6ª Lista de Exercícios de Cálculo 3

1) Verifique, **de 6 maneiras diferentes**, que:

a) $\iiint_D xyz^2 dV = \frac{27}{4}$, em que D é a caixa retangular $[0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$;

b) $\iiint_D 12xy^2z^3 dV = 648$, em que D é a caixa retangular $[-1,2] \times [0,3] \times [0,2]$.

2) Verifique que:

a) $\iiint_D z dV = \frac{1}{8}$, em que D é a cunha no 1º octante seccionada do sólido cilíndrico $y^2 + z^2 \leq 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 0$;
b) $\iiint_D z dV = 4$, em que D é o sólido no 1º octante delimitado pela superfície $z = 12xy$ e pelos planos $y = x$ e $x = 1$;
c) $\iiint_D \sqrt{x^2 + z^2} dV = \frac{128\pi}{15}$, em que D é o sólido limitado pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$ e pelos planos $y = 4$.

3) Usando coordenadas cilíndricas, verifique que:

a) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2) dz dy dx = \frac{16\pi}{5}$;
b) $\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx = \frac{243\pi}{4}$;
c) $\iiint_D x^2 dV = \frac{16\pi}{3}$, em que D é o sólido que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e acima do plano xy;
d) O volume e o centroide do sólido D limitado superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ são, respectivamente, $\frac{122\pi}{3}$ e $\left(0,0,\frac{1107}{488}\right)$;
e) O centroide e o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido D de densidade constante $\delta = \delta(x, y, z) = 1$ delimitado superiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ são, respectivamente, $\left(0,0,\frac{4}{3}\right)$ e $\frac{\pi}{12}$.

4) Usando coordenadas esféricas, verifique que:

a) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx = \frac{64\pi}{9}$;
b) $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dV = \frac{4\pi(e-1)}{3}$, em que D é a bola unitária $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
c) O volume e o centroide do sólido D limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ são, respectivamente, $\frac{64\pi(2-\sqrt{2})}{3}$ e $\left(0,0,\frac{3}{2(2-\sqrt{2})}\right)$;

d) O volume do sólido D limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é $\frac{\pi}{8}$;

e) O volume da "casquinha de sorvete" D cortada da esfera sólida $\rho \leq 1$ pelo cone $\varphi = \frac{\pi}{3}$ é $\frac{\pi}{3}$.

5) Usando integral tripla, calcule:

a) O volume do sólido D contido no cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e entre os planos $z = 1$ e $x + z = 5$;

b) O volume do sólido D delimitado pelas superfícies $z = x^2 + 3y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$;

c) O volume do tetraedro D limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$;

d) A massa e o centro de gravidade de um sólido cilíndrico de altura h e raio a cuja densidade em cada ponto é proporcional à distância entre o ponto e a base do sólido.

Respostas: a) 36π b) $8\pi\sqrt{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{kh^2\pi a^2}{2}$ e $\left(0,0,\frac{2h}{3}\right)$

6) Usando uma mudança conveniente de variáveis, mostre que:

a) O volume da região D limitada pelo elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é $\frac{4\pi abc}{3}$;

b) $\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz = 12.$