UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina

DCC – Departamento de Ciência da Computação

Curso: BCC

Disciplina: Teoria dos Grafos – TEG0001

Notas de Aula – Parte III

3. Isomorfismo e planaridade

Isomorfismo

Grafos iguais ou isomorfos: Dois grafos são iguais quando possuem os mesmos nós, os mesmos arcos, e a mesma função que associa as extremidades a cada arco (exceto por uma mudança de nome).

Ou seja, estruturas que são iguais, exceto por uma mudança de nomes, são ditas isomorfas. Na representação de um grafo os arcos podem se intersectar em pontos que não são nós do grafo.

O adjetivo **isomorfismo** (*do grego, significa "da mesma forma"*) aplica-se aos pares de grafos. Por exemplo, os três grafos da figura 3.1 são iguais.

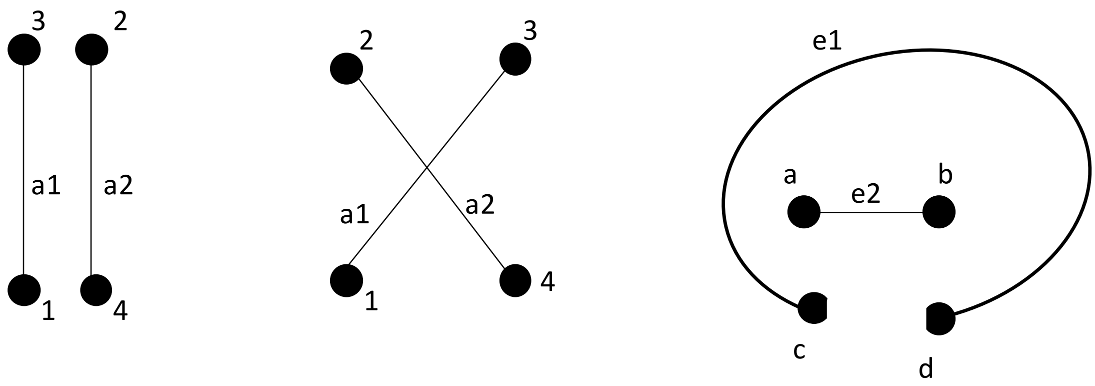


Fig. 3.1 – grafos isomorfos

Se trocarmos os nomes dos nós e dos arcos das figuras 3.1.a e b através das funções a seguir, os grafos serão os mesmos.

f_1:

1 → a

2 → c

3 → b

4 → d

f_2:

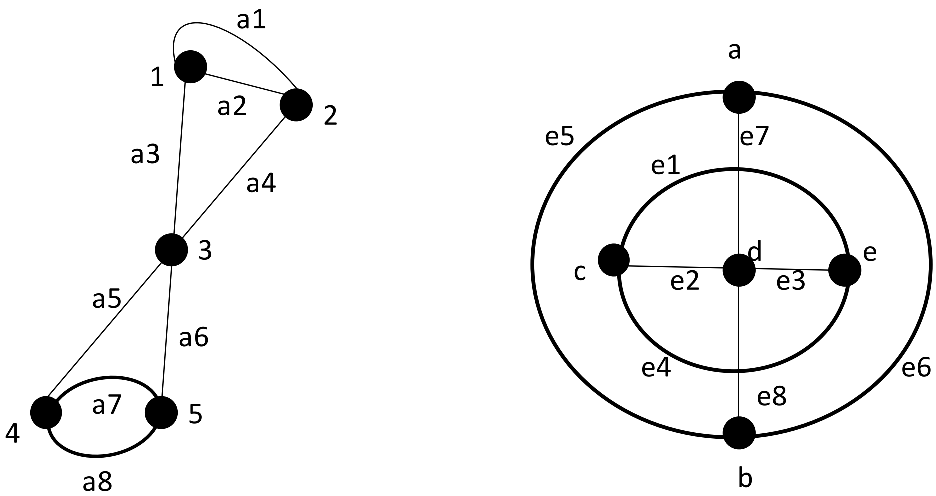
a_1 → e_2

a_2 → e_1

Se um arco a (figura 3.1.a) tem extremidades x-y, então o arco f2(a) da figura 3.1.c possui extremidades f1(x) – f1(y), e vice-versa. Por exemplo, o arco a1 da figura 3.1.a possui extremidades 1-3, enquanto o arco correspondente e2 da figura 1.5.c possui extremidades a–b, os quais correspondem aos nós 1 e 3 da figura 3.1.a.

Portanto, dois grafos (N_1, A_1, g_1) e (N_2, A_2, g_2) são **isomorfos** se existem bijeções $f_1 : N_1 \rightarrow N_2$ e $f_2 : A_1 \rightarrow A_2$ tais que, para cada arco a Ɛ A_1, g_1 (a) = x-y se, e somente se, $g_2\,[f_2\,(a)] = f_1(x) - f_1(y)$.

Como exemplo, os grafos apresentados na figura 3.2 também são isomorfos.



G_1 *G_2*

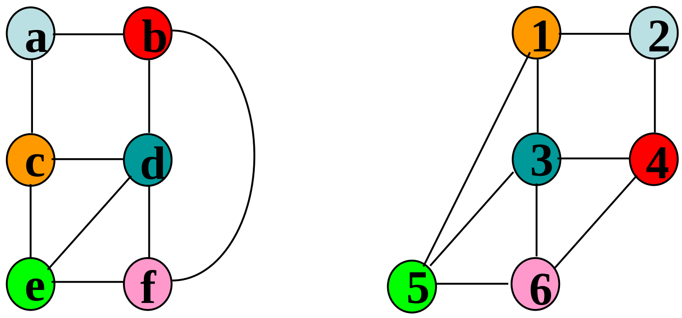


Fig. 3.2 – grafos isomorfos

As bijeções que estabelecem o isomorfismo na figura 3.2.a são dadas parcialmente a seguir :

f_1:

1 → c

2 → e

3 → d

4 → b

5 → a

f_2:

$a_1 \rightarrow e_1$

$a_2 \rightarrow e_4$

$a_3 \rightarrow e_2$

...

Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar todas as bijeções de V(G) em V(H). Se cada um dos grafos possui n vértices, esse algoritmo consome tempo proporcional a n! . Como n! cresce explosivamente com o n, esse algoritmo é insatisfatório na prática.

.**Isomorfismo de grafos simples**: Se G e G´ são grafos simples então G é isomorfo a G se e somente se existe uma correspondência g um-para-um do conjunto de vértices V (G) de G para o conjunto de vértices V (G´) de G´ que preserva a função aresta–vértice de G e de G´ no sentido que:

∀ vértices u; v E G

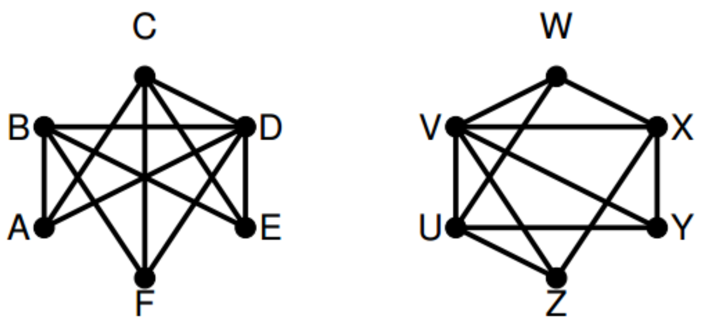
uv é uma aresta de G ←→ {g(u); g(v)} é uma aresta de G´.

Apesar de não ser uma tarefa simples em todos os casos, existem certas condições sob as quais se torna fácil ver que dois grafos não são isomorfos. Essas condições incluem:

- um grafo ter mais vértices do que outro;
- um grafo ter mais arestas do que outro;
- um grafo ter arestas paralelas e o outro não;
- um grafo ter laço e o outro não;
- um grafo ter um vértice de grau k e o outro não;;
- um grafo ser conexo e o outro não;

- um grafo ter um ciclo e o outro não.

Exercício: Identificar se os dois grafos abaixo são isomorfos



1. grau dos vértices:

grafo esquerda:

3: A, E, F;

4: B, C;

5: D.

grafo direita:

3: W, Y, Z;

4: U,X;

5: Z.

2. Estabelecimento das conexões entre os vértices:

grafo esquerda: A,E,F: todos estão conectados à: B,C, e D

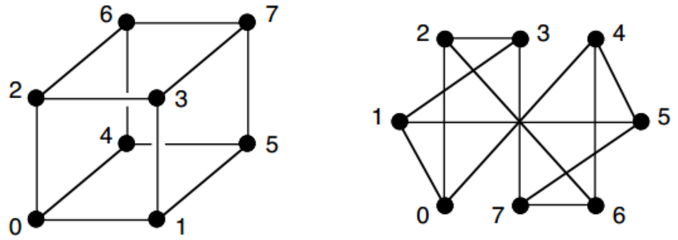
grafo direita: W,Y,Z: todos conectados à: U,V e X

Em ambos os grafos os vértices de grau 4 estão conectados a um vértice de grau 5.

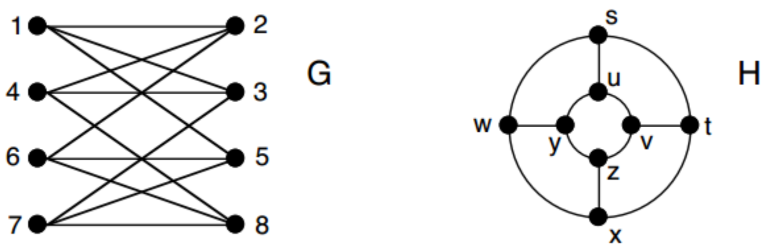
Portanto, o grafo é isomorfo.

Exercício: Os grafos abaixo são isomorfos ?

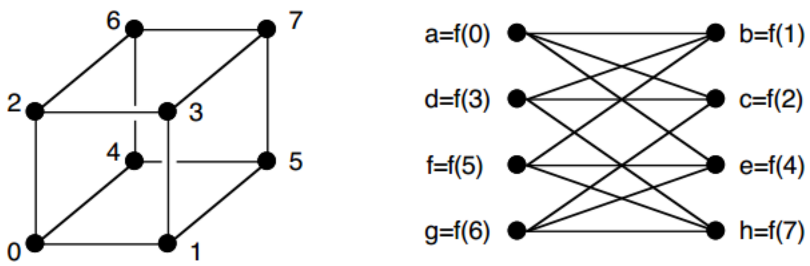
a.)



