

# ANÁLISE DE VARIÂNCIA

Comparação de médias para  
mais de duas populações



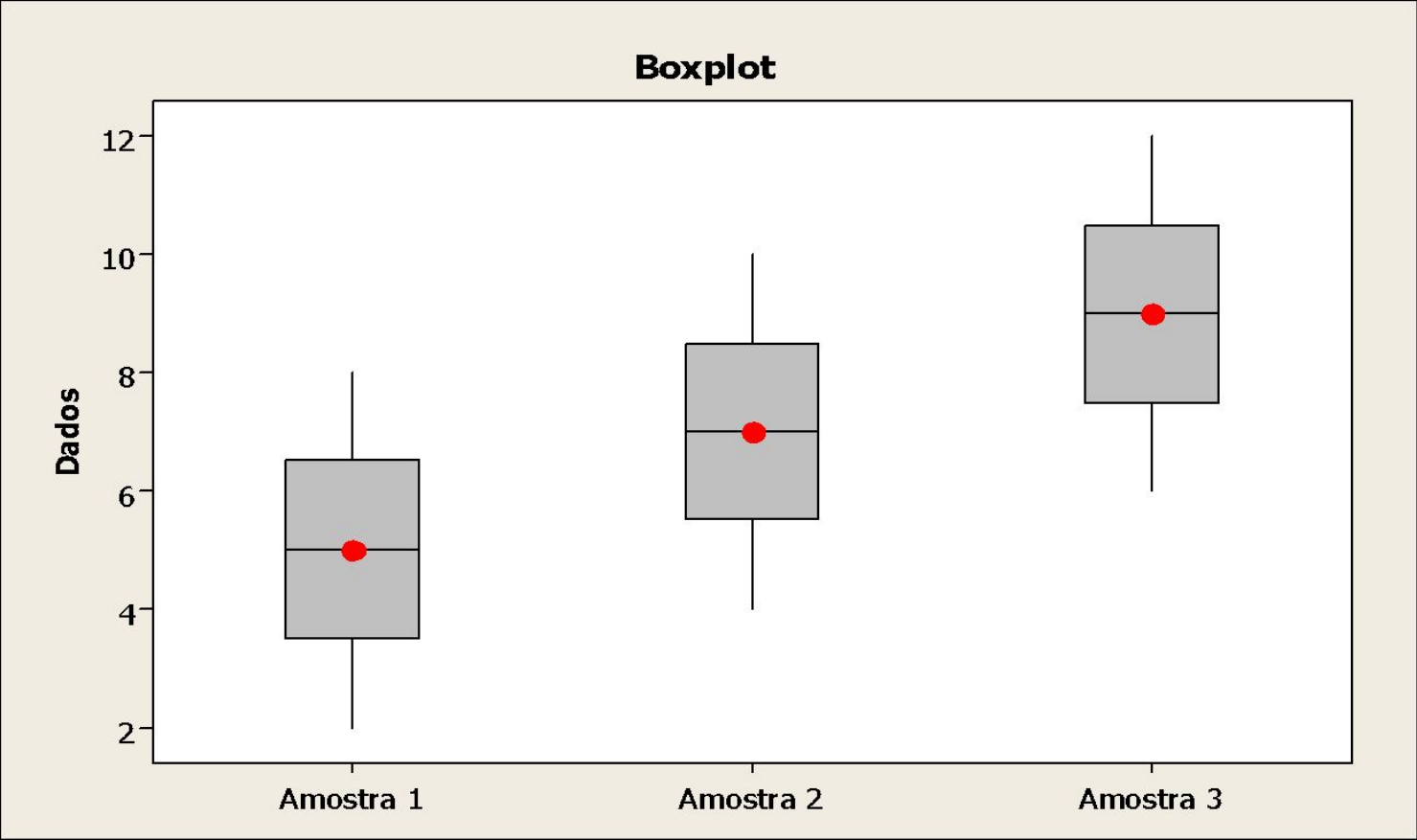
- Conhecemos os testes de hipóteses para a média/proporção de uma população, para a diferença entre médias/proporções de duas populações e para a comparação de variâncias de duas populações.
- Agora, o procedimento de teste de hipóteses será utilizado para comparar as médias de mais de duas populações.
- *A análise de variância* ou ANOVA é um teste de hipóteses para médias de mais de duas populações.

