

Esperienza Circuiti III

F. Ballo, S. Franceschina, S. Dolci - Gruppo T1 39

May 14, 2024

Abstract

Nella seguente relazione vengono presentati i risultati ottenuti dalla terza esperienza del corso di Laboratorio II riguardante l'analisi di circuiti elettrici. L'obiettivo di questa esperienza è quello di studiare circuiti RC, RL e RLC in regimi di corrente continua. Imponendo sul circuito, con un generatore di funzioni, un segnale sinusoidale di ampiezza nota, vogliamo ricavare il comportamento del circuito in base alle componenti e in base a dove andiamo a misurare il segnale.

Contents

1	Circuiti RC e RL in corrente alternata	3
1.1	Configurazione del circuito e della strumentazione	3
1.2	Dati raccolti RC	4
1.3	Analisi dati RC	4
1.3.1	Analisi ai capi della resistenza	4
1.3.2	Ai capi del condensatore	7
1.4	Conclusioni circuito RC	10
1.5	Dati raccolti RL	10
1.6	Analisi dati RL	11
1.6.1	Ai capi della resistenza	11
1.6.2	Ai capi dell'induttanza	12
1.7	Conclusioni circuito RL	15
2	Circuito RLC	15
2.1	Configurazione del circuito	15
2.2	Dati raccolti RLC	16
2.3	Analisi Dati RLC	17
2.3.1	Ai capi della resistenza	17
2.3.2	Ai capi di LC	18
2.4	Conclusioni sul circuito RLC	20
2.4.1	Funzioni di trasferimento sulla resistenza	20

2.4.2	Funzioni di trasferimento su induttanza e capacità	21
2.5	Inciso sulle incertezze	21
3	Tabelle misurazioni	23

1 Circuiti RC e RL in corrente alternata

1.1 Configurazione del circuito e della strumentazione

Di seguito abbiamo riportato lo schema 1 utilizzato per riprodurre il circuito in laboratorio con l'utilizzo di una bread-board e degli opportuni componenti. Questa configurazione di

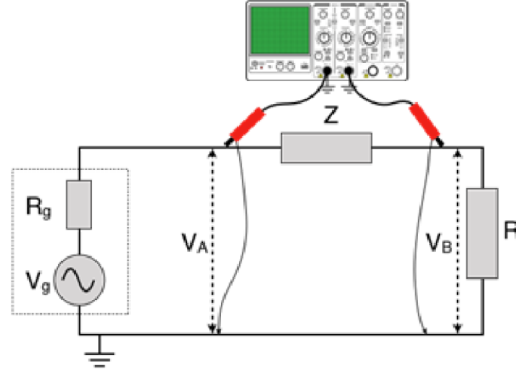


Figure 1: Schema configurazione di circuito, Z rappresenta C o L

circuito rappresenta di fatto un dispositivo lineare a due porte, una di ingresso e uscita. Per studiare il comportamento di circuiti simili ci si rifà alle funzioni di trasferimento, definite come il rapporto tra il segnale in uscita V_{out} e segnale in entrata V_{in} . Tali funzioni dipendono dalla frequenza $H = H(\omega)$ del segnale imposta dal generatore; in particolare si tratta di funzioni a variabili complesse:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)}$$

saranno quindi caratterizzate da un modulo e una fase:

$$|H(\omega)| = \frac{|V_{out}(\omega)|}{|V_{in}(\omega)|}$$

$$\phi(\omega) = \phi(\omega)_{out} - \phi(\omega)_{in}$$

Di seguito riportiamo le funzioni di trasferimento per un circuito RC ai capi della resistenza:

$$|H_R(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad (1)$$

$$\phi_R = \arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right) \quad (2)$$

mentre ai capi del condensatore saranno:

$$|H_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (R^2 \omega^2 C^2)}} \quad (3)$$

$$\phi_C = \arctan(RC\omega) \quad (4)$$

1.2 Dati raccolti RC

Di seguito riportiamo i dati raccolti per la prima parte dell'esperienza. Dopo aver riprodotto il circuito rappresentato nella figura 1 abbiamo posizionato le sonde dell'oscilloscopio (dopo aver verificato che siano compensate): sonda 1 per misurare V_{in} sulla capacità e sonda 2 per misurare V_{out} ai capi della resistenza. Le componenti utilizzate per questo circuito sono:

1. Resistenza $R = (100.8 \pm 0.1) \, \Omega$
2. Capacità $C = (99 \pm 1) \, \text{nF}$

Successivamente abbiamo misurato i seguenti parametri al variare della frequenza prodotta dal generatore in un range tra 200 Hz e 3 MHz:

1. Ampiezza del segnale V_{in}
2. Ampiezza del segnale V_{out}
3. Ampiezza della differenza $V_{in} - V_{out}$
4. Differenza di fase tra $V_{in} - V_{out}$ e V_{in}
5. Differenza di fase tra V_{in} e V_{out}

1.3 Analisi dati RC

Come accennato in precedenza, una volta configurato il circuito abbiamo fatto variare la frequenza della tensione in ingresso da 200 Hz a 3 MHz, collezionando misure seguendo un campionamento logaritmico. Per le misure della tensione ai capi di R e del generatore abbiamo usato un oscilloscopio. Tramite la funzione MATH, abbiamo ricavato la differenza di ampiezza tra i due segnali, trovando così parametri come la tensione ai capi del condensatore. Per la misura delle fasi, abbiamo impostato lo strumento per riportare la differenza di fase tra i segnali in gradi.

1.3.1 Analisi ai capi della resistenza

Per ottenere il modulo della funzione di trasferimento, abbiamo diviso la tensione ai capi della resistenza per la tensione ai capi del generatore; per ottenere il valore della fase abbiamo trasposto le misure dello sfasamento in radianti.

Riportiamo di seguito il grafico del modulo della funzione di trasferimento e la curva del fit dei dati seguendo la forma funzionale 1 :

Analizzando il grafico si può notare un comportamento anomalo: all'aumentare della frequenza il modulo della funzione di trasferimento dovrebbe tendere al valore 1. Al contrario, i nostri dati superano tale valore. Per spiegare questa osservazione abbiamo ipotizzato la presenza di una induttanza parassita, il cui effetto è quello di amplificare la tensione in un intervallo ad alte frequenze. In altre parole, la presenza di un'eventuale induttanza avrebbe aggiunto un picco al grafico una volta sorpassata la frequenza di taglio e poi il

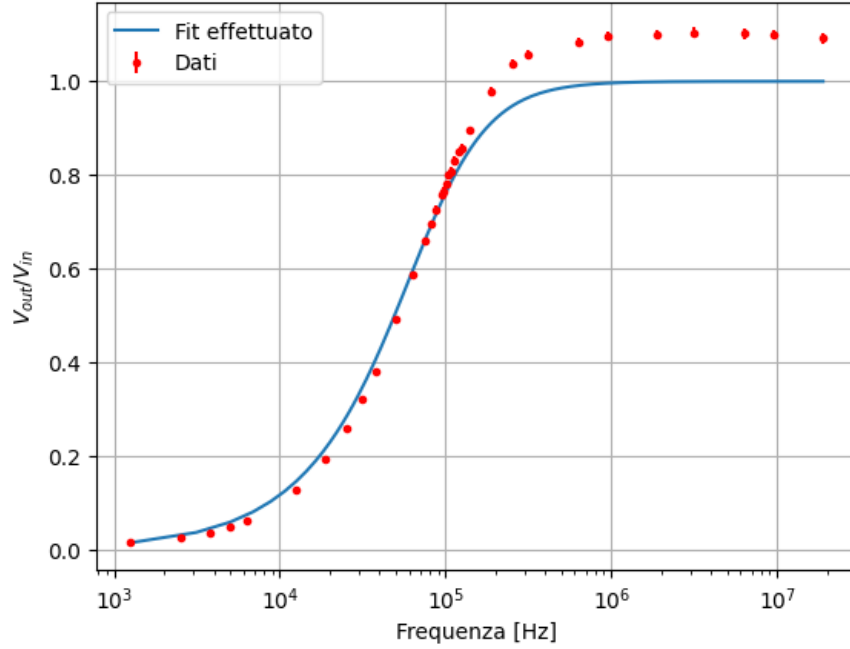


Figure 2: Grafico Modulo - Frequenza sulla resistenza

grafico sarebbe continuato inalterato. Per verificare l'ipotesi abbiamo raccolto dati ad alte frequenze, estendendo l'intervallo di campionamento, ma ciò è servito a scartare l'ipotesi: la curva resta fermamente al di sopra del valore atteso.