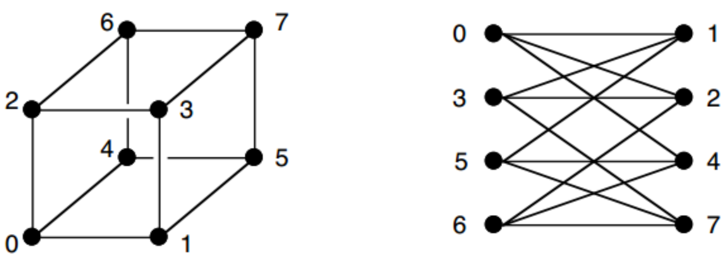
b.)



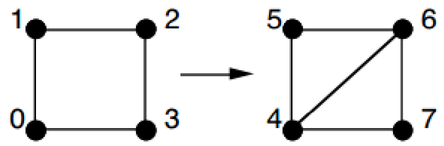
c.)



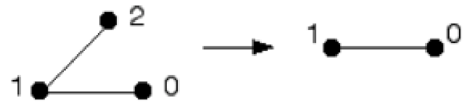
d.)



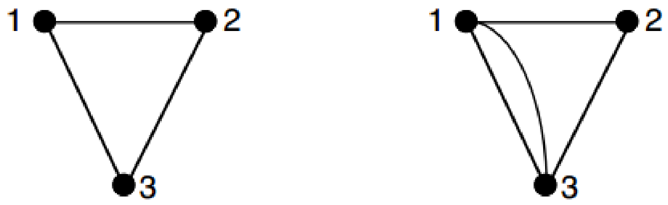
e.)


1
2
5
6
0
3
4
7

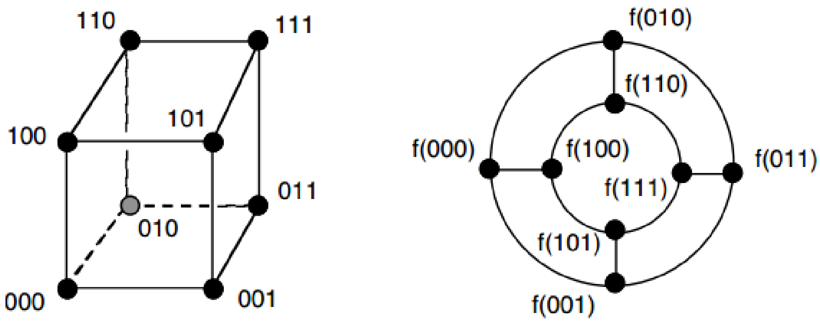
f.)


2
1
0
1
0

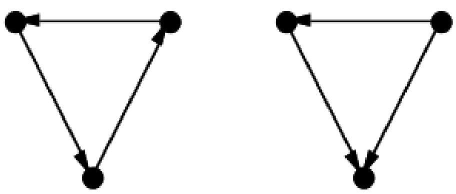
g.)


1
2
3
1
2
3

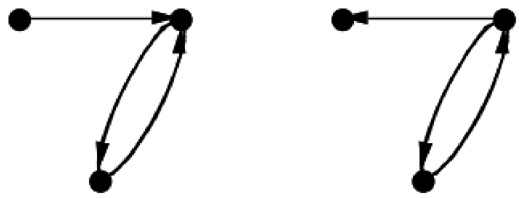
h.)


110
111
100
101
011
010
000
001
f(010)
f(110)
f(000)
f(100)
f(011)
f(111)
f(101)
f(001)

i.)



j.)



Respostas:

a.) Sim. O número de vértices possui exatamente o mesmo de vizinhos em ambos os dois grafos.

b.) Sim. Pois o conjunto de funções é dado por:

$$\begin{array}{cccc} 1 \rightarrow s & 2 \rightarrow t & 3 \rightarrow u & 4 \rightarrow v \\ 5 \rightarrow w & 6 \rightarrow x & 7 \rightarrow y & 8 \rightarrow z \end{array}$$

c.) Sim.

d.) Sim.

e.); f.) g.) Não

h.) Sim.

i.) ; j.) Não.

O **isomorfismo possui as propriedades**:

– **Reflexiva**: Um grafo é isomorfo a si próprio;

– **Simétrica**: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G´ então G´ é isomorfo a G;

– **Transitiva**: Se um grafo G é isomorfo a um grafo G´ e G´ é isomorfo a G´´, então G é isomorfo a G´´.

Dado os grafos G e G´, para se determinar que são isomorfos é necessário gerar todas as funções g e h, e determinar se elas preservam as funções aresta-vértice de G e G´.

Se G e G´ têm cada um n vértices e m arestas, o número de funções g é n! e o número de funções h é m!, o que dá um número total de n!*m! funções.

Se G é isomorfo a G´ então se G tem uma destas propriedades abaixo relacionadas, G´ também tem. Cada uma das seguintes propriedades é uma invariante para isomorfismo de dois grafos G e G´, onde n, m e k são inteiros não negativos.

1. Tem n vértices;
2. Tem m arestas;
3. Tem um vértice de grau k;
4. Tem m vértices de grau k;
5. Tem um circuito de tamanho k;
6. Tem um circuito simples de tamanho k;
7. Tem m circuitos simples de tamanho k;
8. É conexo;
9. Tem um circuito Euleriano;
10. Tem um circuito Hamiltoniano.

. Isomorfismo de subgrafos

Dados dois grafos G1 = (V1, E1) e G2 = (V2, E2), diz-se que G1 contém um subgrafo isomorfo a G2 se e somente se existem um subconjunto V $\subseteq$ V1 e um subconjunto E $\subseteq$ E1 tal que:

|V| = |V2| e |E| = |E2| e uma função biunívoca f: V2 → V tal que {u,v} Ɛ E2 se e somente se {f(u), f(v)} Ɛ E.

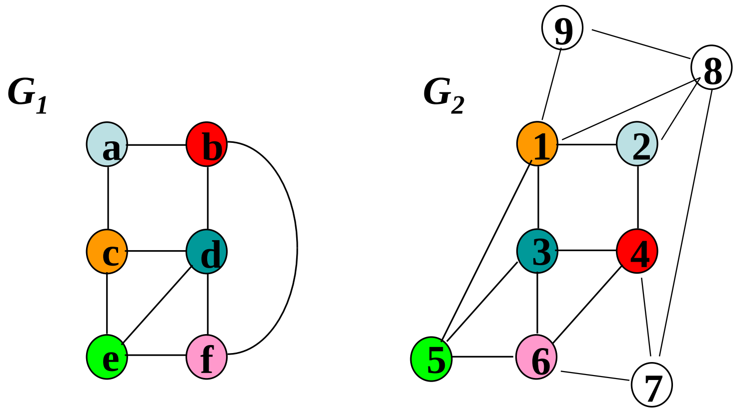


Fig. 3.2 –isomorfismo de subgrafos

Planaridade

Grafos planares: são grafos que podem ser representados em um plano, de modo que seus arcos se intersectam apenas em nós. Os grafos da figura 1.7 são planares.

Seja G um grafo planar e R uma representação plana de G, num plano P.

Então as linhas de R dividem P em regiões, as quais são denominadas faces de R. Existe exatamente uma região não limitada, denominada de face externa.

Quantas faces existem em cada grafo da figura 3.3 ?

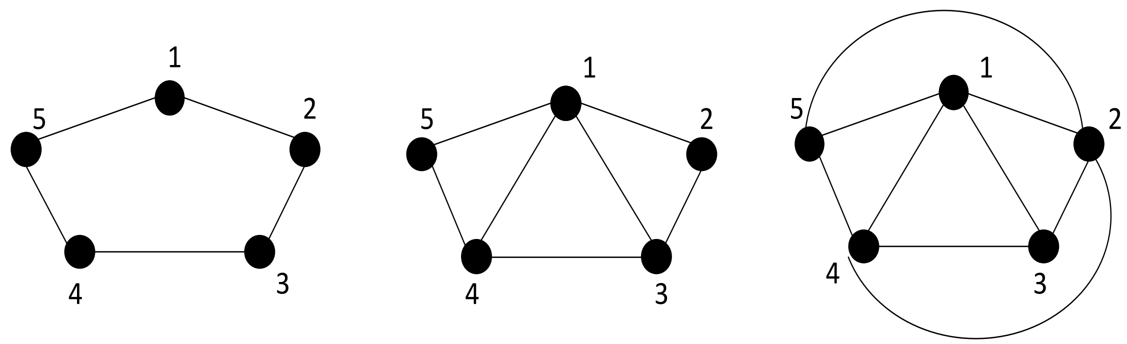


Fig. 3.3 – grafos planares

. **Faces de um grafo planar:** Seja R uma representação plana de G em um plano P. As linhas de R dividem P em regiões denominadas faces de R.

Existe exatamente uma face não limitada, denominada face externa. Uma face de um grafo planar é uma porção do plano limitado por um ciclo do grafo.

Duas representações planas de um grafo planar possuem sempre o mesmo número de faces. Se G é planar, todo subgrafo de G também é planar.

. **Fronteira de uma face**: A fronteira de uma face é o percurso fechado que limita e determina a face. Neste percurso, cada ponte é atravessada duas vezes.

. **Faces adjacentes**: Duas faces são adjacentes se possuírem uma aresta em comum em suas fronteiras.

. Grau de uma face: O grau de uma determinada face f de um grafo G corresponde ao comprimento do percurso fechado que determina sua fronteira.

. Cruzamento de arestas: O número de cruzamento de arestas de um grafo G, Cross(G), corresponde ao menor número de cruzamentos de arestas possíveis no traçado de G.

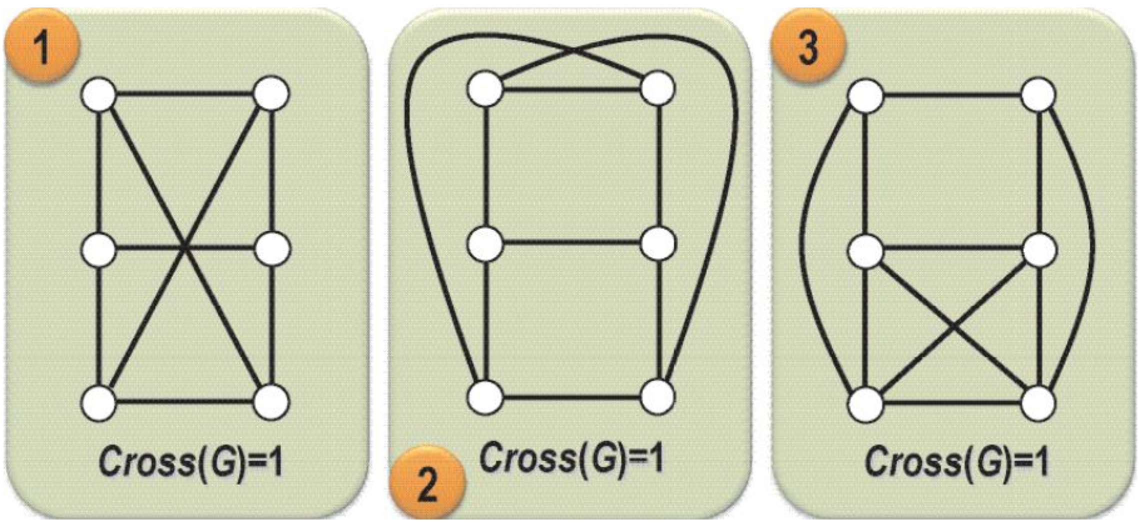


Fig 3.4 Exemplos de números de cruzamentos de arestas.

