Capítulo 5.

Teorema 5.3.1 (Universalidade da Uniforme): Seja F uma CDF, uma função contínua e estritamente crescente no suporte da distribuição. Isto garante que a função inversa F^{-1} existe e é única, onde $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Os seguintes resultados valem:

1. Seja $U \sim \text{Unif}(0,1)$ e $X = F^{-1}(U)$. Então, X é uma v.a. com CDF F.
2. Seja X uma v.a. com CDF F. Então, $F(X) \sim \text{Unif}(0,1)$.

Prova:

1. Tomando $X = F^{-1}(U)$, temos que
$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$
2. Seja $U = F(X)$, então
$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

□

Teorema (Propriedades da Normal): Seja $Z \sim N(0,1)$ com PDF $\varphi(z)$ e CDF $\Phi(z)$. Então, as seguintes propriedades valem:

- Simetria: $\varphi(z) = \varphi(-z)$
- Simetria das caudas: $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- Simetria entre Z e -Z: $\Phi_{-Z}(z) = \Phi_Z(z)$

Prova:

- A simetria é trivial, pois $\varphi(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{(-z)^2}{2}} = \varphi(-z)$.
- A simetria das caudas é dada por $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \varphi(-t)dt = -\int_{\infty}^{-z} \varphi(u)du = 1 - \int_{-\infty}^{-z} \varphi(u)du = 1 - \Phi(-z)$.
- A simetria entre Z e $-Z$ é dada por $\Phi_{-Z}(z) = P(-Z \leq z) = P(Z \geq -z) = 1 - P(Z \leq -z) = 1 - \Phi(-z) = \Phi(z)$.

□

Definição 5.5.2 (Propriedade da não memória): Dizemos que uma v.a. X tem a propriedade da não memória se, para todo $s, t > 0$, vale
$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

Note que se $X \sim$ Expo(λ), então X tem a propriedade da não memória. Pois
$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P((X > s + t) \cap (X > s))}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Teorema 5.5.3: Se X é uma v.a. contínua com a propriedade da não memória, então X é uma v.a. exponencial.

Prova 1: Seja F a CDF de X e $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$. Pela propriedade da não memória, temos

$$G(s + t) = G(s)G(t)$$

pois $G(s + t) = P(X > s + t) = P(X > s + t \mid X > s)P(X > s) = P(X > t)P(X > s) = G(t)G(s)$, a segunda igualdade decorre da lei da probabilidade total e de que $P(X > s + t \mid X \leq s) = 0$. Diferenciando em relação a s, temos

$$G'(s + t) = G'(s)G(t)$$

e quando $s = 0$

$$G'(t) = G'(0)G(t)$$

resolvendo a equação diferencial, temos

$$G(t) = Ke^{-\lambda t}$$

onde $\lambda = -G'(0)$, e $K = G(0) = 1$. Portanto, $X\sim$ Expo(λ). □

Prova 2: Usando o resultado da **prova 1:** $G(s + t) = G(s)G(t)$, podemos mostrar que G é uma função exponencial. Note que $G(0) = 1$, pois

$$G(0) = G(0 + 0) = G(0)G(0) = G(0)^2$$

E se $G(0) = 0$, então $G(t) = 0$ para todo t, o que é absurdo, pois $G(t) = P(X > t)$. Portanto, $G(0) = 1$. Podemos encontrar $G(2)$ da seguinte forma

$$G(2) = G(1 + 1) = G(1)G(1) = G(1)^2$$

De forma similar $G(3)$ é

$$G(3) = G(1 + 2) = G(1)G(2) = G(1)G(1)^2 = G(1)^3$$

podemos provar por indução que $G(n) = G(1)^n$, para n inteiro positivo da seguinte forma

$$G(n) = G(1)^n$$

$$G(n + 1) = G(n)G(1) = G(1)^n G(1) = G(1)^{n+1}.$$

Queremos estender essa propriedade para n racional, para isso observe que

$$G(1) = G\left(\underbrace{\frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}}_{\text{n termos}}\right),$$

então

$$G(1) = G\left(\frac{1}{n}\right)G\left(\frac{1}{n}\right)...G\left(\frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

e portanto

$$G\left(\frac{1}{n}\right) = G(1)^{\frac{1}{n}}$$

e para m inteiro positivo, temos

$$G\left(\frac{m}{n}\right) = G\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{\text{m termos}}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)\dots G\left(\frac{1}{n}\right) = G\left(\frac{1}{n}\right)^m = G(1)^{\frac{m}{n}}$$

