# Capítulo 5.

**Teorema 5.3.1** (Universalidade da Uniforme): Seja $F$ uma CDF, uma função contínua e estritramente crescente no suporte da distribuição. Isto garante que a função inversa $F^{-1}$ existe e é única, onde $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$. Os seguintes resultados valem:

1. Seja $U \sim \text{Unif}(0,1)$ e $X = F^{-1}(U)$. Então, $X$ é uma v.a. com CDF $F$.
2. Seja $X$ uma v.a. com CDF $F$. Então, $F(X) \sim \text{Unif}(0,1)$.

**Prova**:

1. Tomando $X = F^{-1}(U)$, temos que

$$P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x).$$

2. Seja $U = F(X)$, então

$$P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)) = u.$$

□

# Capítulo 6.

Vazio por hora

# Capítulo 7.

**Teorema 7.1.20**: Seja $f_{xy}$ a PDF conjunta de $X$ e $Y$ tal que

$$f_{xy}(x,y) = g(x)h(y)$$

para todo $x$ e $y$, onde $g(x)$ e $h(y)$ são funções não negativas. Então $X$ e $Y$ são independentes. Se $g$ ou $h$ for uma PDF válida, então a outra também é, e a PDF conjunta é o produto das marginais.

**Prova**: defina

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy > 0$$

podemos reescrever a PDF conjunta como

$$f_{xy}(x,y) = g(x)h(y) = cg(x)\frac{h(y)}{c}$$

então a PDF marginal de $X$ é

$$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)\frac{h(y)}{c}dy = cg(x)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y)}{c}dy = cg(x).$$

Segue que $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ já que $f_X$ é uma PDF válida. Analogamente, $\frac{h(y)}{c}$ é a PDf marginal de $Y$. Portanto, $cg(x)$ e $\frac{h(y)}{c}$ são PDFs válidas, o que conclui que $X$ e $Y$ são independentes. □

# 8. Desigualdades

**Teorema 8.1** (Desigualdade de Markov): Seja $X$ uma variável aleatória não negativa. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

**Prova**: Seja $Y = \frac{|X|}{a}$ e $I_{Y \geq 1}$ a função indicadora de $Y \geq 1$. Temos que $I_{Y \geq 1} = 1 \Leftrightarrow Y \geq 1$ e $I_{Y \geq 1} = 0 \Leftrightarrow Y < 1$. Isso implica que $I_{Y \geq 1} \leq Y$. Logo, aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(I_{Y \geq 1}) \leq E(Y) \Rightarrow P(Y \geq 1) \leq E(Y) \Rightarrow P\left(\frac{|X|}{a} \geq 1\right) \leq E\left(\frac{|X|}{a}\right) \Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{E(|X|)}{a}$$

□

**Teorema 8.2** (Desigualdade de Chebyshev): Seja $X$ uma variável aleatória com média $\mu$ e variância $\sigma^2$. Então, para todo $a > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

**Prova**: Seja $Y = |X - \mu|^2$, com isso temos

$$P(|X - \mu| \geq a) = P(|X - \mu|^2 \geq a^2) = P(Y \geq a^2)$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{E(|X - \mu|^2)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Portanto

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

□

**Teorema 8.3** (Desigualdade de Chernoff): Seja $X$ uma variável aleatória com média $\mu$. Então, para todo $a > 0$,

$$P(X \geq \mu + a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

onde $M_{X(t)}$ é a função geradora de momentos de $X$.

**Prova**: Seja $Y = e^{tX}$, com isso temos

$$P(X \geq a) = P(e^{tX} \geq e^{ta}) = P(Y \geq e^{ta})$$

Aplicando a desigualdade de Markov, temos

$$P(Y \geq e^{ta}) \leq \frac{E(Y)}{e^{ta}} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

Portanto

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta} M_{X(t)} = \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}}$$

□

**Definição 8.1** (convexidade e concavidade): Seja $g$ uma função duas vezes diferenciável. Dizemos que $g$ é convexa se $g''(x) \geq 0$ para todo $x$ e concava se $g''(x) \leq 0$ para todo $x$.

**Teorema 8.4** (Desigualdade de Jensen): Seja $X$ uma variável aleatória e $g$ uma função convexa, então

$$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

Se $g$ é concava, a desigualdade é invertida, ou seja,

$$g(E(X)) \geq E(g(X))$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $g(X) = a + bX$ com probabilidade 1.

**Prova**: Se $g$ é convexa, então $g''(x) \geq 0$ para todo $x$. E seja $a + bX$ a reta tangente a $g$ em $E(X)$, então temos

$$g(X) \geq a + bX$$

aplicando a esperança em ambos os lados, temos

$$E(g(X)) \geq a + bE(X) = g(E(X))$$

Onde a igualdade vale pois a reta é tangente em $E(X)$.

Usando a mesma $g$, temos que $h = -g$ é concava, usando a desigualdade encontrada acima, temos

$$E(-h(X)) \geq -h(E(X)) \Longrightarrow -E(h(X)) \geq -h(E(X))$$

multiplicando por $-1$ em ambos os lados, temos

$$E(h(X)) \leq h(E(X))$$

□