. Grafo Dual: Um grafo GΔ é dito Dual de um grafo planar G quando é obtido de G quando:

. Atribuí-se um vértice a cada região do grafo planar, incluindo a região externa;

. Se duas regiões possuem uma aresta em comum (aresta e), ligar o nó interior a cada região por uma aresta s que cruze a aresta e.

A figura a seguir ilustra a obtenção de um grafo dual a partir de um grafo G.

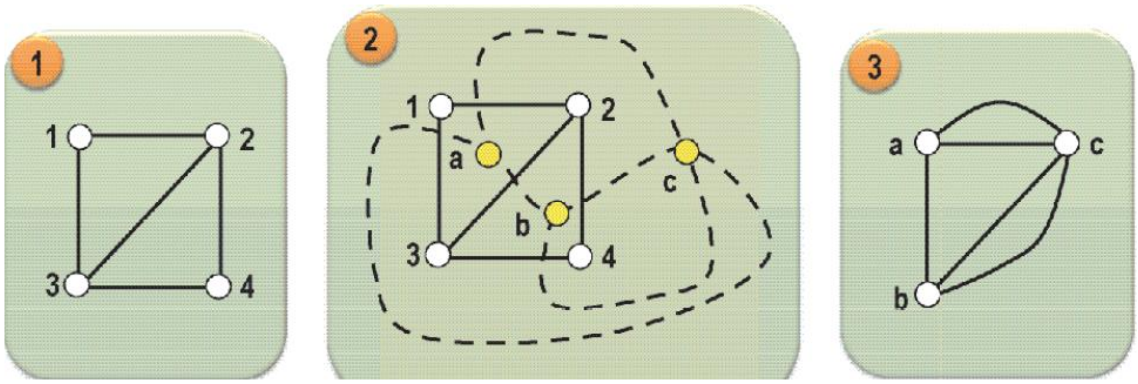


Fig 3.4 Exemplos de grafo dual.

Fórmula de Euler: Dado um grafo planar, simples e conexo, que divide o plano em um determinado número de regiões, incluindo regiões totalmente limitadas por arcos e uma região exterior ilimitada.

O matemático suíço do século XVIII, Leonhard Euler observou uma relação entre número de nós (n), número de arcos (a), e o número de regiões (r), em um tal grafo, dado por:

n – a + r = 2

A prova da fórmula de Euler dá-se através de uma demonstração por indução no número de arcos a.

A base da indução é o caso de ***a=0,*** **quando temos apenas 1 nó. Ou seja, a única região é a região externa, conforme apresentado no grafo a da figura abaixo.**

Neste grafo, n=1 ; a =0 ; e r=1. Logo a equação (n-a+r = 2) é válida.

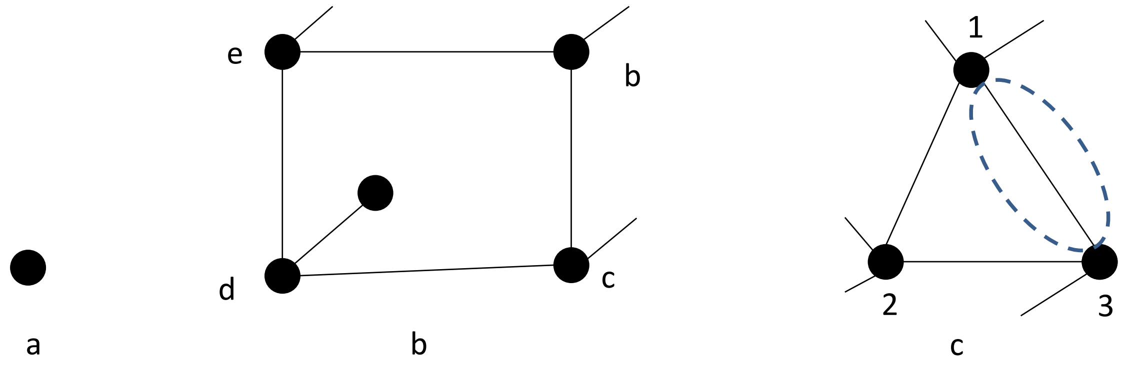


Fig. 3.3 – grafos

Suponhamos agora que a fórmula é válida para a representação planar de qualquer grafo planar simples e conexo com K arcos, e considere um tal grafo com K+1 arcos.

Precisa-se relacionar o caso K+1 ao caso K, de modo a usar a hipótese de indução. Considera-se dois casos para o grafo com K+1 arcos.

Caso 01: O grafo tem um nó de grau 1. Apague, temporariamente, esse nó e o arco do qual ele é uma das extremidades (figura b). O resultado é um grafo planar simples e conexo, tal que:

$$n - k + r = 2$$

No grafo original, tem-se um arco a mais, um nó a mais e o mesmo número de regiões, logo a fórmula apropriada é:

$$(n+1) - (k+1) + r = 2$$

Que pela hipótese da indução é válida.

Caso 02: O grafo não tem nós de grau 1. Então apague, temporariamente, um arco que ajuda a definir uma região limitada (figura c). (***Atenção: Se não existem arcos que ajudam a definir uma região limitada, então o grafo é uma cadeia e existe um nó de grau 1.)***

Com a eliminação de um arco tem-se:

$$n - k + r = 2$$

No grafo original, tem-se um arco a mais e uma região a mais, mas o mesmo número de nós. Logo a fórmula apropriada é dada por:

$$n - (k+1) + (r+1) = 2$$

Esta fórmula é válida pela hipótese de indução.

A fórmula de Euler tem duas consequências se colocarmos outras restrições sobre o grafo. Suponha que o grafo não é planar simples e conexo, mas também tem pelo menos três (3) nós.

Em uma representação planar de um grafo, podemos contar o número de arcos que são adjacentes a cada região, ou seja, que formam fronteira de cada região, incluindo a região externa.

Arcos inteiramente no interior de uma região contribuem duas arestas para aquela região. Por exemplo, ao percorrer a fronteira da região interior ilustrada na figura 3.3.b, percorre-se seis arestas, incluindo o arco que sai do nó de grau 1 e depois o mesmo arco de volta.

Arcos que separam duas regiões contribuem uma aresta para cada região. Portanto, se o grafo tem **a** arcos, número de arestas é **2a**.

Não existem regiões com exatamente uma aresta adjacente, já que o grafo não possui laços.

Também não existem regiões com exatamente duas arestas adjacentes, já que não há arestas paralelas e o grafo consistindo inteiramente em um arco unindo dois nós (que teria duas arestas adjacentes à região exterior) está excluído.

Portanto, cada região tem pelo menos três arestas adjacentes, logo 3*r é o número mínimo de arestas de regiões.

Então:

$$2*a >= 3*r$$

Substituindo as equações, temos:

$$2*a >= 3(2 - n + a) = 6 - 3*n + 3*a$$

Concluindo:

$$a <= 3*n - 6$$

Se colocarmos **uma última restrição sobre o grafo**, a de que não existem ciclos de comprimento 3, então cada região terá, pelo menos, quatro arestas adjacentes, de modo que 4*r será o número mínimo de arestas das regiões. Isto leva a desigualdade dada por:

$$2*a >= 4*r$$

Que fica:

$$a <= 2*n - 4$$

Teorema sobre o número de nós e arcos para um grafo planar simples e conexo com n nós e a arcos:

a.) **Se a representação planar divide o plano em r regiões, então:**

$$n - a + r = 2$$

b.) **Se n >= 3 , então**:

$$a <= 3*n - 6$$

c.) **Se n >= 3 e se não existem ciclos de comprimento 3, então**:

$$a <= 2*n - 4$$

Exemplo: Prove que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Para K_5 tem-se n=5 e a=10. Assim, ***a > 3n – 6***. Portanto, K_5 não satisfaz a condição necessária do teorema, logo não pode ser planar.

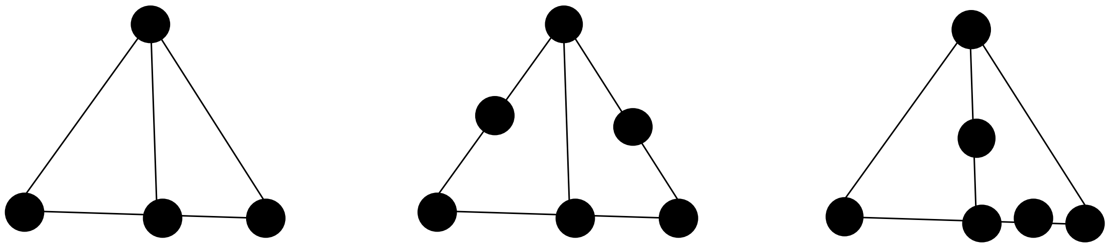
Para $K_{3,3}$, tem-se n=6 e a=9. Suponha que $K_{3,3}$ seja planar, então como o grafo não possui ciclos de comprimento 3 (já que isto necessitaria que dois nós em um dos subconjuntos fossem adjacentes) a desigualdade ***a <= 2*n – 4 deve ser verdadeira, o que não ocorre, pois: 9 > (2*6 - 4).***

Subdivisão de uma aresta: A subdivisão de uma aresta {v,w} de um grafo G é uma operação que transforma a aresta {v,w} no caminho vz1z2...zkw, k >= 0 e Zi são vértices de grau 2 adicionados a G.

Diz-se que um grafo G2 é uma **subdivisão** de um grafo G1 quando G2 puder ser obtido de G1 através de uma sequência de **subdivisões de arestas** de G1.

Grafos homeomorfos: Dois grafos são ditos homeomorfos se ambos podem ser obtidos do mesmo grafo por uma sequencia de **subdivisões elementares**, nas quais um único arco x – y é substituído por dois novos arcos, x-v e v-y, ligando um novo nó v.

Os grafos das figuras 3.4.b e 3.4.c são homeomorfos, pois, cada um deles pode ser obtido do mesmo grafo da figura 3.4.a, por uma sequencia de subdivisões elementares.



a b c

Fig. 3.4 – grafos homeomorfos

Um grafo planar não pode ser transformado em um grafo não planar por subdivisões elementares e um grafo não planar não pode ser transformado em um planar por subdivisões elementares.