A extensão para x real positivo vem com a pré requesito de um entendimento de análise real, portanto não será feito aqui. Portanto, $G(x) = G(1)^x$. Por fim, observe que

$$G(x) = G(1)^x = e^{\ln(G(1)^x)} = e^{x\ln(G(1))}$$

Chamando $\lambda = -\ln(G(1))$, temos que $G(x) = e^{-\lambda x}$, ou seja, $X\sim$ Expo(λ). □

Capítulo 6.

Teorema 6.1.4 (Caiu no teste uma parte): Seja X uma v.a. com média μ e mediana m. Então

- O valor c que minimiza $E(X-t)^2$ é $t = \mu$.
- O valor c que minimiza $E|X-t|$ é $t = m$.

Prova: Seja $f(t) = E(X-t)^2 = E(X^2 - 2Xt + t^2) = E(X^2) - 2tE(X) + t^2$. Derivando em relação a t, temos

$$f'(t) = -2E(X) + 2t$$

e igualando a zero concluímos que

$$-2E(X) + 2t = 0 \Rightarrow t = E(X) = \mu.$$

Já para $f(t) = E|X-t|$, não podemos derivar diretamente. Portanto, vamos provar que $E|X-t| \geq E|X-m|$ para todo t. Podemos simplificar o problema da seguinte maneira

$$E|X-t| \geq E|X-m| \Longrightarrow E(|X-t| - |X-m|) \geq 0.$$

Assuma que $t > m$ (o caso $t < m$ é similar). Então, para $X \leq m$ temos

$$|X-t| - |X-m| = -(X-t) - (m-X) = t - m,$$

e se $X > m$ temos

$$|X-t| - |X-m| = X - t - (X-m) = m - t.$$

Seja $Y = |X-t| - |X-m|$, então, pela lei da esperança total, temos

$$\begin{aligned}
E(Y) &= E(Y \mid X \leq m)P(X \leq m) + E(Y \mid X > m)P(X > m) \\
&= E(t-m \mid X \leq m)P(X \leq m) + E(m-t \mid X > m)P(X > m) \\
&= (t-m)P(X \leq m) + (m-t)P(X > m) \\
&= (t-m)P(X \leq m) - (t-m)(1 - P(X \leq m)) \\
&= 2(t-m)P(X \leq m) - (t-m) = (t-m)(2P(X \leq m) - 1).
\end{aligned}$$

Como $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$, temos que $2P(X \leq m) - 1 \geq 0$, e portanto $E(Y) \geq 0$. Concluindo que $E|X - t| \geq E|X - m|$ para todo t. □

Capítulo 7.

Teorema 7.1.20: Seja f_{xy} a PDF conjunta de X e Y tal que

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y)$$

para todo x e y, onde $g(x)$ e $h(y)$ são funções não negativas. Então X e Y são independentes. Se g ou h for uma PDF válida, então a outra também é, e a PDF conjunta é o produto das marginais.

Prova: defina

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy > 0$$

podemos reescrever a PDF conjunta como

$$f_{xy}(x, y) = g(x)h(y) = cg(x)\frac{h(y)}{c}$$

então a PDF marginal de X é

$$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)\frac{h(y)}{c}dy = cg(x)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)}{c}dy = cg(x).$$

Segue que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ já que f_X é uma PDF válida. Analogamente, $\frac{h(y)}{c}$ é a PDf marginal de Y. Portanto, $cg(x)$ e $\frac{h(y)}{c}$ são PDFs válidas, o que conclui que X e Y são independentes. □

Teorema 7.3.2 (independente implica corr = 0): Sejam X e Y v.a. independentes. Então, $\operatorname{corr}(X, Y) = 0$.

Prova: Como a fórmula da correlação é

$$\operatorname{corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}}$$

Basta mostrar que a covariância é zero. Como X e Y são independentes, temos que

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

e a prova de que $E(XY) = E(X)E(Y)$ é, no caso contínuo,

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{xy}(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(x)} f_{Y(y)} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(x)} dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y(y)} dy = E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

E no caso discreto

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_x \sum_y xy f_{xy}(x,y) \\
&= \sum_x \sum_y xy f_{X(x)} f_{Y(y)} \\
&= \sum_x x f_{X(x)} \sum_y y f_{Y(y)} = E(X)E(Y)
\end{aligned}
$$

□

Observação: A recíproca não é verdadeira, ou seja, $\mathrm{corr}(X, Y) = 0$ não implica independência.