Su consiglio degli assistenti di laboratorio abbiamo provato a interpolare con un modello leggermente differente, ipotizzando che il modulo della funzione di trasferimento abbia subito una dilatazione sull'asse delle ordinate. Riportiamo di seguito la forma funzionale modificata e il grafico:

$$|H(\omega)| = k \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

Abbiamo inoltre estratto dal fit i seguenti parametri:

1. Resistenza $R = (100 \pm 6) \, \Omega$
2. Capacità $C = (10 \pm 6) \, \text{nF}$
3. Test Chi-Quadro $\tilde{\chi}^2 = 0.8$
4. p-value= 0.8
5. Parametro $k = 1.110 \pm 0.003$

Osserviamo dal grafico che la curva, una volta dilatata in verticale, descrive bene i dati raccolti, sia per basse che per alte frequenze.

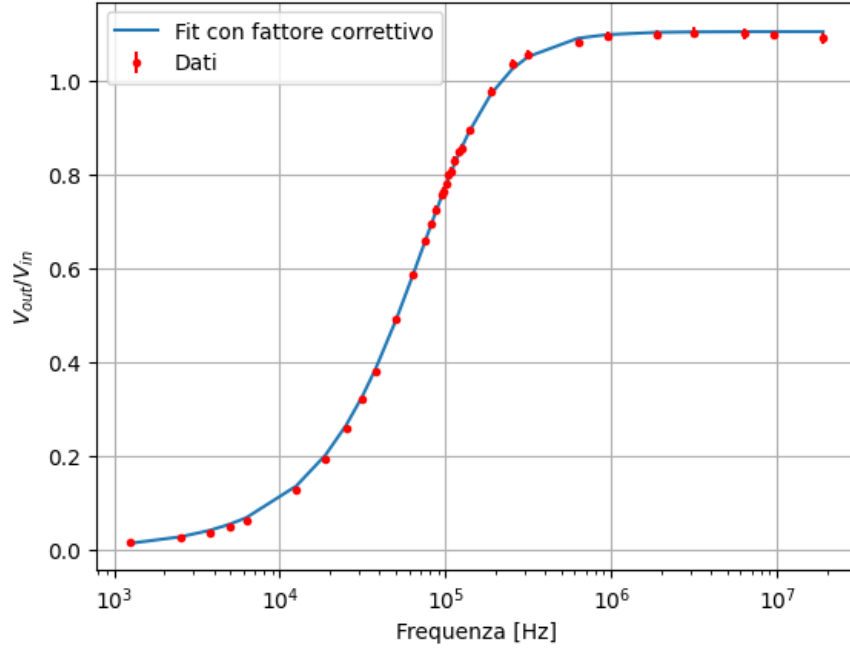


Figure 3: Grafico modulo-frequenza sulla resistenza con fattore correttivo

Per quanto riguarda la fase del segnale sulla resistenza, abbiamo riscontrato lo stesso problema per il calcolo del modulo. Di conseguenza il fit delle misure è stato effettuato di nuovo con un modello correttivo, riportato qui di seguito:

$$\phi_R = a \cdot \arctan\left(\frac{1}{R\omega C}\right) + b \quad (5)$$

I dati sembrano seguire meglio questo modello, di seguito riportiamo i parametri estrapolati dal fit:

1. Resistenza $R = (99 \pm 60) \, \Omega$
2. Capacità $C = (9.8 \pm 6.5) \, \text{nF}$
3. Test Chi-Quadro $\tilde{\chi}^2 = 0.6$
4. p-value = 0.95
5. Parametro $a = 1.03 \pm 0.01$
6. Parametro $b = -4 \cdot 10^{-4} \pm 7 \cdot 10^{-3} \approx 0$

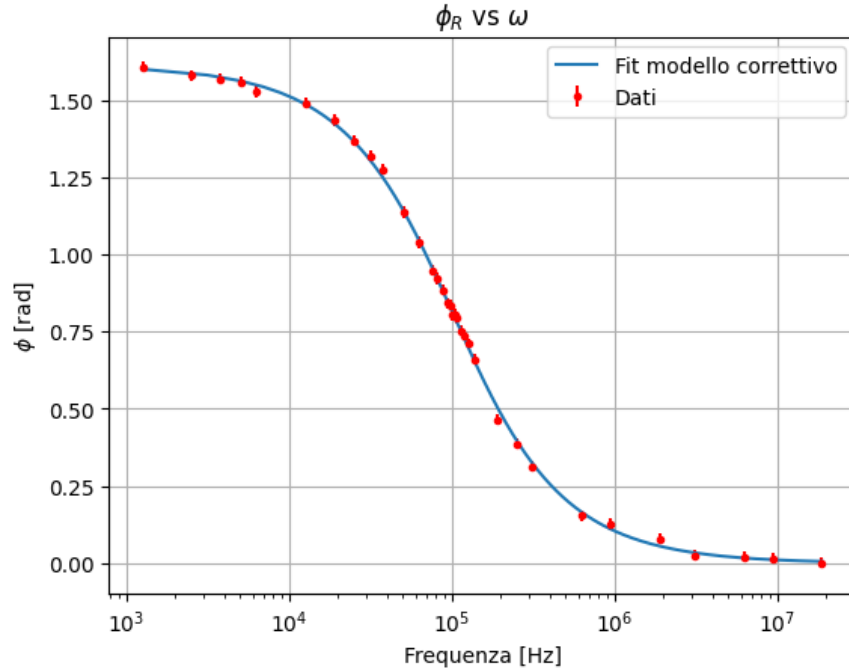


Figure 4: Grafico fase-frequenza sulla resistenza con modello correttivo

1.3.2 Ai capi del condensatore

Di seguito riportiamo i dati per lo studio della funzione di trasferimento ai capi del secondo componente in questo circuito, la capacità. Per ottenere il modulo della funzione di trasferimento abbiamo diviso la tensione ai capi della capacità per la tensione ai capi del generatore; per ottenere la fase abbiamo misurato in maniera analoga tramite l'oscilloscopio la differenza di fase fra la tensione in ingresso e la tensione ai capi di C, in seguito abbiamo trasposto le misure in radianti.

Riportiamo di seguito il grafico del modulo della funzione di trasferimento e il fit secondo la forma funzionale 3. :

Analogamente a quanto osservato per la resistenza, osserviamo che il modulo della funzione di trasferimento non tende a zero per frequenze alte, al contrario si attesta ad un valore di poco superiore. Come per la resistenza abbiamo provato a modificare la forma funzionale, dilatandola sull'asse delle ordinate, Riportiamo di seguito la forma funzionale modificata e il grafico:

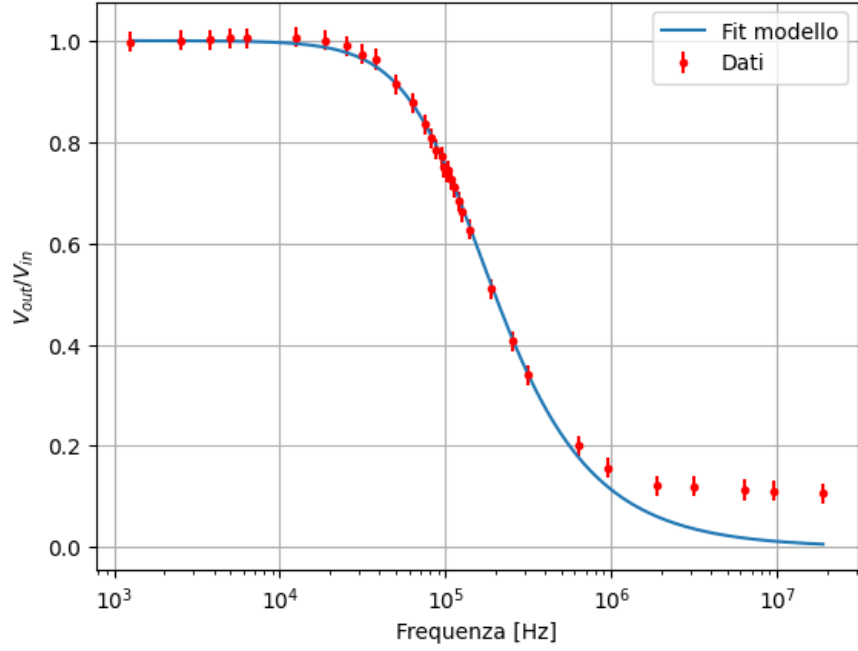


Figure 5: Grafico modulo-frequenza sulla capacità

$$|H(\omega)| = \frac{a}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2 + b}} \quad (6)$$

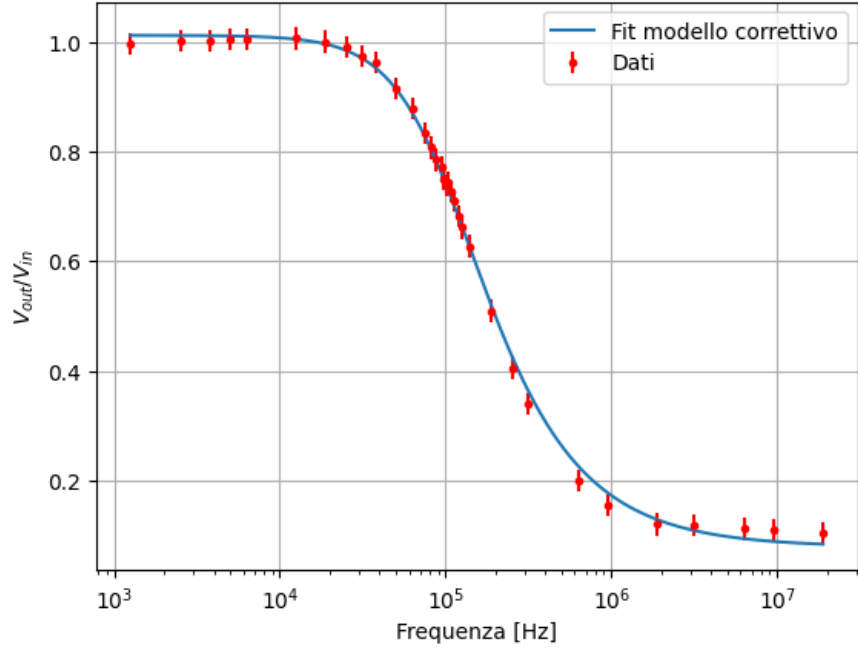


Figure 6: Grafico modulo-frequenza sulla capacità, con modello correttivo

Si nota dal nuovo grafico che la curva, una volta dilatata in verticale, segue i dati raccolti

sia per basse che per alte frequenze. Abbiamo inoltre estratto dal fit i seguenti parametri:

1. Resistenza $R = (100 \pm 18) \Omega$
2. Capacità $C = (10 \pm 2) \text{ nF}$
3. Test Chi-Quadro $\tilde{\chi}^2 = 0.4$
4. p-value= 0.9
5. parametro $a = 0.93 \pm 0.01$
6. parametro $b = 0.08 \pm 0.01$

Riportiamo di seguito il grafico delle misure per quanto riguarda la fase della funzione di trasferimento sulla capacità. Come forma funzionale per costruire il seguente grafico abbiamo utilizzato la legge 4.