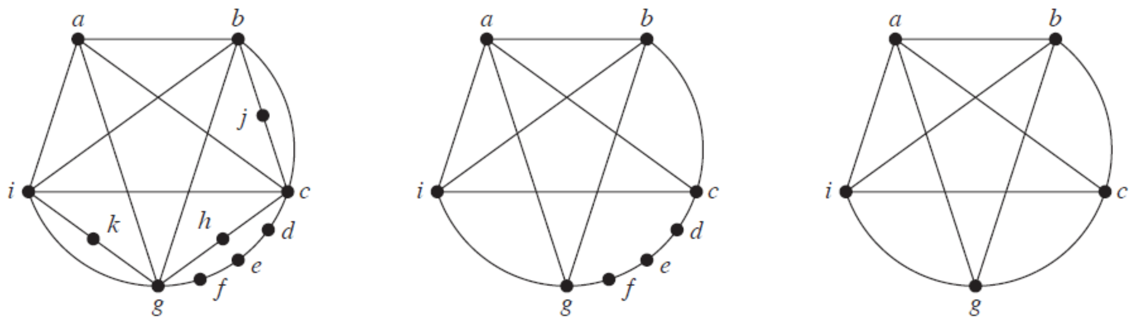
Como consequência, grafos homeomorfos ou são ambos planares, ou são ambos não planares.

A planaridade de um grafo, por exemplo, pode ser utilizada para modelar problemas relacionadas a projetos de circuitos impressos ou de malhas viárias.

Teorema de Kuratowski: Um grafo é não planar se, e somente se, ele contém um subgrafo que é homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

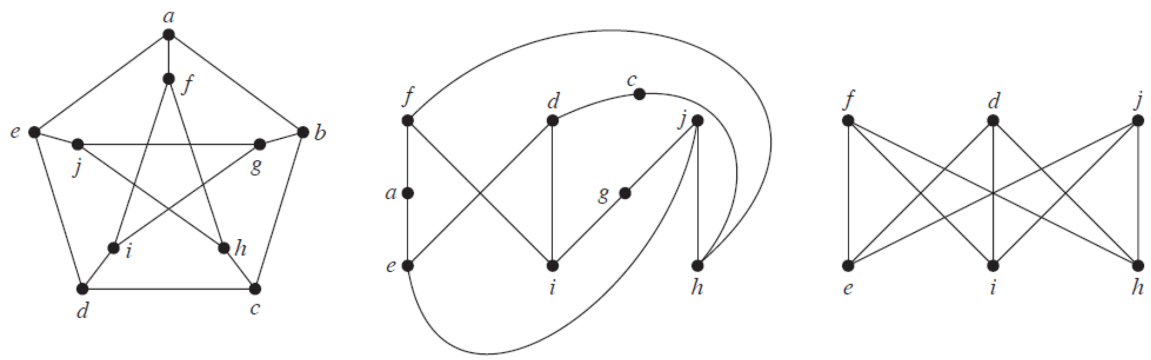
Exemplo: Dado o grafo G abaixo, verifique que ele é não planar.

H é um subgrafo de G que é homeomorfo a K_5



G H K_5

Exemplo: Dado o grafo G abaixo (grafo de Petersen), verifique que ele não é planar.



(a) (b) H (c) $K_{3,3}$

O sub grafo H é obtido a partir do grafo G eliminando-se o vértice b de G e as 3 arestas que o conectam aos nós a, g e c. Verifica-se que o subgrafo H é homeomorfo $K_{3,3}$.

Exercício: Suponha que um grafo planar possui seis vértices, cada um de grau 4. Em quantas regiões o plano é dividido por uma representação planar deste grafo ? resposta = 8.

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

Grafos Eulerianos

Seja G um grafo. Um **circuito ou ciclo Euleriano** é um circuito que contém cada vértice e cada aresta de G. É uma sequência de vértices e arestas adjacentes que começa e termina no mesmo vértice de G, passando pelo menos uma vez por cada nó e exatamente **uma única vez por cada aresta de G**.

Um **Grafo euleriano** é aquele que possui um **circuito ou ciclo euleriano**, em outras palavras, um grafo é euleriano se pudermos desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

Teorema de Euler: Um grafo conectado G é **euleriano** se e somente se o grau de cada vértice de G é par.

Considere G como sendo um **grafo euleriano**, e W como sendo um ciclo ou ***tour*** euleriano, que inicia e termina em um nó u. A cada vez que um nó V é alcançado como um nó interno de W, dois arcos são considerados.

O ciclo ou ***tour*** euleriano passa por um arco **apenas uma vez**, e o grau de v é par para todos u ≠ v. Similarmente, o grau de u é par, já que o ciclo começa e termina em u.

Grafo semi-Euleriano: Um tour ou circuito de G corresponde a um **caminho fechado** que atravessa cada arco de G. Um grafo conectado possui uma **trilha ou trajeto** de Euler, se e somente se, possui no máximo dois nós v e w de grau ímpar. Neste caso de dois nós ímpares, o caminho começa em um nó v e termina em outro nó w, e é chamado de **Semi-Euleriano**. As figuras abaixo apresentam um grafo Euleriano e semi-Eleuriano.

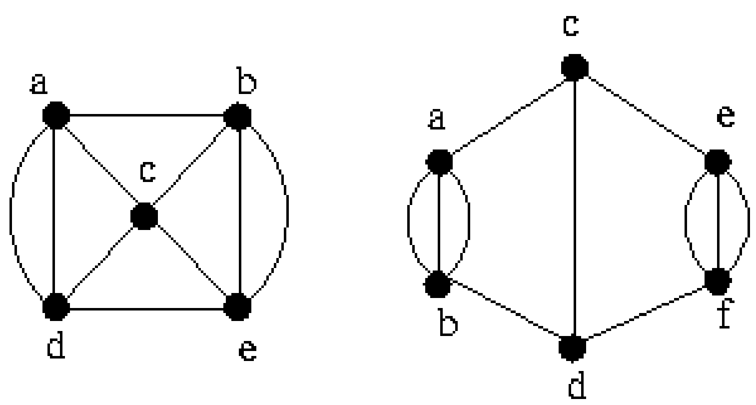
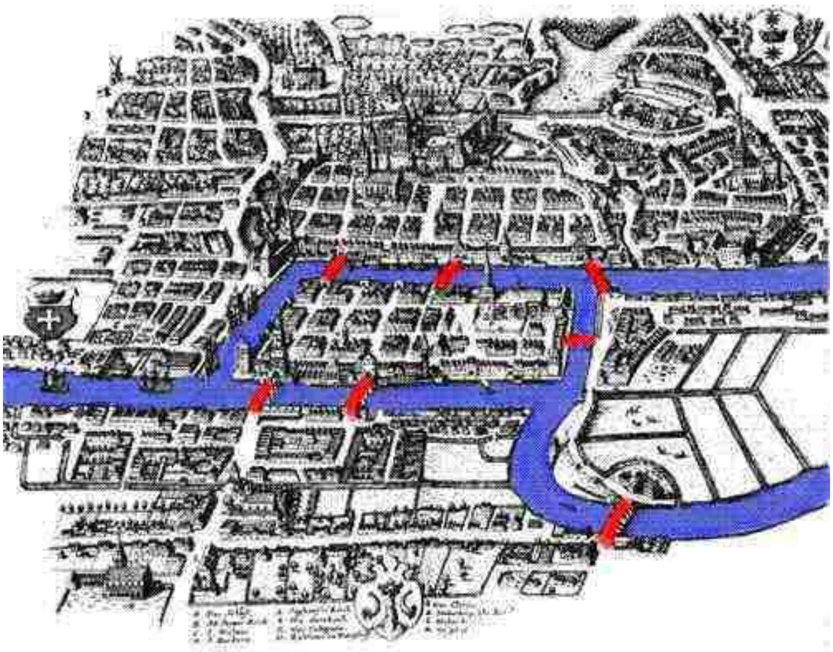


Fig. 3.5 – grafos euleriano e semi-euleriano

Vamos voltar ao problema das **pontes de Konigsberg**.

Como Euler (1736), matemático nascido na Suiça, modelou o problema das pontes de Konigsberg utilizando grafos? Ele notou que o desenho fica mais simples trocando as áreas de terra por nós e as pontes por arcos.



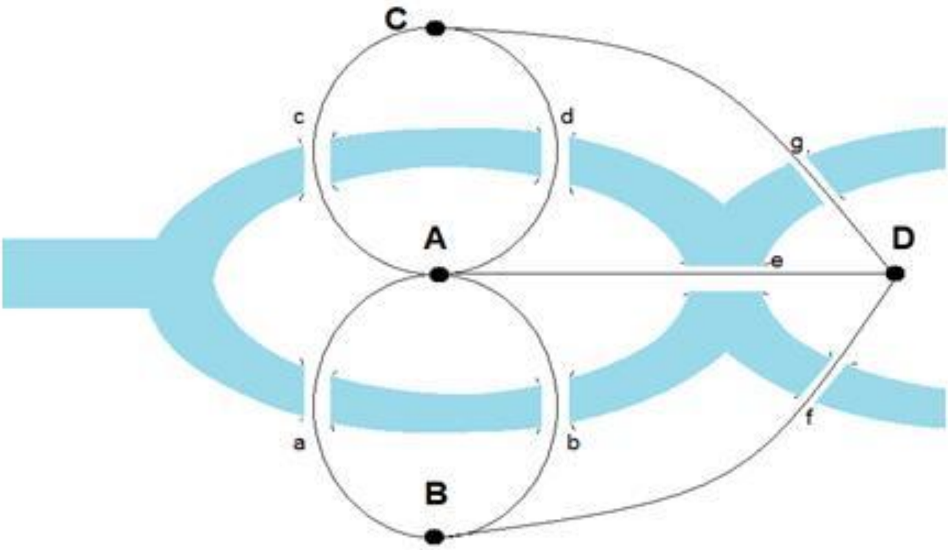


Fig. 3.6 – pontes de Konigsberg

Neste problema não é possível fazer o percurso de iniciar em uma ponte, passar por todas as outras uma só vez e retornar ao ponto de origem. Pois, um grafo só pode ser percorrido de tal maneira, se o diagrama tiver somente vértices de grau par, o que não acontece com o problema citado.

Exercícios

Pontes: Em teoria dos grafos, uma ponte (também conhecida como aresta-de-corte ou arco de corte) é uma aresta cuja deleção em um grafo aumenta o número de componentes conectados deste.

Ou seja, dado que W(G) é o número de componentes conexas de G, uma ponte é uma aresta ***a*** tal que **W(G - a) > W(G).**

Equivalentemente, uma aresta é uma ponte, se e somente se ela não está contida em qualquer ciclo. Dado a figura abaixo, as arestas grifadas em vermelho são consideradas pontes do grafo.