Capítulo 8.

Teorema 8.2.1 (Convolução): Sejam X e Y v.a.s independentes discretas, então a PMF da sua soma $T = X + Y$ é

$$P(T = t) = \sum_x P(Y = t - x)P(X = x)$$

$$P(T = t) = \sum_y P(X = t - y)P(Y = y)$$

E para o caso contínuo, a PDF da soma é

$$f_{T(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t - x) f_X(x) dx$$

$$f_{T(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t - y) f_Y(y) dy$$

Prova: Para o caso discreto, temos

$$
\begin{aligned}
P(T = t) = P(X + Y = t) &\overset{\text{LOTP}}{=} \sum_x P(X + Y = t | X = x) P(X = x) \\
&= \sum_x P(Y = t - x | X = x) P(X = x) \\
&= \sum_x P(Y = t - x) P(X = x)
\end{aligned}
$$

De forma análoga, pode-se provar para $P(T = t) = \sum_y P(X = t - y)P(Y = y)$.

Note que a terceira igualdade é verdadeira pois X e Y são independentes. Para o caso contínuo:

$$\begin{aligned} f_{T(t)} = P(T \leq t) = P(X + Y \leq t) \\ &\overset{\text{LOTP}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} P(X + Y \leq t | X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \leq t - x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t - x) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Analogamente para $f_{T(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t - y) f_Y(y) dy$. □

Teorema 8.4.3 (Gamma = soma expo): Sejam $X_1, ..., X_n$ v.a.s independentes com $X_i \sim \text{Expo}(\lambda)$. Então

$$X_1 + ... + X_2 \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

Prova: A MGF de X_i é $M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, então a MGF da soma é

$$M_{X_1 + ... + X_n}(t) = M_{X_1}(t) \times ... \times M_{X_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

Para $t < \lambda$. Seja $Y \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$, então a MGF de Y é

$$\begin{aligned} M_Y(t) = E(e^{tY}) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{ty} (\lambda y)^n e^{-\lambda y} \frac{dy}{y} \\ &= \lambda^n \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} y^n e^{-(\lambda - t) y} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} ((\lambda - t) y)^n e^{-(\lambda - t) y} \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n} \end{aligned}$$

Na segunda igualdade apenas foi retirado o λ^n da integral. E na terceira foi multiplicado e dividido por $(\lambda - t)^n$ e nota-se que a integral restante é a PDF de uma v.a. $\text{Gamma}(n, \lambda - t)$. Portanto, comos as MGFs são iguais, temos que $X_1 + ... + X_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. □

Capítulo 9.

Teorema 9.1.5 (lei da esperança total): Seja $A_1, ..., A_n$ uma partição do espaço amostral, onde $P(A_i) > 0$ para todo i, e X uma v.a. Então

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X | A_i) P(A_i)$$

Prova: Pelo **Teorema 9.3.7** (Lei de Adão), temos que

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

Considerando Y uma v.a. discreta, e $g(y) = E(X|Y = y)$, então

$$E(E(X|Y)) = E(g(Y)) = \sum_{y} g(y)P(Y = y) = \sum_{y} E(X|Y = y)P(Y = y)$$

Fazendo a relação $A_i = \{Y = i\}$, temos

$$E(E(X|Y)) = \sum_{y} E(X|Y = y)P(Y = y) = \sum_{i=1}^{n} E(X|A_i)P(A_i) = E(X)$$

Portanto, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X|A_i)P(A_i)$. Para o caso contínuo, a prova é análoga. □

Teorema 9.3.7 (Lei de Adão): Para quaisquer v.a.s X e Y vale

$$E(E(Y|X)) = E(Y)$$

Prova: Para X e Y discretas e $g(X) = E(Y|X)$, temos

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_{x} g(x)P(X = x) \\ &= \sum_{x} E(Y|X = x)P(X = x) \\ &= \sum_{x} \left(\sum_{y} yP(Y = y|X = x) \right) P(X = x) \end{aligned}$$