## Aplicações:

- Comparar a eficiência de diversas marcas de remédios para o tratamento de uma mesma doença.
- Comparar o consumo em km/litro de um modelo de carro abastecido com combustíveis do mesmo tipo, porém de marcas diferentes.
- Comparar a eficiência de uma lavoura tratada com diferentes fertilizantes.
- Comparar o tempo de reação de uma pessoa em função do estímulo de luz de quatro cores diferentes.

Exemplo:

Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3
5	7	8
6	9	6
5	7	10
4	6	11
	6	9
		10



- A diferença entre as três médias é apenas consequência da variação amostral?
- A diferença entre as médias das amostras é consequência da variação amostral ou é uma evidência da diferença entre as médias das populações?

- A variabilidade total das amostras pode ser dividida em duas partes:
  - Variabilidade devido ao fato de que as populações são diferentes, denominada variabilidade *entre* (*entre as populações*).
    - Quanto maior for a variabilidade *entre*, mais forte é a evidência de que as médias das populações são diferentes.
  - Variabilidade devido à diferenças *dentro* de cada amostra, denominada variabilidade *dentro*.
    - Quanto maior for a variabilidade *dentro*, maior será a dificuldade para concluir que as médias das populações são diferentes.

# Exigências da Anova

- As populações têm a mesma variância.
- As amostras são retiradas de populações com distribuição normal.
- As amostras são independentes.



- O teste de hipóteses para comparação de  $k$  amostras é estabelecida da seguinte forma:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$H_1$ : Nem todas as populações têm a mesma média.

- A distribuição  $F$  conduzirá a decisão de aceitar o rejeitar a hipótese nula, comparando o valor da estatística de teste  $F$

$$F = \frac{\text{Variância entre}}{\text{Variância dentro}} = \frac{s_e^2}{s_d^2}$$

com o valor  $F$  tabelado correspondente ao nível de significância  $\alpha$  adotado.

- F grande (maior que o valor tabelado) indica que Variância entre > Variância dentro.
- Logo F grande é evidência contra a hipótese nula. Logo, se  $F > F_{\text{tabelado}}$  rejeitamos a hipótese nula.
- F pequeno (menor que o valor tabelado) indica que Variância entre < Variância dentro.
- Logo F pequeno evidência a favor da hipótese nula. Logo, se  $F \leq F_{\text{tabelado}}$  não rejeitamos a hipótese nula.

## Variância dentro

$$s_d^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)s_j^2}{n_T - k} = \frac{SQD}{n_T - k}$$

$n_j$ : tamanho da  $j$ -ésima amostra.

$k$ : número de amostras.

$s_j^2$ : variância da  $j$ -ésima amostra.

$n_T$ : número total de dados.

**SQD: Soma de Quadrados Dentro**

## Variância entre

$$s_e^2 = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{k-1} = \frac{SQE}{k-1}$$

$\bar{x}_j$  : média do grupo  $j$

$\bar{x}$  : média geral

$k$  : número de amostras

$n_j$  : tamanho da  $j$ -ésima amostra

**$SQE$  : Soma de Quadrados Entre**

## Estatística F

$$F = \frac{\text{Variância entre}}{\text{Variância dentro}} = \frac{s_e^2}{s_d^2} = \frac{SQE / k - 1}{SQD / n_T - 1} = \frac{QME}{QMD}$$

QME: Quadrado Médio Entre

QMD: Quadrado Médio Dentro

## Variância total

$$s_T^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_T} (x_i - \bar{x})^2}{n_T - k} = \frac{SQT}{n_T - k}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^{n_T} (x_i - \bar{x})^2 = SQD + SQE$$

$\bar{x}$ : média geral

$n_T$ : número total de dados

$SQT$ : Soma de Quadrados Total

## Tabela de Análise de Variância (ANOVA)

<i>Fonte</i>	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>QM</i>	<i>F</i>
<i>Entre</i>	$k-1$	$SQE$	$QME = SQE / (k-1)$	$\frac{QME}{QMD}$
<i>Dentro</i>	$n_T - k$	$SQD$	$QMD = SQD / (n_T - k)$	
<i>Total</i>	$n_T - 1$	$SQT$		

Exemplo:

Amostra 1	Amostra 2	Amostra 3
5	7	8
6	9	6
5	7	10
4	6	11
	6	9
		10



Resultados:

<i>Medida</i>	<i>Amostra 1</i>	<i>Amostra 2</i>	<i>Amostra 3</i>
<i>Média</i>	5	7	9
<i>Variância</i>	0,67	1,500	3,2
<i>n</i>	4	5	6

$$n_T = 15 \quad k = 3 \quad \bar{x} = 7,27$$

## Tabela de Análise de Variância (ANOVA)

<i>Fonte</i>	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>QM</i>	<i>F</i>
<i>Entre</i>	2	38,93	$38,93/2=19,47$	$19,47/2=9,73$
<i>Dentro</i>	12	24,00	$24,00/12=2,00$	
<i>Total</i>	14	62,93		

- $F = 9,73$  indica que a variação entre as amostras é 9 vezes maior que a variação dentro das amostras.
- Adotando 5% de significância:  
 $F$  tabelado com 2 gl no numerador e 12 gl no denominador  
 $F$  tabelado = 3,885
- $F = 9,73 > F$  tabelado = 3,885.
- Conclusão: rejeitamos a hipótese nula ao nível de 5% de significância, ou seja, nem todas as populações tem a mesma média.

- valor-p =  $P(F > 9,73) = 0,003$

- Para  $\alpha=0,05$  (5% de significância): rejeitamos a hipótese nula.

- Para  $\alpha=0,01$  (1% de significância): rejeitamos a hipótese nula.

## Exercício

A anemia é uma doença que afeta muitas pessoas e que pode ter diversas origens. Pretendendo-se avaliar possíveis diferenças entre diferentes tratamentos para esta doença, planejou-se uma experiência com 120 indivíduos anêmicos, divididos aleatoriamente em três grupos de 40, aos quais se atribuiu cada um dos tratamentos.

O primeiro tratamento era constituído apenas por uma dieta rica em ferro. O segundo tratamento combinava um suplemento de ferro com a dieta do primeiro tratamento e o último acrescentava um complexo vitamínico. No sentido de avaliar possíveis diferenças entre os tratamentos, efetuou-se uma ANOVA com base nos valores de hemoglobina dos 120 indivíduos após um período de 3 meses de tratamento.

- a) Estabeleça as hipóteses de interesse.
- b) Construa a tabela ANOVA sabendo que

$$SQD=121,4 \quad SQT=122,9$$

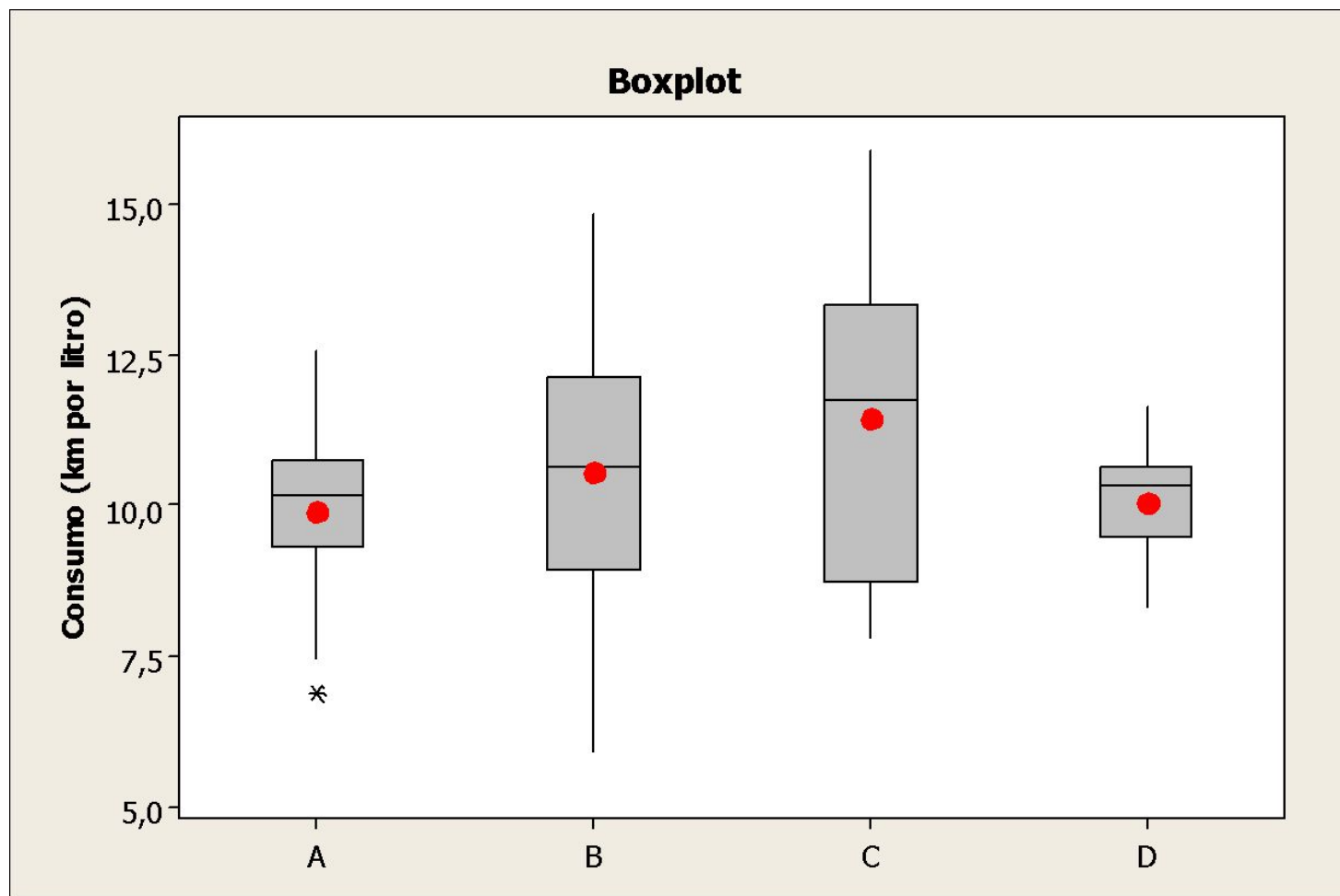
- c) Qual a conclusão ao nível de 5% de significância?