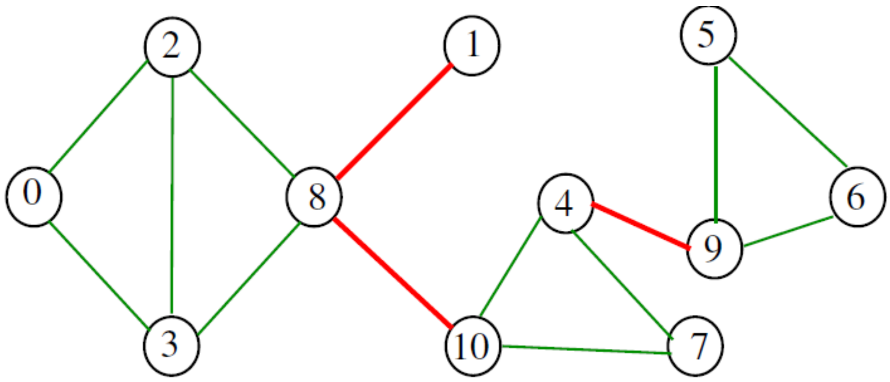


Fig. 3.7 – pontes

Algorítmo de Fleury: O algoritmo de Fleury identifica **um circuito Euleriano** dentro de um grafo G.

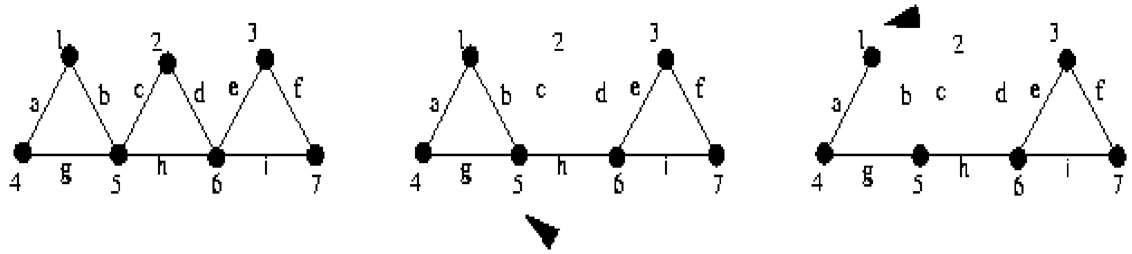
Para entender como funciona o **algoritmo de Fleury**, considere o grafo da figura 3.8. Suponhamos que o algoritmo começa com o vértice 6.

Pode-se escolher uma das arestas h, d, e ou i. Supondo que ele escolhe d, ele se encontra depois no vértice 2, onde ele é obrigado a seguir pela ponte que liga com o vértice 5. Isso é ilustrado na figura b.

Na sequencia pode-se escolher entre b, g o h. O último é descartado por ser uma ponte. Então sobram somente b e g.

Supondo que b é selecionado, ele chega ao vértice 1, como ilustrado em c. Nas três próximas etapas, ele não tem escolha.

Chegando ao vértice 6, de novo ele tem mais duas opções. Em mais três etapas, ele volta à origem, o que completa o circuito euleriano.



(a) (b) (c)

Fig. 3.8 – Exemplo Algorítmo de Fleury

A figura abaixo apresenta o algoritmo de Fleury em pseudocódigo.

função *Fleury*(G = (V,E): *grafo*) : *caminho*

G' := G { G' = (V', E')}
v_0 := um vértice de G'
C := [v_0] {Inicialmente, o circuito contém só v_0}
Enquanto E' não vazio

v_i := último vértice de C
Se v_i tem só uma aresta incidente;

a_i := a aresta incidente a v_i em G'

Senão

a_i := uma aresta incidente a v_i em G' e que não é uma ponte

Retirar a aresta a_i do grafo G'
Acrescentar a_i no final de C
v_j := vértice ligado a v_i por a_i
Acrescentar v_j no final de C

Retornar C

Fig. 3.9 – algoritmo de Fleury

Grafos Hamiltonianos

Dado um grafo G, um **Circuito Hamiltoniano** para G é um circuito simples que inclui cada vértice de G, ou seja, uma sequência de vértices adjacentes e arestas distintas tal **que cada vértice de G aparece exatamente uma única vez**. Sendo assim, um **grafo é hamiltoniano se ele contiver um ciclo hamiltoniano.**

A título de exemplo, considere os grafos G1 e G2 da figura 3.10. É fácil notar que G1 contém o ciclo (v1,v2,v3,v4,v5,v1) que é hamiltoniano. Logo, é um grafo hamiltoniano. O mesmo não acontece com G2.

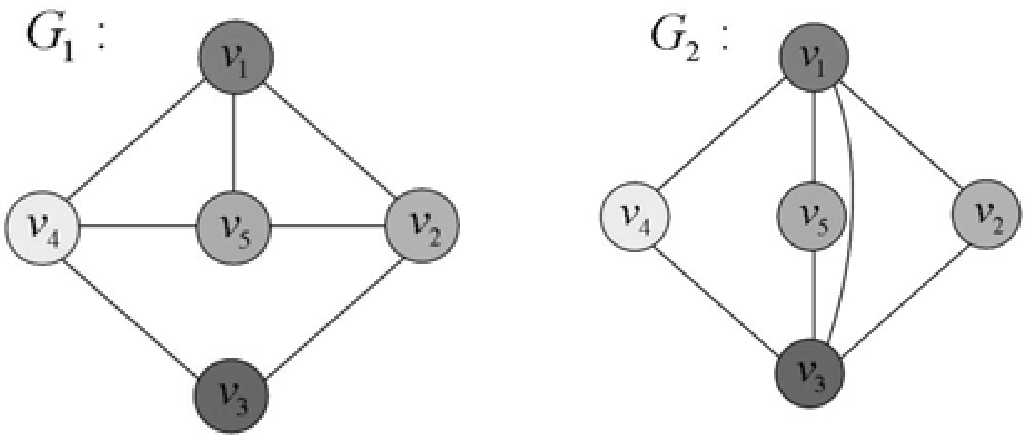


Fig. 3.10 – Grafos Hamiltonianos

Não existe um teorema que indique se um grafo possui um circuito Hamiltoniano. Por outro lado é possível determinar a priori se um grafo G possui um circuito Euleriano.

Se um grafo G tem um circuito Hamiltoniano então G tem um subgrafo H com as seguintes propriedades:

. H contém cada vértice de G;

. H é conexo;

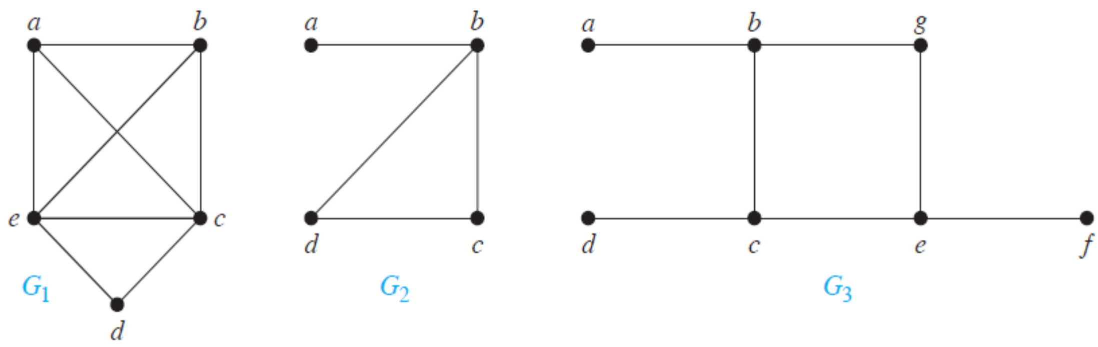
. H tem o mesmo número de arestas e de vértices;

. Cada vértice de H tem grau 2.

Um **Circuito Hamiltoniano** inclui todos os vértices uma única vez (exceto o inicial = final), e pode não incluir todas as arestas, ou seja, pode não gerar um circuito Euleriano.

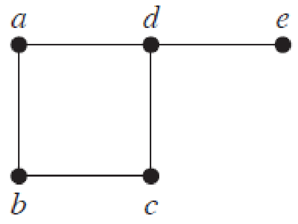
Em contra-partida, um Circuito Euleriano inclui todas as arestas uma única vez, e Inclui todos os vértices, mas que podem ser repetidos, ou seja, pode não gerar um circuito Hamiltoniano

Exemplo: Dado os três grafos abaixo, identificar se apresentam um circuito hamiltoniano, ou caminho hamiltoniano, ou nem um nem outro.

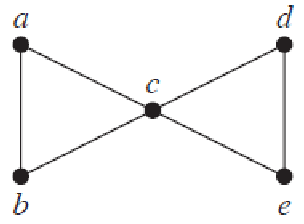


O grafo G1 apresenta um circuito hamiltoniano, dado por: ab,b,c,d,e,a. O grafo G2 não possui um circuito hamiltoniano, porém, possui um caminho hamiltoniano, dado por: a,b,c,d. O grafo G3 não possui ambos.

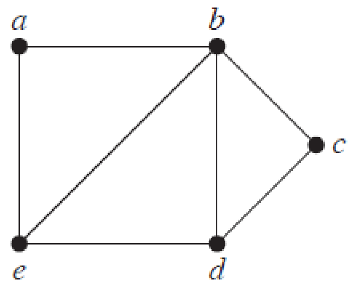
Exercício: Os quatro grafos abaixo G, H, X e Y possuem um circuito hamiltoniano ?



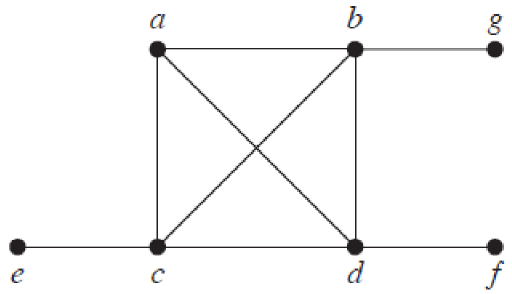
G



H



X



Y

O problema do **cálculo do ciclo hamiltoniano**, embora semelhante ao problema do cálculo do euleriano, é muito mais complexo, pois não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano nem tampouco métodos eficientes para construir tal ciclo.

. Aplicação de circuitos Hamiltonianos: **Problema do caixeiro viajante** (TSP – *travelling salesman problem*)

Dado um grafo G, e, que os vértices representam as cidades e as arestas, os trajetos a serem percorridos, um caixeiro viajante deve percorrer um circuito Hamiltoniano, ou seja, visitar cada cidade exatamente uma única vez e voltar a cidade inicial.

O problema consiste em encontrar um caminho (rota) que passe por todas as cidades uma única vez e retorne ao ponto de partida escolhendo para isso um caminho de custo mínimo.