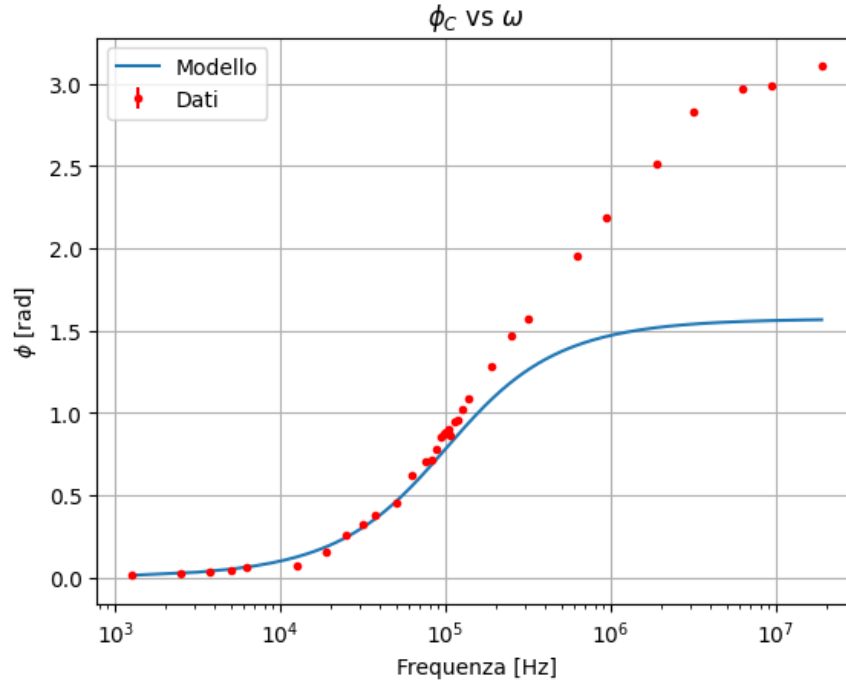


Figure 7: Grafico frequenza-fase sulla capacità

Come si può notare dal grafico per frequenze basse notiamo che le misure seguono il modello, per poi divergere a frequenze più alte. Purtroppo per mancanza di tempo dovuta a problemi tecnici con la strumentazione non siamo riusciti a riprendere le misure, ad ogni modo supponiamo che la discrepanza provenga dalla presa stessa delle misure.

1.4 Conclusioni circuito RC

Riassumendo quanto ottenuto per il circuito RC, nonostante le misure si discostino dai modelli a meno di correzioni, è stato comunque possibile verificare che effettivamente un circuito RC si comporta come un filtro passo basso, ovvero un circuito RC in serie fa passare frequenze da 0 Hz fino alla frequenza di taglio che nel nostro caso era di circa 10^5 Hz. Riguardo alla precisione delle misure abbiamo notato che nel caso del nostro oscilloscopio, misurare manualmente la fase, tramite differenze tra massimi, ci forniva valori più precisi, tecnicamente una misura tra i passaggi per lo zero sarebbe stata ancora più precisa per via dell'assenza di rumore nel segnale rispetto ai massimi. Nonostante ciò la forma d'onda V_a risultante ai capi dell'impedenza ha mantenuto la stessa forma dell'onda V_g imposta dal generatore, i vari effetti di distorsione ottenuti specialmente a frequenze più alte sono comunque piuttosto comuni e crediamo la ragione principale risieda nella presenza di induttanze parassite negli strumenti di misura che per mancanza di tempo non siamo riusciti a considerare. Una domanda posta dalla scheda chiedeva che cosa succederebbe se R e C venissero scambiati, in generale possiamo dire che ci aspettiamo che il comportamento di filtro passa-basso rimanga inalterato, in generale più che dall'ordine ci aspettiamo che sia la frequenza di taglio a modificare la risposta del circuito e quindi i valori stessi delle componenti.

