

Esperienza Circuiti II

F. Ballo, S. Franceschina, S. Dolci - Gruppo T1 39

April 16, 2024

Abstract

Nella seguente relazione vengono presentati i risultati ottenuti dalla seconda esperienza del corso di Laboratorio II riguardante l'analisi di circuiti elettrici. L'obiettivo di questa esperienza è quello di studiare circuiti RC, RL e RLC in regimi di corrente impulsata (usando un onda quadra fornita da un generatore di funzioni). In particolare volendo verificare le leggi che descrivono questi circuiti, sono state effettuate misurazioni con oscilloscopio sull'andamento della differenza di potenziale ai capi dei vari componenti: resistenza, capacità e induttanza.

Contents

1	Circuito RC	3
1.1	Configurazione del circuito e della strumentazione	3
1.2	Dati	4
1.3	Analisi dati	4
1.4	Conclusioni circuito RC	5
1.5	Discussione sulle incertezze	5
1.5.1	Metodo "del gradino" per la stima di τ	5
2	Circuito RL	6
2.1	Configurazione del circuito e della strumentazione	6
2.2	Dati	6
2.3	Analisi dati	6
2.4	Conclusioni circuito RL	7
3	Circuito RLC	8
3.1	Configurazione del circuito	8
3.2	Dati	9
3.3	Analisi Dati	10
3.3.1	Regime sottosmorzato	10
3.3.2	Regime criticamente smorzato	11

3.3.3	Regime sovrasmorzato	12
3.4	Conclusioni sul circuito RLC	13
4	Tabelle	14

1 Circuito RC

1.1 Configurazione del circuito e della strumentazione

Di seguito abbiamo riportato lo schema 1 utilizzato per riprodurre il circuito RC in laboratorio con l'utilizzo di una bread-board e degli opportuni componenti, con l'obiettivo di verificare la seguente legge che descrive l'andamento della tensione in un circuito RC:

$$V(t) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (1)$$

tuttavia, per fare la nostra analisi ci siamo serviti della funzione:

$$V(t) = V_0 \cdot e^{\frac{t}{\tau}} + k \quad (2)$$

in modo da poter aver un controllo maggiore sullo shift verticale del grafico. Per fare ciò abbiamo selezionato con un generatore di funzioni un segnale a onda quadra di frequenza f , per simulare l'apertura o chiusura del generatore, verificando che la durata dell'impulso sia abbastanza lunga da permettere alla capacità C di caricarsi. Per trovare la curva che descrive l'andamento di $V(t)$ è stato necessario campionare punto per punto il grafico che ci appare sull'oscilloscopio dopo aver misurato con le sonde i segnali di tensione ai capi del resistore R e capacità C . Prima delle misure abbiamo verificato la calibrazione di: oscilloscopio, generatore, sonde di misura e le "dimensioni" resistenza R e capacità C .

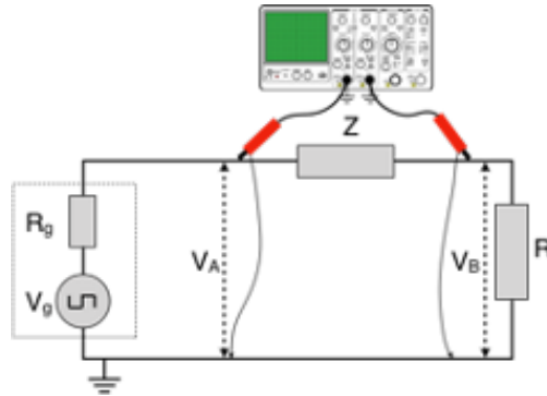


Figure 1: Schema configurazione di circuito, Z rappresenta uno dei componenti tra R , C e L

Riuscire a verificare la legge prevista per il regime di circuito in questione permette di trovare la costante di tempo caratteristica τ ; conoscendo il valore di R possiamo quindi stimare quanto vale la capacità C .

$$\tau = RC \quad (3)$$

1.2 Dati

Di seguito riportiamo i dati e la configurazione del circuito RC studiato:

1. Resistenza interna oscilloscopio $R_o = 50 \Omega$ (valore indicato sull'oscilloscopio)
2. Resistenza usata nel circuito $R = (67.1 \pm 0.1) \text{ k}\Omega$
3. Frequenza generatore $f = 200 \text{ Hz}$
4. Intervallo tensione $V_0 = (1000.0 - 0000.0) \text{ mV}$