. **Complemento de um grafo**: Dado um grafo E com um conjunto de nós V(E). O complemento de E é dado por Ē e corresponde ao conjunto de nós V(E) definidos por uv Ɛ W(Ē) se e somente se uv não Ɛ W(E). Vide figura 3.11

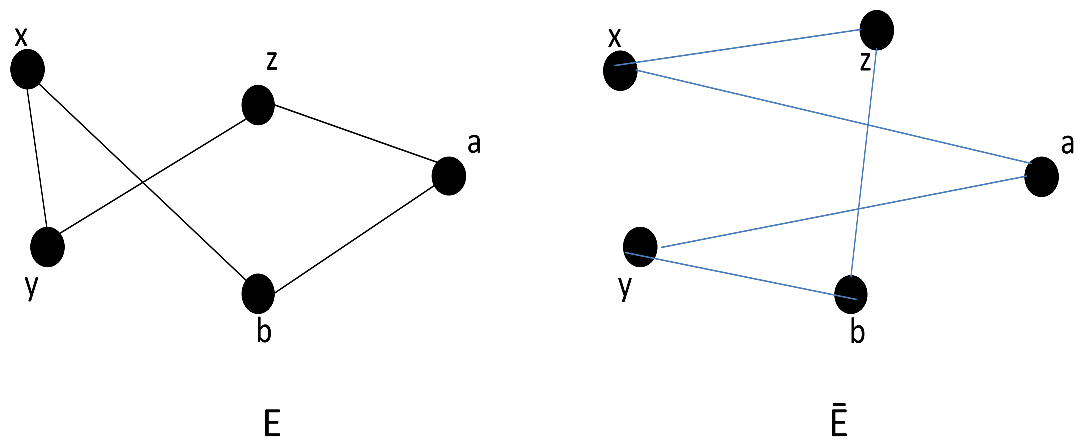


Fig. 3.11 – Grafos complementares

Dado um grafo G,

$$V(\bar{G}) = V(G) \quad \text{e} \quad (v, u) \in A(\bar{G}) \text{ sse } (v, u) \notin A(G)$$

O complemento de um grafo completo é um grafo nulo. Enquanto que o complemento de um grafo bipartido é a união de dois grafos completos.

. **Componentes de um grafo**: Os componentes de um grafo G correspondem a um conjunto de subgrafos conectados. Os componentes são disjuntos, ou seja, não compartilham o mesmo nó.

Como exemplo, o grafo 3.12 possui quatro componentes, onde um deles é um nó isolado. As classes de equivalência da relação de conexão são dadas por: {p}; {q,r}; {s,t,u,v,w}; {x,y,z}.

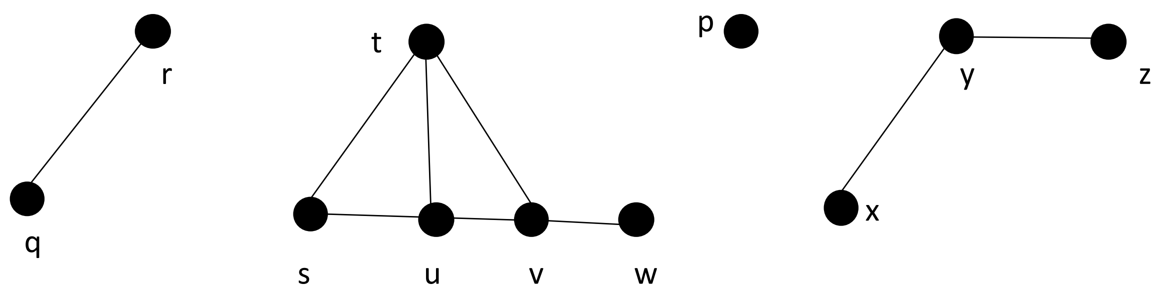


Fig. 3.12 – Componentes de um grafo

. **União de grafos**: A união de grafos G1,...,Gk é dada por: G1 U G2 U...U Gk. Quando um grafo é expresso pela união de dois ou mais subgrafos, um arco de G pode pertencer a mais de um subgrafo.

Esta é característica do processo de união, já que no processo de decomposição de um grafo, cada arco pertence somente a um subgrafo.

Coloração

Coloração: Seja G(V,E) um grafo simples e C = {Ci} um conjunto de cores. Uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V, de tal modo que a dois vértices adjacentes sejam atribuídas cores diferentes.

Assim sendo, uma coloração de G é uma função:

F : V → C tal que para cada par de vértices v,w Ɛ V tem-se (v,w) Ɛ E ➔ f(v) ≠ f(w).

Uma K-coloração de G é uma coloração que utiliza um total de K cores. Isto é, uma K-coloração de G é uma coloração f cuja cardinalidade do conjunto imagem é igual a K. A figura 3.12 apresenta um grafo com coloração.

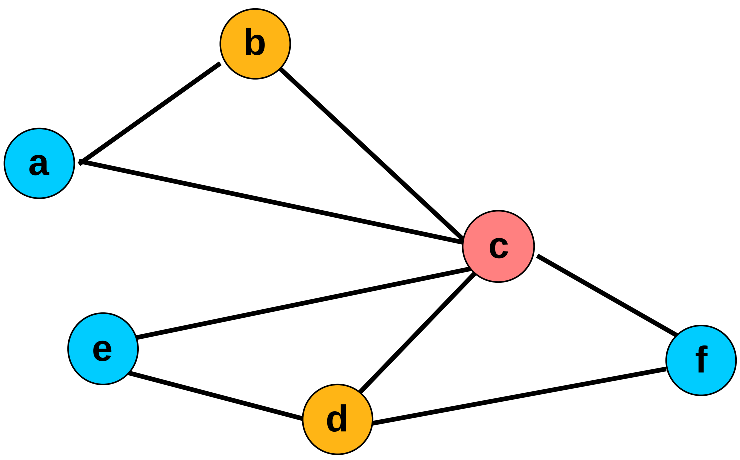


Fig. 3.12 – k-Coloração

. Número cromático: O número cromático de um grafo G, representado por **X(G)** corresponde ao **menor número de cores** K, para o qual existe uma K-coloração de G.

Por exemplo, o número cromático dos grafos das figuras 3.12 e 3.13 é igual a 3, a qual é mínima.

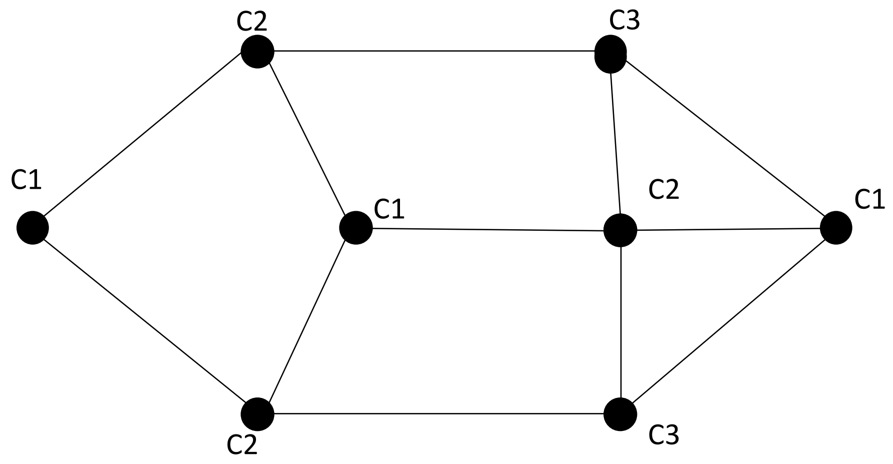


Fig. 3.13 – número cromático

Exemplo: Em uma determinada Universidade as datas dos exames devem ser marcadas de tal forma que duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não tiverem alunos em comum.

O grupo de alunos que precisam fazer o exame é formado por 16 alunos que estão matriculados e distribuídos em 08 disciplinas, conforme apresentado na tabela abaixo.

Dada a distribuição dos alunos, podemos utilizar a **colaração em grafos** a fim de calcular quantos horários distintos serão necessários, a fim de atender a demanda e aplicar os exames.

Alunos / Disciplinas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
TEG(M)	x							x				x			x	
REC(P)	x			x							x					x
SOP(I)						x	x			x					x	
TEC(G)				x	x		x		x							
LFA(H)			x							x				x		x
ALG(F)			x		x							x	x			
PAP(Q)		x						x	x					x		
SDI(B)		x				x					x		x			

Tabela 01 – distribuição dos alunos por disciplina

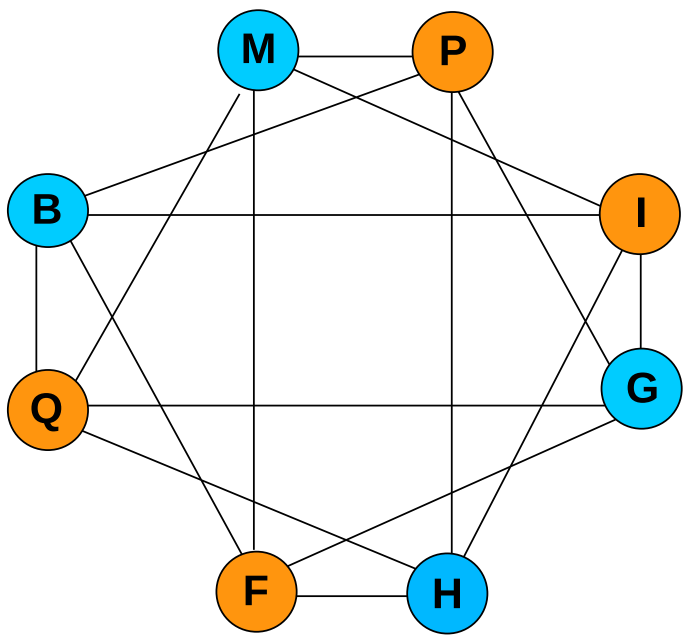


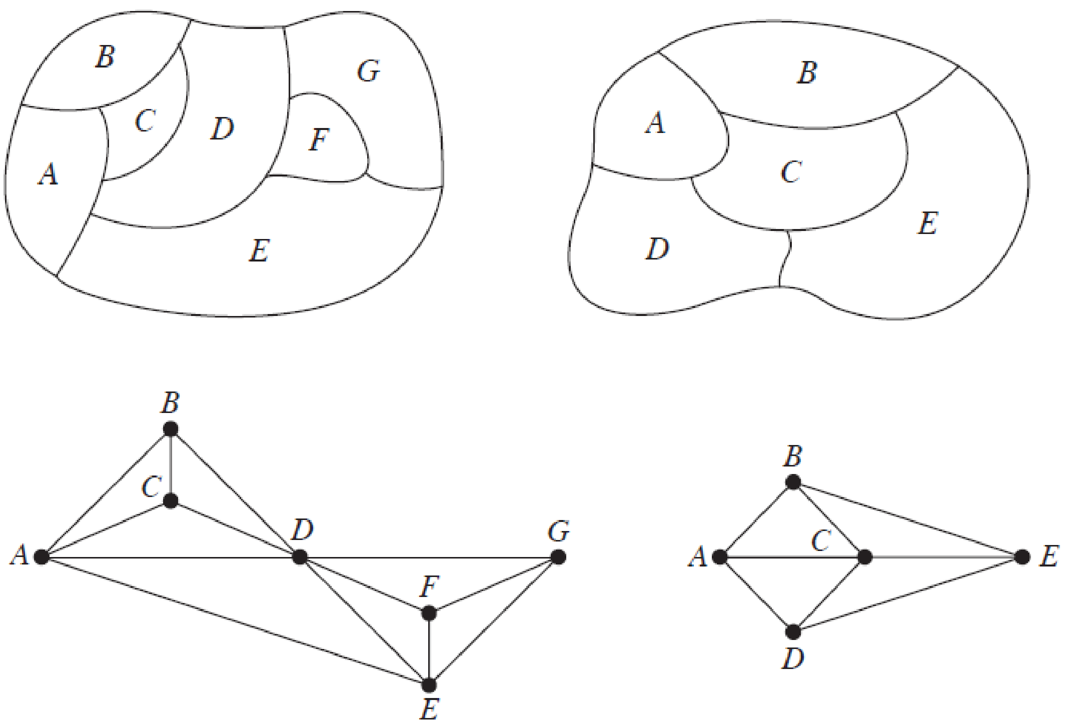
Fig. 3.14 – Solução para o problema de alocação de horários

