

## 1. Método da Potência

Dado um vetor inicial  $x_0$ , o método da potência itera a multiplicação da matriz  $A$  pelo vetor  $x_{k-1}$ , normaliza o resultado e repete o processo até que a sequência  $x_k$  convirja para um vetor próprio de  $A$ . O algoritmo é dado por:

1. Escolha um vetor inicial  $x_0$ .

2. Para  $k = 1, 2, 3, \dots$  faça:

1.  $y_k = Ax_{k-1}$
2.  $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$

Por fim, o autovalor é dado por  $\lambda = \|y_k\|$ .

### 1.1. Exemplo

Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , calcule a segunda iteração do método da potência para o vetor inicial  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Solução:**

- $y_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$
- $y_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Portanto, a aproximação do autovalor é  $\lambda = \frac{5}{2}$ .

## 2. Discos de Gerschgorin

Dada uma matriz  $A$ , os discos de Gerschgorin são regiões circulares no plano complexo que contêm todos os autovalores de  $A$ . Cada disco é centrado no elemento  $a_{ii}$  da diagonal principal e tem raio igual à soma dos módulos dos elementos da linha  $i$  que não pertencem à diagonal principal.

### 2.1. Exemplo

Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ , calcule os discos de Gerschgorin. Imagem:

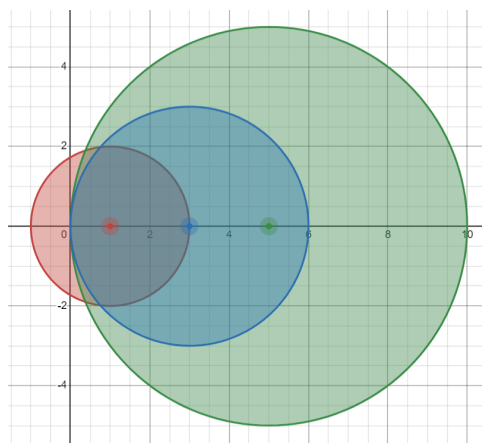


Figura 1: Discos de Gerschgorin para a matriz  $A$

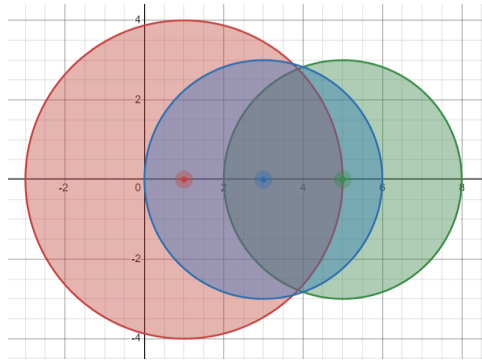


Figura 2: Discos de Gerschgorin para a matriz  $A^T$

### 3. Mínimos Quadrados

Dado um sistema linear  $Ax = b$ , o problema dos mínimos quadrados consiste em encontrar o vetor  $\hat{x}$  que minimiza a norma do resíduo  $r = b - Ax$ . A solução é dada por  $(A^T A)\hat{x} = A^T b$ .

#### 3.1. Exemplo

Dado o sistema linear  $Ax = b$ , onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  e  $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , calcule a solução do problema dos mínimos quadrados.

**Solução:**

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)\hat{x} = A^T b \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Testando a solução:

$$A\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

### 4. Decomposição QR

Dada uma matriz  $A$ , a decomposição QR consiste em encontrar uma matriz ortogonal  $Q$  e uma matriz triangular superior  $R$  tal que  $A = QR$ . A matriz  $Q$  é obtida a partir da ortogonalização de Gram-Schmidt e a matriz  $R$  é obtida a partir da multiplicação de  $Q^T A$ .

#### 4.1. Exemplo

Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , calcule a decomposição QR.

**Solução:**

$$\text{Vetor } a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \langle q_1, a_2 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left( \frac{6}{\sqrt{3}} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$a_3 = q_1 \times q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz  $Q$  é dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A matriz  $R$  é obtida a partir da multiplicação  $Q^T A$ :

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$