1.3 Analisi dati

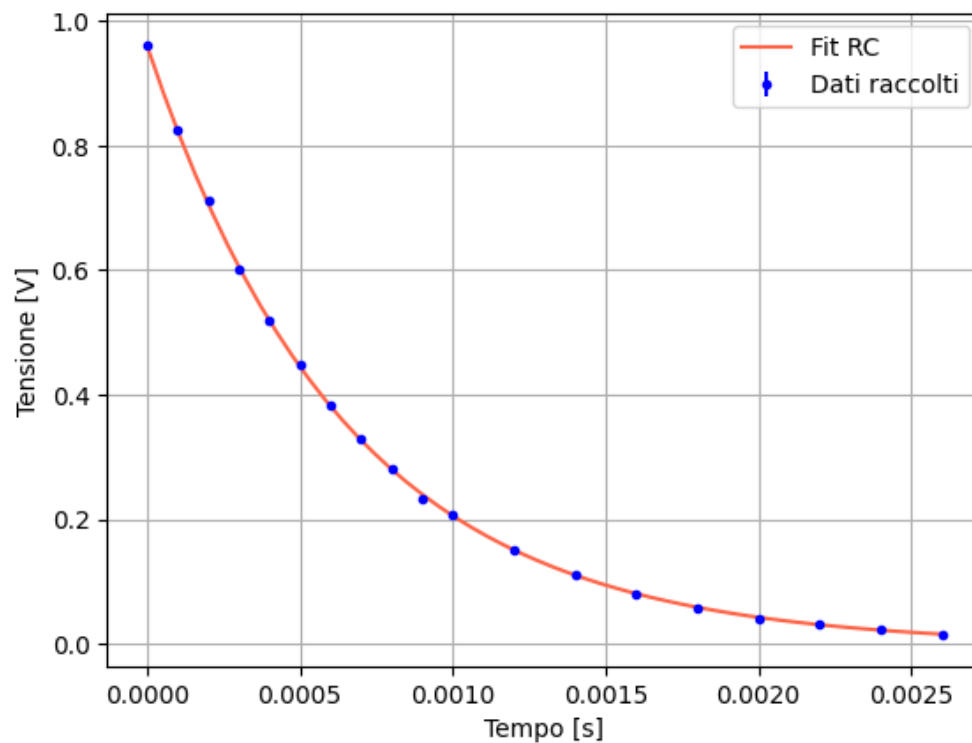


Figure 2: Grafico fit RC

Per prima cosa abbiamo verificato la misura di C mediante un multimetro palmare, ottenendo:

$$C = (10 \pm 0.1) \text{ nF}$$

valore che abbiamo usato per fare un confronto con quello ricavato dal fit.

Dopo aver raccolto i dati, abbiamo proceduto a interpolarli secondo la legge (1), ottenendo i seguenti valori dei parametri:

$$V_0 = (963.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$k = (2 \pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$\tau = (652 \pm 6) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Conoscendo la resistenza R , abbiamo calcolato $C = \frac{\tau}{R}$ e propagato le incertezze con la seguente formula:

$$1. \sigma_C = \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \delta \tau\right)^2}$$

$$2. C_{\text{calc}} = (9.72 \pm 0.08) \cdot 10^{-9} \text{ F} \quad C_{\text{attesa}} = (10 \pm 0.1) \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

1.4 Conclusioni circuito RC

Il fit restituisce un valore del $\tilde{\chi}^2 = 0.7$ e $p\text{-value} = 0.817$, il che indica una buona compatibilità delle misure con il modello (1)

Eseguendo un test di compatibilità con la misura effettuata otteniamo $t = 1.02$.

La misura di C rientra entro poco più di una deviazione standard dalla misurazione effettuata, fornendo ulteriore conferma della bontà dell'adattamento.

1.5 Discussione sulle incertezze

La nostra stima delle incertezze è stata basata sulla precisione dell'oscilloscopio, che a seconda della scala di risoluzione variava da 2 a 20 mV.

In ciascun esperimento abbiamo tentato di selezionare il range dello strumento in modo che nello schermo fosse visibile tutta l'onda, senza mostrare regioni al di fuori del regime di interesse.

Per essere sicuri che i nostri errori fossero corretti, abbiamo eseguito una stima a posteriori delle incertezze, osservando che gli errori così ottenuti si mantengono compatibili con quelli adottati da noi.

