UDESC – Universidade do Estado de Santa Catarina

DCC – Departamento de Ciência da Computação

Curso: BCC

Disciplina: Teoria dos Grafos – TEG0001

. Avaliação:

. 3 (três) provas (P1*0,25 + P2*0,20 + P3*0,20)

. Trabalhos em grupo (0,15)

. Projeto_final (0,20)

. Os trabalhos e projeto final devem ser realizados em grupos de 02 (dois) alunos.

. Apresentações dos trabalhos: os prazos para apresentação dos trabalhos serão determinados em sala de aula. Não serão aceitos trabalhos entregues fora do prazo!

. Antes de apresentar os trabalhos os alunos deverão submeter os códigos devidamente comentados antes da data da apresentação.

. Apresentações Projeto final: segunda quinzena de Novembro (22,23,29 e 30 de Junho de 2015).

. Chamadas de presença serão realizadas em todas as aulas. Tolerância máxima: 10 minutos.

. Apresentação do Plano de ensino

Prova 01: 30.03.2015

Prova 02: 04.05.2015

Prova 03: 16.06.2015

Exame: 01.07.2015

. Material didático: moodle2.joinville.udesc.br

. No decorrer do curso podem ser geradas novas versões das apostilas do curso !

Considerações importantes sobre a disciplina:

. Desligue o celular em sala de aula !

. Concentre-se nas aulas !

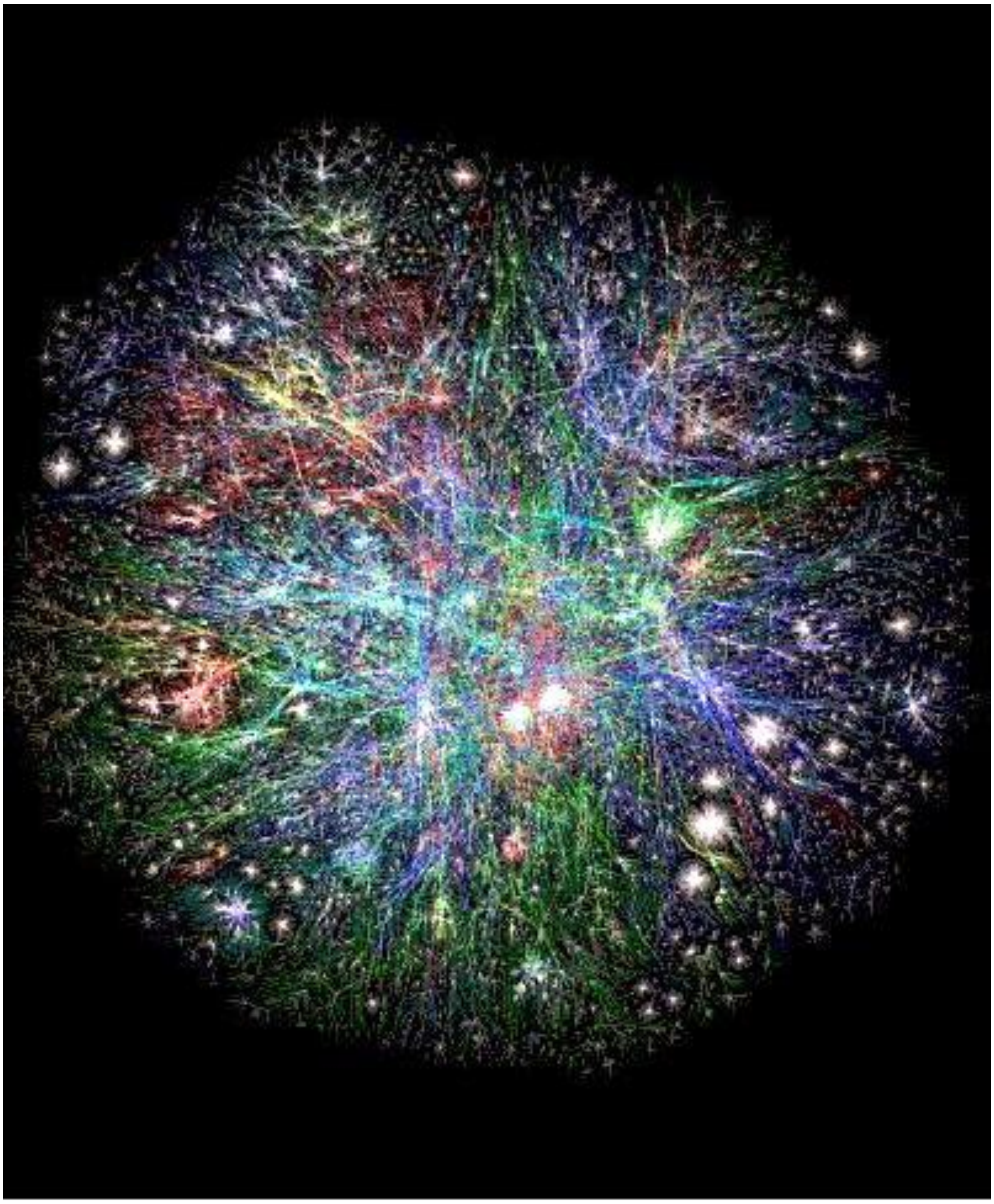
. Notas de aula disponíveis no Moodle2 !

. Resolva os exercícios em sala !

. Resolva as listas de exercícios !

. Atendimento extra classe: Basta agendar por e-mail !

. Dedique-se ao curso, e participe da Maratona de programação !



Referências bibliográficas:

1.) GERSTING, Judith L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. 5a Ed. Editora. LTC, 2004
2.) SZWARCFITER, J. L. Grafos e Algoritmos Computacionais. Campus, 1986.
3.) LUCCHESI, C. L. et alli. Aspectos Teóricos da Computação, Parte C: Teoria dos Grafos, projeto Euclides, 1979, Instituto de matemática pura e aplicada.

Complementar:

1.) **CORMEN, T. Introduction to Algorithms, third edition, MIT press, 2009 (*)**
2.) **ROSEN, K. Discrete Mathematics and its applications, seventh edition, McGraw Hill, 2011. (*)**
3.) **WEST, Douglas, B. Introduction to Graph Theory, second edition, Pearson, 2001. (*)**
4.) **BONDY, J.A., MURTY, U.S.R., Graph Theory with applications** , Springer, 1984 (*)
5.) SEDGEWICK, R. Algorithms in C – part 5 – Graph Algorithms, third edition, 2002, Addison-Wesley. (*)
6.) GOLDBARG, M., GOLDBARG E., Grafos: Conceitos, algoritmos e aplicações. Editora Elsevier, 2012. (*)
7.) FEOFILOFF, P., KOHAYAKAWA, Y., WAKABAYASHI, Y., uma introdução sucinta à teoria dos grafos. 2011. (www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos)
8.) DIESTEL, R. Graph Theory, second edition, springer, 2000.
9.) Bastante material disponível na internet.

<u>Objetivos do curso</u>:

. ***Compreender e utilizar os diversos termos ou propriedades associados a grafos, grafos direcionados e árvores;***

.Utilização dos grafos como ferramentas de representação em uma ampla variedade de contextos e problemas;

I.2) **Aplicações de Grafos**:

Dado um determinado problema, os grafos são utilizados para modelar problemas. Um modelo é uma simplificação da realidade.

Existem centenas de problemas computacionais que empregam grafos com sucesso !

. Redes de Comunicação
. Redes de transporte terrestre, aéreo (Logística)
. Redes sociais
. Organogramas
. Redes de saneamento
. Jogos
. Microeletrônica
. Financeiro (moedas, ações)
. Diagrama de fluxo
. Escalonamento de tarefas
. Algoritmos diversos (compressão de dados)

Dado que se tem um modelo construído como resolvê-lo ?

. múltiplas soluções;

. solução ótima;

. sem solução.

. ***É um problema combinatório !***

I.2) Breve histórico

Um dos primeiros exemplos da utilização de grafos surgiu com o problema das Pontes de Königsberg. Na cidade de Königsberg, antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa a cidade em quatro zonas que, no séc. XVII estavam ligadas por sete pontes como na figura 1.1.

Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas!

Como resolver este problema ?

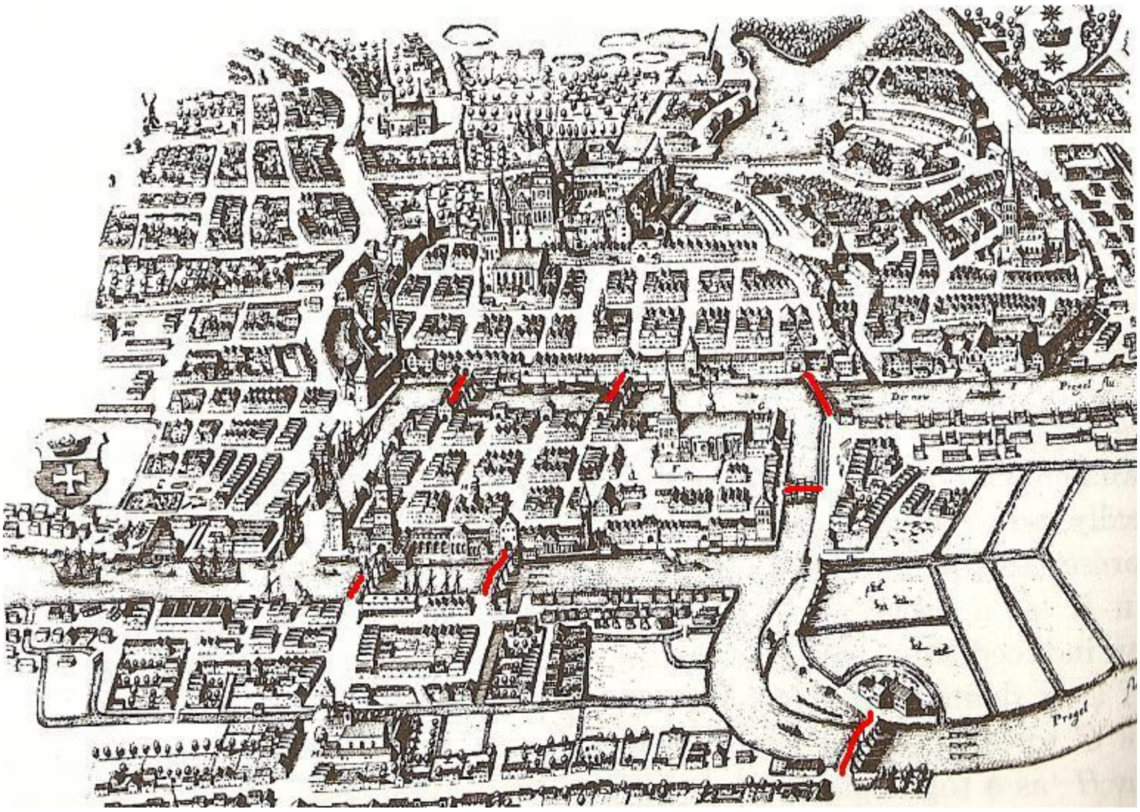


Fig. 1.1 – Pontes de Königsberg

I.3) Definição de Grafos

. Os grafos representam um tipo particular de gráfico, e corresponde a um conjunto não vazio de nós (vértices) e um conjunto de arcos (arestas) tais que cada arco conecta dois nós [Gersting, 2004].

. ***Representação concisa de inúmeros problemas computacionais!***

. Um grafo é representado por uma tripla ordenada (N, A, g) [Gersting, 2004]., onde:

N = um conjunto não vazio de nós (vértices)

A = um conjunto de arcos (arestas), que correspondem a pares não ordenados.

g = uma função que associa a cada arco um par não ordenado x-y de nós, chamados de extremidade de a.

|N| = numero de vértices

|A| = número de arestas

$\binom{n}{2}$ = [n*(n-1)] /2 = maior número de arestas de um grafo. E que corresponde ao número de pares não ordenados em um conjunto de n = |N| objetos

. Um grafo corresponde a um conjunto de nós denominados de vértices, que são conectados por linhas denominadas de arcos ou arestas. Permitem codificar relacionamentos entre pares de objetos, onde os objetos são representados pelos nós e os relacionamentos pelos arcos.