Lembre-se que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, então

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= \sum_{x} \sum_{y} yP(Y = y|X = x)P(X = x) \\ &= \sum_{y} y \sum_{x} P(Y = y \cap X = x) \\ &= \sum_{y} yP(Y = y) = E(Y) \end{aligned}$$

Portanto, $E(E(Y|X)) = E(Y)$. Para o caso contínuo, a prova é análoga. □

Teorema 9.5.4 (Lei de Eva): Para quaisquer v.a.s X e Y vale

$$\mathrm{Var}(Y) = E(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(E(Y|X))$$

O nome da lei vem de que a ordem de esperanças e variâncias é EVVE, onde em inglês EVE é o nome de Eva.

Prova: Seja $g(X) = E(Y|X)$, então pela lei de Adão $E(Y) = E(E(Y|X)) = E(g(X))$. Então

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{Var}(Y|X)) &= E\Big(E(Y^2|X) - E(Y|X)^2\Big) \\
&= E(E(Y^2|X)) - E(E(Y|X))^2 \\
&= E(Y^2) - E(g(X))^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(E(Y|X)) &= \mathrm{Var}(g(X)) \\
&= E\Big(g(X)^2\Big) - E(g(X))^2 \\
&= E\Big(g(X)^2\Big) - E(Y)^2
\end{aligned}
$$

Por fim, somando as duas equações, temos

$$
\begin{aligned}
E(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(E(Y|X)) &= E(Y^2) - E(g(X))^2 + E\Big(g(X)^2\Big) - E(Y)^2 \\
&= E(Y^2) - E(Y)^2 = \mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Capítulo 10.

vazio por hora

11. Desigualdades

Teorema 11.1 (Desigualdade de Markov): Seja X uma variável aleatória não negativa. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

Prova: Seja $Y = \frac{|X|}{a}$ e $I_{Y \geq 1}$ a função indicadora de $Y \geq 1$. Temos que $I_{Y \geq 1} = 1 \Leftrightarrow Y \geq 1$ e $I_{Y \geq 1} = 0 \Leftrightarrow Y < 1$. Isso implica que $I_{Y \geq 1} \leq Y$. Logo, aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(I_{Y \geq 1}) \leq E(Y) \Rightarrow P(Y \geq 1) \leq E(Y) \Rightarrow P\left(\frac{|X|}{a} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|X|}{a}\right) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

$\square$

Teorema 11.2 (Desigualdade de Chebyshev): Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Prova: Seja $Y = |X - \mu|^2$, com isso temos

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(|X - \mu|^2 \geq a^2) = P(Y \geq a^2)$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{E(|X - \mu|^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Portanto

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

$\square$

Teorema 11.3 (Desigualdade de Chernoff): Seja X uma variável aleatória com média μ. Então, para todo $a > 0$,

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

onde $M_{X(t)}$ é a função geradora de momentos de X.

Prova: Seja $Y = e^{tX}$, com isso temos

$$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) = P(Y \geq e^{ta})$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq e^{ta}) \leq \frac{E(Y)}{e^{ta}} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Portanto

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

□

Definição 11.1 (convexidade e concavidade): Seja g uma função duas vezes diferenciável. Dizemos que g é convexa se $g''(x) \geq 0$ para todo x e concava se $g''(x) \leq 0$ para todo x.

Teorema 11.4 (Desigualdade de Jensen): Seja X uma variável aleatória e g uma função convexa, então

$$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

Se g é concava, a desigualdade é invertida, ou seja,

$$g(E(X)) \geq E(g(X))$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $g(X) = a + bX$ com probabilidade 1.

Prova: Se g é convexa, então $g''(x) \geq 0$ para todo x. E seja $a + bX$ a reta tangente a g em $E(X)$, então temos

$$g(X) \geq a + bX$$

aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(g(X)) \geq a + bE(X) = g(E(X))$$

Onde a igualdade vale pois a reta é tangente em $E(X)$.

Usando a mesma g, temos que $h = -g$ é concava, usando a desigualdade encontrada acima, temos

$$E(-h(X)) \geq -h(E(X)) \Longrightarrow -E(h(X)) \geq -h(E(X))$$

multiplicando por -1 em ambos os lados, temos

$$E(h(X)) \leq h(E(X))$$

□