1.5.1 Metodo "del gradino" per la stima di τ

Un metodo per la stima della costante di tempo caratteristica di un circuito, senza il campionamento di punti sulla curva, potrebbe essere quello di fornire sempre con un generatore un'onda quadra di una certa frequenza f poi aggiustando la scala dell'oscilloscopio per visualizzare interamente il tempo che il segnale impiega a salire e scendere. Riportiamo in seguito un procedimento a quanto pare comunemente utilizzato e pratico per ottenere una stima della costante di tempo (precisiamo che questo metodo non lo abbiamo "inventato" noi ma per completezza ci sembra giusto riportarlo):

1. La τ è definita come il tempo necessario per la risposta del circuito ad un cambiamento del 63% , circa $\frac{1}{e}$, dal valore iniziale a quello finale.
2. Misurando il tempo che il segnale impiega per passare dal 10% al 90% calcoliamo quello che viene chiamato tempo di salita t_s .
3. Il segnale ha quindi "percorso" circa l'80% del sul cambiamento quindi si ricava una formula per costante caratteristica $\tau = \frac{t_s}{2.2}$.

4. il fattore 2.2 indica quanto 80% si avvicina al valore $\frac{1}{e}$.

Con questo metodo si ottiene un'approssimazione ragionevole della costante di tempo caratteristica del circuito. Il concetto importante qui è che dall'andamento del segnale possiamo estrapolare come un cambiamento rapido di input influenza il circuito.

2 Circuito RL

2.1 Configurazione del circuito e della strumentazione

L'obiettivo di questa sezione è applicare la stessa analisi seguita per il circuito RC sostituendo la capacità con un'induttanza L . Anche in questo circuito il modello che descrive l'andamento della tensione risulta essere (1).

Per le misurazioni abbiamo ripetuto lo stesso procedimento: abbiamo selezionato con un generatore di funzioni un segnale a onda quadra di frequenza f , per simulare l'apertura o chiusura del generatore, verificando che la durata dell'impulso fosse abbastanza lunga da permettere all'induttanza L di caricarsi. Per trovare la curva che descrive l'andamento di $V(t)$ abbiamo campionato punto per punto il grafico riportato dall'oscilloscopio dopo aver misurato con le sonde il segnale tensione, stavolta ai capi del resistore R e induttanza L . Prima di effettuare le misure abbiamo verificato la calibrazione di: oscilloscopio, generatore, sonde di misura e "dimensioni" di resistenza R e induttanza L in rapporto alla resistenza interna dell'oscilloscopio.

Il nostro scopo è di nuovo quello di ricavare la costante di tempo caratteristica τ per il regime di circuito in questione, conoscendo il valore di R possiamo stimare quanto vale L .

$$\tau = \frac{R}{L} \quad (4)$$

2.2 Dati

Di seguito riportiamo i dati e la configurazione del circuito RL analizzato:

1. Resistenza interna oscilloscopio $R_o = (50.0) \Omega$ (valore indicato sull'oscilloscopio)
2. Resistenza circuito $R = (1000.01 \pm 0.01) \Omega$
3. Frequenza generatore $f = 700 \text{ Hz}$
4. Intervallo tensione $V_0 = \pm(1000.0 \pm 0.1) \text{ mV}$

2.3 Analisi dati

Il processo di analisi è molto simile a quello effettuato in precedenza, tuttavia, non avendo la possibilità di misurare direttamente il valore dell'induttanza, abbiamo basato la nostra analisi su un valore indicativo atteso di qualche decina di mH.

Come forma funzionale per l'interpolazione delle misure abbiamo seguito nuovamente la