Como exemplo, a figura 1.2 apresenta três grafos. O primeiro é um grafo genérico e é composto de cinco nós e seis arcos. O segundo grafo representa uma possível rota de voos domésticos entre cidades, onde os nós ou objetos representam as cidades e os relacionamentos os arcos entre os nós um determinado número do voo. O terceiro grafo é uma ilustração de possíveis "links" entre páginas Web.

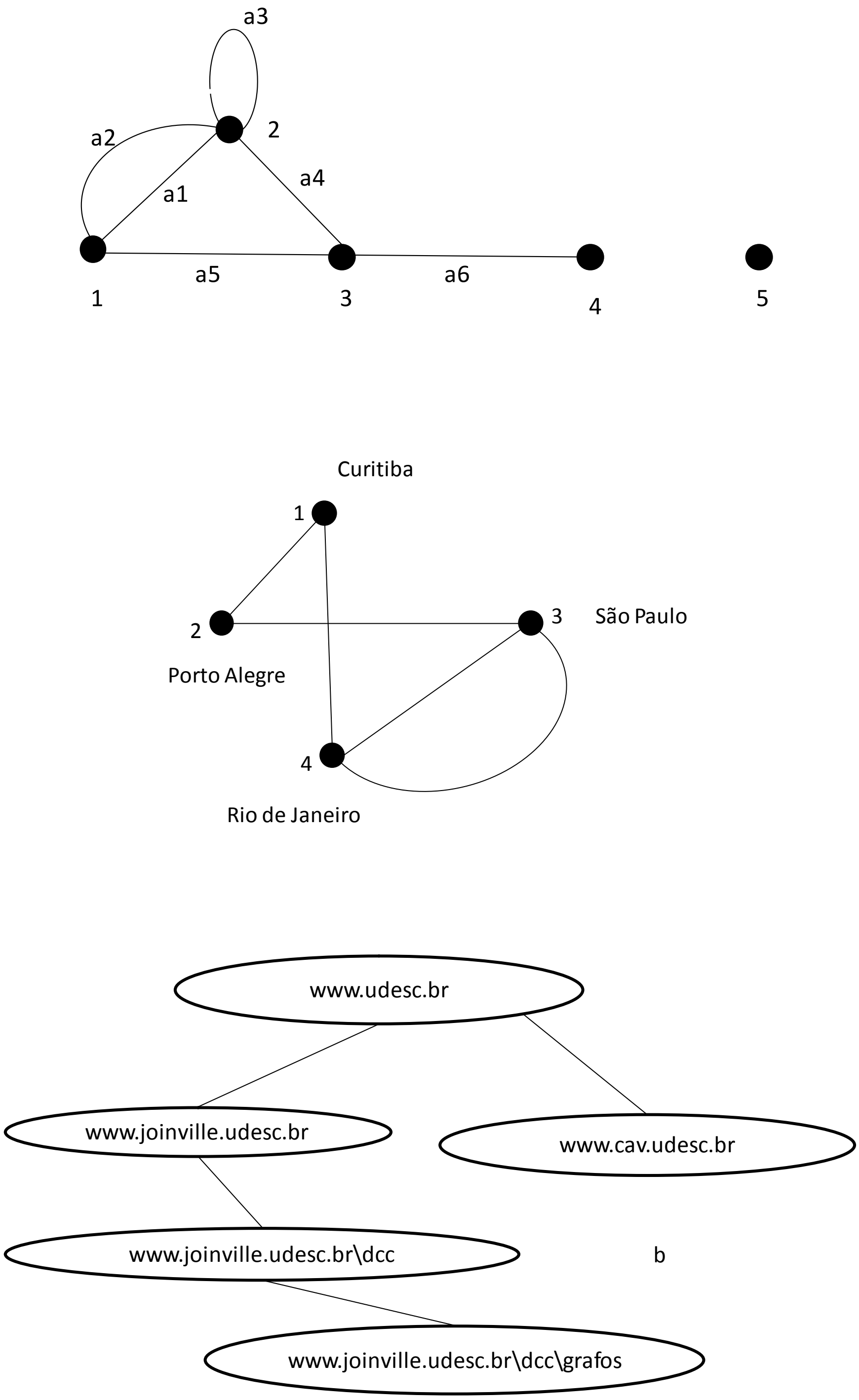


Fig. 1.2 – grafos genéricos.

Para o grafo da figura 1.2.a, a função que associa arcos a suas extremidades é a seguinte:

N = {1,2,3,4,5}

A={a1,a2,a3,a4,a5,a6}

g(a1) = 1-2 , g(a2) = 1-2 , g(a3) = 2-2 , g(a4) = 2-3, g(a5) = 1-3 , g(a6) = 3-4.

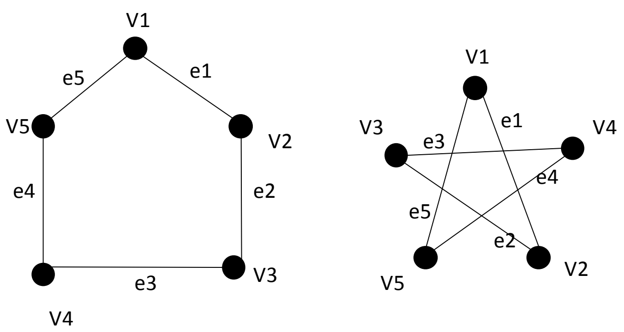
Outra possível representação de grafos é a seguinte. Dado os dois grafos abaixo, o conjunto de nós, arcos e a relação de arestas e vértices podem ser representados por:

V = { V1,V2,V3,V4,V5} E = {e1,e2,e3,e4,e5}

E1 → {V1,V2} E4 → {V4,V5}

E2 → {V2,V3} E5 → {V5,V1}

E3 → {V3,V4}



Exemplo de aplicação grafos:

Exemplo_01:

Dado um conjunto de N alunos e N alunas. Cada aluno declara que tem interesse em conhecer uma ou mais alunas e vice-versa. Caso exista interesse entre ambos, o casal pode combinar de ir ao cinema juntos. Dado a escolha dos alunos e alunas é possível formar N pares? Qual o maior número de pares que podemos formar?

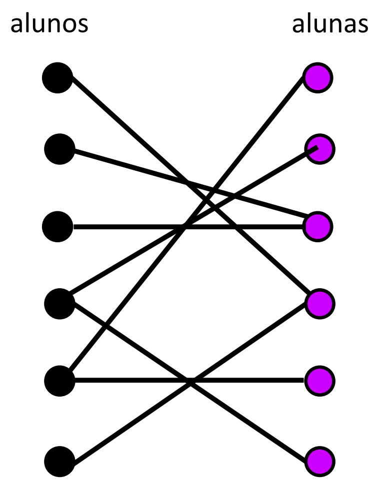
Resolução:

Como abstrair o problema (usando grafos)?

Objeto: pessoas (rapazes e moças)

Relacionamento: interesse mútuo em sair

Este problema é resolvido com o desenvolvimento de um algoritmo !



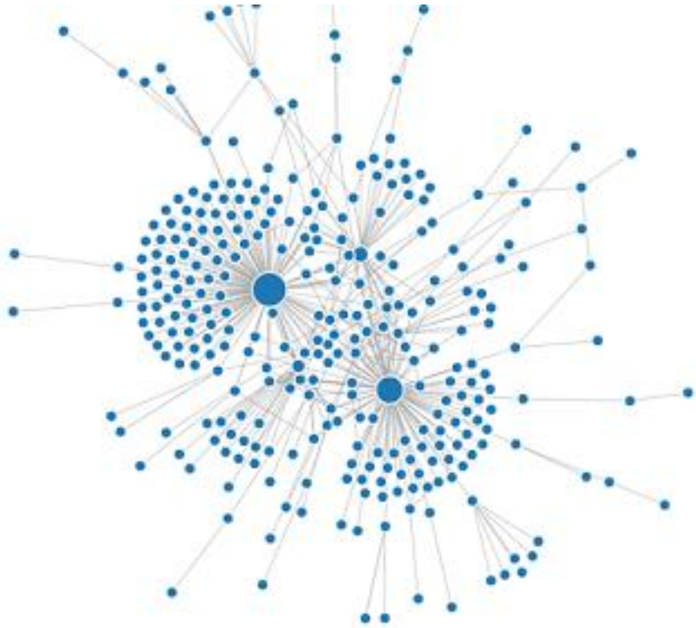
Exemplo_02: Facebook

Como saber se duas pessoas estão conectadas através de uma sequência de relacionamentos? Qual é o menor caminho entre duas pessoas?

Como abstrair o problema (via grafos)?

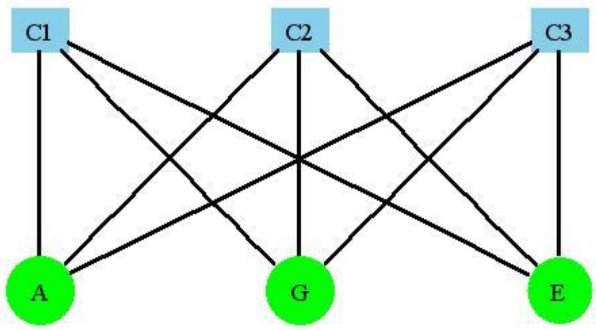
Objeto: profiles das pessoas

Relacionamento: relacionamentos declarados



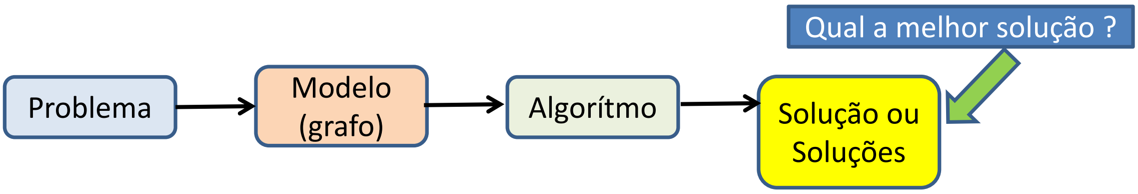
Exemplo_3: Considere 3 casas (C1, C2 e C3), cada uma com três utilidades: água (A), gás (G) e eletricidade (E). As utilidades estão conectadas às residências por meio de fios elétricos e tubos de PVC.

Considerando que todos os fios e canos estão no mesmo plano, é possível fazer as instalações sem cruzá-los ?



Dado um problema qualquer, é possível expressar o problema na forma de um grafo (ou modelo), e a partir do grafo criado pode-se construir um algoritmo a fim de alcançar a solução do problema.

Muitos problemas podem ser resolvidos com o mesmo algoritmo



I.4) Conceitos básicos

. Proposição: Uma Proposição é uma sentença não associada a algum outro teorema, de simples prova e de importância matemática menor.

. Lema: Um Lema é um "pré-teorema", ou seja, um teorema que serve para ajudar na prova de outro teorema maior. A distinção entre teoremas e lemas é um tanto quanto arbitrária, uma vez que grandes resultados são usados para provar outros.

. Corolário: Um Corolário é uma consequência direta de outro teorema ou de uma definição, muitas vezes tendo suas demonstrações omitidas, por serem simples.

Exercício_1: Esboce um grafo com os nós {1,2,3,4,5}, arcos {a1,a2,a3,a4,a5,a6} e função g dada por g(a1)=1-2, g(a2)=1-3, g(a3)= 3-4, g(a4)=3-4, g(a5)=4-5 e g(a6) = 5-5.