1.5 Dati raccolti RL

Di seguito riportiamo i dati raccolti per il circuito RL. Dopo aver riprodotto lo stesso circuito rappresentato nella figura 1 cambiando il condensatore con un' induttore abbiamo posizionato le sonde dell'oscilloscopio nel seguente modo: sonda 1 per misurare V_{in} induttore e sonda 2 per misurare V_{out} ai capi della resistenza. Le componenti utilizzate per questo circuito sono:

1. Resistenza $R = (1040.0 \pm 0.1) \Omega$
2. Induttore $L = (0.05 \pm 0.01) H$

Successivamente abbiamo misurato gli stessi parametri al variare della frequenza prodotta dal generatore in un range tra 100 Hz e 1 MHz:

1. Ampiezza del segnale V_{in}
2. Ampiezza del segnale V_{out}
3. Ampiezza della differenza $V_{in} - V_{out}$
4. Differenza di fase tra $V_{in} - V_{out}$ e V_{in}
5. Differenza di fase tra V_{in} e V_{out}

Le funzioni di trasferimento di un circuito RL sono le seguenti.
Ai capi della resistenza:

$$|H_R(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (7)$$

$$\phi_R = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (8)$$

E ai capi dell'induttanza:

$$|H_L(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (9)$$

$$\phi_L = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (10)$$

1.6 Analisi dati RL

1.6.1 Ai capi della resistenza

Dopo aver raccolto i dati in modo analogo a quanto fatto per il circuito RC, abbiamo calcolato il modulo e la fase della funzione di trasferimento ai capi della resistenza; i risultati sono stati riportati nei grafici in figura 8a e 8b. Per quanto riguarda la fase, abbiamo deciso di riportare anche un grafico (figura 8c) con i dati sovrapposti alla funzione, avendo però passato come parametri i valori R, L ottenuti dal multimetro palmare; il motivo viene discusso nelle conclusioni.

L'interpolazione dei dati del modulo con la legge (7) restituisce i seguenti valori per i parametri:

1. $R = (1080 \pm 2000) \, \Omega$
2. $L = (0.05 \pm 0.1) \, \text{H}$

In seguito abbiamo interpolato i dati della fase seguendo la (8), ricavando i valori che seguono:

1. $R = (1120 \pm 2700) \, \Omega$
2. $L = (0.05 \pm 0.1) \, \text{H}$

La concordanza del modello è stata valutata tramite il test del χ^2 ; di seguito riportiamo i risultati ottenuti.

1. Concordanza del modello per il modulo:

$$\tilde{\chi}^2 = 2.1, \quad p - \text{value} = 0.0002$$

2. Concordanza del modello per la fase:

$$\tilde{\chi}^2 = 1.4, \quad p - \text{value} = 0.07$$

1.6.2 Ai capi dell'induttanza

Di seguito riportiamo l'analisi dati per le misure effettuate ai capi dell'induttanza ottenute sottraendo la tensione ai capi della resistenza con quella del generatore. Abbiamo seguito l'equazione (9) per il modulo della funzione di trasferimento e la legge(10) per la fase. Ne riportiamo i grafici in figura 8d, e 9b.

Oltre a questi due, abbiamo deciso di riportare in figura 9a anche un grafico in cui i dati raccolti vengono sovrapposti alla funzione modulo calcolata con i parametri R, L ottenuti tramite misurazione da multimetro palmare; il motivo verrà discusso nelle conclusioni per RL.

Riportiamo i valori ottenuti dal fit del modulo:

1. $R = (1120 \pm 1980) \, \Omega$
2. $L = (0.04 \pm 0.07) \, \text{H}$

Riportiamo anche i valori ottenuti dal fit della fase:

1. $R = (1040 \pm 2500) \, \Omega$
2. $L = (0.05 \pm 0.1) \, \text{H}$

Infine abbiamo ripetuto il test del χ^2 per valutare l'accordo dei dati al modello.

1. Concordanza del modello per il modulo:

$$\tilde{\chi}^2 = 3.6, \quad p - value = 3.9$$

2. Concordanza del modello per la fase:

$$\tilde{\chi}^2 = 1.5, \quad p - value = 0.04$$

Osservando il grafico 8d si può notare che la curva non tende asintoticamente a 1 ma ad un valore più basso.