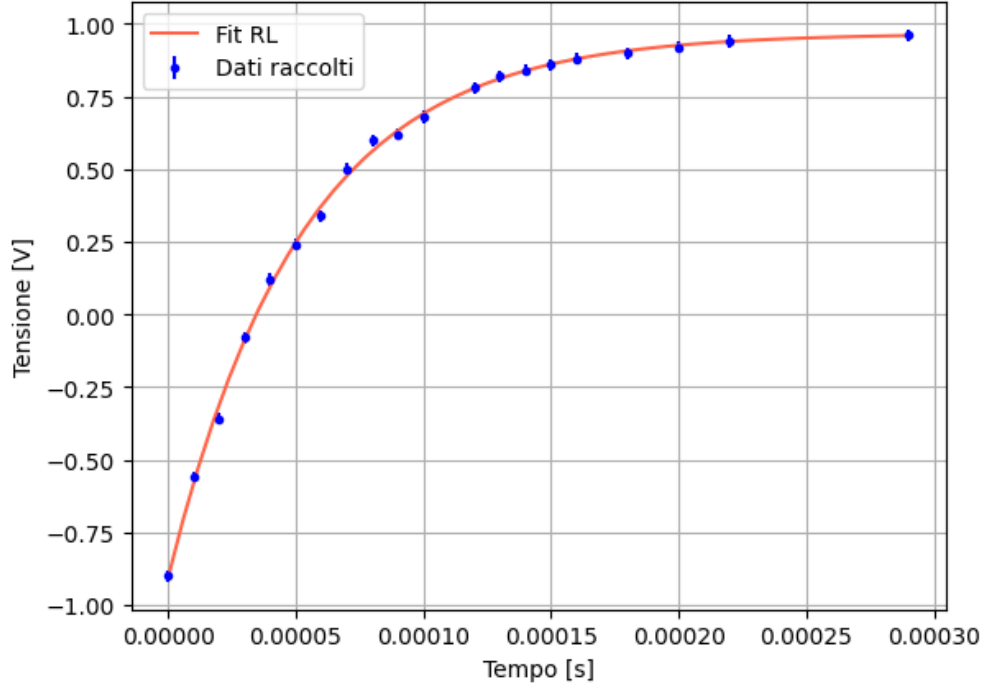


Figure 3: Grafico fit RL

relazione(2) Dopo aver raccolto i dati, come per quanto fatto in precedenza li abbiamo interpolati secondo tale legge, estraendo per i parametri i seguenti valori:

$$V_0 = (0.906 \pm 0.006) \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$k = (970 \pm 10) \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$\tau = (52.2 \pm 1.1) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Conoscendo la resistenza R , abbiamo calcolato $L = \frac{\tau}{R}$ e propagato le incertezze con la seguente formula:

$$1. \sigma_L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \tau} \cdot \delta \tau\right)^2}$$

$$2. L_{\text{calc}} = (52.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-3} \text{ H} \quad L_{\text{attesa}} = (50.0 \pm 0.1) \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

2.4 Conclusioni circuito RL

Dal fit dei dati abbiamo ricavato un valore del $\tilde{\chi}^2 = 1.0$ e $p\text{-value} = 0.400$, suggerendo un'ottima compatibilità delle misure con il modello.

Come detto in precedenza, non avendo una misura diretta dell'induttanza stimata, abbiamo confrontato il valore ottenuto con uno indicativo $L \approx 50\text{mH}$.

Il test di compatibilità in questo caso risulta $t = 1.02$. L'induttanza L ha una resistenza propria, lo schema che riassume il circuito reale è riportato in figura 4.

La resistenza interna R_L dell'induttore ci aspettiamo causi una caduta di tensione proporzionale alla corrente che lo attraversa, quindi quando con le sonde misuriamo la tensione

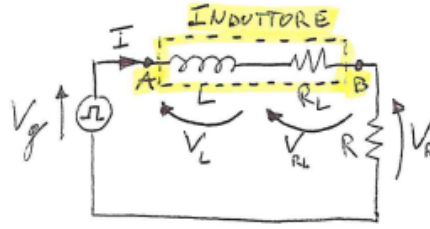


Figure 4: Grafico circuito RL reale

essa sarà la somma della caduta di tensione a causa di L che si carica e una caduta di tensione dovuta alla resistenza interna R_L . Nel circuito RL reale bisognerebbe utilizzare la seguente relazione

$$\tau = \frac{L}{R_L + R}$$

Avendo noi utilizzato una resistenza R di circa 1000 ohm, la resistenza interna dell'induttore può non essere considerata.

3 Circuito RLC

3.1 Configurazione del circuito

In questa terza sezione abbiamo analizzato un circuito RLC. Il modello teorico mostra che un circuito di questo tipo si comporta come un oscillatore armonico, a seconda di come variano i parametri del circuito si osservano tre comportamenti diversi, descritti da tre leggi differenti. Di seguito riportiamo i parametri del circuito:

1. **Regime sottosmorzato:** $\gamma < \omega_0$
Il sistema viene retto dall'equazione:

$$V(t) = I_0 R e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (5)$$

2. **Regime criticamente smorzato:** $\gamma = \omega_0$
Il sistema viene retto dall'equazione:

$$V(t) = I_0 C t e^{-\gamma t} \quad (6)$$

3. **Regime sovrasmorzato:** $\gamma > \omega_0$
Il sistema viene retto dall'equazione:

$$V(t) = I_0 R e^{-\gamma t} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \quad (7)$$