No grafo da figura 3.14 os vértices representam as disciplinas e as arestas interligam duas disciplinas que estão com horários conflitantes. Por exemplo, TEG(M), PAP(Q), REC(P), ALG (F) e SOP(I) estão com horários conflitantes, conforme pode ser constatado na tabela 01.

Portanto, os nós adjacentes recebem cores diferentes. Conclui-se então que serão necessários apenas **dois horários distintos para a realização dos exames**.

Exemplo: Um mapa pode ser representado por um grafo. Para isto, associa-se a cada região do mapa um vértice do grafo. As arestas conectam dois vértices que representam duas regiões que possuem uma "borda" em comum (regiões adjacentes).

A figura abaixo apresenta dois mapas e as respectivas representações através de grafos.



Os conceitos de coloração, clique e conjunto independente de vértices estão naturalmente relacionados. Por exemplo, como são necessárias p cores para colorir os p vértices de um clique de tamanho k, conclui-se que o número cromático de um grafo G é maior ou igual do que o tamanho da maior clique de G.

. **Teorema das 4 cores (Appel and Haken, 1976)**: O número cromático de **um** **grafo planar** **não é maior do que 4.**

Exemplo: Determinar o número cromático dos grafos da figura 3.15:

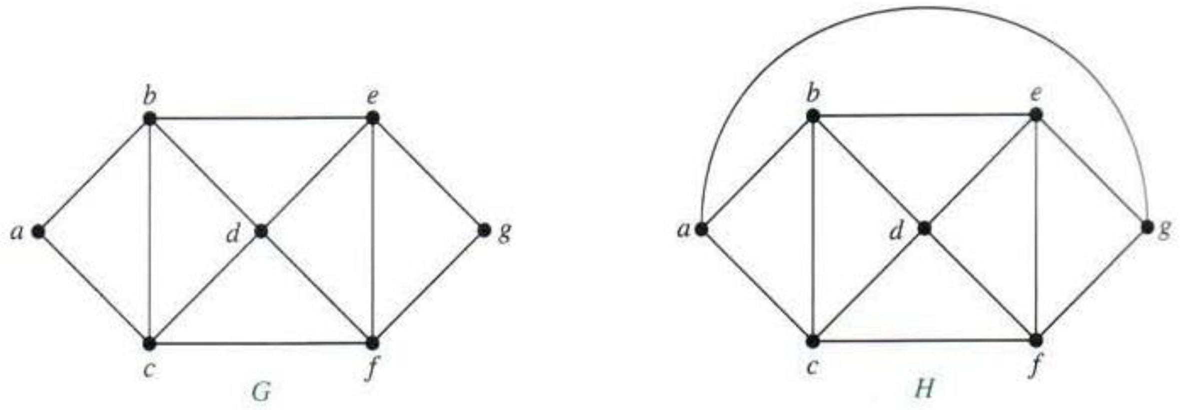


Fig. 3.15 – número cromático de grafos planares

Para o grafo G atribuir:

. Cores diferentes para a,b,c;

. D pode assumir a mesma coloração que o nó A;

. E pode assumir a mesma coloração que o nó C;

. F pode assumir a mesma coloração que o nó B;

. D pode assumir a mesma coloração que o nó A.

Portanto, para o grafo G podem ser atribuídas 3 cores diferentes.

Para o grafo G, pelo fato do nó A ser adjacente ao nó G então serão necessárias 4 cores distintas.

Exercício: Determinar o número cromático de C6 e de C5.

Exercício: Determinar o número cromático de Kn

Exercicio: Determinar o número cromático de um grafo bipartido K(n,m)

Exercício implementação: Dada uma determinada matriz adjacente de um grafo G, identificar se o grafo é bipartido.

Exercício implementação: Dada uma lista de estudantes e a relação de disciplinas que estão matriculados, determinar quantas datas diferentes de exames serão necessárias a fim de permitir que todos os alunos possam realizar o exame. (Sugestão: utilize como base de seu enunciado o exemplo visto anteriormente).

Exercício implementação: Dado um grafo G(V,E) simples, determine se este grafo é conexo, e se não for conexo determine o número de componentes deste grafo.

Grafo de Petersen

Julius Petersen, matemático dinamarquês 1898. O grafo de Petersen consiste em um grafo simples cujos vértices são subconjuntos de 2 elementos de um conjunto formado por 5 elementos. Os arcos conectam dois vértices disjuntos.

A figura 3.16 apresenta um grafo de Petersen. Corresponde a um grafo não dirigido com 10 vértices e 15 arestas, e é utilizado em muitos problemas em teoria dos grafos.

Como os pares (1,2) e (3,4) são disjuntos, eles podem ser vértices adjacentes na formação do grafo, conforme visto na figura.

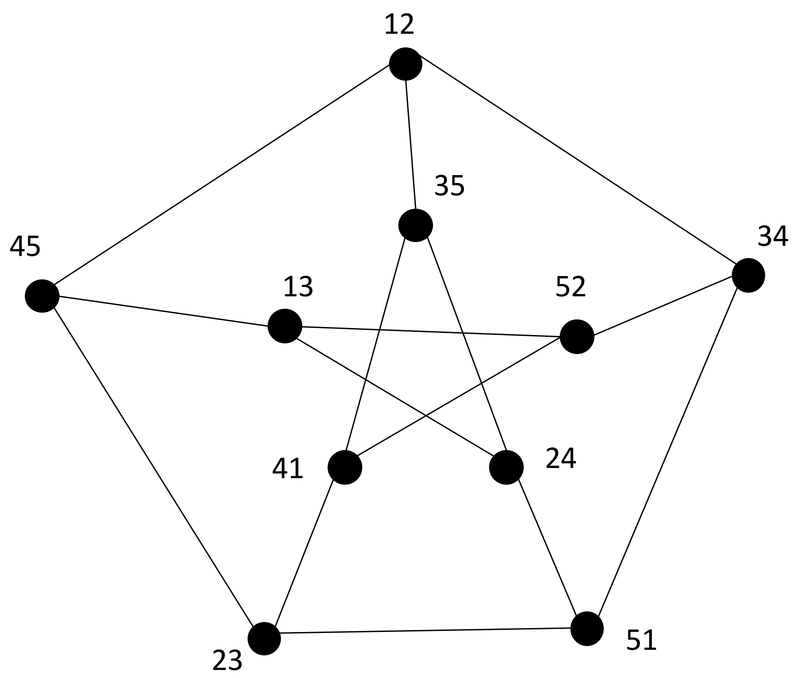
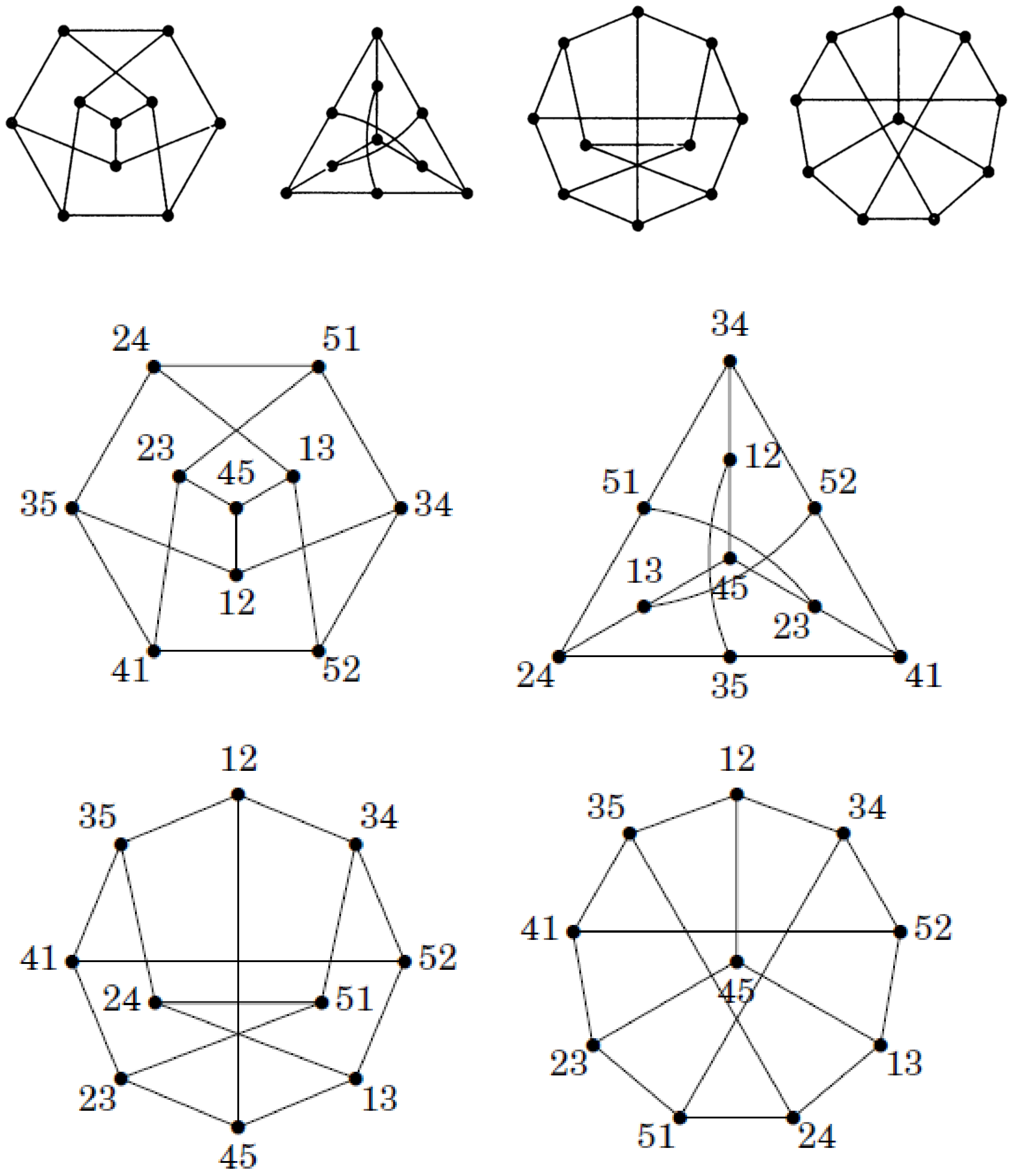


Fig. 3.16 – grafo de Petersen

Exercício: Prove que os grafos abaixo representam grafos de Petersen.



