

Esperienza Ottica - Interferometro

F. Ballo, S. Franceschina, S. Dolci - Gruppo T1 39

June 25, 2024

Abstract

Nella seguente relazione vengono presentati i risultati ottenuti dalla sesta esperienza del corso di Laboratorio II riguardante l'analisi di fenomeni ottici. L'obiettivo di questa esperienza è quello di riprodurre due esperimenti di interferometria: Fabry-Perot e Michelson. Per ciascuno di questi setup riprodotti in laboratorio lo scopo è quello di verificare certe relazioni, che occorrono nel momento in cui raggi luminosi interferiscono tra loro, dalle quali è possibile ricavare informazioni utili come la lunghezza d'onda della sorgente.

Contents

1	Configurazione setup esperienza	2
2	Fabry-Perot	2
2.1	Verifica della legge di interferenza	3
2.2	Analisi Dati legge di interferenza	3
2.3	Calibrazione micrometro - Frange	4
2.4	Analisi Dati calibrazione micrometro	5
2.5	Conclusioni Fabry-Perot	5
3	Interferometro Michelson	6
3.1	Verifica calibrazione micrometro	6
3.2	Confronto tra due metodi di calibrazione	6
3.3	Misura indice rifrazione aria	8
3.4	Misura indice rifrazione vetro	8
3.5	Misura lunghezza d'onda con righello reticolo	10
4	Considerazioni sugli errori	11
5	Tabelle	11

1 Configurazione setup esperienza

Per le misure di questa esperienza abbiamo utilizzato:

- Un interferometro di precisione PASCO scientific Modello OS-9255A/OS-9258A , [\[link\]](#)
- Sorgente: laser monocromatico He-Ne con lunghezza d'onda $\lambda = 632.8 \text{ nm}$.
- Lente divergente: lente da 18mm.
- Specchi compresi nella dotazione PASCO

2 Fabry-Perot

La prima parte dell'esperienza consiste nella verifica della legge che descrive i massimi di interferenza, visibili quando due sorgenti si sommano in fase. Per farlo abbiamo montato l'interferometro in configurazione Fabry-Perot:

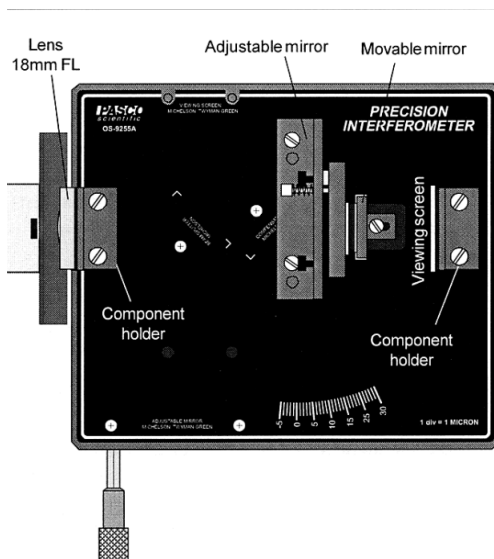


Figure 1: Configurazione Fabry-Perot.

La luce del fascio laser incide contro una lente divergente e entra nella cavità di Fabry-Perot, ovvero due specchi semiriflettenti distanziati d . Le riflessioni successive tra i due specchi formano la figura di interferenza sullo schermo, posto a circa un metro di distanza. È interessante notare come, per ricavare le relazioni che verranno utilizzate per descrivere il fenomeno, si introduca l'ipotesi che i raggi luminosi siano paralleli tra di loro nell'ingresso della cavità, nonostante la presenza di una lente divergente. Abbiamo motivato questa ipotesi osservando che la lente divergente è posta molto vicina alla cavità, e quindi la divergenza dei raggi luminosi è trascurabile. Non si può dire lo stesso per quanto riguarda i raggi che incidono sullo schermo, essi infatti sono considerati divergenti perchè la distanza tra schermo e specchio è significativa.

