

Capítulo 5.

Teorema 5.3.1 (Universalidade da Uniforme): Seja F uma CDF, uma função contínua e estritamente crescente no suporte da distribuição. Isto garante que a função inversa F^{-1} existe e é única, onde $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Os seguintes resultados valem:

1. Seja $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ e $X = F^{-1}(U)$. Então, X é uma v.a. com CDF F .
2. Seja X uma v.a. com CDF F . Então, $F(X) \sim \text{Unif}(0, 1)$.

Prova:

1. Tomando $X = F^{-1}(U)$, temos que

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

2. Seja $U = F(X)$, então

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

□

Teorema 7.1.20.1: Seja f_{xy} a PDF conjunta de X e Y tal que

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y)$$

para todo x e y , onde $g(x)$ e $h(y)$ são funções não negativas. Então X e Y são independentes. Se g ou h for uma PDF válida, então a outra também é, e a PDF conjunta é o produto das marginais.

Prova: defina

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy > 0$$

podemos reescrever a PDF conjunta como

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y) = cg(x)\frac{h(y)}{c}$$

então a PDF marginal de X é

$$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)\frac{h(y)}{c}dy = cg(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)}{c}dy = cg(x).$$

Segue que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ já que f_X é uma PDF válida. Analogamente, $\frac{h(y)}{c}$ é a Pdf marginal de Y . Portanto, $cg(x)$ e $\frac{h(y)}{c}$ são PDFs válidas, o que conclui que X e Y são independentes. □

8. Desigualdades

Teorema 8.1 (Desigualdade de Markov): Seja X uma variável aleatória não negativa. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Prova: Seja $Y = \frac{|X|}{a}$ e $I_{Y \geq 1}$ a função indicadora de $Y \geq 1$. Temos que $I_{Y \geq 1} = 1 \Leftrightarrow Y \geq 1$ e $I_{Y \geq 1} = 0 \Leftrightarrow Y < 1$. Isso implica que $I_{Y \geq 1} \leq Y$. Logo, aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(I_{Y \geq 1}) \leq E(Y) \Rightarrow P(Y \geq 1) \leq E(Y) \Rightarrow P\left(\frac{|X|}{a} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|X|}{a}\right) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

□

Teorema 8.2 (Desigualdade de Chebyshev): Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2 . Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Prova: Seja $Y = |X - \mu|^2$, com isso temos

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(|X - \mu|^2 \geq a^2) = P(Y \geq a^2)$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{E(|X - \mu|^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Portanto

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

□

Teorema 8.3 (Desigualdade de Chernoff): Seja X uma variável aleatória com média μ . Então, para todo $a > 0$,

$$P(X \geq \mu + a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

onde $M_{X(t)}$ é a função geradora de momentos de X .

Prova: Seja $Y = e^{tX}$, com isso temos

$$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) = P(Y \geq e^{ta})$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq e^{ta}) \leq \frac{E(Y)}{e^{ta}} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Portanto

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

□