## Exercício

Um estudo foi realizado para verificar se o consumo médio de um modelo de carro abastecido com combustíveis de marcas diferentes era o mesmo ou não.

30 carros foram abastecidos com o combustível da marca A, 50 carros com o combustível da marca B, 20 carros com o combustível da marca C e 37 carros com o combustível da marca D. O consumo foi medido em km por litro.

Os dados estão representados no boxplot abaixo.





- a) Estabeleça as hipóteses de interesse.
- b) Construa a tabela ANOVA sabendo que

$$SQD=384,2 \quad SQE=34,7$$

- c) Qual a conclusão ao nível de 5% de significância?
- d) O valor-p para este teste é 0,009. Qual a conclusão ao nível de 1% de significância?

# Comparações Múltiplas

- Suponha que através da Anova para comparação de  $k$  médias concluimos que a hipótese nula deve ser rejeitada ao nível alfa de significância, ou seja, concluimos que nem todas as populações têm a mesma média.
- Neste caso devemos usar um dos testes de Comparações Múltiplas para identificar qual ou quais grupos tem médias diferentes das demais.
- Testes de Comparações Múltiplas: teste de Tukey e teste de Scheffé.

# Teste de Tukey

Utilizado quando se deseja comparar todos os pares de médias de  $k$  populações, adotando-se um único nível de confiança.

$$H_0: \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1: \mu_i - \mu_j \neq 0 \quad \forall i \neq j$$

O teste consiste em calcular um valor ( $D_{crit}$ ), acima do qual, a diferença entre duas médias amostrais (em módulo) é significativamente diferente de zero.

$$D_{crit} = \frac{q_{k, n_T - k}}{\sqrt{2}} \sqrt{QMD \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

onde  $q_{k, n_T - k}$  representa o valor tabelado (da distribuição da amplitude studentizada - "studentized range") associado ao nível de significância adotado.

# Distribuição da Amplitude *Studentizada*

$$P(q_{r=k, v=n_T-k} > q_{tab}) = 0,05$$

	<i>r</i>																		
<i>v</i>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.08	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.3	10.5	10.7	10.8	11.0	11.1	11.2
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

Exemplo: comparação de 4 médias

	A	B	C	D	
	12	14	19	24	
	18	12	17	30	
		13	21		Total
Total	30	39	57	54	180
Média	15	13	19	27	18
<i>n</i>	2	3	3	2	10

## **ANOVA** (Análise de Variância)

Fonte de Variação	SQ	Graus de Liberdade	QM	F	Valor - p
Entre	258	3	86	11,2	0,0072
Dentro	46	6	7,67		
Total	304	9			

Conclusão: rejeito  $H_0$  a 5%, ou seja, pelo menos uma média é diferente das demais.

$$\alpha = 0,05$$

$$D_{crit} = \frac{q_{k,n_T-k}}{\sqrt{2}} \sqrt{QMD \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = \frac{q_{4,10-4}}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

$$D_{crit} = \frac{q_{4,6}}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right)}$$

Médias

B=13   A=15   C=19   D=27

### Comparando médias de B e A:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 15 - 13 = 2 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)} = 8,76$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e A.