. **Dígrafo**: Um grafo direcionado ou dígrafo é uma tripla ordenada (N,A,g), onde cada arco tem um sentido ou orientação:

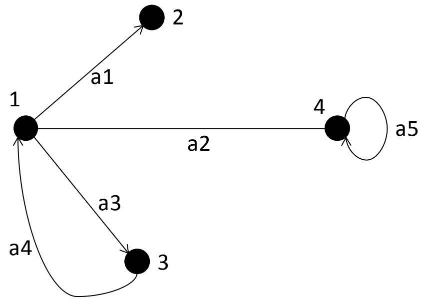
N = um conjunto não vazio de nós

A = um conjunto de arcos

g = uma função que associa a cada arco a um par ordenado (x,y) de nós, onde x é o ponto inicial e y é o ponto final de a. Ou seja, é imposta uma orientação aos arcos de um grafo.

A figura 1.3a apresenta um grafo direcionado com 4 nós e 5 arcos. A função g que associa a cada arco suas extremidades, satisfaz, por exemplo, g(a1)= (1,2) , o que significa que o arco a1 começa no nó 1 e termina no nó 2.

Para cada grafo dirigido, existe um grafo simples (não dirigido) que é obtido removendo as direções das arestas, e os loops. A figura 1.3b apresenta no lado esquerdo um dígrafo e no lado direito



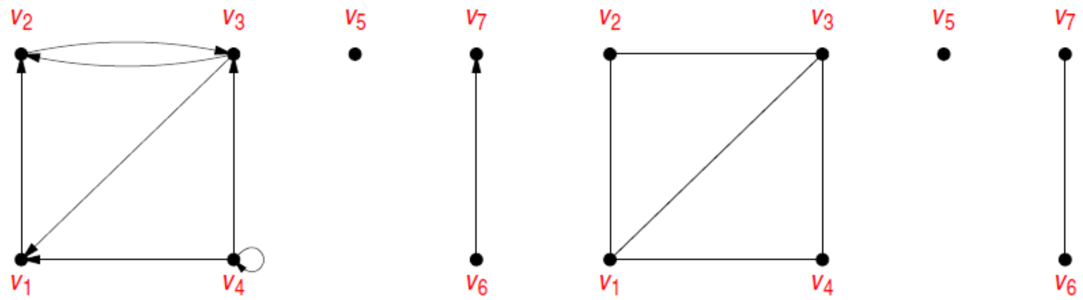
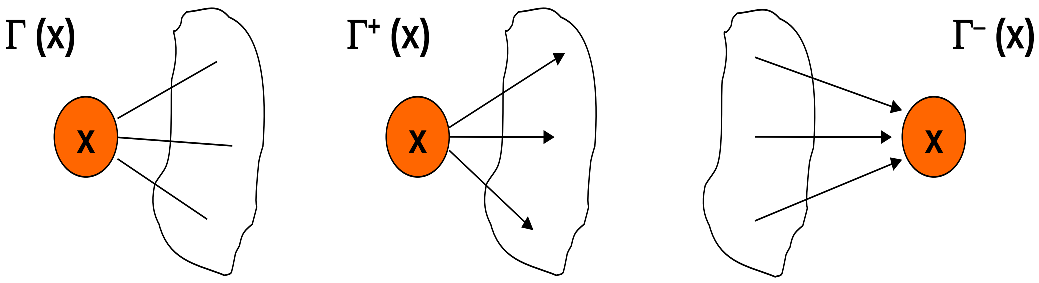


Fig. 1.3 – Dígrafos

Um dígrafo D(V,E) é fortemente conexo quando para todo par de vértices v,w Ɛ V existir um caminho em D de v para w e também de w para v. Se ao menos um desses caminhos existir para todo v,w Ɛ V então D é unilateralmente conexo.

Grafo nulo: Um grafo G = (V,E) é dito nulo se V ≠ Ø e E = Ø. Um grafo deve ter pelo menos um vértice.

. **Nós adjacentes (vizinhança)**: Um nó vizinho ou nó adjacente de um vértice x, em um grafo orientado ou não, é todo vértice y que participa de uma ligação (arco ou aresta) com x. Ou seja, dois nós em um grafo são ditos adjacentes se ambos são as extremidades de algum arco. Dada a figura 1.4:



Γ(x): conjunto de vizinhos de x
Γ^+(x) = conjunto de sucessores de x
Γ^- (x): conjunto de antecessores de x

Fig. 1.4 – Vizinhança

Exercício: Considere G como um grafo com o seguinte conjunto de vértives V(G) = {1,2,...,10}, tal que dois vértices i e j em V(G) são adjacentes se e somente se |i - j| <= 3. Desenhe o grafo e determine o conjunto de arestas.

Exercício: Considere G como um grafo com o seguinte conjunto de vértives V(G) = {1,2,...,10}, tal que dois vértices i e j em V(G) são adjacentes se e somente se i*j é um múltiplo de 10. Desenhe um grafo G e determine o conjunto E(G).

. **Incidência de um conjunto**: O conjunto de arestas incidentes em A $\subseteq$ V é dado por Inc(A)

Uma aresta incide em A $\subseteq$ V se os seus vértices extremos não estão simultaneamente em A.

Conjunto de nós independentes: Dado um subgrafo G(V,E), um conjunto independente de nós corresponde a um subgrafo de G no qual **não existam dois nós adjacentes**.

O **número de independência x(G)** corresponde a cardinalidade do conjunto independente máximo.

Ou seja, num conjunto independente de nós não há arestas entre qualquer par de nós. Portanto, pares de nós (ou de arcos) não adjacentes são denominados independentes. Um conjunto de nós (ou arcos) é independente se nenhum par de seus elementos é adjacente.

Um conjunto **independente maximal** é aquele que não pode ser aumentado.

Um conjunto **independente máximo** é aquele de maior cardinalidade em um grafo.

Dada a figura 1.5, podemos verificar que:

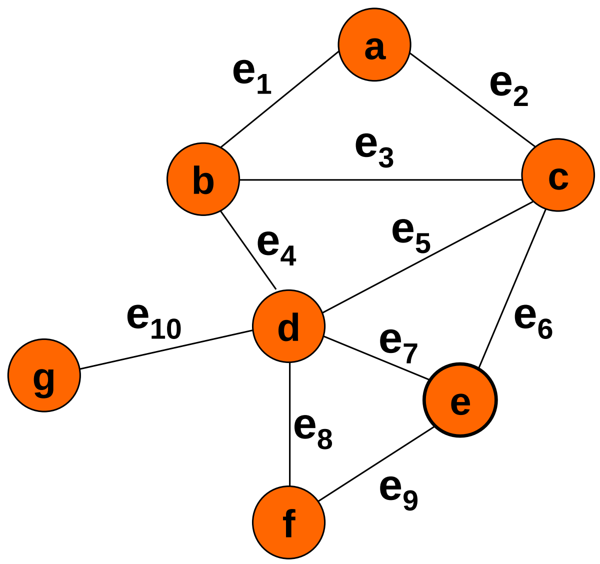


Fig. 1.5 – independência de nós e arcos

Onde:

e1 e e5 são independentes
a e d são independentes
{b,e,g} é um conjunto independente
{e1, e5 } é um conjunto independente

. **Laço**: um laço em um grafo é um arco com extremidades n-n para algum nó n.

. **Arcos paralelos**: dois arcos com a mesma extremidade.

. **Grafo regular**: Um grafo é dado como regular quando

$$\forall\ v \in V,\ d(v) = k$$

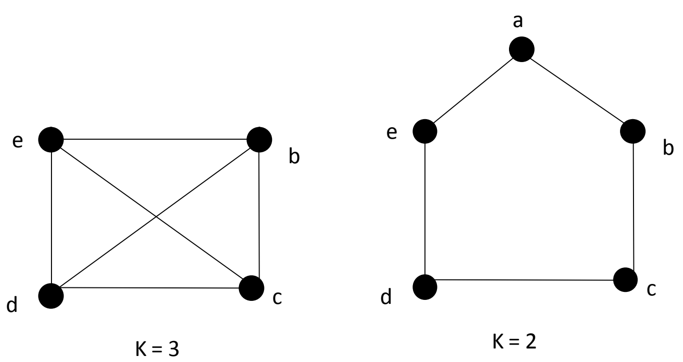


Fig. 1.6 – grafos regulares

Exercício: Desenhe todos os grafos de ordem n, onde o valor de n pode variar de 2 <= n <= 6.

Exercício: Um químico deseja embarcar os produtos A,B,C,D,E,F,X usando o menor número possível de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados na mesma caixa porque reagem:

. Os produtos A,B,C,X reagem dois-a-dois;

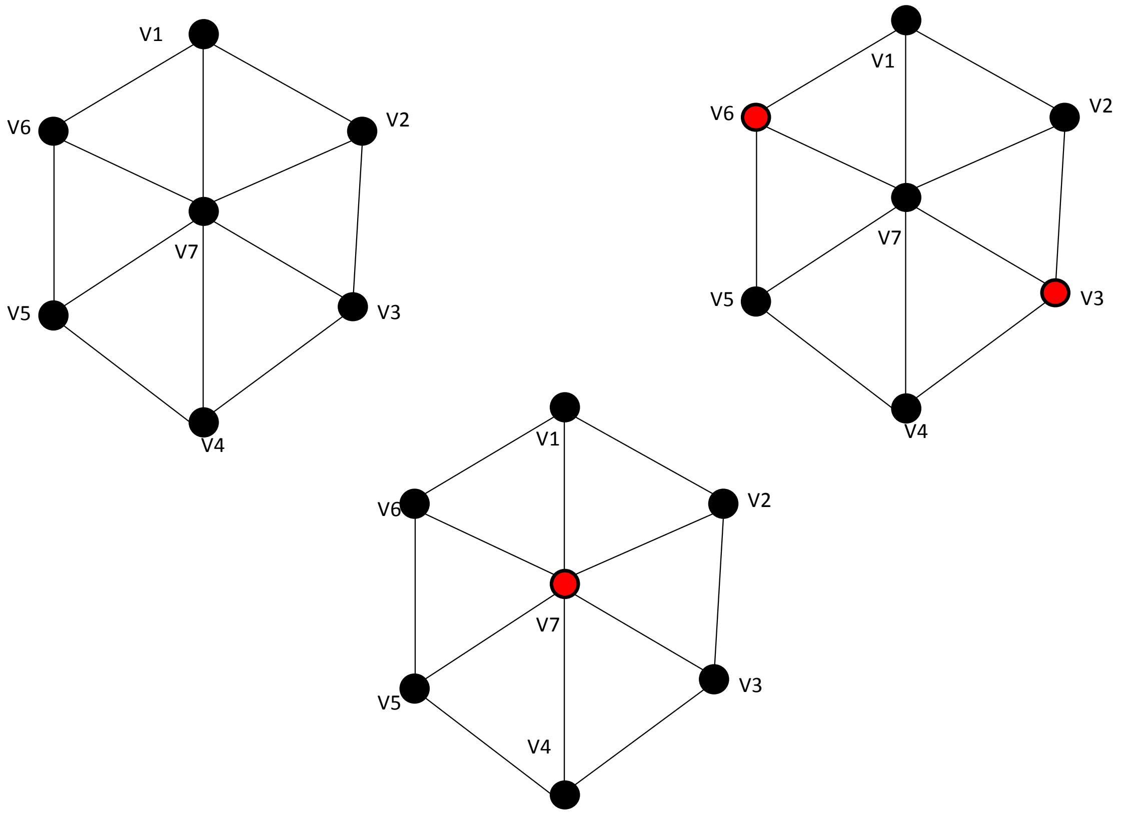
. A reage com F e com D e vice-versa;

. E também reage com F e com D e vice-versa;

Descreva o grafo que modela esta situação e use esse grafo para descobrir o menor número de caixas necessárias a fim de embarcar os produtos com segurança;

Conjunto dominante: Um conjunto dominante é um subconjunto de vértices tal que todo vértice do grafo está no conjunto ou é adjacente a um de seus vértices. O número de dominação ϒ(G) é a cardinalidade do menor conjunto dominante de G.