Con l'obiettivo di determinare ω e γ nei tre casi abbiamo selezionato con un generatore di funzioni un segnale a onda quadra di frequenza f , per simulare l'accensione e spegnimento del generatore. Come suggerito dalla scheda di laboratorio, abbiamo verificato che

la durata dell'impulso fosse abbastanza lunga da osservare cinque picchi a partire dal caso sottosmorzato. Per trovare la curva che descrive l'andamento di $V(t)$ è stato necessario campionare punto per punto il grafico riportato dall'oscilloscopio, il quale misura tramite una sonda la variazione di tensione ai capi del resistore R . Prima di effettuare le misure abbiamo verificato come fatto in precedenza la calibrazione di: oscilloscopio, generatore, sonde di misura e "dimensioni" della resistenza R , della capacità C e dell'induttanza L in rapporto alla resistenza interna dell'oscilloscopio.

Il circuito è stato configurato come in figura 5

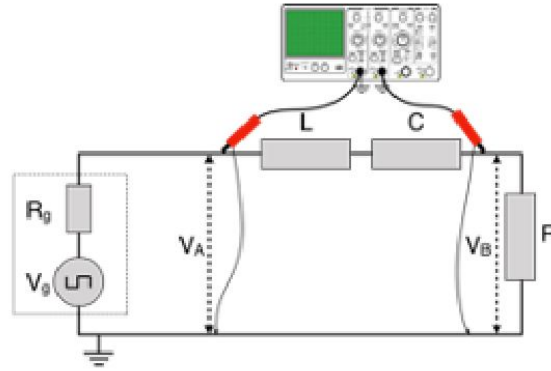


Figure 5: Schema configurazione di circuito RLC

Dall'interpolazione dei grafici ottenuti nei tre casi ci aspettiamo di ricavare i valori di ω e γ caratteristici del circuito.

3.2 Dati

Di seguito riportiamo i dati sulle componenti e la configurazione del circuito studiato:

1. Resistenza interna oscilloscopio $R_o = (50.0)\Omega$ (valore riportato sull'oscilloscopio)
2. Frequenza generatore $f = 300 \text{ Hz}$
3. Intervallo tensione $V_0 = \pm(1000.0 \pm 0.1) \text{ mV}$

Di seguito riportiamo anche le formule utilizzate per la propagazione delle incertezze di γ e ω :

1. $\sigma_\gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial \gamma}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2}$
2. $\sigma_\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial C} \cdot \delta C\right)^2}$

3.3 Analisi Dati

3.3.1 Regime sottosmorzato

Per il circuito in regime sottosmorzato abbiamo utilizzato una resistenza di carico pari a :

$$R_1 = (300 \pm 1) \, \Omega$$

Questo valore è stato verificato con un multimetro palmare. I dati raccolti sono riportati nella tabella 3 e il grafico ottenuto è riportato in figura 6.

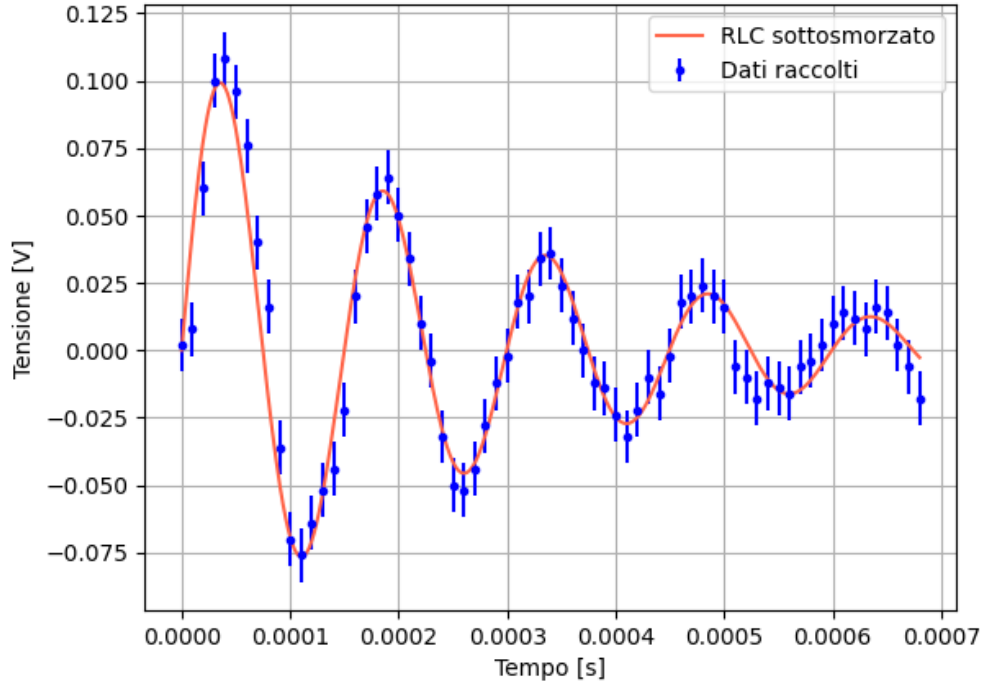


Figure 6: Grafico fit RLC sottosmorzato

Il fit è stato eseguito seguendo come forma funzionale la relazione (5). I valori di γ e ω calcolati con le relative incertezze sono:

$$\gamma_{\text{calc}} = (2.87 \pm 0.06) \cdot 10^3 \, \text{Hz}$$

$$\omega_{\text{calc}} = (44.3 \pm 0.5) \cdot 10^3 \, \text{Hz}$$

Mentre i parametri ottenuti dal fit sono:

$$\gamma_{\text{attesa}} = (3.5 \pm 0.3) \cdot 10^3 \, \text{Hz}$$

$$\omega_{\text{attesa}} = (41.9 \pm 0.2) \cdot 10^3 \, \text{Hz}$$

Il valore del $\tilde{\chi}^2 = 1.1$ e $p\text{-value} = 0.279$ indicano una buona compatibilità delle misure con il modello 5

Eseguendo un test di compatibilità tra i valori ottenuti e quelli attesi otteniamo:

1. $\gamma \quad t = 2.17$

2. $\omega \quad t = 4.49$

Da questi valori, ci rendiamo conto che i valori ottenuti non sono particolarmente compatibili con quelli attesi. Discutiamo alla fine le possibili cause di questa discrepanza.

3.3.2 Regime criticamente smorzato

Per il circuito in regime criticamente smorzato abbiamo utilizzato una resistenza di carico pari a:

$$R_2 = (3900 \pm 1) \, \Omega$$

Questo valore è stato verificato con un multimetro palmare. Di seguito riportiamo il grafico7 del fit, mentre i dati raccolti si trovano nella tabella 4.

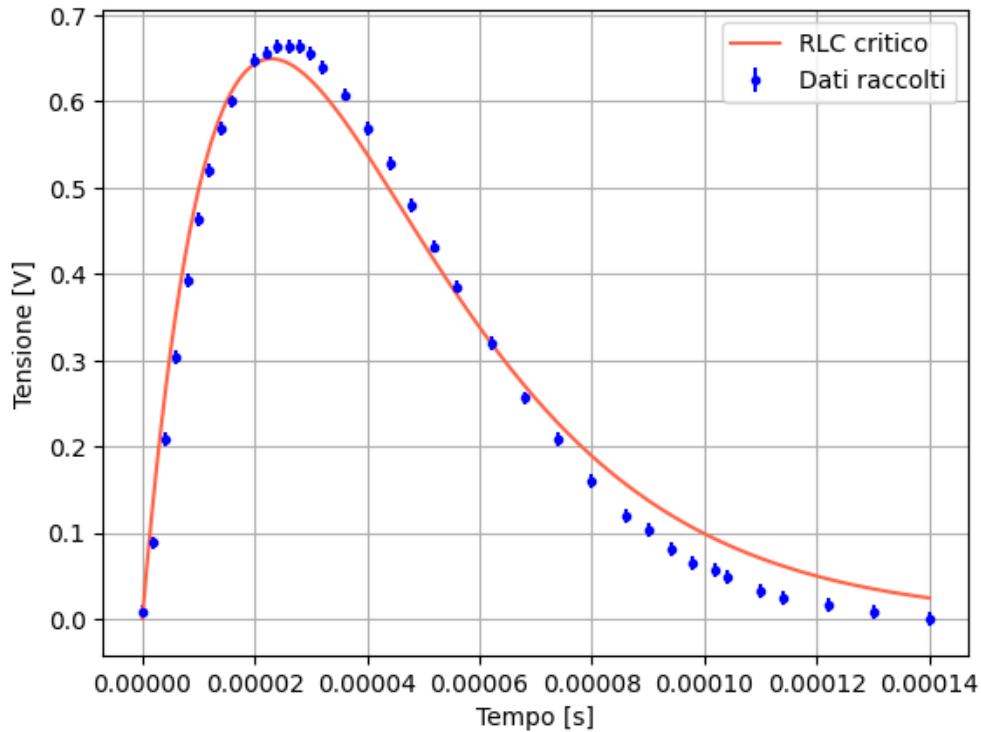


Figure 7: Grafico fit RLC critico

Il fit è stato eseguito seguendo come forma funzionale la relazione (6). Il valore di γ e ω calcolato con le relative incertezze è:

$$\gamma_{\text{attesa}} = (3.72 \pm 0.08) \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

e nel caso di regime critico

$$\omega_{\text{attesa}} = \gamma_{\text{attesa}}$$

Il valore di γ (e quindi ω) calcolato è invece:

$$\gamma_{\text{calc}} = (4.35 \pm 0.1) \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

$$\omega_{\text{calc}} = \gamma_{\text{calc}}$$

Eseguendo un test di compatibilità tra i valori ottenuti e quelli attesi otteniamo misure piuttosto distanti, tuttavia un circuito in regime critico è difficile verificare sperimentalmente poichè bisogna tenere conto di tutte le resistenze presenti nel circuito e altri fattori. Ulteriori analisi su questa discrepanza sono riportate nelle conclusioni.

3.3.3 Regime sovrasmorzato

Per il circuito in regime sottosmorzato abbiamo utilizzato una resistenza

$$R_3 = (10.0 \pm 0.1) \text{ k}\Omega$$

Di seguito riportiamo i dati raccolti e il grafico ottenuto in figura 8.

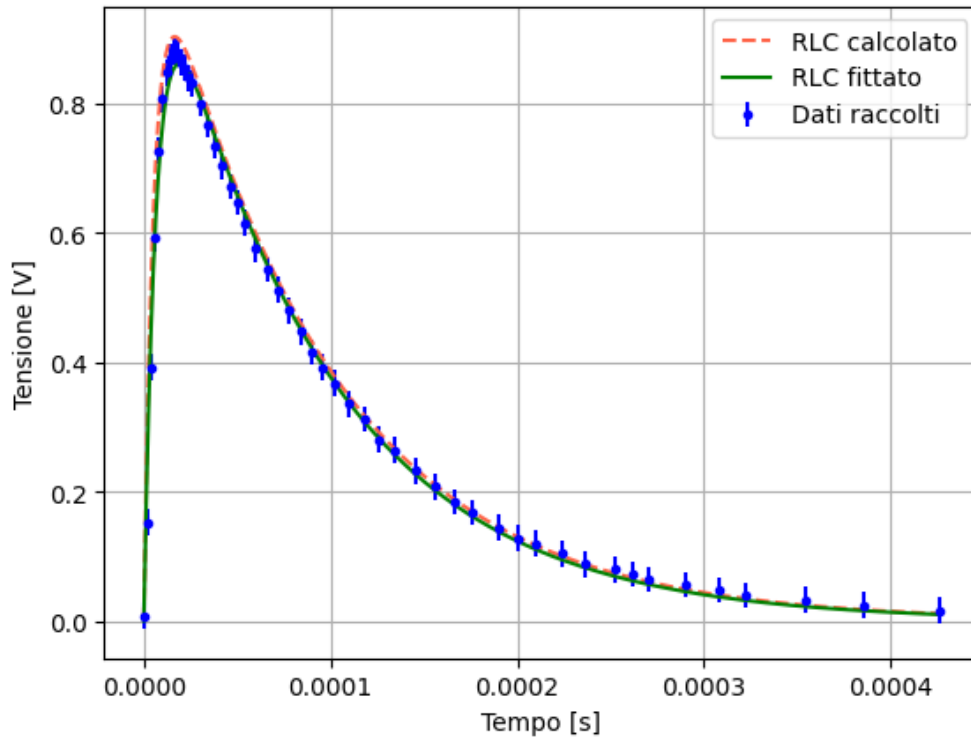


Figure 8: Grafico fit RLC sovrasmorzato

Abbiamo calcolato i valori di γ e ω con le relative incertezze:

$$\gamma_{\text{atteso}} = (95.8 \pm 2.2) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\omega_{\text{atteso}} = (44.3 \pm 0.5) \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Il fit è stato eseguito con la funzione (7) e i valori estratti sono:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{calc}} &= (79.1 \pm 0.3) \cdot 10^3 \text{ Hz} \\ \omega_{\text{calc}} &= (68.0 \pm 0.2) \cdot 10^3 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Il valore del $\tilde{\chi}^2 = 1.44$ e $p\text{-value} = 0.02$ indicano una buona compatibilità con il modello.

