1. Método da Potência

Dado um vetor inicial x_0, o método da potência itera a multiplicação da matriz A pelo vetor x_{k-1}, normaliza o resultado e repete o processo até que a sequência x_k convirja para um vetor próprio de A. O algoritmo é dado por:

1. Escolha um vetor inicial x_0.
2. Para $k = 1, 2, 3, \ldots$ faça:
   1. $y_k = A x_{k-1}$
   2. $x_k = \frac{y_k}{\max(y_k)}$

Por fim, o autovalor é dado por $\lambda = \max(y_k)$. Onde $\max(y_k)$ é o maior valor absoluto de y_k.

1.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule a segunda iteração do método da potência para o vetor inicial $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

- $y_1 = A x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $x_1 = \frac{y_1}{\max(y_1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$
- $y_2 = A x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Portanto, a aproximação do autovalor é $\lambda = \frac{5}{2}$.

2. Discos de Gerschgorin

Dada uma matriz A, os discos de Gerschgorin são regiões circulares no plano complexo que contêm todos os autovalores de A. Cada disco é centrado no elemento a_{ii} da diagonal principal e tem raio igual à soma dos módulos dos elementos da linha i que não pertencem à diagonal principal.

2.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcule os discos de Gerschgorin. Imagem:

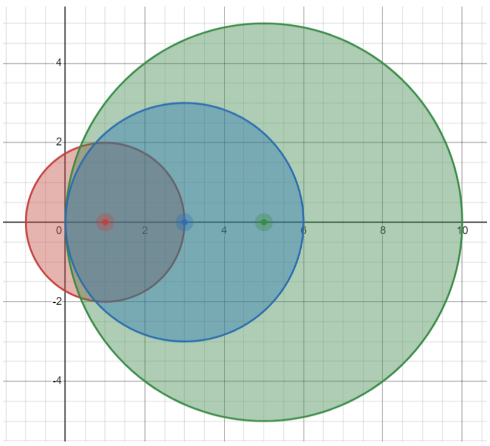

Figura 1: Discos de Gerschgorin para a matriz A

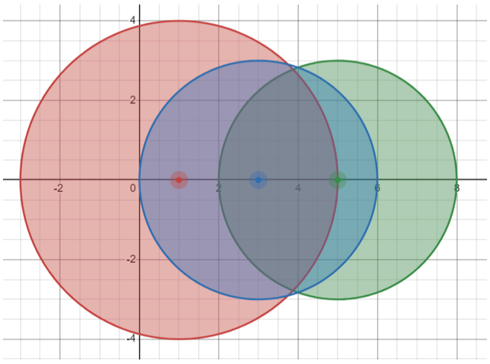

Figura 2: Discos de Gerschgorin para a matriz A^T

3. Mínimos Quadrados

Dado um sistema linear $Ax = b$, o problema dos mínimos quadrados consiste em encontrar o vetor $\hat{x}$ que minimiza a norma do resíduo $r = b - Ax$. A solução é dada por $(A^T A)\hat{x} = A^T b$.

3.1. Exemplo

Dado o sistema linear $Ax = b$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule a solução do problema dos mínimos quadrados.

Solução:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)\hat{x} = A^T b \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Testando a solução:

$$A\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

4. Decomposição QR

Dada uma matriz A, a decomposição QR consiste em encontrar uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tal que $A = QR$. A matriz Q é obtida a partir da ortogonalização de Gram-Schmidt e a matriz R é obtida a partir da multiplicação de $Q^T A$.

4.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule a decomposição QR.

Solução:

Vetor $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - < q_1, a_2 > q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$a_3 = q_1 \times q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz Q é dada por:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A matriz R é obtida a partir da multiplicação $Q^T A$:

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Decomposição em Valores Singulares

Dada uma matriz A, a decomposição em valores singulares consiste em encontrar três matrizes U, Σ e V tais que $A = U\Sigma V^T$, onde U e V são ortogonais e Σ é uma matriz diagonal com os autovalores de A.

5.1. Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule a decomposição em valores singulares.

Solução:

A matriz A^TA é dada por:

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de A^TA são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$. Os autovetores correspondentes são $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A matriz V é dada por:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz AA^T é dada por:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Os autovalores de AA^T são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$. Os autovetores correspondentes são:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalizando os autovetores, obtemos:

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ e } u_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz U é dada por:

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

A matriz Σ é dada por:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a decomposição em valores singulares de A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

6. Pseudo-Inversa

Dada uma matriz A, a pseudo-inversa A^+ é uma generalização da inversa de A para matrizes não quadradas. A pseudo-inversa é dada por $A^+ = V\Sigma^+U^T$, onde U, Σ e V são as matrizes da decomposição em valores singulares de A.

Onde Σ^+ é a pseudo-inversa de Σ, obtida substituindo os elementos não nulos de Σ por seus inversos e transpondo a matriz resultante.

6.1. Exemplo

Usando o exemplo anterior, calcule a pseudo-inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Já calculamos a decomposição em valores singulares de A, então basta calcular a pseudo-inversa:

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a pseudo-inversa de A é dada por:

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos checar que a pseudo-inversa de A é correta verificando que $A^+A = I$:

$$A^+A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Householder

A transformação de Householder é uma transformação ortogonal que zera todos os elementos de um vetor, exceto o primeiro. Dada uma matriz A e um vetor x, a transformação de Householder é dada por:

$$H = I - 2uu^T$$

Onde $u = \frac{x - \|x\| e_1}{\|x - \|x\| e_1\|}$, e_1 é o primeiro vetor da base canônica e $\|x\|$ é a norma de x.

7.1. Exemplo

Dada a matriz A, calcule a transformação de Householder que zera os elementos da primeira coluna, exceto o primeiro.

Solução:

Seja a_1 a primeira coluna de A. O vetor u é dado por $u = \frac{a_1 - \|a_1\| e_1}{\|a_1 - \|a_1\| e_1\|}$. A matriz H é dada por:

$$H = I - 2uu^T$$

Onde aplicamos a transformação de Householder em A:

$$H \cdot A$$

Se quiser ver isso com uma matriz A verdade, faça a questão $4)b)$ da prova de 2022