опубликовать свое релятивистское волновое уравнение, оно уже было перекрыто Оскаром Клейном [7] и Вальтером Гордоном [8]. По этой причине релятивистский вариант называется “уравнением Клейна-Гордена".

Шредингер вывел свое релятивистское волновое уравнение, заметив, что гамильтониан H и импульс $\mathbf{p}$ “электрона Лоренца” с массой m и зарядом e, находящегося во внешнем векторном потенциале $\mathbf{A}$ и кулоновском потенциале ϕ, связаны следующим соотношением[1]:

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4. \tag{1}$$

Соотношения де Бройля (0) для *свободной* частицы, представленной плоской волной $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}-vt)\}$, можно получить, если произвести отождествление

$$\mathbf{p} = h\mathbf{k} \to -i\hbar\nabla, \qquad E = h\nu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{2}$$

где $\hbar$ — удобное обозначение (введенное Дираком) для $h/2\pi$. Исходя из чисто формальной аналогии Шредингер предположил, что электрон во внешних полях $\mathbf{A}$, ϕ должен описываться волновой функцией $\psi(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющей уравнению, получаемому при помощи той же самой замены в (1):

$$0 = \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)^2 - c^2\left(-i\hbar\nabla + \frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}, t). \tag{3}$$

В частности, для стационарных состояний в атоме водорода справедливы равенства $\mathbf{A} = 0$ и $\psi = e/(4\pi r)$. Кроме того, в этом случае ψ зависит от времени t экспоненциально: $\exp(-iEt/\hbar)$. Поэтому (3) сводится к уравнению

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 - c^2\hbar^2\nabla^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}) \tag{4}$$

Решения уравнения (4) с наложенными на них разумными граничными условиями, определяют уровни энергии [9]

$$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{l + 1/2} - \frac{3}{4}\right) + \dots\right], \tag{5}$$

[1]Это соотношение лоренц-инвариантно, поскольку величины $\mathbf{A}$ и ϕ при преобразованиях Лоренца изменяются точно так же, как $c\mathbf{p}$ и E соответственно. Гамильтониан H и импульс $\mathbf{p}$ Шредингер представлял в виде частных производных действия, однако это неважно для нашего рассмотрения.

где $\alpha \equiv /(4\pi\hbar c)$ – “постоянная тонкой структуры”, численное значение которой составляет приблизительно $1/137$, n – положительное целое число, а l – орбитальный угловой момент в единицах $\hbar$, принимающий целочисленные значения в интервале $0 \leq l \leq n-1$.