Dada a figura abaixo, o número de dominação é igual à 1.



Um conjunto **dominante minimal** é aquele que não pode ser diminuído. Um conjunto **dominante mínimo** é aquele de menor cardinalidade possível em um grafo.

Grafo simples: grafo sem laços nem arcos paralelos (ou múltiplos).

A figura 1.6 ilustra grafos simples e completos com 1,2,3,e 4 vértices. O grafo simples completo com n vértices é denotado por $\boldsymbol{K_n}$.

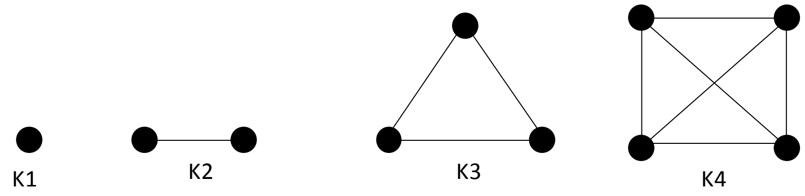


Fig. 1.6 – grafos simples e completos

. **Nó isolado**: corresponde a um nó que não é adjacente a nenhum outro nó.

. **teorema do aperto de mão (handshaking):** A soma dos graus de todos os vértices de um Grafo não direcionado G é duas vezes o número de arestas de G.

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2m$$

. Exercício: prove o teorema acima

. **Teorema**: O número de vértices de grau ímpar de um grafo não direcionado é par.

Prova [Goldbarg, 2012]: Como a soma dos graus dos vértices de um grafo é par, uma vez que todas as arestas são consideradas duas vezes nessa soma, e qualquer número multiplicado por dois é par, pode-se organizar a seguinte equação para descrever essa soma:

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{j \in P} d(x_j) + \sum_{s \in I} d(x_s) = 2\ m$$

Onde P representa o conjunto de vértices de G que possuem grau par, e I o conjunto de vértices que possuem grau ímpar. Como a primeira parcela à direita da expressão, que é composta pela soma de um número par de vértices, deve ser par, consequentemente a segunda parcela também o será.

Como o número de arestas que incide em cada vértice do conjunto I deve ser ímpar (possuem grau ímpar) sua soma deve ser par, para atender o conjunto da expressão.

Portanto, a única forma de a soma do segundo termo da expressão ser par é o número de vértices de grau ímpar ser par.

. **Grafo finito**: é um grafo em que os números de nós e arcos são finitos.

. **Grafo Rotulado**: Um grafo G(V,E) é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo.

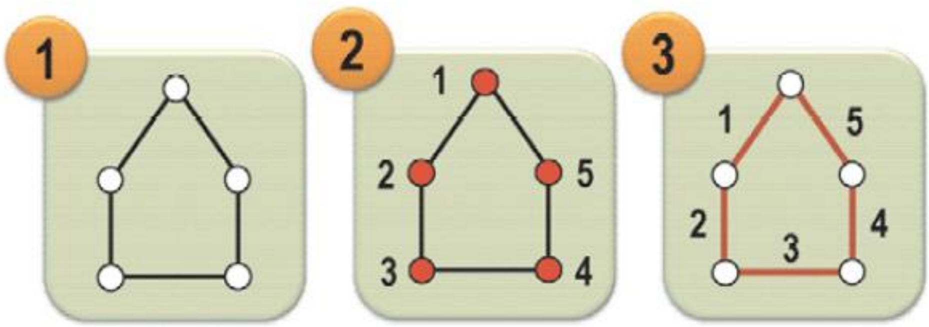


Fig. 1. – grafos rotulados

. **Grafo valorado**: Um grafo valorado ou ponderado é um grafo em que cada aresta tem um valor associado. Formalmente, um grafo valorado G = (V,E) consiste de um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas, e uma função f de E para P, onde P representa o conjunto de valores (pesos) associados às arestas.

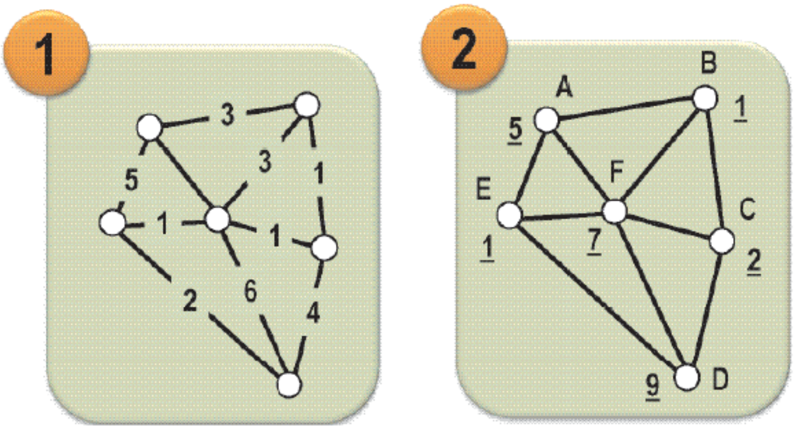


Fig. 1. – grafos valorados

. **Ordem de um grafo**: A ordem de um grafo G é dado pelo cardinalidade de seu conjunto de vértices |N|.

. **Tamanho de um grafo**: O tamanho de um grafo G é dado pela cardinalidade de arestas.

Dada a figura abaixo, a ordem do grafo (1) é 5, e o tamanho do grafo (2) é 4.

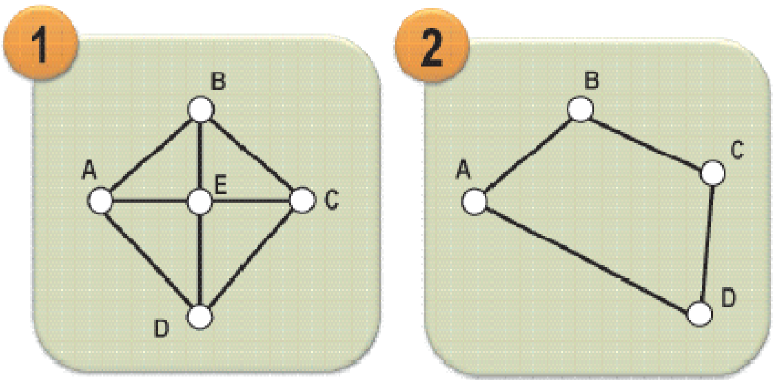


Fig. 1. – Tamanho e ordem de um grafo

. **Operações de arcos e nós**

Seja G(V, E) um grafo constituído de um conjunto V, finito e não vazio de n nós, e um conjunto E de m arcos.

. Inclusão do arco (v,w)

Exigência: os nós v e w devem pertencer a V.

Grafo resultante: G + (v,w) definido por V e E ∪ {(v.w)}. Caso (v,w) já pertença a G, o grafo resultante terá pelo menos um par de arcos paralelos. Se v = w, há o surgimento de um laço.

. Exclusão da arco (v,w)

Exigência: a aresta (v,w) deve pertencer a E.

Grafo resultante: G-(v,w) definido por V e E - {(v,w)}

. Inclusão do vértice v

Exigência: o vértice v não deve pertencer a V.

Grafo resultante: G+v definido por V ∪{v} e E.

. Exclusão do vértice v

Exigência: o vértice v deve pertencer a V e n > 1.

Grafo resultante: G-v definido por V-{v} e E - {(v,u), ∀ u adjacente a v}. A restrição n > 1 garante que, mesmo após a exclusão do vértice, a estrutura remanescente continue sendo um grafo.

. Fusão dos vértices v e w

Exigência: os vértices v e w devem pertencer a V.

Grafo resultante: Gvw definido por (V − {v,w}∪{vw} e ((E − {v,u},∀u adjacente a v}) – {(w,u)∀ u adjacente a w}) ∪{(vw, u), ∀ u adjacente a v ou w em G}.

. **Explosão do vértice v**

Exigência: o vértice v deve pertencer a V e grau(v)>0.

Grafo resultante G*v: Para obter o grafo deve-se quebrar o vértice v em grau (v) pedaços de modo que as arestas que o têm como extremo também pertençam ao novo grafo, embora não sejam mais adjacentes.

. **Subgrafo de um grafo**: corresponde a um conjunto de nós e a um conjunto de arcos que são subconjuntos do conjunto original de nós e arcos, respectivamente, nos quais as extremidades de um arco têm que ser os mesmos nós que no grafo original.

Dado G = (V, E) , G' = (V', E') é subgrafo de G se V ' ⊆ V e E'⊆E.

Quando H ⊆ G e H é diferente de G, denotamos H C G e dizemos que H é subgrafo próprio de G.

A figura 1.7 apresenta dois sub grafos do grafo da figura 1.2ª.

. **Sub grafos disjuntos**: Sejam G1, G2 ⊆ G, G1e G2 são disjuntos (em nós) se V(G1) ∩ V(G2) = ○

. **Percurso elementar**: não repete nós nem arcos. Um caminho do nó N0 para o nó Nk é uma sequencia ordenada:

$$n_0\,, a_0, n_1\,, a_1\,, n_{k-1}, a_{k-1,\ldots,} n_{k,}$$

de nós adjacentes e arcos onde, para cada i, as extremidades do arco $a_{i\,,}$ são $n_i - n_{1i+1}$.

. **Ciclo ou percurso simples e fechado**: Um ciclo corresponde a um grafo com um número igual de nós e arcos, e cujos nós podem ser colocados em volta de um círculo, e portanto, dois nós são adjacentes somente se eles estiverem localizados um após o outro ao longo do círculo.

. **Caminho de ciclo elementar**: só há repetição do último nó. Ou seja, corresponde a um caminho de algum nó n_0 para ele mesmo tal que o mesmo arco não apareça mais de uma vez, e n_0 é o único nó que aparece mais de uma vez.

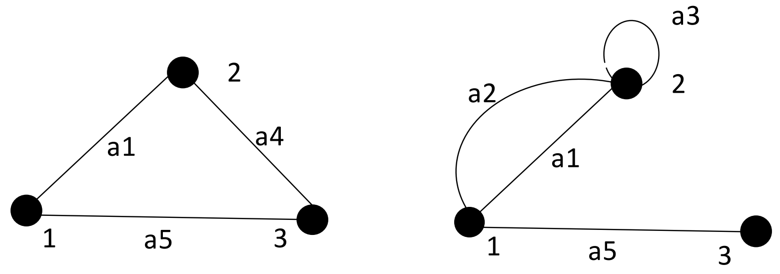
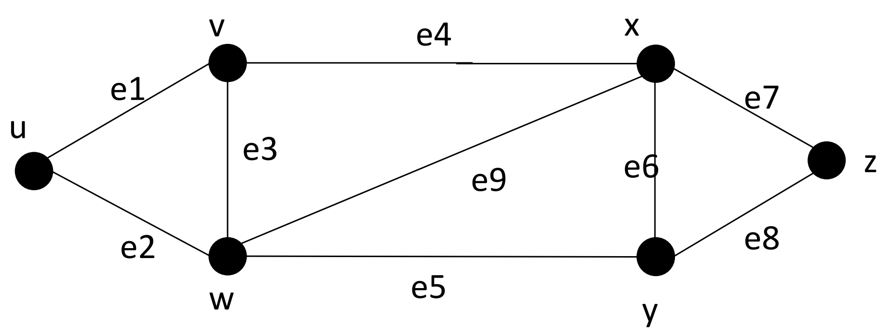


Fig. 1.7 – Subgrafos

. **Comprimento**: O comprimento de um caminho consiste no número de arcos que ele contem. Se um arco for utilizado mais de uma vez, ele é contado cada vez que é usado.

