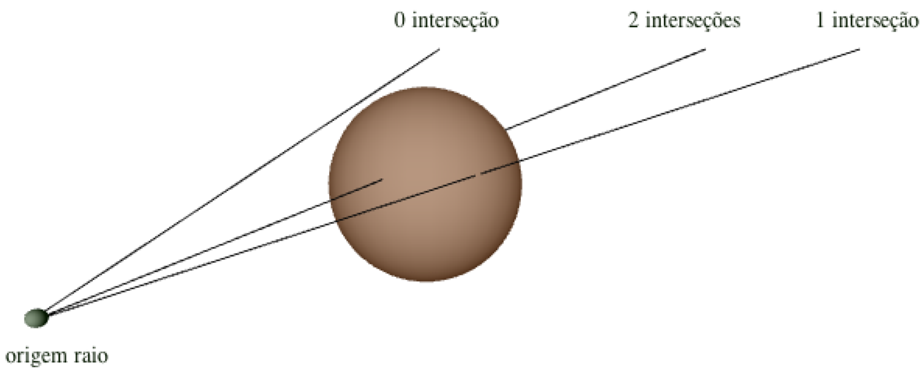

Figura 3: Três possibilidades de um raio intersectar uma esfera.

Precisamos desenvolver a função `bool intersect_p(Sphere s, Ray r)` que recebe um raio e uma esfera e retorna verdadeiro se o raio tocou na esfera (i.e. casos *(b)* e *(c)*), ou falso, caso contrário. Este valor booleano será usado para decidirmos se devemos colorir ou não o *pixel* com a cor da esfera. Note que a entrada do algoritmo consiste nas informações sobre a esfera que desejamos testar (centro $\mathbf{c}$ e *radius* r) e o raio (origem $\mathbf{o}$ e direção $\mathbf{d}$).

De acordo com o que foi apresentado na Seção 2, desejamos resolver $f(x, y, z) = 0$ ou $f(\mathbf{p}(t)) = 0$, onde f representa a equação da esfera e $\mathbf{p}(t)$ são os pontos produzidos pelo raio. Podemos interpretar $f(\mathbf{p}(t)) = 0$ como sendo *"quais os pontos do raio, se é que existe algum, que estão na superfície da esfera?"*

A resposta natural a esta pergunta seria o valor de t, a nossa *incógnita*, que poderia ser $t = \infty$ (raio não toca na esfera), um único valor de $t > 0$

(raio toca tangencialmente a esfera em 1 ponto) ou dois valores t_1 e t_2, com $0 < t_1 < t_2$ (raio atravessa a esfera em 2 pontos). No último caso, estaríamos apenas interessados em t_1, o **menor** entre os dois ts, visto que este representa o ponto de entrada do raio na esfera, i.e. o ponto mais próximo da origem do raio (e da câmera) e, portanto, visível.

Solução algébrica

Para determinar algebricamente os valores de t, precisamos substituir a Equação 3 que representa o raio na Equação 2 que representa a esfera, ambas com notação vetorial

$$(\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}) - r^2 = 0. \tag{4}$$

Para resolver a Equação 4 vamos utilizar as propriedades associativas e distributivas do produto escalar. Observe que t é a incógnita da equação e, portanto, o valor que precisamos determinar (todas as outras variáveis são conhecidas).

Começamos substituindo o lado direito da Equação 3 na Equação 4

$$((\mathbf{o} + \mathbf{d}t) - \mathbf{c}) \cdot ((\mathbf{o} + \mathbf{d}t) - \mathbf{c}) - r^2 = 0$$

reorganizando o termos

$$((\mathbf{o} - \mathbf{c}) + \mathbf{d}t) \cdot ((\mathbf{o} - \mathbf{c}) + \mathbf{d}t) - r^2 = 0$$

aplicado a propriedade distributiva do produto escalar, obtemos

$$(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}t^2 - r^2 = 0$$

perceba que $(\mathbf{o} - \mathbf{c})$ é um vetor, assim como $\mathbf{d}$ e que t é a variável que precisamos determinar. Podemos reorganizar os termos assim

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}t^2 + 2\,(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2 = 0 \tag{5}$$

o que corresponde a uma equação do segundo grau em t

$$A\,t^2 + B\,t + C = 0 \quad \text{onde} \begin{cases} A = \mathbf{d} \cdot \mathbf{d} \\ B = 2\,(\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} \\ C = (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{c}) - r^2. \end{cases}$$

A solução da Equação 5 pode apresentar nenhuma raiz real, 1 raiz real ou 2 raízes reais, o que é compatível com as possibilidades de interseção entre raio e esfera, descritos anteriormente.

A solução para a Equação 5 seria

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2\,A}, \quad \Delta = B^2 - 4\,A\,C. \tag{6}$$

Como a função, `intersect_p` em sua versão inicial deseja apenas saber se o raio toca ou não na esfera, basta verificarmos se a Equação 5 tem solução real, ou seja, $\Delta >= 0$.

Eventualmente, contudo, precisaremos achar as raízes da equação. Substituindo a Equação 5 com os valores corretos ficaria

$$t = \frac{-2\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} \pm \sqrt{(2\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d})^2 - 4\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{c}) - r^2)}}{2\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}}$$

$$t = \frac{-2\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} \pm \sqrt{4\,((\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d})^2 - 4\,(\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{c}) - r^2)}}{2\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}}$$

$$t = \frac{-\cancel{2}\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} \pm \cancel{2}\,\sqrt{((\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d})^2 - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{c}) - r^2)}}{\cancel{2}\,\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}}$$

levando a equação final

$$t = \frac{-(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d} \pm \sqrt{((\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d})^2 - (\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}\,(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{o}-\mathbf{c}) - r^2)}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}}.$$

6 Considerações finais

Apresentamos o mecanismo geral para determinação de interseção de raio-esfera para permitir sua programação na forma de uma função que deve retornar o parâmetro t do raio mais próximo da câmera, caso haja interseção.

O mesmo procedimento deve ser utilizado para determinar interseção, por exemplo, com triângulos. Neste caso, a equação explícita para o triângulo poderia ser

$$\mathbf{t}(u,v) = (1-u-v)\mathbf{v}_0 + u\mathbf{v}_1 + v\,\mathbf{v}_2.$$

onde (u,v) são as *coordenadas baricêntricas*, com $u \geq 0$ e $v \geq 0$, e $u+v \leq 1$, e os $\mathbf{v}_i$ são os vértices do triângulo.

∽ FIM ∽