Aplicació de les cadenes de Markov per analitzar i predir sèries temporals

Tie Liu (Autor corresponent)

Departament de matemàtiques Universitat d'Ankang AnKang, ShanXi, 725000, Xina Correu

electrònic: liutie003@163.com

Programa de Recerca Científica Especialitzada en Recerca Científica de talents d'alt nivell a la Universitat d'Ankang (Programa núm. AYQDZR200705)

Resum

Les cadenes de Markov s'utilitzen habitualment en la modelització de molts problemes pràctics. També són efectives en la modelització de sèries temporals. En aquest article, apliquem el model de cadenes de Markov per analitzar i predir sèries temporals. Algunes sèries es poden expressar mitjançant una cadena de Markov de temps discret de primer ordre i d'altres s'han d'expressar mitjançant un model de cadena de Markov d'ordre superior. Es donen exemples numèrics. Els resultats mostren que el rendiment i l'eficàcia del model de cadena de Markov per predir sèries temporals és molt bo.

Paraules clau: cadenes de Markov, anàlisi de sèries temporals, modelització matemàtica

1. Introducció

Les cadenes de Markov són eines útils per modelar molts sistemes pràctics, com ara sistemes de cues (Ching, 2001 i Sharma, 1995), sistemes de fabricació (Buzacott i Shanthikumar, 1993) i sistemes d'inventari (Ching, Fung i Ng, 2003, pàg. 291–298 i Nahmias, 1997). Les aplicacions de les cadenes de Markov en el modelatge de seqüències de dades categòriques també es poden trobar a (Ching, Fung i Ng, 2002, pàg. 87–199 i MacDonald i Zucchini, 1997). Les sèries temporals es produeixen amb freqüència en moltes aplicacions del món real. Si es poden modelar les sèries temporals amb precisió, es poden fer bones prediccions i també una planificació òptima en un procés de decisió (Ching, Ng i Fung, 2008, pàg. 492–507).

En aquest article, apliquem el model de cadenes de Markov a l'anàlisi i a la predicció de sèries temporals. Algunes sèries es poden expressar mitjançant una cadena de Markov de temps discret de primer ordre i d'altres s'han d'expressar mitjançant un model de cadena de Markov d'ordre superior. Es donen exemples numèrics. Els resultats mostren que el rendiment i l'eficàcia del model de cadena de Markov per predir sèries temporals és molt bo.

2. Model de cadena de Markov

2.1 El model de cadena de Markov de primer

ordre Considerem modelar una sèrie temporal *xt* mitjançant cadenes de Markov de primer ordre que tenen *k* estats E={1,2……k}. Una cadena de Markov de temps discret de primer ordre que té *k* estats satisfà la següent relació:

$$P(x_{t+1}=i \mid x_0=i_0, x_1=i_1, \ldots, x_t=j) = P(x_{t+1}=i \mid x_t=j),$$

on x_t és l'estat d'una sèrie temporal en el temps *t* i *ij ÿE.* Les probabilitats condicionals

$$P(x_{t+1}=i \mid x_t=j)$$

s'anomenen probabilitats de transició d'un pas de la cadena de Markov. Aquestes probabilitats es poden escriure com $p_{ij} = P(x_{t+1} = i \mid x_t = j)$ per a *i* i *j* a E. La matriu $P=(p_{ij})_{k\times k}$ s'anomena matriu de probabilitat de transició d'un pas. Observem que els elements de la matriu *P* satisfan les dues propietats següents:

$$0 \le p_{ij} \le 1 \quad \forall i, j \in E \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad \forall j \in E$$

Un model de cadena de Markov de primer ordre

$$x_{t+1} = \mathbf{P}x_t \tag{1}$$

es construeix per a la sèrie temporal observada.

Tenim la següent proposició ben coneguda per a una matriu de transició P. La demostració es pot trobar a (Horn & Johnson, 1985, pp. 508–511) i, per tant, s'omet aquí.

Proposició 1. *La matriu P té un valor propi igual a un i tots els valors propis de P han de tenir un mòdul menor o igual a un.*

Generalment es té la següent proposició per a una matriu no negativa, vegeu per exemple (Horn & Johnson, 1985, pp. 508–511).

