1. Método da Potência

Dado um vetor inicial x_0, o método da potência itera a multiplicação da matriz A pelo vetor x_{k-1}, normaliza o resultado e repete o processo até que a sequência x_k convirja para um vetor próprio de A. O algoritmo é dado por:

1. Escolha um vetor inicial x_0.
2. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$ faça:
   1. $y_k = Ax_{k-1}$
   2. $x_k = \frac{y_k}{\| \max(y_k) \|}$

Por fim, o autovalor é dado por $\lambda = \| \max(y_k) \|$.

1.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule a segunda iteração do método da potência para o vetor inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

- $y_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $x_1 = \frac{y_1}{\| \max(y_k) \|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- $y_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Portanto, a aproximação do autovalor é $\lambda = \frac{5}{2}$.

2. Discos de Gerschgorin

Dada uma matriz A, os discos de Gerschgorin são regiões circulares no plano complexo que contêm todos os autovalores de A. Cada disco é centrado no elemento a_{ii} da diagonal principal e tem raio igual à soma dos módulos dos elementos da linha i que não pertencem à diagonal principal.

2.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule os discos de Gerschgorin. Imagem:

3. Mínimos Quadrados

Dado um sistema linear $Ax = b$, o problema dos mínimos quadrados consiste em encontrar o vetor $\hat{x}$ que minimiza a norma do resíduo $r = b - Ax$. A solução é dada por $(A^T A)\hat{x} = A^T b$.

3.1. Exemplo

Dado o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule a solução do problema dos mínimos quadrados.

Solução:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)\hat{x} = A^T b \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Testando a solução:

$$A\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

4. Decomposição QR

Dada uma matriz A, a decomposição QR consiste em encontrar uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tal que $A = QR$. A matriz Q é obtida a partir da ortogonalização de Gram-Schmidt e a matriz R é obtida a partir da multiplicação de $Q^T A$.

4.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule a decomposição QR.

Solução:

Vetor $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - < q_1, a_2 > q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$a_3 = q_1 \times q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz Q é dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A matriz R é obtida a partir da multiplicação $Q^T A$:

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$