Un'altra osservazione importante riguarda gli angoli delle frange di interferenza. Per l'angolo

θ , quello riportato in figura 2, abbiamo posto il vertice nel fuoco della lente divergente (18mm avanti) e misurato la distanza tra tale fuoco e lo schermo. In questo modo, misurando in seguito la distanza tra il centro della figura di interferenza e la frangia, è possibile calcolare l'angolo θ come l'arcotangente del rapporto tra le due distanze. In ogni caso, tali considerazioni sono state rilevanti solo per questa prima parte dell'esperienza, in cui era richiesto di verificare la legge (1) confrontando i valori di angoli attesi con quelli misurati. Per tutte le altre esperienze abbiamo potuto considerare $\theta \approx 0$ e quindi $\cos(\theta) \approx 1$ poichè lo schermo si trova a una grande distanza dalla sorgente puntiforme.

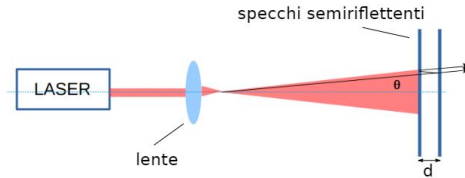


Figure 2: Configurazione Fabry-Perot.

2.1 Verifica della legge di interferenza

In questa prima parte dell'esperienza abbiamo cercato di verificare la seguente legge di interferenza, che descrive quando i due raggi luminosi interferiscono in fase:

$$\delta_r \frac{\lambda}{2\pi} + 2d \cos(\theta) = N\lambda \quad (1)$$

d è la distanza tra i due specchi, δ_r rappresenta lo sfasamento, θ è l'angolo di incidenza della luce, N è l'ordine di interferenza e λ è la lunghezza d'onda del laser sorgente.

Per verificarla abbiamo deciso di invertire la relazione in modo da evidenziare la dipendenza di $\cos(\theta)$ dalle altre variabili, ricavando la relazione 2:

$$\cos(\theta) = \frac{N\lambda}{2d} - \frac{\delta_r \lambda}{4d\pi} \quad (2)$$

Dopo aver verificato le opportune calibrazioni del laser, delle lenti e dello specchio, abbiamo misurato il diametro dei cerchi di interferenza con un calibro e calcolato così il coseno dell'angolo θ .

2.2 Analisi Dati legge di interferenza

Di seguito riportiamo i dati raccolti in laboratorio; la distanza dello schermo dalla sorgente è pari a $D = 1.37 \pm 0.01m$, assumendo come punto sorgente il fuoco della lente (18mm). Successivamente per la verifica del modello abbiamo eseguito un'interpolazione con la legge 2, mantenendo come parametri liberi δ_r e d .

Abbiamo ripetuto tale misura per quattro volte, variando d , al fine di poter verificare in più configurazioni la legge (1).

Riportiamo i grafici dei fit ottenuti per ciascuna delle misurazioni in figura 3:

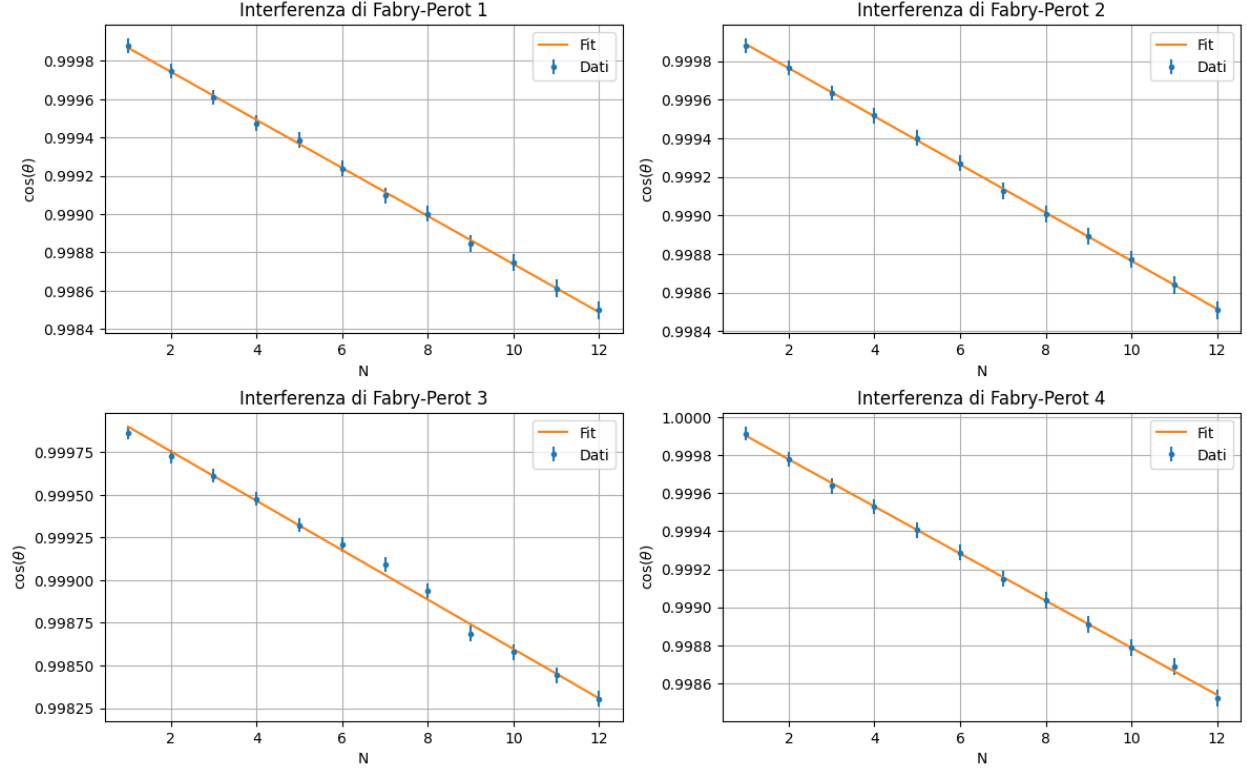


Figure 3: Interpolazioni della legge (2).

Nella tabella 1 riportiamo i valori ottenuti per i parametri δ_r e d con i relativi errori, insieme ai valori del $\tilde{\chi}^2$ e p-value trovati dalle interpolazioni.

Interpolazione 1			Interpolazione 2		
Parametro	Valore	Errore	Parametro	Valore	Errore
d [m]	0.00252	4.82e-07	d [m]	0.00254	4.83e-07
δ_r	5.01e+04	9.56	δ_r	5.04e+04	9.58
$\tilde{\chi}^2$	0.07	p-value : 1	$\tilde{\chi}^2$	0.0398	p-value : 1

Interpolazione 3			Interpolazione 4		
Parametro	Valore	Errore	Parametro	Valore	Errore
d [m]	0.00219	4.22e-07	d [m]	0.00255	4.84e-07
δ_r	4.34e+04	8.36	δ_r	5.06e+04	9.60
$\tilde{\chi}^2$	0.75	p-value : 0.678	$\tilde{\chi}^2$	0.0756	p-value : 1

Table 1: Dati, deviazioni e test $\tilde{\chi}^2$ con p-value, suddivisi per interpolazione.

2.3 Calibrazione micrometro - Frange

L'interferometro in configurazione Fabry-Perot è dotato di un micrometro che permette di variare la distanza tra i due specchi Δd . Quando questa Δd varia, varia anche il cammino

ottico dei raggi luminosi e quindi la posizione delle frange di interferenza. La legge che lega questo spostamento è la seguente:

$$\Delta d = \frac{\Delta N \cdot \lambda}{2 \cdot \cos(\theta)} \quad (3)$$

Misurando quante frange scorrono sullo schermo è possibile risalire a una misura di maggior precisione del Δd e quindi calibrare il micrometro.

Dopo aver registrato una posizione di partenza iniziale dello specchio abbiamo scelto $\Delta d_{\text{nonio}} = 20\mu\text{m}$ come passo del nonio, il coseno dell'angolo θ approssimato a circa 1, dato che assumiamo incidenza normale. Infine abbiamo ripetuto la misura più volte, sempre ripartendo dalla stessa posizione iniziale cercando così di ridurre l'errore statistico e ottenendo una media per la distanza.