Machine Translated by Google

Proposició 2 (teorema de Perron-Frobenius). *Sigui A una matriu quadrada no negativa i irreductible d'ordre m. Aleshores*

(i) *A té un valor propi real positiu, ÿ, igual al seu radi espectral, és a dir, el k-èsim* $\lambda = \text{màxim}_k |\lambda_k(A)|$ *on* $\lambda_k(\,)$ *A denota el valor propi d'A.* (ii) *A ÿ correspon un vector propi* **x** *amb les seves entrades reals i positives, de manera que A* **x** = **ÿx.** (iii) *ÿ és un valor propi simple d'A.*

Utilitzant les dues proposicions anteriors, es pot veure que existeix un vector positiu **x** = $[x_1, x_2, ..., x_m]^T$ de manera que *P* **x** = **x** si *P* és irreductible. El vector **x** en forma normalitzada s'anomena vector de probabilitat estacionària de P. A més, *xi* és la probabilitat estacionària que el sistema estigui en l'estat *i* (Ching, Ng i Fung, 2008, pàg. 492–507).

2.2 El model de cadena de Markov d'ordre superior

Raftery (1985, p. 528–539) i Ching et al. (2004, p. 557–574) han proposat models de cadena de Markov d'ordre superior (enèsim ordre) per modelar seqüències de dades categòriques.

Ching, Ng i Fung (2008, pàg. 492–507) han suggerit una sèrie de mètodes de modelització basats en la cadena de Markov (inclòs el model de cadena de Markov d'ordre superior). Observem que una sèrie temporal *{xt }* de *k* estats es pot representar mitjançant una sèrie de vectors (distribució de probabilitat) $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ anomenada representació de forma canònica. Si el sistema es troba en l'estat *j* ÿ *E* en el moment *(t* + i), aleshores el vector de distribució de probabilitat d'estat ve donat per

$$x_{t+i} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{ èsima entrada}}, 0, \ldots, 0)^T.$$

A més, assumim que la distribució de probabilitat d'estat en el temps *t* = *m* + 1 depèn de la distribució de probabilitat d'estat de la seqüència en els temps *t* = *m,* mÿ1,... , mÿn+1.

El model es presenta de la següent manera:

$$x_{m+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x_{m-i+1}, \quad m = n-1, n, \ldots \tag{2}$$

amb inicials x0, x1, ..., xnÿ1. Aquí els pesos *ÿi* són nombres reals no negatius tals que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \tag{3}$$

Aquí *xm* és la distribució de probabilitat d'estat en el temps m, *Pi* és la matriu de transició i-step i *ÿi* són els pesos no negatius. El nombre total de paràmetres és de O *(nk2)* (Ching, Ng i Fung, 2008, pàg. 492–507).

Estimem la matriu de probabilitat de transició *Pi* mitjançant el mètode següent. Donades les sèries de dades, comptem la freqüència de transició des dels estats de la seqüència en el temps *t* = *m ÿi* + 1 fins als estats de la seqüència j-èsima en el temps *t* = *m* + 1 per a 1ÿiÿn. Per tant, es pot construir la matriu de freqüències de transició per a les seqüències de dades. Després de fer la normalització, també es pot obtenir $\hat{P}_i$. A més de les estimacions de *Pi,* cal estimar els paràmetres *ÿi.* Com a conseqüència de la Proposició 1 i la Proposició 2, la cadena de Markov d'ordre n té un vector estacionari X. El vector *xj* es pot estimar a partir de les seqüències calculant la proporció d'ocurrència de cada estat de la sèrie.