Exercício: Dado o grafo G abaixo

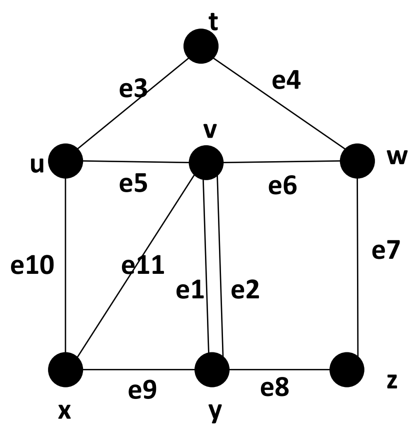


.Identificar quais dos seguintes caminhos (sequencias) representam um caminho de U para Z em G

a. u;e2;w;e5;x;e7;z
b. u;e1;v;e5;y;e8;z
c. u;e1;v;e3;w;e3;v;e4;x;e7;z

. Encontre todos os caminhos de u – z em G que passam pela aresta e9

Exercício: Dado o grafo G abaixo



. Para K=2,3,4,5,6,7 encontre um ciclo de tamanho k em G;
. encontre um circuito de tamanho 6 em G que não é um ciclo;
. encontre um circuito de tamanho 8 em G que não contem o vértice T;
.encontre um circuito de tamanho 9 que contêm os vértices T e V;

. **Grafo conexo ou conectado**: Dois nós u e v são ditos conectados se existir um caminho entre u e v em G. Um grafo G é dito **conexo** se ele tem um caminho u-v sempre que u,v Ɛ V(G), caso contrário, o grafo é **desconexo.**

Ou seja, quando existe um caminho de qualquer nó para qualquer outro, ou seja, dado um grafo G e se existe um caminho u-v, considerando que u,v Ɛ V(G), então u está conectado à v em G. A relação de conexão sobre V(G) consiste do par ordenado (u,v), tal que u está conectado à v.

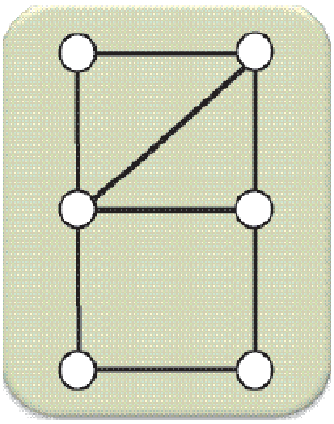
. Grafo Desconexo: Um grafo G é **desconexo**, se e somente se, G pode ser particionado em dois subconjuntos G1 e G2 de maneira que não existe aresta em G com um dos vértices extremos em G1 e o outro em G2

. **Grafo acíclico**: corresponde a um grafo sem ciclos

. Cintura de um grafo G: corresponde ao comprimento do menor ciclo de G

. Circunferência de um grafo G: corresponde ao comprimento do maior ciclo de G.

Dado a figura abaixo, a cintura do grafo é de 3, e sua circunferência é de 6.



Exercício_2: considere o grafo gerado no exercício_1 e encontre:

. dois nós que não são adjacentes;

. um nó adjacente a si mesmo;
. um laço;
. dois arcos paralelos;
. o grau do nó 3;
. um caminho de comprimento 5;
. um ciclo;
. Esse grafo é completo ?
. Esse grafo é conexo ?

. Componente conexo : Um grafo H é um componente conexo de um grafo G se e somente se:
. H é um subgrafo de G;
. H é conexo;
. Nenhum subgrafo conexo I de G tem H como um subgrafo e I contém vértices ou arestas que não estão em H.

É possível particionar G em: V1, V2, ..., Vp tal que dois vértices são conectados, se e somente se, pertencerem a um mesmo Vi. Os subgrafos G(V1), ..., G(Vp) são chamados de **componentes conexos** de G.

Os componentes de um grafo G correspondem aos subgrafos que estão com a máxima conexão.

Como exemplo, a figura 1.8 apresenta um grafo desconexo formado por 4 componentes, que são: {p}; {q,r} ; {s,t,u,v,w}. O componente {p} corresponde a um vértice isolado.

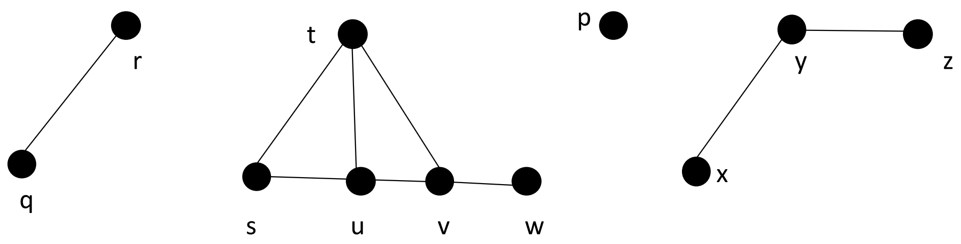
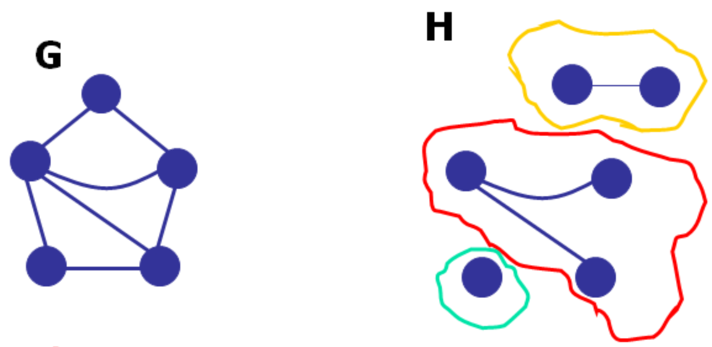


Fig. 1.8 – Componentes de um grafo

Exercício: Todo grafo G com n vértices e K arestas possui pelo menos (n-k) componentes.

Solução: Considere que um grafo com n vértices sem arestas possui n componentes.
Considerando que dois componentes não compartilham o mesmo vértice, e que adicionando uma arestas entre componentes distintos combina-os em apenas um componente. Portanto, quando adiciona-se uma aresta reduz-se o número de componentes em 1 e quando elimina-se uma aresta aumenta-se o número de componentes.
Assim, quando k arestas forem adicionadas o número de componentes é de pelo menos n-k.

. Maximal (minimal): G´ $\subseteq$ G é maximal em relação a uma propriedade T se não houver G'' $\supseteq$ G´ tal que G" tem a propriedade T.
Por exemplo, os componentes conexos do grafo G abaixo são todos os subgrafos **conexos maximais** de G.



G é Conexo

H é desconexo

ω**(G)**= número de componentes conexas de G

Todo ciclo em um grafo G é um **ciclo maximal**, pois, nenhum ciclo está contido dentro de um outro ciclo.

. **Corte de nós**: Seja G(V,E) um grafo conexo. Um corte de nós de G é um subconjunto mínimo de nós V´ C V, cuja remoção de V´ desconecta G. Assim, sendo o grafo G – V´ é desconexo.

. **Corte de arestas**: Analogamente, um corte de arestas de G é um subconjunto mínimo de arestas E´ C E, cuja remoção de E´ desconecta G. Isto é G – E´ é desconexo. Se G é um grafo completo Kn, n >1, então não existe conjunto próprio de nós V´ C V cuja remoção desconecta G.

Dada a figura 1.9, como exemplo. O subconjunto {3,4} é um corte de nós, pois a sua remoção desconecta o grafo nos componentes ilustrado na figura b. O subconjunto de arestas {(1,3), (2,3),(4,5)} é um corte de arestas, pois removendo-o de G produz o grafo desconexo da figura C.

. **Conectividade em vértices**: A **conexidade ou conectividade** em vértices de um grafo G = (V,E) corresponde ao menor número de vértices cuja remoção desconecta G ou o reduz a um único vértice. Ou seja, denomina-se conectividade de nós Cv de G à cardinalidade do menor corte de nós de G. Ou seja, Cv é igual ao menor número de nós cuja remoção desconecta G.

A figura abaixo apresenta a conectividade de G = 1.

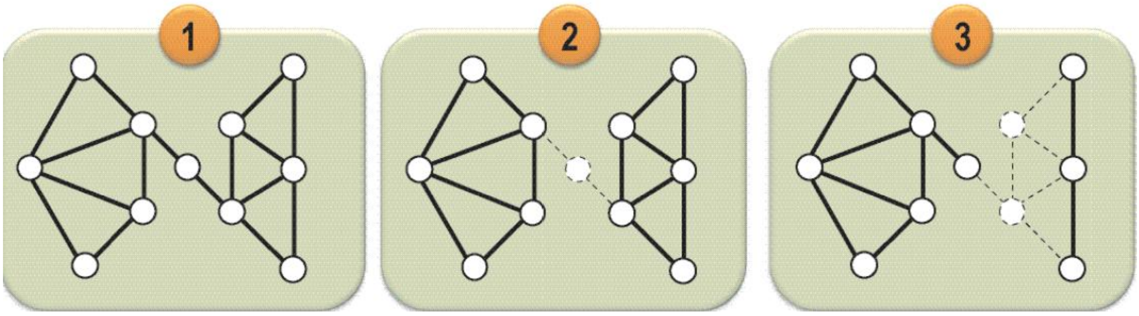


Fig. 1.8 – Conectividade em vértices

. **Conectividade em arestas**: A **conexidade ou conectividade** em arestas, analogamente, é igual a cardinalidade do menor corte de arestas de G que torna-o desconexo. Para o exemplo da figura abaixo, o grau de conectividade de arestas do grafo G=2.

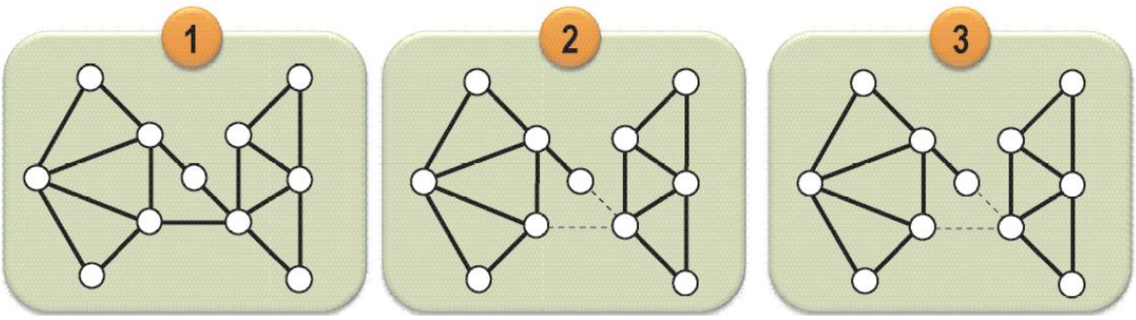


Fig. 1.8 – Conectividade em arestas

Se G é um grafo desconexo então Cv = Ce = 0.

. A soma total dos graus de todos os nós de um grafo é sempre par

A prova pode ser realizada por indução:

. Suponha um grafo sem arcos. Todos os seus nós têm grau zero e portanto a soma geral dos graus dos vértices é zero, ou seja, é par;
. Como hipótese, suponha que para todo grafo de n arcos a soma dos graus de todos os nós é par;
. Suponha um grafo G composto por (n+1) arcos. Seja G' um grafo igual a G exceto com menos um arco. Portanto G' tem n arcos e pela hipótese tem como soma total dos graus de seus nós um número par.
. A inclusão do arco removido faz com a soma dos graus seja aumentada de 2 unidades. Ou seja, o grau dos nós constituintes do arco é incrementado de 1, portanto como consequência, a soma dos graus dos nós de G é um número par.

Os cortes de nós e arcos de cardinalidade mínima de G são respectivamente os subconjuntos {5} e {(3,5),(4,5)} . Portanto, as **conectividades** de nós e arestas desse grafo são respectivamente iguais a 1 e 2.