2.4 Analisi Dati calibrazione micrometro

Riportiamo in tabella 2 i dati raccolti per la calibrazione del micrometro. Abbiamo eseguito la misura per sei volte, variando sempre di $20\mu\text{m}$ la distanza tra i due specchi. Per la stima della distanza, riportiamo il valor medio e l'errore standard

$$\Delta d_{\text{mis}} = (19.41 \pm 0.11) \mu\text{m}$$

Per questi calcoli abbiamo utilizzato come valore tabulato la lunghezza d'onda del laser He-Ne $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ [link]. Abbiamo inoltre verificato che anche utilizzando $\lambda_{\text{aria}} = \frac{\lambda_0}{n_{\text{aria}}}$ dove $n_{\text{aria}} = 1,0003$ è l'indice di rifrazione dell'aria, la precisione della misura non cambia.

2.5 Conclusioni Fabry-Perot

Il valore ottenuto per la calibrazione del micrometro è compatibile con il valore atteso. La precisione della distanza Δd è sicuramente maggiore tramite l'interferenza rispetto ad una misura diretta con il nonio. È importante sottolineare questo fatto per mettere in evidenza come, ogni volta che abbiamo effettuato una misura, il valore di Δd fosse diverso, nonostante fosse vicino a $20 \mu\text{m}$. Ripetendo più volte la misura e calcolando la media, ci siamo avvicinati il più possibile ad ottenere una stima della distanza di tipo gaussiano, dominata da errore gaussiano. L'errore sulla media è stato ottenuto con la deviazione standard della media, perchè i valori di Δd trovati in ogni singola misurazione non sono dotati di errore, avendo considerato λ come nota e non essendoci errore sulla misura del numero di frange.

3 Interferometro Michelson

Nella seconda parte dell'esperienza abbiamo montato l'interferometro in configurazione Michelson, prima per verificare la calibrazione del micrometro (e confrontarla con Fabry-Perot), poi per effettuare altre misure sull'indice di rifrazione dell'aria e del vetro.

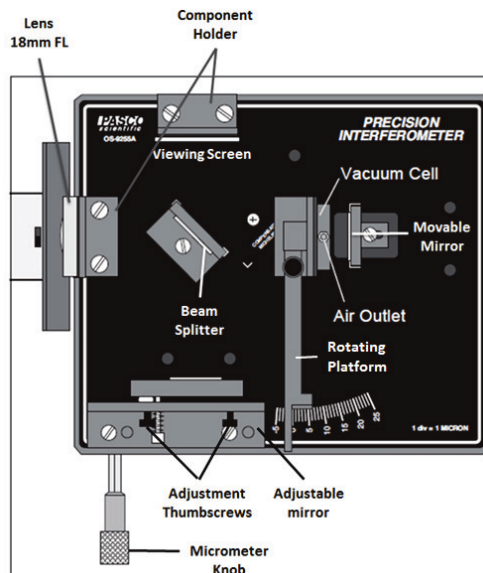


Figure 4: Configurazione Michelson.

3.1 Verifica calibrazione micrometro

Per la calibrazione del micrometro abbiamo seguito lo stesso procedimento utilizzato per Fabry-Perot, utilizzando la (3) per calcolare la distanza Δd percorsa dallo specchio mobile. Abbiamo ripetuto la misura per quattro volte, spostando con un passo di $20\mu\text{m}$, (valore segnato dal nonio). Riportiamo in tabella 3 i risultati. Come valore ottenuto abbiamo deciso di considerare la media delle misure effettuate, e per errore la loro deviazione standard, in quanto misure non dotate di errore poichè ricavate a partire da N e λ :

$$\Delta d_{\text{mis}} = (19.36 \pm 0.10) \mu\text{m}$$

L'errore sul valore medio è stato calcolato proprio come nel caso di Fabry-Perot, con la deviazione standard della media, in quanto i valori di Δd trovati in ogni singola misurazione non sono dotati di errore, avendo considerato λ come nota e non essendoci errore sulla misura del numero di frange.