Cubos: os grafos bipartidos podem ser utilizados para representar K-cubos ou cubos com dimensão k, e é denotado por Qk. Este tipo de representação é utilizado para associar cada vértice a um código ou palavra binária.

A figura 3.17 apresenta alguns tipos de k-cubos.

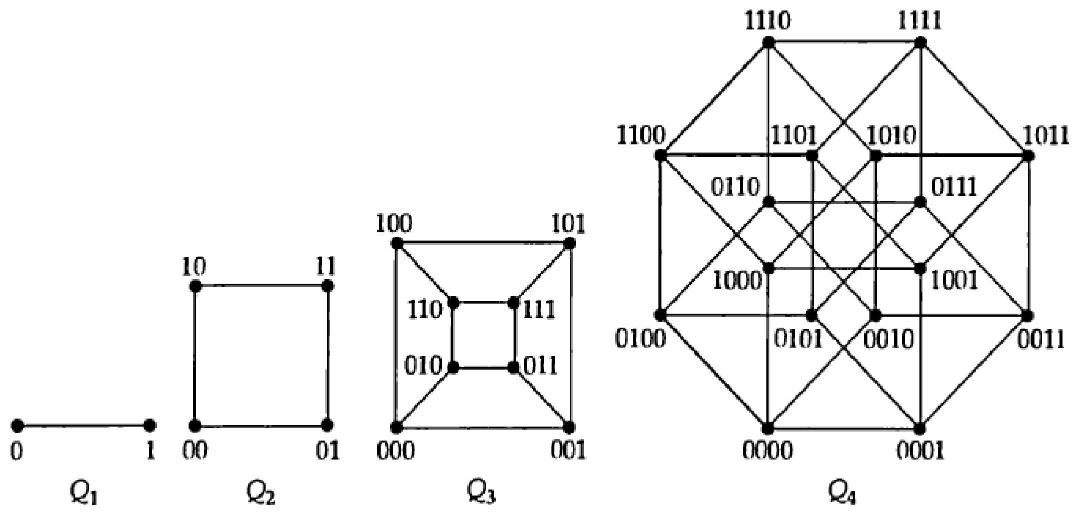


Fig. 3.17 – Exemplos de grafos Qk.

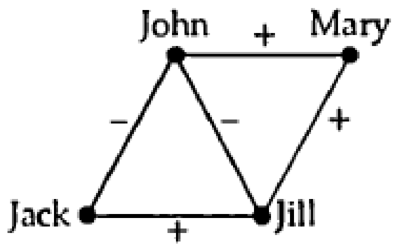
O grafo do tipo Qk possui 2**k vértices, é regular e de grau k.

Redes sociais: Conforme apresentado no início do curso, pode-se utilizar grafos para representar relacionamentos entre pessoas.

Além disso, pode-se utilizar grafos para representam também o tipo de relacionamento entre os pares (vértices), utilizando o conceito de grafos com sinal.

O grafo com sinal é aquele que atribuí-se um sinal de + ou – a cada uma das arestas.

Por exemplo, no caso de uma rede social, atribui-se o sinal de + às arestas que interligam dois vértices (pessoas) que possuem um bom relacionamento (positivo). Em contrapartida, aquelas arestas sinalizadas com o sinal de – indicam que os pares não possuem um bom nível de relacionamento.



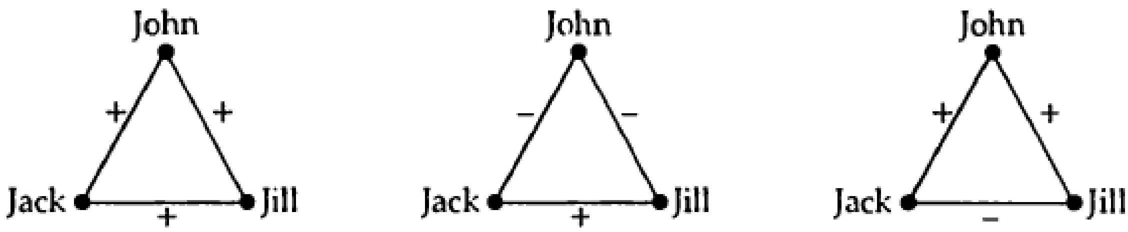


Fig. 3.18 – Exemplos de grafos com sinal

Grafo balanceado: um grafo com sinal é balanceado se arestas positivas interligam vértices com a mesma cor, e arestas negativas interligam vértices com cores distintas. Dado a figura 3.18, os dois primeiros grafos podem ser coloridos conforma a figura 3.19, porém, o terceiro grafo não pode ser balanceado.

Fig. 3.19 – Exemplos de grafos balanceados

Exemplo: Dado um grafo balanceado G da figura 3.20, removendo-se as arestas positivas, obtêm-se um grafo bipartido.

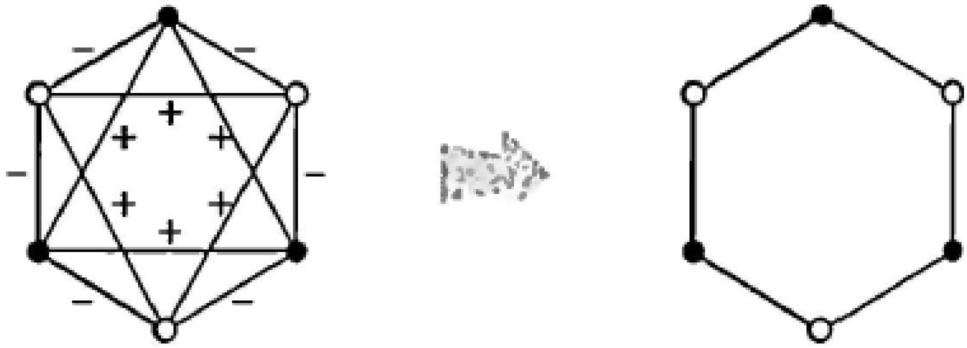
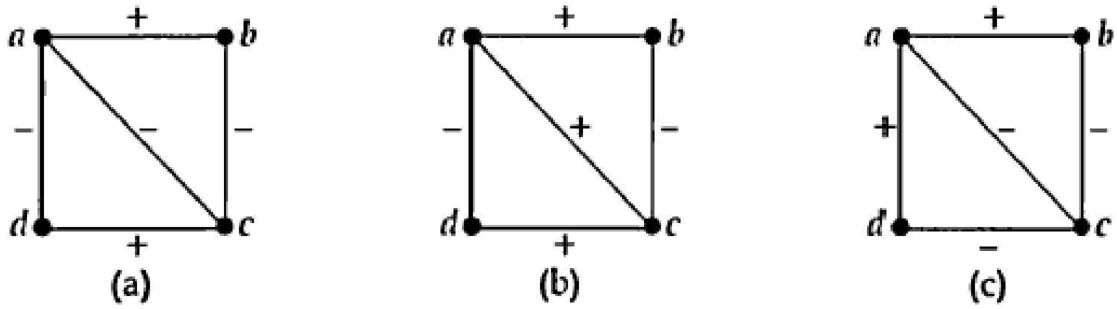


Fig. 3.20 – Exemplo de grafos bipartidos

Exercício: Quais dos grafos abaixo são balanceados, e encontre o respectivo grafo bipartido.



Exercício: Desenhe um grafo com sinal que represente o seguinte relacionamento, e determine se o grafo é balanceado. Assumir que todos os relacionamentos são simétricos, ou seja, se x gosta de y, então y gosta de x.

João gosta de Maria e de Joana, porém não gosta de José e de Ana;

Ana não gosta de Maria e de Joana;

José gosta de Maria mas não gosta de Joana.

Sequência de graus: Uma sequencia de grau de um grafo corresponde à lista contendo os graus dos nós e são normalmente expressas na ordem decrescente.

Todo grafo possui uma sequencia de inteiros não negativos $(d_1, \ldots, d_n)$, que correspondem aos nós dos respectivos nós, de tal maneira que $\sum d_i$ deve ser par, ou seja:

$\sum \boldsymbol{d_i}$ **= 2*e(G)**, onde e(G) corresponde ao número de arestas que fazem parte do grafo G.

Exemplo: Dado um grafo composto de K2 + k1, conforme apresentado na figura 3.21.a. A lista de sequencia do mesmo é dada por: 1,0,1.

Se somarmos a este grafo um nó w, de tal forma, que a este nó conecta-se os nós de K2 e K1 conforme apresentado na figura 3.21.b. A lista de sequencia de graus dos nós da figura 3.21.b é dada por 2,2,1,1.

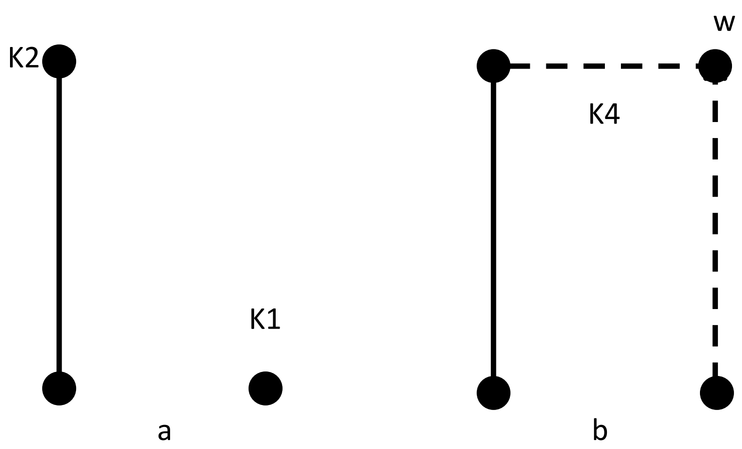


Fig. 3.21 – grafos