опубликовать свое релятивистское волновое уравнение, оно уже было независимо переоткрыто Оскаром Клейном [7] и Вальтером Гордоном [8]. По этой причине релятивистский вариант называется "уравнением Клейна–Гордона".

Шредингер вывел свое релятивистское волновое уравнение, заметив, что гамильтониан H и импульс $\mathbf{p}$ "электрона Лоренца" с массой m и зарядом e, находящегося во внешнем векторном потенциале $\mathbf{A}$ и кулоновском потенциале ϕ, связаны следующим соотношением [1]):

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \qquad (1.1.2)$$

Соотношения де Бройля (1.1.1) для *свободной* частицы, представленной плоской волной $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x} - \nu t)\}$, можно получить, если произвести отождествление

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k} \to -i\hbar\nabla, \qquad E = h\nu \to i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}, \qquad (1.1.3)$$

где $\hbar$ — удобное обозначение (введенное Дираком) для $h/2\pi$. Исходя из чисто формальной аналогии Шредингер предположил, что электрон во внешних полях $\mathbf{A}$, ϕ должен описываться волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению, получаемому при помощи той же самой замены в (1.1.2):

$$0 = \left[\left(i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)^2 - c^2\left(-i\hbar\nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}, t). \qquad (1.1.4)$$

В частности, для стационарных состояний в атоме водорода справедливы равенства $\mathbf{A} = 0$ и $\phi = e/(4\pi r)$. Кроме того, в этом случае ψ зависит от времени t экспоненциально: $\exp(-iEt/\hbar)$. Поэтому (1.1.4) сводится к уравнению

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 - c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}). \qquad (1.1.5)$$

Решения уравнения (1.1.5) с наложенными на них разумными граничными условиями, определяют уровни энергии [9]

$$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right) + \ldots\right], \qquad (1.1.6)$$

где $\alpha \equiv e^2/(4\pi\hbar c)$ — "постоянная тонкой структуры", численное значение которой составляет приблизительно $1/137$, n — положительное целое число, а l — орбитальный угловой момент в единицах $\hbar$, принимающий целочисленные значения в интервале $0 \leqslant l \leqslant n - 1$. Наличие

[1]) Это соотношение лоренц-инвариантно, поскольку величины $\mathbf{A}$ и ϕ при преобразованиях Лоренца изменяются точно так же, как $c\mathbf{p}$ и E соответственно. Гамильтониан H и импульс $\mathbf{p}$ Шредингер представлял в виде частных производных действия, однако это неважно для нашего рассмотрения.