Comparando médias de B e C:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 19 - 13 = 6 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)} = 7,83$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e C.

### Comparando médias de B e D:

$$\begin{array}{c} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 27 - 13 = 14 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)} = 8,76$$

$$D > D_{crit}$$

Conclusão: rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e D.

### Comparando médias de A e C:

$\bar{X}_i$

13

15

19

27

$$D = 19 - 15 = 4 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right)} = 7,83$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre A e C.

Comparando médias de A e D:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 27 - 15 = 12 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = 9,60$$

$$D > D_{crit}$$

Conclusão: rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre A e D.

Comparando médias de C e D:

$\bar{X}_i$

13

15

19

27

$$\begin{array}{l} 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \quad D = 27 - 19 = 8 \quad D_{crit} = \frac{4,90}{\sqrt{2}} \sqrt{7,67 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)} = 8,76$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre C e D.



# Resultado Teste de Tukey

B    A    C    D

# Teste de Scheffé

$$\begin{aligned} H_0: \mu_i - \mu_j &= 0 \\ H_1: \mu_i - \mu_j &\neq 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

Neste teste a hipótese nula é rejeitada se

$$\left| \overline{x}_i - \overline{x}_j \right| > \sqrt{(k-1)F_{QMD}} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} = D_{crit}$$

onde  $F$  é o valor tabelado da distribuição  $F$  com  $(k-1)$  graus de liberdade no numerador e  $(n_T - k)$  graus de liberdade no denominador para o nível de significância adotado.

Exemplo: comparação de 4 médias

	A	B	C	D	
	12	14	19	24	
	18	12	17	30	
		13	21		Total
Total	30	39	57	54	180
Média	15	13	19	27	18
<i>n</i>	2	3	3	2	10



## **ANOVA** (Análise de Variância)

Fonte de Variação	SQ	Graus de Liberdade	QM	F	Valor - p
Entre	258	3	86	11,2	0,0072
Dentro	46	6	7,67		
Total	304	9			

Conclusão: rejeito  $H_0$  a 5%, ou seja, pelo menos uma média é diferente das demais.

$$\alpha = 0,05$$

$$D_{crit} = \sqrt{(k-1) F_{QMD}} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} = \sqrt{(4-1) 4,757 7,67} \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

$$D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

Médias

B=13   A=15   C=19   D=27

Comparando médias de B e A:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 15 - 13 = 2 \quad D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 9,55$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e A.

Comparando médias de B e C:

$\bar{X}_i$

$$\begin{array}{l} 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 19 - 13 = 6$$

$$D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 8,54$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e C.

Comparando médias de B e D:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 27 - 13 = 14 \quad D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 9,55$$

$$D > D_{crit}$$

Conclusão: rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre B e D.

Comparando médias de A e C:

$\bar{X}_i$

13

15

19

27

$$\begin{array}{l} 15 \\ 19 \end{array} \boxed{\phantom{00}} \text{---} D = 19 - 15 = 4$$

$$D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 9,55$$

$$D < D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre A e C.

Comparando médias de A e D:

$$\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \bar{X}_i \\ 13 \\ 15 \\ 19 \\ 27 \end{array}} \right\} D = 27 - 15 = 12 \quad D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 10,46$$

$$D > D_{crit}$$

Conclusão: rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre A e D.

### Comparando médias de C e D:

$\bar{X}_i$

13

15

19

27

$$\begin{array}{l} 19 \\ 27 \end{array} \boxed{\phantom{00}} \text{---} D = 27 - 19 = 8$$

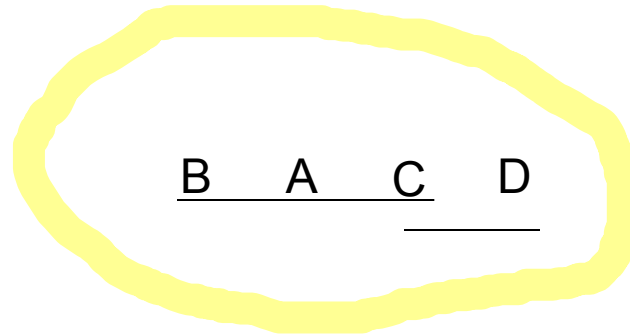
$$D_{crit} = 10,46 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 9,55$$

$$D > D_{crit}$$

Conclusão: não rejeito a hipótese nula de igualdade de médias entre C e D.



