Capítulo 5.

Teorema 5.3.1 (Universalidade da Uniforme): Seja F uma CDF, uma função contínua e estritamente crescente no suporte da distribuição. Isto garante que a função inversa F^{-1} existe e é única, onde $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Os seguintes resultados valem:

1. Seja $U \sim \text{Unif}(0,1)$ e $X = F^{-1}(U)$. Então, X é uma v.a. com CDF F.
2. Seja X uma v.a. com CDF F. Então, $F(X) \sim \text{Unif}(0,1)$.

Prova:

1. Tomando $X = F^{-1}(U)$, temos que

$$P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F(x)) = F(x).$$

2. Seja $U = F(X)$, então

$$P(U \le u) = P(F(X) \le u) = P\left(X \le F^{-1}(u)\right) = F\left(F^{-1}(u)\right) = u.$$

□

Teorema (Propriedades da Normal): Seja $Z \sim N(0,1)$ com PDF $\varphi(z)$ e CDF $\Phi(z)$. Então, as seguintes propriedades valem:

- Simetria: $\varphi(z) = \varphi(-z)$
- Simetria das caudas: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- Simetria entre Z e -Z: $\Phi_{-Z}(z) = \Phi_Z(z)$

Prova:

- A simetria é trivial, pois $\varphi(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{(-z)^2}{2}} = \varphi(-z)$.
- A simetria das caudas é dada por $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \varphi(-t)dt = -\int_{\infty}^{-z} \varphi(u)du = 1 - \int_{-\infty}^{-z} \varphi(u)du = 1 - \Phi(-z)$.
- A simetria entre Z e $-Z$ é dada por $\Phi_{-Z}(z) = P(-Z \le z) = P(Z \ge -z) = 1 - P(Z \le -z) = 1 - \Phi(-z) = \Phi(z)$.

□

Definição 5.5.2 (Propriedade da não memória): Dizemos que uma v.a. X tem a propriedade da não memória se, para todo $s, t > 0$, vale

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Note que se $X \sim$ Expo(λ), então X tem a propriedade da não memória. Pois

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P((X > s + t) \cap (X > s))}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Teorema 5.5.3: Se X é uma v.a. contínua com a propriedade da não memória, então X é uma v.a. exponencial.

Prova 1: Seja F a CDF de X e $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$. Pela propriedade da não memória, temos

$$G(s+t) = G(s)G(t)$$

pois $G(s+t) = P(X > s+t) = P(X > s+t \mid X > s)P(X > s) = P(X > t)P(X > s) = G(t)G(s)$, a segunda igualdade decorre da lei da probabilidade total e de que $P(X > s + t \mid X \leq s) = 0$. Diferenciando em relação a s, temos

$$G'(s+t) = G'(s)G(t)$$

e quando $s = 0$

$$G'(t) = G'(0)G(t)$$

resolvendo a equação diferencial, temos

$$G(t) = Ke^{-\lambda t}$$

onde $\lambda = G'(0)$, e $K = G(0) = 1$. Portanto, $X \sim$ Expo(λ). □

Prova 2: Usando o resultado da **prova 1:** $G(s+t) = G(s)G(t)$, podemos mostrar que G é uma função exponencial. Note que $G(0) = 1$, pois

$$G(0) = G(0+0) = G(0)G(0) = G(0)^2$$

E se $G(0) = 0$, então $G(t) = 0$ para todo t, o que é absurdo, pois $G(t) = P(X > t)$. Portanto, $G(0) = 1$. Podemos encontrar $G(2)$ da seguinte forma

$$G(2) = G(1+1) = G(1)G(1) = G(1)^2$$

De forma similar $G(3)$ é

$$G(3) = G(1+2) = G(1)G(2) = G(1)G(1)^2 = G(1)^3$$

podemos provar por indução que $G(n) = G(1)^n$, para n inteiro positivo da seguinte forma

$$G(n) = G(1)^n$$

$$G(n+1) = G(n)G(1) = G(1)^n G(1) = G(1)^{n+1}.$$

Queremos estender essa propriedade para n racional, para isso observe que

$$G(1) = G\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

com n termos, então

$$G(1) = G\left(\frac{1}{n}\right)G\left(\frac{1}{n}\right)\ldots G\left(\frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

e portanto

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = G(1)^{\frac{1}{n}}$$

e para m inteiro positivo, temos

$$G\left(\frac{m}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)G\left(\frac{1}{n}\right)...G\left(\frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)^m = G(1)^{\frac{m}{n}}$$

A extensão para x real positivo vem com a pré requesito de um entendimento de análise real, portanto não será feito aqui. Portanto, $G(x) = G(1)^x$. Por fim, observe que

$$G(x) = G(1)^x = e^{\ln(G(1)^x)} = e^{x \ln(G(1))}$$

Chamando $\lambda = -\ln(G(1))$, temos que $G(x) = e^{-\lambda x}$, ou seja, $X \sim$ Expo(λ). □

Capítulo 6.