Abbiamo poi eseguito un test di compatibilità tra valori ottenuti e attesi ottenendo:

1. γ $t = 5.45$
2. ω $t = 7.32$

Anche in questo caso i valori ottenuti non sono compatibili con quelli attesi.

Nel grafico 8 abbiamo riportato, oltre al fit dei dati realizzato con minuit, anche un plot della funzione (7) a cui sono stati passati come parametri γ_{calc} e ω_{calc} . È possibile notare una differenza tra i due grafici, che abbiamo spiegato con la bassa concordanza tra le nostre misure e i valori calcolati.

3.4 Conclusioni sul circuito RLC

Ciò che emerge dall'analisi dati del circuito RLC è che in tutti e tre i casi otteniamo dai t-test una compatibilità bassa. Abbiamo provato ad avanzare ipotesi per capire come mai. Per quanto riguarda il caso di smorzamento critico, risulta evidente semplicemente osservando il grafico che i dati non si adattano sufficientemente bene al modello. Segue da qui che la stima dei parametri del circuito tramite interpolazione sia imprecisa, in quanto i dati non sono stati raccolti precisamente nel regime di criticità. Pensiamo inoltre di non aver precisamente misurato il picco del segnale.

Nei casi di sottosmorzamento e sovrasmorzamento le interpolazioni sono buone, i valori di $\tilde{\chi}^2$ si attestano attorno a 1, valore atteso. Resta però il fatto che i valori del t-test siano piuttosto alti. Pensiamo che il problema possa risiedere nell'aver trascurato le resistenze interne sia dell'induttanza che dell'oscilloscopio. Molto probabilmente la sorgente principale di queste discrepanze risiede nel fatto che per il campionamento dei punti sull'oscilloscopio abbiamo utilizzato una funzione che bloccasse momentaneamente il plot della curva, così facendo è probabile che un'incertezza insolita si sia propagata sulle misure delle tensioni.

4 Tabelle

Table 1: Dati circuito RC

Tempo [ms]	Tensione - carica pos. [mV]	Tensione - carica neg. [mV]
0.0	960	-952
0.1	824	-824
0.2	712	-696
0.3	600	-600
0.4	520	-512
0.5	448	-440
0.6	384	-368
0.7	328	-320
0.8	280	-272
0.9	232	-224
1.0	208	-200
1.2	152	-144
1.4	112	-104
1.6	80	-72
1.8	56	-56
2.0	40	-40
2.2	32	-28
2.4	24	-16
2.6	16	-8

Table 2: Dati circuito RL

Tempo [ms]	Tensione - carica [mV]
0.0	-900
0.01	-560
0.02	-360
0.03	-80
0.04	120
0.05	240
0.06	340
0.07	500
0.08	600
0.09	620
0.1	680
0.12	780
0.13	820
0.14	840
0.15	860
0.16	880
0.18	900
0.2	920
0.22	940
0.29	960

Table 3: Dati caso sottosmorzato

Tempo [ms]	Tensione [mV]
0.0	2
0.01	8
0.02	60
0.03	100
0.04	108
0.05	96
0.06	76
0.07	40
0.08	16
0.09	-36
0.1	-70
0.11	-76
0.12	-64
0.13	-52
0.14	-44
0.15	-22
...	...
0.66	2
0.67	-6
0.68	-18

Table 4: Dati caso criticamente smorzato

Tempo [ms]	Tensione [mV]
0.0	8.0
0.002	88.0
0.004	208.0
0.006	304.0
0.008	392.0
0.01	464.0
0.012	520.0
0.014	568.0
0.016	600.0
0.02	648.0
0.022	656.0
0.024	664.0
0.026	664.0
0.028	664.0
0.03	656.0
0.032	640.0
0.036	608.0
0.04	568.0
0.044	528.0
0.048	480.0
0.052	432.0
0.056	384.0
0.062	320.0
0.068	256.0
0.074	208.0
0.08	160.0
0.086	120.0
0.09	104.0
0.094	80.0
0.098	64.0
0.102	56.0
0.104	48.0
0.11	32.0
0.114	24.0
0.122	16.0
0.13	8.0
0.14	0.0

Table 5: Dati caso sovrasmorzato

Tempo [ms]	Tensione [mV]
0.0	8.0
0.002	152.0
0.004	392.0
0.006	592.0
0.008	728.0
0.01	808.0
0.012	848.0
0.014	872.0
0.016	880.0
0.018	880.0
0.02	864.0
0.022	856.0
0.024	840.0
0.026	832.0
0.03	800.0
0.034	768.0
...	...
0.354	32.0
0.386	24.0
0.426	16.0