# Resultado Teste de Scheffé



# Tukey vs. Scheffé

- Quando as amostras têm tamanhos iguais o teste de Tukey é mais adequado do que o teste de Scheffé.
- Para amostras com tamanhos diferentes, a probabilidade do erro tipo I no teste de Tukey ( $\alpha$ ) é na verdade um pouco menor que o valor especificado. Consequentemente, o poder do teste também é um pouco menor.

$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira})$$

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{nao rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$$

$$1 - \beta = \text{Poder} = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ falsa})$$

# Outros testes para Comparações Múltiplas

- Teste de Duncan
- Teste de Dunnett

O teste de Dunnett serve para comparações múltiplas onde apenas um tratamento serve de referência, quer dizer, deseja-se comparar todos os tratamentos com apenas um. O tratamento de referência pode ser por exemplo o tratamento padrão, não havendo interesse na comparação dos demais tratamentos entre si.

# ANOVA 2 FATORES

## Análise de Variância com Dois Fatores

### *Modelo sem interação*

#### Exemplo 2

Neste exemplo, ao testarmos a hipótese de as três lojas terem volumes médios de vendas iguais, estamos a testar se o **fator Loja** tem influência no volume de vendas.

Note que o volume de vendas deve também sofrer influência de outros factores.

Assim, a variação nas vendas pode estar relacionada não só com a loja, mas também com o desempenho do empregado. Vamos então introduzir no nosso estudo um segundo fator, o **fator Empregado**.

## Exemplo 4

Admitamos então que o Sr Fernando tem cinco empregados que estão igualmente familiarizados com as três lojas. Os dados recolhidos das vendas dos cinco empregados nas três lojas (por conveniência, os mesmos apresentados anteriormente) são os seguintes:

<u>Factor</u> <u>Empregado</u>	<u>Factor Loja</u>			Médias dos Empregados
	Loja 1	Loja 2	Loja 3	$\bar{x}_{\bullet j}$
Emp 1	53	61	51	55
Emp 2	47	55	51	51
Emp 3	46	52	49	49
Emp 4	50	58	54	54
Emp 5	49	54	50	51
Médias das Lojas $\bar{x}_{i\bullet}$	49	56	51	$\bar{\bar{x}}=52$

O **factor Empregado** tem cinco níveis (**Emp1, Emp2,..., Emp5**) e o **factor Loja** tem três níveis (**Loja 1, Loja 2 e Loja3**).

Os dados amostrais estão organizados de acordo com um esquema designado por **classificação cruzada**, uma vez que cada nível de um factor é cruzado com cada nível do outro factor.

Uma observação mais atenta da tabela anterior, mostra que há empregados que, aparentemente, apresentam melhores resultados do que outros.

Deste modo, é razoável pensar que **talvez as lojas não sejam assim tão diferentes umas das outras, no que diz respeito ao volume de vendas, pode é haver também diferenças no desempenho dos empregados.**

Podemos então perguntar:

*A variação nas vendas é explicada apenas pelas lojas onde são efectuadas, ou será que também pode ser explicada pela performance dos empregados?*

No **Exemplo 4** estamos perante um problema ao qual vamos aplicar um outro modelo da ANOVA, a **ANOVA com dois factores** (para o exemplo, factor Loja e factor Empregado), ainda sob os pressupostos de **normalidade, igualdade de variâncias, independência entre as observações** e assumindo adicionalmente que **não há interacção entre os dois factores.**



A ausência de interacção entre os factores significa que, *em termos médios, a diferença entre dois quaisquer níveis do factor A não depende do nível do factor B, isto é, é igual para todos os níveis do factor B, e vice-versa.*

Para o **Exemplo 4** isto significa que os empregados estão igualmente familiarizados com todas as lojas e portanto mantêm o mesmo comportamento em todas elas.

Sendo assim, em média, a diferença entre o desempenho do *empregado i* e do *empregado j* é igual para todas as lojas.

Por outro lado, a diferença entre a *loja i* e a *loja j* é igual para todos os empregados.