Teorema 6.1.4 (Caiu no testo uma parte):

Capítulo 7.

Teorema 7.1.20: Seja f_{xy} a PDF conjunta de X e Y tal que

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y)$$

para todo x e y, onde $g(x)$ e $h(y)$ são funções não negativas. Então X e Y são independentes. Se g ou h for uma PDF válida, então a outra também é, e a PDF conjunta é o produto das marginais.

Prova: defina

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy > 0$$

podemos reescrever a PDF conjunta como

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y) = cg(x)\frac{h(y)}{c}$$

então a PDF marginal de X é

$$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)\frac{h(y)}{c}dy = cg(x)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)}{c}dy = cg(x).$$

Segue que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ já que f_X é uma PDF válida. Analogamente, $\frac{h(y)}{c}$ é a PDf marginal de Y. Portanto, $cg(x)$ e $\frac{h(y)}{c}$ são PDFs válidas, o que conclui que X e Y são independentes. □

Teorema 7.1 (independente implica corr = 0): asd

8. Desigualdades

Teorema 8.1 (Desigualdade de Markov): Seja X uma variável aleatória não negativa. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Prova: Seja $Y = \frac{|X|}{a}$ e $I_{Y \geq 1}$ a função indicadora de $Y \geq 1$. Temos que $I_{Y \geq 1} = 1 \Leftrightarrow Y \geq 1$ e $I_{Y \geq 1} = 0 \Leftrightarrow Y < 1$. Isso implica que $I_{Y \geq 1} \leq Y$. Logo, aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(I_{Y \geq 1}) \leq E(Y) \Rightarrow P(Y \geq 1) \leq E(Y) \Rightarrow P\left(\frac{|X|}{a} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|X|}{a}\right) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

$\square$

Teorema 8.2 (Desigualdade de Chebyshev): Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Prova: Seja $Y = |X - \mu|^2$, com isso temos

$$P(|X - \mu| \geq a) = P\left(|X - \mu|^2 \geq a^2\right) = P\left(Y \geq a^2\right)$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P\left(Y \geq a^2\right) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{E\left(|X - \mu|^2\right)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Portanto

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$\square$

Teorema 8.3 (Desigualdade de Chernoff): Seja X uma variável aleatória com média μ. Então, para todo $a > 0$,

$$P(X \geq \mu + a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E\left(e^{tX}\right)}{e^{ta}}$$

onde $M_{X(t)}$ é a função geradora de momentos de X.

Prova: Seja $Y = e^{tX}$, com isso temos

$$P(X \geq a) = P\left(e^{tX} \geq e^{ta}\right) = P\left(Y \geq e^{ta}\right)$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq e^{ta}) \leq \frac{E(Y)}{e^{ta}} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Portanto

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

□

Definição 8.1 (convexidade e concavidade): Seja g uma função duas vezes diferenciável. Dizemos que g é convexa se $g''(x) \geq 0$ para todo x e concava se $g''(x) \leq 0$ para todo x.

Teorema 8.4 (Desigualdade de Jensen): Seja X uma variável aleatória e g uma função convexa, então

$$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

Se g é concava, a desigualdade é invertida, ou seja,

$$g(E(X)) \geq E(g(X))$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $g(X) = a + bX$ com probabilidade 1.

Prova: Se g é convexa, então $g''(x) \geq 0$ para todo x. E seja $a + bX$ a reta tangente a g em $E(X)$, então temos

$$g(X) \geq a + bX$$

aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(g(X)) \geq a + bE(X) = g(E(X))$$

Onde a igualdade vale pois a reta é tangente em $E(X)$.

Usando a mesma g, temos que $h = -g$ é concava, usando a desigualdade encontrada acima, temos

$$E(-h(X)) \geq -h(E(X)) \Longrightarrow -E(h(X)) \geq -h(E(X))$$

multiplicando por -1 em ambos os lados, temos

$$E(h(X)) \leq h(E(X))$$

□