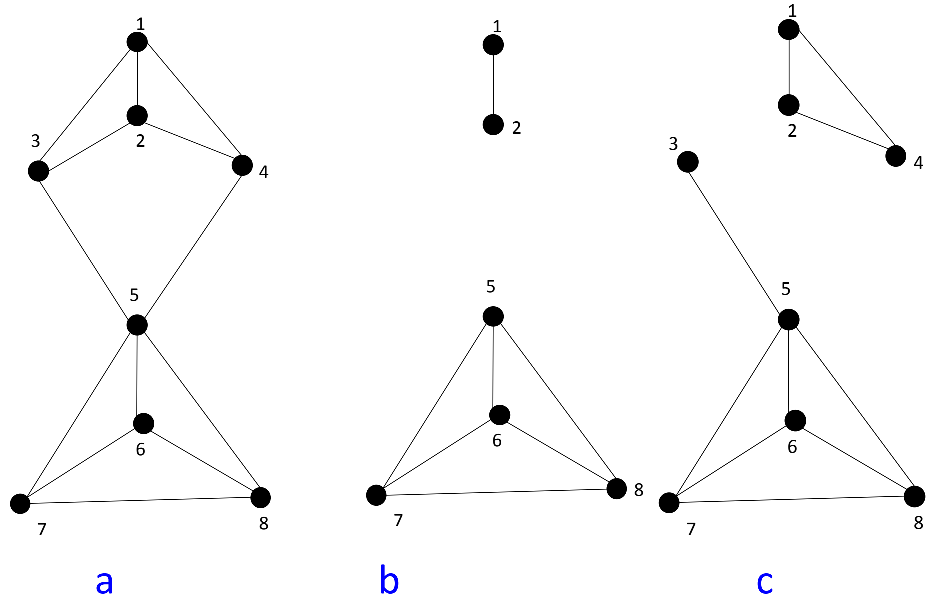
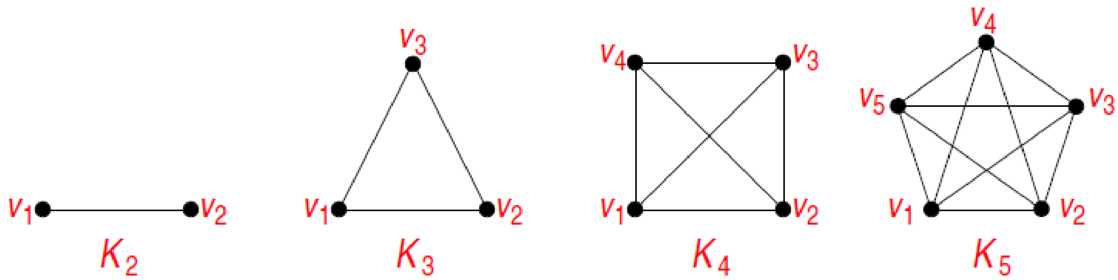


Fig. 1.9 – Cortes de nós e arestas

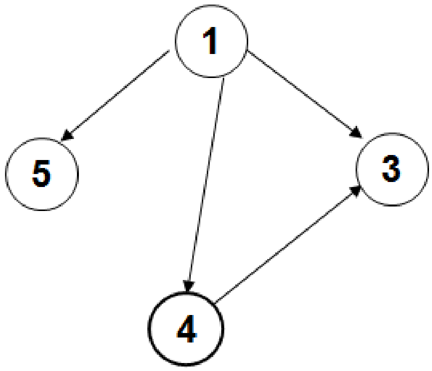
. **Distância**: mede a distância relativa entre diferentes vértices de um grafo. Dado um grafo G conexo, a distância entre os nós v e w é dada por d(v,w) que corresponde ao número de arestas do menor caminho que liga v a w.

. **Caminhos disjuntos**: Dois percursos entre os vértices v e w de um grafo G(V,E) são disjuntos se não houver interseção de arestas.

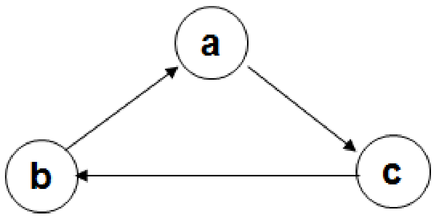
. **Grafo completo**: é um grafo no qual dois nós distintos quaisquer são adjacentes, ou seja, todos os vértices tem grau máximo. A figura abaixo apresenta exemplos de grafos completos com 2, 3, 4 e 5 vértices.



. **Grafo simplesmente conexo**: Um grafo dirigido G = (V,E) é simplesmente conexo se todo par de vértices é unido por ao menos um caminho no grafo correspondente não direcionado. Ou seja, um grafo G é conexo (ou conectado) se e somente se para cada partição de seus vértices em dois conjuntos não vazios, existe uma aresta que pertence a ambos os conjuntos.



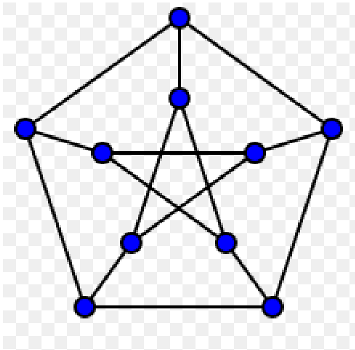
. **Grafo fortemente conexo**: Um grafo dirigido G = (V,E) é fortemente conexo se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.



. **Circunferência de um grafo:** A circunferência de um grafo G corresponde ao comprimento do maior ciclo de G

. **Contorno (girth) de um grafo:** O girth de um grafo corresponde ao comprimento do menor ciclo em um grafo G. Para os grafos que não possuem ciclos considera-se nestes casos que o contorno é infinito.

Por exemplo, o grafo abaixo representa o grafo de Petersen e possui um contorno de 5.



Exercício: Considere um grafo G com contorno igual à 4 onde todos os vértices do grafo possuem grau K. Prove que G tem pelo menos 2K vértices. Determine todos os grafos com exatamente 2K vértices.

Exercício: Considere um grafo G com contorno igual à 5. Prove que se todos os vértices de G tem um grau de pelo menos K, então o grafo G tem pelo menos K**2 + 1 nós.

. **Quantidade de grafos distintos com n vértices**: O número total de grafos distintos com n vértices |V| é dado por:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{(|V|^2-|V|)}{2}}$$

que representa a quantidade de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de:

$$\frac{n^2-n}{2} = \frac{(|V|^2-|V|)}{2}$$

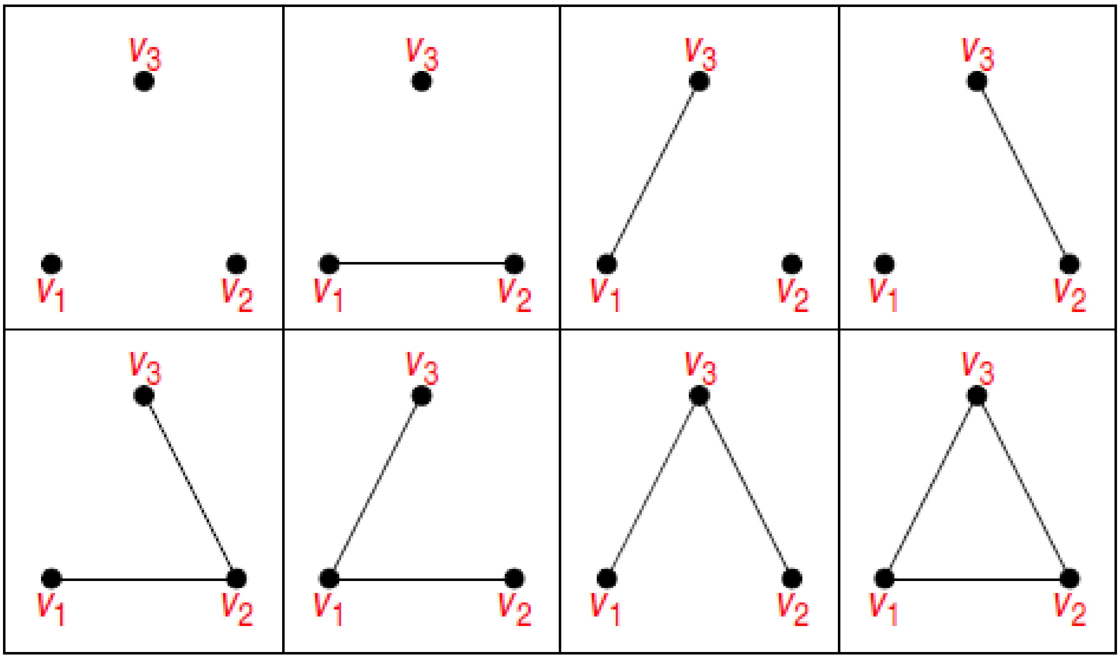
possíveis arestas de um grafo com n vértices.

Exemplo: Quantos grafos distintos com 3 vértices existem?
Um grafo com 3 vértices v1, v2 e v3 possui no máximo 3 arestas, ou seja, E = {v1v2; v1v3; v2v3}. O número de subconjuntos distintos de E é dado por $2^{|E|}$, ou seja:

$$2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{3^2-3}{2}} = 2^3 = 8$$

Que é representado pelo seguinte conjunto de vértices:
0; {v1v2}; {v1v3}; {v2v3}; {v1v2; v2v3}; {v1v3; v2v3}; {v1v2; v1v3}; {v1v2; v1v3; v2v3}

Portanto, para cada elemento (subconjunto) do conjunto potência de E temos um grafo distinto associado, ou seja, o número total de grafos com 3 vértices é 8, conforme apresentado na figura abaixo.



Os **componentes fortemente conexos** de um grafo dirigido são conjuntos de vértices que são mutuamente alcançáveis. Um grafo dirigido fortemente conexo tem apenas um componente fortemente conexo.

Dada a figura 1.10, os componentes fortemente conexos do grafo H são:

H1 : V1 = {v0; v1; v2; v3}
H2 : V2 = {v4}
H3 : V3 = {v5}

O conjunto {v4; v5} **não é um componente fortemente** conexo já que o vértice v5 não é alcançável a partir do vértice v4.

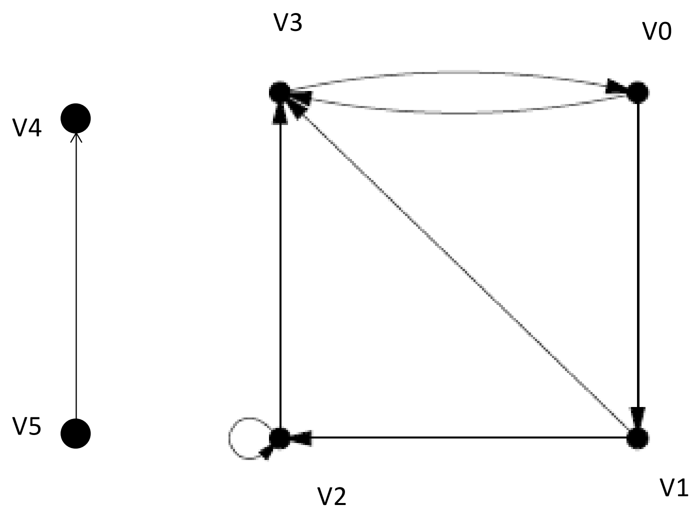


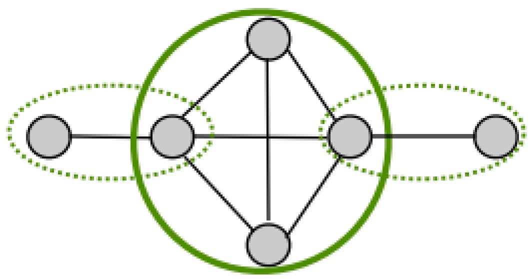
Fig. 1.10 – Componentes fortemente conexos

. Subgrafo induzido por vértices: Seja V´ um subconjunto não vazio de V. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é V´ e o conjunto de arestas é o conjunto de todas as arestas de G com ambos extremos em V´ é chamado de subgrafo de G induzido por V'. Portanto, G[V’] é um subgrafo induzido de G por V´.