## ANÁLISE DE VARIÂNCIA

De um modo geral, os dados com dois factores, o **Factor A** (ou **Factor Coluna**) com  $a$  níveis/grupos e o **Factor B** (**Factor Linha**) com  $b$  níveis, são apresentados numa tabela como a seguinte:

		<u>Factor A</u>				
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	...	A <sub>a</sub>	$\bar{x}_{\bullet j}$
<u>Factor B</u>	B <sub>1</sub>	x <sub>11</sub>	x <sub>21</sub>	...	x <sub>a1</sub>	$\bar{x}_{\bullet 1}$
	B <sub>2</sub>	x <sub>12</sub>	x <sub>22</sub>	...	x <sub>a2</sub>	$\bar{x}_{\bullet 2}$
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	B <sub>b</sub>	x <sub>1b</sub>	x <sub>2b</sub>	...	x <sub>ab</sub>	$\bar{x}_{\bullet b}$
	$\bar{x}_{i\bullet}$	$\bar{x}_{1\bullet}$	$\bar{x}_{2\bullet}$	...	$\bar{x}_{a\bullet}$	$\bar{\bar{x}}$

onde,

$$\bar{x}_{\bullet j} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^a x_{ij}, \quad \bar{x}_{i\bullet} = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b x_{ij}$$

e

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^b \bar{x}_{\bullet j} + \sum_{i=1}^a \bar{x}_{i\bullet}}{a+b} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b x_{ij}}{ab} = \frac{\sum_{j=1}^b \bar{x}_{\bullet j}}{b} = \frac{\sum_{i=1}^a \bar{x}_{i\bullet}}{a}.$$

Recordemos que quando aplicamos a ANOVA com apenas um factor, as fontes de variação dos dados são duas:

- **variação entre os grupos** ou níveis do factor ( $SS_A$ )
- **variação que provem das flutuações aleatórias dentro dos grupos**,  $SS_E$ , e que fica por explicar (residual).

Aplicando o modelo de ANOVA com dois factores, **esperamos reduzir a variação não explicada**, uma vez que esta pode provir da variação entre os grupos do segundo factor e essa passa a ser “contabilizada”.

Para o **Exemplo 2** tínhamos,

Variação total nos dados,  $SS_T = 224$ ,

Variação entre os níveis do factor Loja,  $SS_A = 130$ ,

Variação não explicada ou residual,  $SS_E = 94$ ,

onde,

$$SS_T = SS_A + SS_E$$

Introduzindo um segundo factor, o factor Empregado, esperamos, como já dissemos, reduzir a variação não explicada, pois, parte desta passa a ser explicada pela variação no desempenho dos empregados.

Passamos a ter então três fontes de variação:

- ❖ a variação devida ao factor Loja (medida por  $SS_A$  ou  $SS_{Loja}$ );
- ❖ a variação devida ao factor Empregado (medida por  $SS_B$  ou  $SS_{Emp}$ );
- ❖ a variação não explicada pelo modelo (medida por  $SS_E$ ),

verificando-se agora,

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_E$$

Os cálculos são muito semelhantes aos efectuados na análise anterior, mas agora com mais um factor. Assim, consideramos:

- **Soma dos quadrados entre os grupos ou níveis do factor A:**

$$SS_A = b \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}})^2;$$

- **Soma dos quadrados entre os grupos ou níveis do factor B:**

$$SS_B = a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}})^2.$$

## Exemplo 4

Os cálculos destas medidas são resumidos nos quadros seguintes:

Factor Loja		
	$(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}})$	$(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}})^2$
	-3	9
	4	16
	-1	1
<b>Totais</b>	0	26

$$SS_{\text{Loja}} = 5 \times 26 = 130$$

Factor Empregado		
	$(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}})$	$(\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}})^2$
	3	9
	-1	1
	-3	9
	2	4
	-1	1
<b>Totais</b>	0	24

$$SS_{\text{Emp}} = 3 \times 24 = 72$$

O seguinte passo é o cálculo da soma dos quadrados residual, **SS<sub>E</sub>**, a variação não explicada pelo modelo:

$$\hat{x}_{ij} = \bar{\bar{x}} + (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}}), \quad i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, b$$

Cada resíduo é dado por

$$x_{ij} - \hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{\bar{x}}$$

e tem-se

$$\mathbf{SS_E} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{\bar{x}})^2$$