3.2 Confronto tra due metodi di calibrazione

Abbiamo confrontato i valori ottenuti per la calibrazione del micrometro con i due diversi setup, Fabry-Perot e Michelson:

- Fabry-Perot: $\Delta d_{\text{mis}} = (19.41 \pm 0.11) \text{ }\mu\text{m}$
- Michelson: $\Delta d_{\text{mis}} = (19.36 \pm 0.10) \text{ }\mu\text{m}$

Entrambi i metodi di misura in teoria raggiungono la stessa precisione, essendo entrambi basati sulla stessa legge di interferenza. Tuttavia i valori ottenuti per la distanza Δd sono leggermente diversi, e questo può essere dovuto a diversi fattori. E' risaputo che l'interferometro Fabry-Perot sia il metodo che permette di raggiungere una risoluzione spettrale maggiore (frange più nitide e distinte), tuttavia questo risulta più utile nelle misure di lunghezze d'onda. Ci aspettiamo invece che Michelson sia il metodo più preciso per la misura della distanza Δd , sia per quanto riguarda il setup e l'allineamento degli specchi (Fabry-Perot era molto più sensibile a vibrazioni del piano di lavoro) sia per la maggiore distanza tra specchio e schermo, il che dovrebbe ridurre l'errore di misura.

3.3 Misura indice rifrazione aria

In questa parte dell'esperienza abbiamo utilizzato l'interferometro in configurazione di Michelson per misurare l'indice di rifrazione dell'aria, sfruttando la sua dipendenza lineare dalla pressione. La configurazione dell'apparato ricalca quella della figura 4, con l'unica differenza il fatto che è stata inserita una cella a vuoto in uno dei bracci dell'interferometro.

Al variare della pressione dell'aria all'interno della cella, l'indice di rifrazione dell'aria cambia; come conseguenza, è possibile osservare un cambiamento nel numero di frange di interferenza che scorrono sul muro.

Ci siamo serviti della formula 5 per risalire all'indice di rifrazione dell'aria :

$$n = 1 + m \cdot P \quad (4)$$

$$m = \frac{\Delta N \lambda}{2d(P_i - P_f)} \quad (5)$$

Laddove P_i e P_f sono le pressioni iniziale e finale ($P_i = 101.325$ kPa), ΔN è il numero di frange contate, $d = 0.03$ m la larghezza della cella a vuoto e λ è la lunghezza d'onda del laser.

Come procedura di misura abbiamo fatto variare la pressione nella cella a vuoto e contato il numero di frange che scorrevano sul muro. Abbiamo ripetuto la misura quattro volte, variando la pressione finale, e contando le frange di interferenza. Riportiamo in tabella 4 i dati raccolti e in tabella 5 i valori ottenuti per l'indice di rifrazione dell'aria.

Gli errori sui singoli valori dell'indice di rifrazione sono stati calcolati con la formula di propagazione degli errori, a partire dalle relazioni (5), in cui P_f ha come errore la sensibilità del manometro (2 kPa). L'errore sul valore medio è stato calcolato pesando gli errori delle singole misure, con la formula (??).

Dopo aver calcolato il valore dell'indice di rifrazione dell'aria per le pressioni misurate, abbiamo proceduto eseguendo un fit tramite un modello lineare per stimare il valore della costante m e il suo errore. Il risultato del fit è riportato in figura 5; il valore ottenuto è:

$$m = (2.4840.033) \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$$

Operando un test di compatibilità con il valore atteso, pari a $m = 2.887 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$, otteniamo un valore del t-test pari a $t \approx 11$, molto lontano dal valore desiderato di 1. Sospettiamo alla base di questa discrepanza ci sia un errore sistematico, probabilmente dovuto a un'errata calibrazione della cella a vuoto, un incorretto conteggio o un'errata interpretazione delle frange stesse.

3.4 Misura indice rifrazione vetro

Mantenendo la configurazione Michelson, abbiamo montato un supporto con una lastra di vetro (spessore $d = 5$ mm), come rappresentato in figura 6, al fine di ricavarne l'indice di rifrazione.

Servendoci di un rotational pointer è possibile aumentare o diminuire l'angolo di incidenza del raggio sulla lastra, allungando o accorciando il cammino ottico del raggio nel mezzo, di