. Subgrafo induzido por arestas: Seja E´ um subconjunto não vazio de arestas de E. O subgrafo de G cujo conjunto de vértices é o conjunto dos extremos das arestas em E´ é chamado de subgrafo de G induzido por arestas.

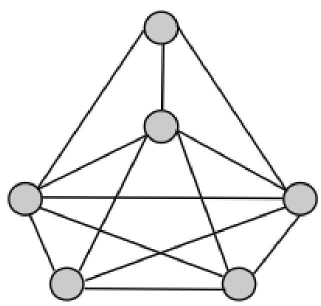
. Subgrafos disjuntos: Dois grafos G1e G2 que são subgrafos de G, os mesmos são disjuntos em vértices se V(G1) ∩ V(G2) = ∅

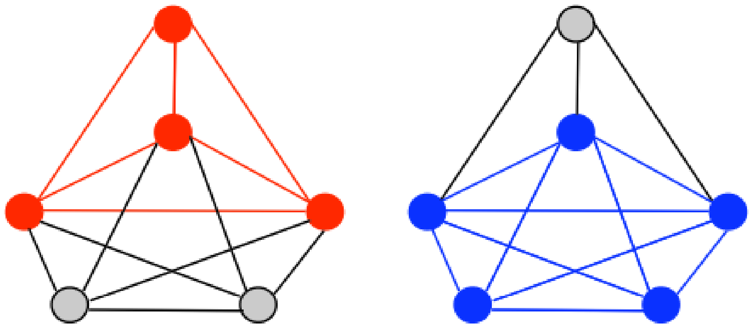
. Clique: Corresponde a um grafo completo que faz parte (está dentro) de outro grafo. Dado G = (V, E), G' = (V', E') é um clique de G se G' é subgrafo de G e G' é um grafo completo. Ou seja, no clique existe uma aresta entre cada par de nós distintos.



Por exemplo, no grafo da figura 1.13 o subgrafo composto pelos nós {2,3,4,6} é um clique de tamanho 4. O subgrafo {1,3,5} é um conjunto independente de nós de tamanho 3.

Exercício: Dado o grafo G abaixo, quantos cliques são possíveis ?



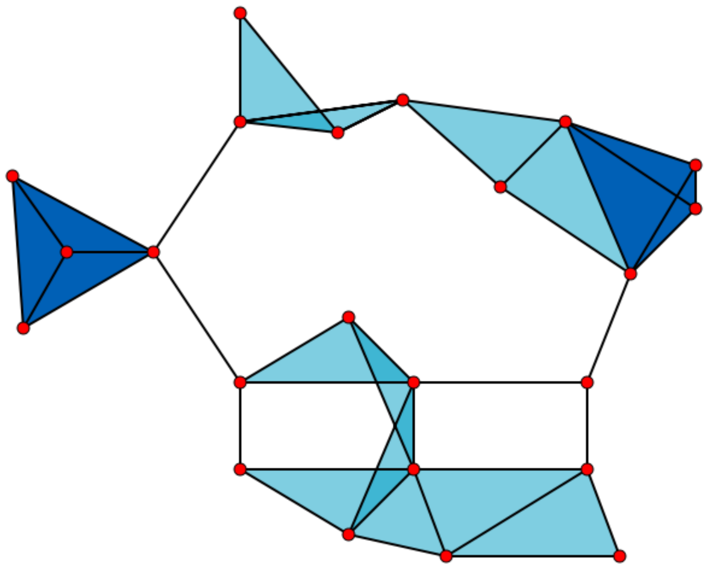


Exemplo: Dado que você decidiu almoçar no Buffet a quilo, encontre neste Buffet a relação de porções de alimentos (massas, carnes, verduras, etc...), que combinam todas entre si e que você pode se servir e colocando todas as porções no mesmo prato. Modele o problema utilizando um grafo.

Clique maximal: Um clique maximal é um clique que não está incluído em um clique maior, ou seja, o mesmo não pode ser estendido através da adição de um vértice. Note-se, portanto, que cada clique está contido em um clique maximal.

Clique máximo: Um **clique máximo** é aquele que dado um grafo G possui o maior número de vértices.

Como exemplo, o grafo da figura abaixo possui 23 cliques de 1 vértice (vértices), 42 cliques de 2-vértice (bordas), 19 cliques de 3 vértice (triângulos azuis escuros), e dois cliques de 4 vértices (áreas azuis escuras). Os dois azul escuro 4 cliques são ambos maximal e máximo, bem como o número do clique do grafo é 4.



Fonte: Wikipedia

Grau de um nó: Seja G um grafo e um vértice v de G. O grau de v, denominado grau(v), é igual ao número de arestas que são incidentes a v, com uma aresta que seja um laço contada duas vezes. O grau total de G é a soma dos graus de todos os vértices de G. Por exemplo, o grau do nó 1 da fig. 1.11 é 4.

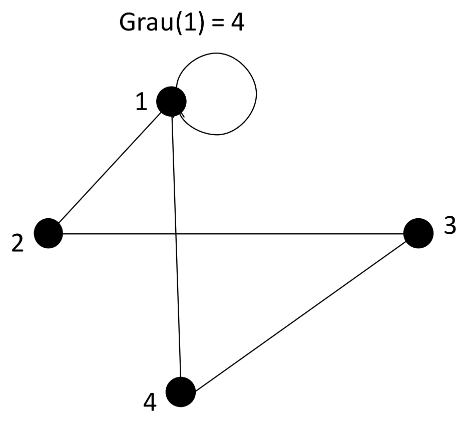


Fig. 1.11 – Grau de um nó

Em um grafo dirigido o grau de um vértice v é o número de arestas quem saem dele (out-deg(v)) mais o número de arestas que chegam nele (in-deg(v)).

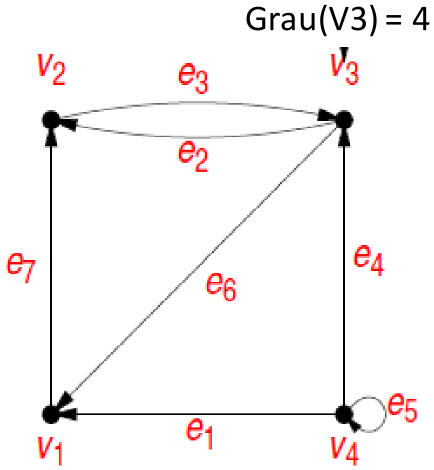


Fig. 1.12 – Grau de um nó de um dígrafo

Em um grafo direcionado G com n vértices sem ciclos, então é possível ordenar os vértices de G como V1,...,Vn.

Os grafos direcionados são utilizados para representar uma máquina de estado finita (FSM) também chamado de autômato finito que possuem um número possível de estados.
Em um autômato finito os vértices representam os estados e as arestas representam as possíveis transições entre os estados.

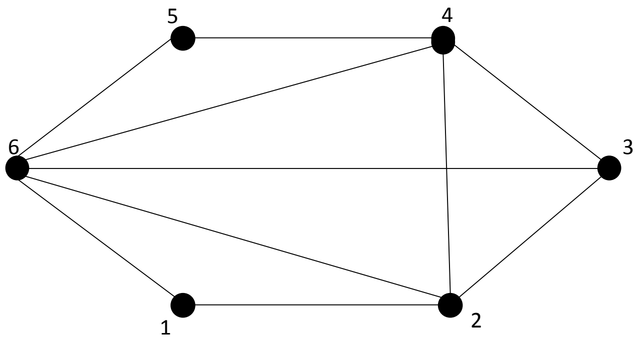


Fig. 1.13 – Clique

. **Grau de entrada**: O grau de entrada de um determinado nó V em um dígrafo corresponde ao número de arcos convergentes à V.

. **Grau de saída**: O grau de saída de V corresponde ao número de arcos divergentes de V.

. **Fonte**: Uma fonte corresponde a um nó com grau de entrada nulo, enquanto que um sumidouro corresponde a um nó com grau de saída nulo.

Para um caminho orientado, os arcos devem se conectar entre si, ou seja, para cada par de arcos que atuam sobre um vértice, um diverge e o outro obrigatoriamente converge para o vértice, ou vice-versa.

. **Grafo K-partido**: existe uma partição dada por:

$P = \{Yi \mid i = 1, ..., k, Yi \cap Yj = \emptyset, i \neq j\}$, do seu conjunto de vértices, tal que não existam ligações entre elementos de um mesmo Yi. Por exemplo, a figura abaixo apresenta um grafo 3-partido:

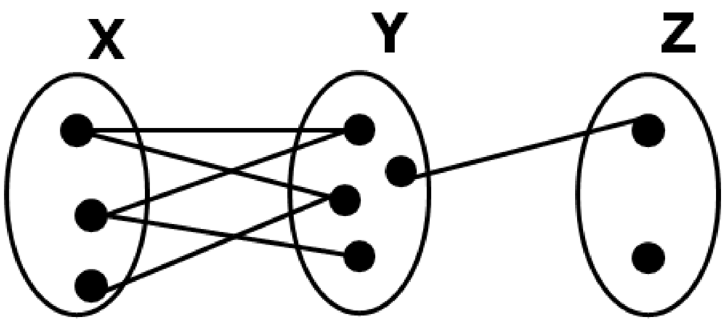


Fig. 1.14 – Grafo 3-partido

. **Grafo bipartido**: Um grafo bipartido é um grafo com vértices v1; v2;...; vm e w1;w2;...;wn, que satisfaz as seguintes propriedades:

∀ i; k = 1; 2;...;m

∀ j; l = 1; 2; ...; n

. ∀ as arestas do grafo, cada aresta conecta algum vértice vi a algum vértice wj;

. ¬∃ uma aresta entre cada par de vértices vi e vk;

. ¬∃ uma aresta entre cada par de vértices wj e wl;

A figura 1.15 apresenta alguns exemplos de grafos bipartidos.

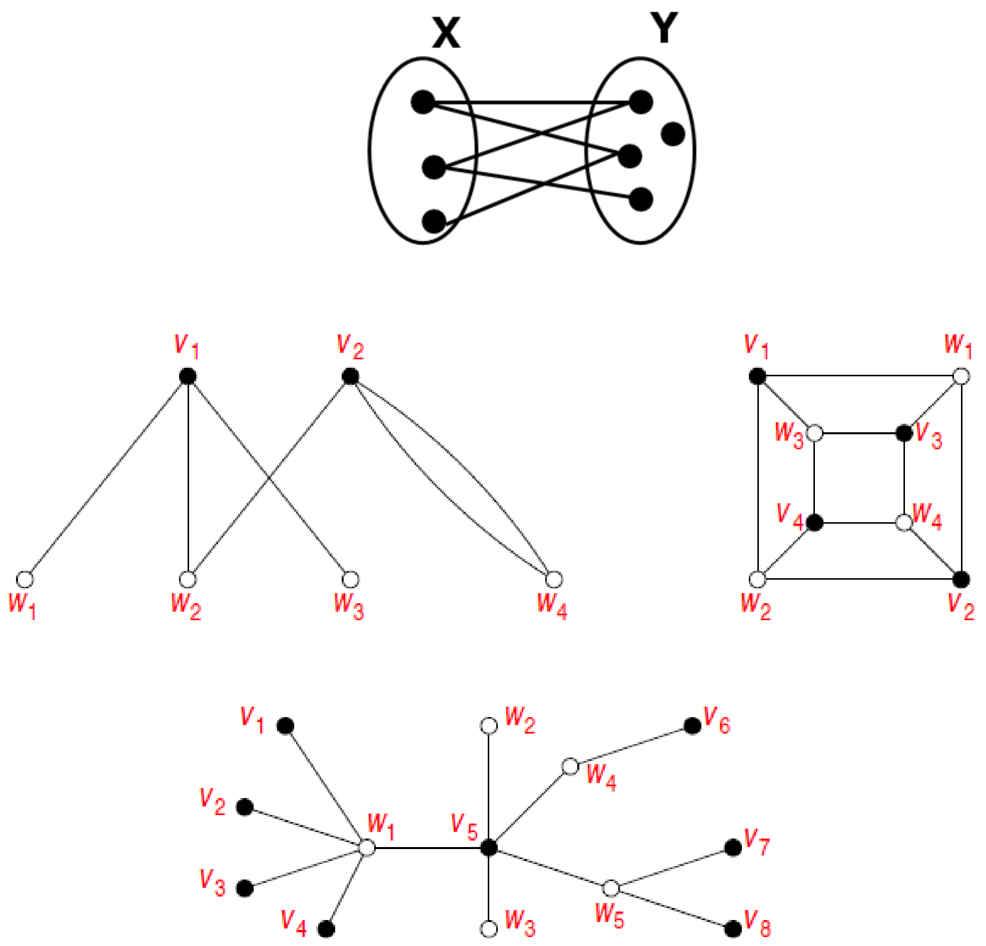


Fig. 1.15 – Grafos Bi partidos

. **Grafo bipartido completo**: quando seus nós podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos não vazios N1 e N2, tais que dois nós são adjacentes se, e somente se, um deles pertence a N1 e o outro pertence a N2. Se |N1| = m e |N2| = n, um tal grafo é denotado por $K_{m,n}$.