## Exemplo 4

$\hat{x}_{ij} = \bar{\bar{x}} + (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}})$			$x_{ij} - \hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{\bar{x}}$		
52	59	54	1	2	-3
48	55	50	-1	0	1
46	53	48	0	-1	1
51	58	53	-1	0	1
48	55	50	1	-1	0

$$SS_E = 1^2 + 2^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + \dots + (-1)^2 + 0^2 = 22$$

Comparando com o **Exemplo 2**, salienta-se que se **reduziu a variação não explicada pelo modelo de 94 para 22**. De facto, a variação não explicada no **Exemplo 2**, que valia **94**, está agora decomposta em duas parcelas, a **variação explicada pelo factor Empregado (72)** e a **variação residual (22)** - a variação que continua por explicar.

Finalmente, a soma dos quadrados total, a que mede a variação total dos dados, que já foi calculada no **Exemplo 2**:

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = 224$$



A **Tabela ANOVA com dois factores** tem o mesmo formato que a de um factor, e é construída do seguinte modo:

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados (SS)	Graus de Liberd.	Variância (Soma Média dos Quadrados)	Razões F
Entre Grupos Factor A	$SS_A = b \sum_{i=1}^a (\bar{x}_{i\bullet} - \bar{\bar{x}})^2$	a-1	$MS_A = \frac{SS_A}{a-1}$	$\frac{MS_A}{MS_E}$
Entre Grupos Factor B	$SS_B = a \sum_{j=1}^b (\bar{x}_{\bullet j} - \bar{\bar{x}})^2$	b-1	$MS_B = \frac{SS_B}{b-1}$	$\frac{MS_B}{MS_E}$
Residual	$SS_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet j} + \bar{\bar{x}})^2$	(a-1)(b-1)	$MS_E = \frac{SS_E}{(a-1)(b-1)}$	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$	ab-1		

Para o **Exemplo 4**, temos a seguinte **Tabela ANOVA**:

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados (SS)	g.l.	Variância (Soma Média dos Quadrados)	Razões F
Entre grupos Lojas	$SS_{Loja}=130$	2	$MS_{Loja}=65$	$\frac{MS_{Loja}}{MS_E}=23.6$
Entre grupos Empregados	$SS_{Emp}=72$	4	$MS_{Emp}=18$	$\frac{MS_{Emp}}{MS_E}=6.5$
Residual	$SS_E=22$	8	$MS_E=2.75$	
Total	$SS_T=224$	14		

Testamos por um lado,

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$  (os volumes médios de vendas são iguais nas três lojas)

$H_1: \mu_i \neq \mu_j$  para algum  $i \neq j$  (existem pelo menos duas lojas com volumes médios de vendas diferentes)

Sob  $H_0$ ,

$$F = \frac{MS_{Loja}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1)}^{a-1}.$$

Tem-se:

- Quantil de probabilidade  $(1-0.05)$  da distribuição  $F_8^2$ : 4.46
- R.C.:  $[4.46, +\infty[$
- $F_{obs}=23.6 \in$  R.C., logo rejeitamos  $H_0$ , tal como na aplicação da ANOVA com apenas o factor Loja

Notemos, no entanto, que o valor **observado da estatística de teste F é neste caso maior** do que o obtido na análise anterior (**23.6 > 8.3**) - a variação não explicada é menor. **A rejeição de  $H_0$  é neste caso ainda mais “forte”.**

Por outro lado, também podemos testar

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$  (os cinco emp.'s têm volumes médios de vendas iguais)

$H_1: \mu_i \neq \mu_j$  para algum  $i \neq j$  (existem pelo menos dois empregados com volumes médios de vendas diferentes)

Sob  $H_0$ ,

$$F = \frac{MS_{Emp}}{MS_E} \sim F_{(a-1)(b-1)}^{b-1}.$$

Tem-se:

- Quantil de probabilidade  $(1-0.05)$  da distribuição  $F_8^4$ : 3.84
- R.C.:  $[3.84, +\infty[$
- $F_{obs}=6.5 \in$  R.C., logo rejeitamos  $H_0$ .

Podemos concluir que os dados amostrais revelaram, ao nível de significância de 5%, não só que as lojas são significativamente diferentes, mas também que existem diferenças entre os empregados, no que diz respeito ao volume de vendas semanais e, deste modo, tanto o **factor Loja como o factor Empregado afectam o volume de vendas.**