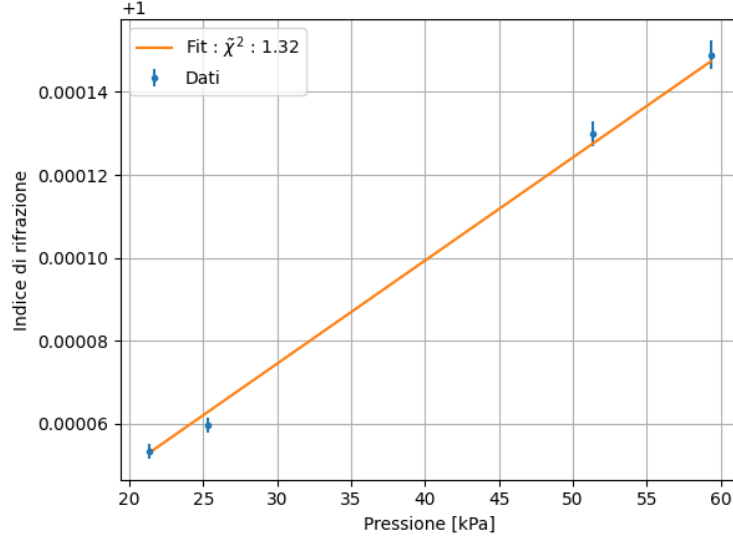


Figure 5: Fit lineare per l'indice di rifrazione dell'aria.

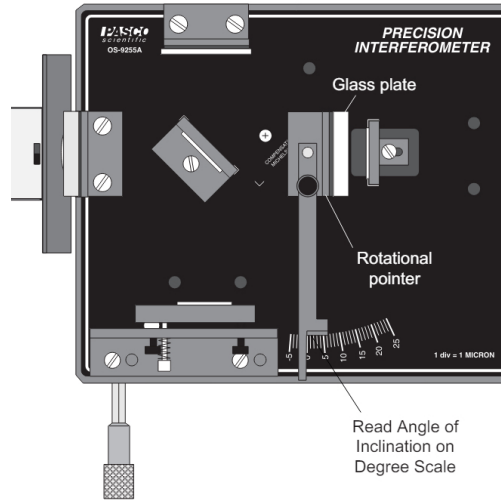


Figure 6: Configurazione Michelson con vetro.

conseguenza, similmente a quanto fatto prima, possiamo contare il numero di frange ΔN che scorre al variare dell'angolo θ , il tutto è governato dalla legge (6):

$$2 \cdot d \cdot (D_i - D_f) = \Delta N \cdot \lambda \quad (6)$$

Dove D e D' sono le distanze percorse in aria, mentre d e d' percorse in vetro:

- $D_i = D \cdot n_{\text{aria}} + d \cdot n_{\text{vetro}}$
- $D_f = D' \cdot n_{\text{aria}} + d' \cdot n_{\text{vetro}}$

La formula per ricavare l'indice di rifrazione del vetro è dunque la seguente:

$$n_{\text{vetro}} = \frac{(2d - \Delta N \lambda)(1 - \cos(\theta))}{2d(1 - \cos(\theta)) - \Delta N \lambda} \quad (7)$$

Abbiamo ripetuto la misura quattro volte, partendo sempre dal minimo cammino ottico come posizione iniziale e raggiungendo vari diversi angoli finali. Riportiamo in tabella 3 i risultati ottenuti.

Gli indici di rifrazione del vetro ottenuti sono stati calcolati con la formula (7) e le incertezze con la formula per la propagazione degli errori. Il valore medio ottenuto per l'indice di rifrazione del vetro è:

$$n_{\text{vetro}} = 1.70 \pm 0.05$$

3.5 Misura lunghezza d'onda con righello reticolo

Lo scopo di questa sezione è misurare la lunghezza d'onda del laser utilizzato in laboratorio, tramite l'utilizzo di un righello, le cui tacche agiscono da reticolo di diffrazione. Riportiamo in figura 7 la configurazione che abbiamo seguito per effettuare le misure.

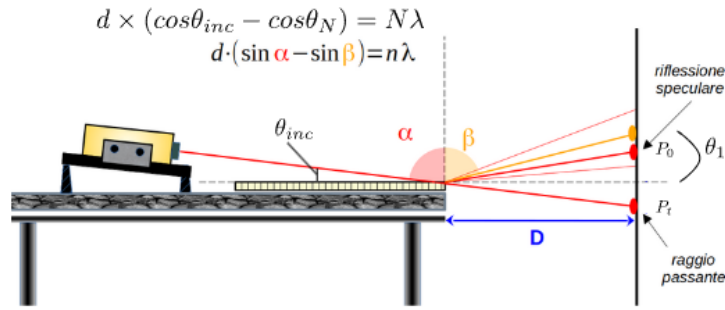


Figure 7: Configurazione righello reticolo.