Com a conseqüència de la Proposició 1 i la Proposició 2,

Qx ÿ x, on $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i.$

hom esperaria que

$$\hat{Q}\hat{x} \approx \hat{x} \quad (4)$$

A partir de (4), una possible manera d'estimar els paràmetres *ÿi* es dóna de la següent manera. Es pot considerar resoldre el següent problema de minimització:

$$\text{el meu}_{\lambda} \left\| \hat{Q}\hat{x} - \hat{x} \right\|$$
$$st.\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (5)$$
$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Aquí ||·|| és una certa norma vectorial. Si ||·|| s'escull com a norma $\|\cdot\|_\infty$, aleshores el problema d'optimització anterior esdevé

$$\text{mín. màx.}_{\lambda}\ \sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i \hat{P}_i \hat{x} - \hat{x} \right|$$
$$st.\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad (6)$$
$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

on [·]i denota l' i-èsima entrada del vector. El problema (6) es pot formular com a *s* problemes de programació lineal de la manera següent:

$$\min_{\lambda}\ e$$
$$st.\ \begin{pmatrix} e \\ e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad (7)$$
$$\begin{pmatrix} e \\ e \\ \vdots \\ e \end{pmatrix} \geq -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$
$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

on $M = [\hat{P}_1\hat{x} \mid \hat{P}_2\hat{x} \mid \cdots \mid \hat{P}_n\hat{x}]$.

Notem que també es poden considerar altres normes com ara $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_1$. La primera donarà lloc a un problema de programació quadràtica mentre que la segona encara donarà lloc a un problema de programació lineal. Aleshores, utilitzem el model de Markov d'ordre superior per predir el següent estat de la seqüència $\hat{x}_t$ en el temps *t* , que es pot prendre com l'estat amb la màxima probabilitat, és a dir,

$$\hat{x}_t = j, \text{ si } [\hat{x}]_j \geq [\hat{x}]_k, \ \forall\, 1 \leq k \leq m \qquad (8)$$

Per avaluar el rendiment i l'eficàcia del model de cadena de Markov d'ordre superior, un resultat de predicció es mesura mitjançant la precisió de predicció *r* definida com

$$s = \frac{1}{N - n} \times \sum_{t=n+1}^{N} un_t \times 100\%,$$

on *N* és la longitud de la seqüència de dades i

$$un_t = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{x}_t = x_t \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}.$$

3. Una aplicació a l'anàlisi i la predicció de sèries temporals

En aquesta secció, demostrem l'efectivitat del model de cadena de Markov i l'apliquem al preu i al volum de vendes per a problemes de predicció de carn de boví en un supermercat. La sèrie temporal del preu i el volum de vendes de carn de boví en un supermercat d'AnKang es dóna a l'apèndix. El preu de la carn de boví es pot classificar en cinc estats possibles (1, *2, 3, 4,* 5), vegeu l'apèndix. Les sèries de preus s'expressen com 1 = molt baix (ÿ 29 RMB/kg), 2 = baix (29ÿ32 RMB/kg), 3 = mitjà (32ÿ35 RMB/kg), 4 = alt (35ÿ38 RMB/kg), 5 = molt alt (ÿ 38 RMB/kg). De la mateixa manera, el volum de vendes de carn de boví també es pot classificar en cinc estats possibles (1, *2, 3, 4,* 5), vegeu l'apèndix. Les sèries de volum de vendes s'expressen com 1 = molt baix (ÿ50 kg), 2 = baix (50 kg ÿ55 kg), 3 = mitjà (55 kg ÿ60 kg), 4 = alt (60 kg ÿ65 kg), 5 = molt alt (ÿ65 kg). Aquestes expressions són útils tant des del punt de vista del màrqueting com del de la planificació de la producció.

D'una banda, la demanda de carn de vedella dels supermercats per tal de minimitzar l'acumulació d'inventari, i de l'altra, els clients volen predir el preu de la carn per decidir l'estratègia de compra. A més, el supermercat pot entendre el patró de vendes del seu client i després desenvolupar una política de màrqueting per tractar amb els clients.