$\forall$ i; k = 1; 2;...;m $\wedge$ $\forall$ j; l = 1; 2;...; n

a. $\exists$ uma aresta entre cada par de vértices vi e wj;

b. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices vi e vk;

c. $\neg\exists$ uma aresta entre cada par de vértices wj e wl;

Portanto, um grafo bipartido G com partes representadas por A e B é dito completo se tem |A|.|B| arestas.

Considere o grafo da figura 1.16. Os nós podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos: {1,2} e {3,4,5}, tais que dois nós quaisquer escolhidos no mesmo conjunto não são adjacentes, mas dois nós quaisquer escolhidos em cada conjunto são adjacentes.

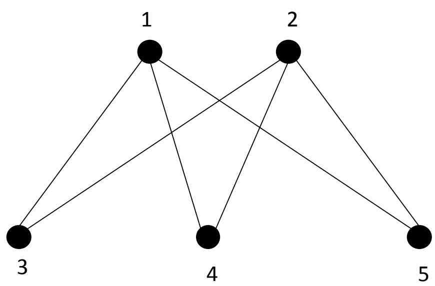


Fig. 1.16 – Grafo bi partido completo $K_{2,3}$.

Um grafo é bipartido se e somente se ele não possui ciclo impar.

Suponha que o grafo G é bipartido com a partição (X,Y). Considere um ciclo C dado por $V_0\, V_{1\ldots}\, V_K\, V_0$, e que seja de G. Considerando que: V_0 pertence a X , que V_K pertence a Y e que $V_0\, V_1$ Ɛ a E , portanto, V_1 Ɛ a Y. Assim, V_{2i} Ɛ a X , e V_{2i+1} Ɛ a Y, onde K = 2i + 1, para qualquer valor de i.

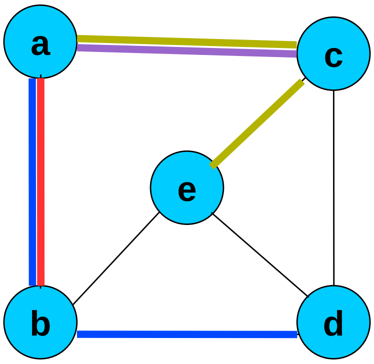
. **União de grafos**: A união de dois grafos G1 e G2 é definida como:

$$G = (V, A) = G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), A(G_1) \cup A(G_2))$$

A união de grafos G1,...,Gk é dada por: G1 U G2 U...U Gk. Quando um grafo é expresso pela união de dois ou mais subgrafos, um arco de G pode pertencer a mais de um subgrafo. Esta é característica do processo de união, já que no processo de decomposição de um grafo, cada arco pertence somente a um subgrafo.

. **Excentricidade de um nó**: A Excentricidade de um nó E(v) corresponde ao valor da maior distância entre v e qualquer outro vértice de G.

Dado o exemplo da figura 1.17, a Excentricidade do nó ***a*** é igual a 2.

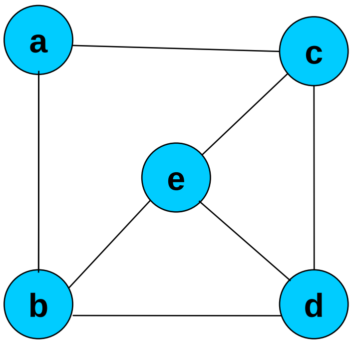


d(a,b) = 1
d(a,c) = 1
d(a,d) = 2
d(a,e) = 2

Fig. 1.17 – Excentricidade de um nó

. **Raio de um grafo**: O raio de um grafo é a **menor** das excentricidades existentes em G.

Por exemplo, dada a figura 1.18 o raio tem tamanho igual a 2.



e(a) = 2
e(b) = 2
e(c) = 2
e(d) = 2
e(e) = 2

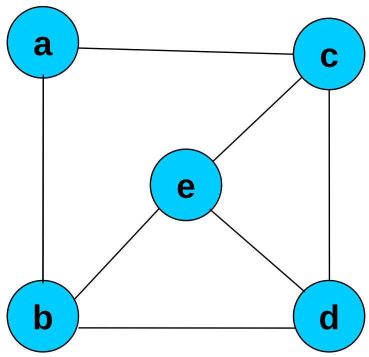
Fig. 1.18 – Raio de um grafo

. **Diâmetro de um grafo**: O Diâmetro de um grafo G é a **maior** das excentricidades existentes em G.

. **Nó periférico**: Um nó periférico de um grafo G é um nó cuja excentricidade é igual ao diâmetro.

. **Centro de um grafo**: O conjunto de nós com excentricidade **mínima** em um grafo é denotado centro do grafo.

Por exemplo, no exemplo da figura 1.19, o centro do grafo é dado pelo nó.



e(a) = 2
e(b) = 2
e(c) = 2
e(d) = 2
e(e) = 2

Fig. 1.19 – Centro de um grafo

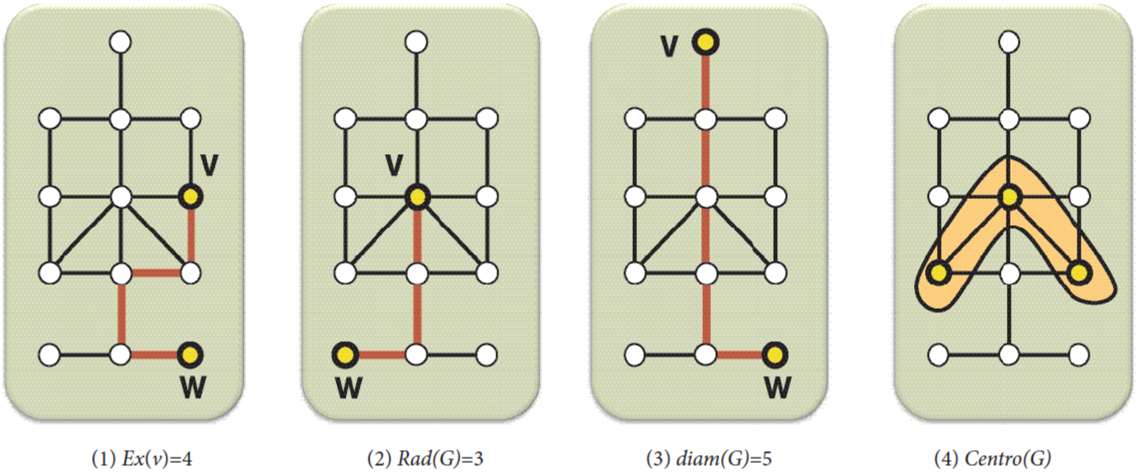
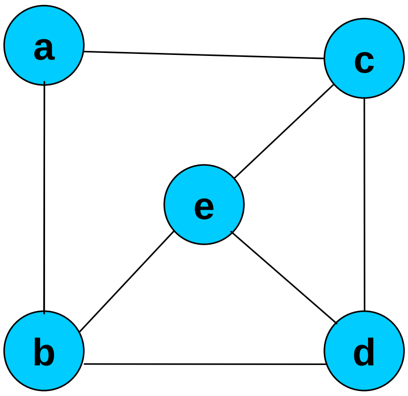


Fig. 1.20 – Cálculo da excentricidade, raio, diâmetro e centro de um grafo G

. **Mediana de um grafo**: Corresponde ao nó v para o qual a soma das distâncias aos demais nós é mínima.

Dada a figura 1.20, a mediana do grafo pode ser os nós: b,c,d ou e.



sd (a) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6
sd (b) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5
sd (c) = 1 + 2 + 1 + 1 = 5
sd (d) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5
sd (e) = 2 + 1 + 1 + 1 = 5

Fig. 1.20 – mediana de um grafo

Exercício: Responda verdadeiro ou falso para cada uma das declarações abaixo:

. ( ) Todo grafo desconexo possui um vértice isolado

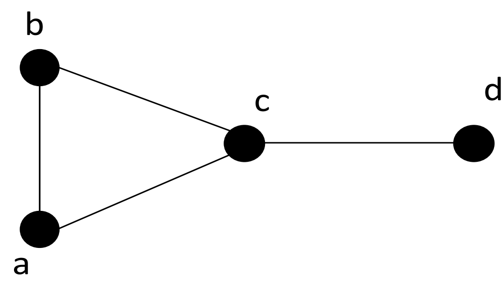
. ( ) Um grafo é conectado se e somente se algum vértice (nó) está conectado a todos os outros vértices.

. ( ) O conjunto de arestas de todo caminho fechado pode ser particionado em conjunto de arestas em ciclos.

. ( ) Um grafo $\boldsymbol{K_4}$ tem um caminho que não é um ciclo e nem um caminho elementar.

. ( ) Dado um grafo G simples, a união de um conjunto de arestas de nós distintos u e v deve conter um ciclo.

Exercício: No grafo G abaixo encontre os caminhos que são maximais; os cliques maximais; caminhos máximos e cliques máximos.

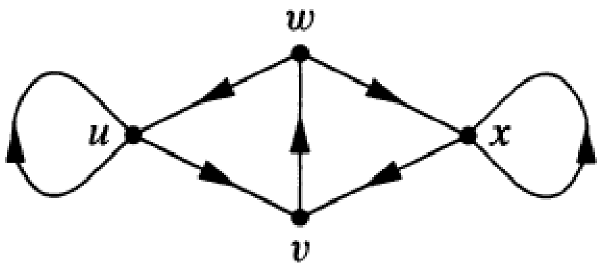


Exercício: Um cubo com dimensão K corresponde a um grafo simples em que os vértices são identificados por K-tuplas com entradas em {0,1} e as arestas interligam vértices que se diferenciam em exatamente uma posição. Construa o grafo na forma de cubo de dimensão e (K =3) identificando cada vértice pela combinação de 0s e 1s.

Após a construção do cubo identifique se o mesmo representa um grafo bipartido.

Exercício: Dado o dígrafo G abaixo, a separação do mesmo em dois consiste em um grafo G` bipartido em em que os conjunto de partes G- e G+ são cópias de G. Para cada vértice x Ɛ G existe um vértice X+ Ɛ G+ e X- Ɛ G- . Para cada aresta de u para v em G , existe uma aresta com vértices terminais em G+ e G- respectivamente.

Dado o dígrafo G abaixo, determine o grafo bipartido G' que é o resultado da divisão do dígrafo G.



Exercício: Prove que todo grafo com n vértices com pelo menos n arestas contêm um ciclo.

***Observação: Os conceitos de subgrafos, decomposição e união aplicam-se tantos aos grafos quanto aos dígrafos*.**

. **resolução de exercícios.**