In particolare, la distanza tra le tacche è di $d = 1 \text{ mm}$, e la distanza tra il righello e lo schermo è di $D = 1.03 \text{ m}$.

La formula che lega la lunghezza d'onda alla distanza tra le frange di interferenza è la seguente:

$$\lambda = \frac{d(\cos(\theta_{inc}) - \cos(\theta_N))}{N} \quad (8)$$

Dove abbiamo indicato con d la distanza tra le tacche del righello, N l'ordine di interferenza, θ_{inc} l'angolo di incidenza del raggio luminoso (abbiamo inclinato il laser), θ_N l'angolo tra la normale allo schermo e l' N -esimo massimo di interferenza.

Abbiamo osservato sullo schermo due punti più luminosi, il primo corrispondente al massimo di riflessione dell'ordine $N = 0$ e il secondo al raggio passante. Oltre a questi due punti sono comparsi altri N -massimi di interferenza, dai quali è possibile ricavare allo stesso modo la relazione tra l'ordine N e l'angolo corrispondente. Il valor medio e la deviazione standard ottenuti per la lunghezza d'onda del laser è

$$\lambda_{\text{mis1}} = (666 \pm 14) \text{ nm}$$

$$\lambda_{\text{mis2}} = (640 \pm 19) \text{ nm}$$

Per rispondere alla domanda "Cosa cambia rispetto al reticolo usato nello spettrometro?" dobbiamo considerare che il reticolo dello spettrometro è molto più preciso e accurato, in quanto è stato costruito appositamente per la misura delle lunghezze d'onda. Il righello, invece, è un oggetto di uso comune macroscopico. Chiaramente la distanza tra le tacche del righello è sì precisa ma relativamente, in generale la risoluzione spettrale è molto minore rispetto a quella di uno spettrometro.

Tuttavia è interessante notare che anche con un oggetto di uso comune e di dimensioni decisamente maggiori, rispetto alla lunghezza d'onda del laser, sia possibile notare figure di interferenza e ottenere una buona stima di λ .

4 Considerazioni sugli errori

La nostra preoccupazione principale è stata quella di garantire la gaussianità degli errori, in modo da poter applicare correttamente le formule di propagazione degli errori e di calcolare correttamente le incertezze sui valori misurati.

Per quanto riguarda alcune misure di lunghezza, abbiamo ripetuto più volte le misure e calcolando media ed errore standard su di essa. Quando non è stato possibile ripetere le misure, abbiamo utilizzato la definizione di distribuzione di probabilità uniforme per calcolare l'errore sulle misure come $\frac{\text{errore}}{\sqrt{12}}$. Infine, per minimizzare gli errori sistematici, abbiamo cercato di mantenere costanti le condizioni di lavoro e di calibrare al meglio gli strumenti a nostra disposizione.

5 Tabelle

Misura	Frange ΔN	Distanza $\Delta d[\mu\text{m}]$
1	61	19.300
2	64	20.249
3	59	18.667
4	60	18.984
5	60	18.984
6	64	20.249

Table 2: Dati raccolti per la calibrazione del micrometro-Fabry-Perot.

Misura	Franghe ΔN	Distanza $\Delta d[\mu\text{m}]$
1	62	19.6
2	60	18.9
3	60	18.9
4	60	18.9
5	64	20.2

Table 3: Dati raccolti per la calibrazione del micrometro con Michelson.

$P_f[kPa]$	$\pm\sigma$	ΔN
76	2	16
80	2	18
50	2	11
42	2	9

Table 4: Dati per misura indice aria.

Misura	n_{aria}	Errore $\pm\sigma$
1	1.000 51	0.000 05
2	1.000 71	0.000 08
3	1.000 11	0.000 09
4	1.000 07	0.000 06

Table 5: Indici aria risultanti

Misura	ΔN	θ_i	θ_f	n_{vetro}	$\pm\sigma$
1	19	-0.4	4.0	1.69	0.05
2	29	-0.4	5.0	1.70	0.04
3	42	-0.4	6.1	1.70	0.04
4	11	-0.4	2.9	1.72	0.07

Table 6: Indici di rifrazione del vetro ottenuti.