Amb la sèrie de preus, el preu d'avui depèn principalment del preu d'ahir. Triem el model de cadena de Markov de primer ordre. Primer estimem la matriu de probabilitat de transició d'un pas *P* utilitzant el mètode esmentat anteriorment.

$$P = \begin{bmatrix} 0,2917 & 0,0370 & 0,1500 & 0,1429 & 0,1096 \\ 0,1250 & 0,3704 & 0,1500 & 0,2500 & 0,3014 \\ 0,2083 & 0,0741 & 0,2000 & 0,0714 & 0,0685 \\ 0,1250 & 0,1296 & 0,2500 & 0,1429 & 0,1233 \\ 0,2500 & 0,3889 & 0,2500 & 0,3929 & 0,3973 \end{bmatrix}$$

I també tenim les estimacions de les distribucions de probabilitat estacionàries de la sèrie de preus

$$\hat{x} = [0,1200\ 0,2750\ 0,1000\ 0,1400\ 0,3650]^T.$$

La precisió de predicció del model proposat és r1 = 0,5362.

Però les sèries de volum de vendes són molt més complicades. Escollim arbitràriament l'ordre de cinc, és a dir, *n* = 5. Primer estimem totes les matrius de probabilitat de transició *Pi* utilitzant el mètode proposat anteriorment i també tenim les estimacions de les distribucions de probabilitat estacionàries del producte:

$$\hat{x} = [0,3350\ 0,1350\ 0,2150\ 0,0600\ 0,2550]^T.$$

En resoldre els problemes de programació lineal corresponents a (7), obtenim el següent model de cadena de Markov d'ordre superior:

$$x_{m+1} = 0,7022\, P_1 x_m + 0,0768\, P_4 x_{m-3} + 0,2210\, P_5 x_{m-4},$$

on

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0,4776 & 0,2222 & 0,0233 & 0,0909 & 0,5294 \\ 0,1045 & 0,2593 & 0,1163 & 0,0909 & 0,1373 \\ 0,0149 & 0,2963 & 0,6279 & 0,3636 & 0,0588 \\ 0,0149 & 0 & 0,1395 & 0,4545 & 0 \\ 0,3881 & 0,2222 & 0,0930 & 0 & 0,2745 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0,3538 & 0,2593 & 0,1860 & 0,2000 & 0,4706 \\ 0,1692 & 0,1481 & 0,2093 & 0,2000 & 0,0196 \\ 0,1846 & 0,2593 & 0,3023 & 0,1000 & 0,1961 \\ 0,0462 & 0,1111 & 0,0930 & 0 & 0,0392 \\ 0,2462 & 0,2222 & 0,2093 & 0,5000 & 0,2745 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0,4063 & 0,2593 & 0,2093 & 0,4000 & 0,3333 \\ 0,0625 & 0,2222 & 0,2326 & 0 & 0,1373 \\ 0,2656 & 0,2222 & 0,1860 & 0,1000 & 0,2157 \\ 0,0469 & 0,1852 & 0,0465 & 0 & 0,0392 \\ 0,2188 & 0,1111 & 0,3256 & 0,5000 & 0,2745 \end{bmatrix}.$$

També podem veure que la precisió de predicció del model proposat és r2=0.5588. Tots els resultats mostren que l'efectivitat del model de Markov per analitzar i predir sèries temporals és molt bona.

4. Resum

En aquest article, hem aplicat el model de Markov per analitzar i predir les sèries temporals. Algunes sèries es poden expressar mitjançant una cadena de Markov de temps discret de primer ordre i d'altres s'han d'expressar mitjançant un model de cadena de Markov d'ordre superior. Es donen exemples numèrics. Els hem aplicat al preu i al volum de vendes per a problemes de predicció de carn de boví en un supermercat. Els resultats mostren que el rendiment i l'eficàcia del model de cadena de Markov per predir sèries temporals és molt bo.

Apèndix. Sèrie de preus de la carn de vedella en un supermercat

5 5 5 5 4 5 3 5 3 3 4 2 5 5 3 1 1 1 3 3 4 1 5 1 1 3 3 2 5 1 5 1 5 5 5 2 1 4 1 1 1 2 4 5 5 1 4 2 4 1 3 4 2 2 5 2 2 5 5

2 5 4 4 4 2 2 5 2 2 5 5 5 3 2 2 5 4 5 2 4 5 5 4 1 1 1 2 2 3 2 4 5 5 5 2 5 2 5 2 5 2 4 2 5 5 2 5 1 2 3 4 3 3 1 3 1 4 3 5 4 5 5 4 5 5 2 5 2 5
2 2 3 5 5 3 5 2 5 4 2 1 5 2 5 2 2 2 2 5 5 4 5 5 2 2 5 2 2 3 4 4 4 5 4 5 1 5 5 1 3 5 5 5 1 5 2 2 2 5 5 5 5 2 4 5 2 2 5 2 5 2 2 2 4 2 2 2 4 5
5 5 3 2 2 5 2 5 4 4 4 5 3 3 5 3 1 1 4 2 2 5 5 2 5 5 2 5 5 3 5 5 4 1 5 5 1 5 5 1 5 5 1 5 5 5 1 5 5 5 2 1 2 5 2 5 5 2 3 5 5 5 5 5 2 5

1 = molt baix (ÿ 29 RMB/kg), 2 = baix (29ÿ32 RMB/kg), 3 = mitjà (32ÿ35 RMB/kg), 4 = alt (35ÿ38 RMB/kg), 5 = molt alt (ÿ 38 RMB/kg).

Sèrie de demanda de vendes de carn de boví en un supermercat

5 1 1 1 1 2 2 3 3 3 4 3 2 2 5 1 5 5 1 2 3 3 2 3 3 2 2 1 1 5 2 3 3 3 3 2 3 1 2 1 1 5 2 2 5 5 2 3 4 3 4 2 2 1 5 5 1 5 1 5 5 1 1 5 3 3 3 3 3 3
4 3 3 5 1 5 5 1 1 5 1 5 5 1 5 5 1 5 2 3 3 3 3 3 3 3 5 1 5 5 1 5 1 5 1 5 3 3 3 3 3 5 1 5 5 1 5 1 5 3 3 3 3 3 3 5 2 2 5 1 1 1 5 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 2 5 3 4 4 4 4 1 3 5 5 1 5 5 1 1 1 1 1 5 1 2 1 1 2 5 2 1 1 2 3 3 3 3 4 4 3 2 2 5 1 5 1 1 1 5 2 1 1 1 1 4 4 3 3 3 3 2 5 1 5 5 1
5 1 1 2 2 3 3 4 3 3 1 1 1 2 1 1 5 1 1 1 5 1 1 1 1 1 1 1 2 3 3 1 1 4 3 1 3 2 1 1 1 1 1 5 5 1 5 1 5 1 1 1 1 1 1 1

1 = molt baix (ÿ50 kg), 2 = baix (50 kg ÿ55 kg), 3 = mitjà (55 kg ÿ60 kg), 4 = alt (60 kg ÿ65 kg), 5 = molt alt (ÿ65 kg).

Referències

Buzacott, J. i Shanthikumar, J. (1993). *Models estocàstics de sistemes de fabricació,* Nova Jersey: ed. internacional. Prentice-Hall, (capítol 7).

Ching, W. (2001). *Mètodes iteratius per a sistemes de cues i fabricació.* Londres: Springer, (Capítol 2).

Ching, W., Fung, E. i Ng, M. (2002). Un model de cadena de Markov multivariant per a seqüències de dades categòriques i les seves aplicacions en la predicció de la demanda. *IMA J. Manage. Math.* 13, pàg. 87–199.

Ching, W., Fung, E. i Ng, M. (2004). Models de cadenes de Markov d'ordre superior per a seqüències de dades categòriques. *Int. J. Nav. Res.* Logist. 51, pàg. 557–574.

Ching, W., Ng, M. i Fung, E. (2008). Cadenes de Markov multivariants d'ordre superior i les seves aplicacions. *Linear Algebra and its Applications* 428, pàg. 492–507. Horn, R. i

Johnson, C. (1985). *Matrix Analysis, Regne* Unit, Cambridge: Cambridge University Press, (Capítol 8).

MacDonald, I. i Zucchini, W. (1997). Models *ocults de Markov i altres models per a sèries temporals de valors discrets.* Londres: Chapman & Hall, (Capítol 5).

Nahmias, S. (1997). *Anàlisi de producció i operacions.* Chicago: McGraw Hill International.

Sharma, O. (1995). *Markovian Queues.* Nova York: Ellis Horwood, (Capítol 4).