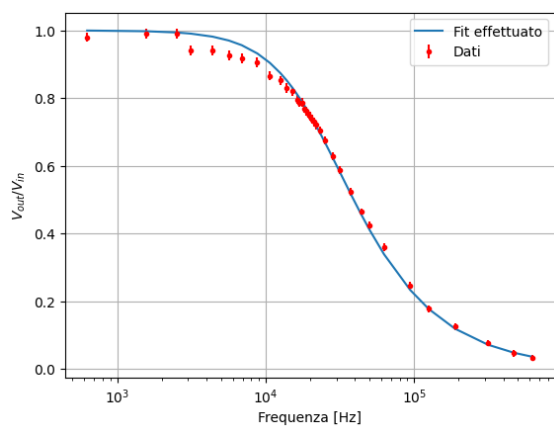
Per questo motivo, similmente a quanto svolto nella sezione di circuito RC, abbiamo deciso di provare a interpolare i dati tramite un modello correttivo "ad hoc", che tenga conto di una dilatazione e una traslazione in entrambi i casi. In figura 9c è stato riportato il grafico risultante:

Di seguito riportiamo i valori estrapolati dal fit del modulo secondo il modello correttivo:

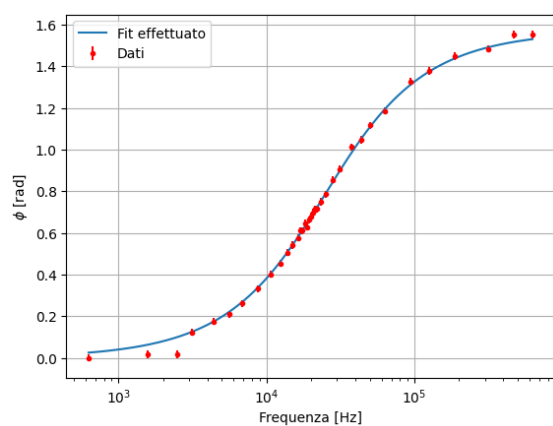
1. $R = (1100 \pm 2500) \, \Omega$
2. $L = (0.05 \pm 0.1) \, \text{H}$

Successivamente abbiamo ripetuto il test del χ^2 per valutare l'accordo dei dati al modello correttivo, ottenendo come valori:

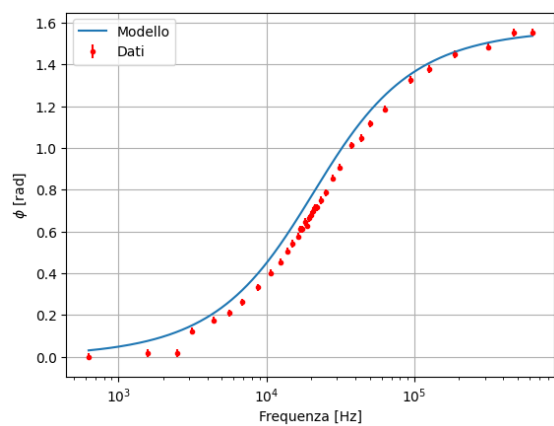
$$\tilde{\chi}^2 = 1.5, \quad p - value = 0.04$$



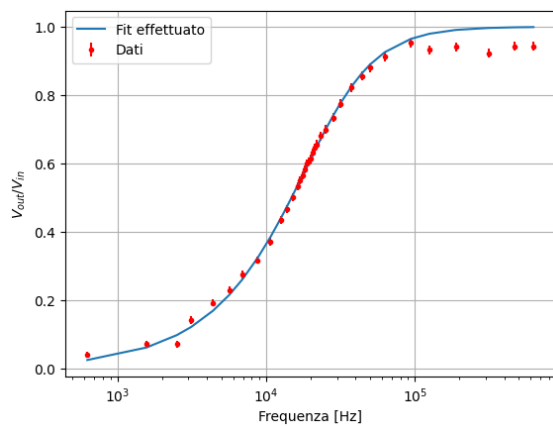
(a) Grafico modulo-frequenza per R, interpolazione



(b) Grafico fase-frequenza per R, interpolazione

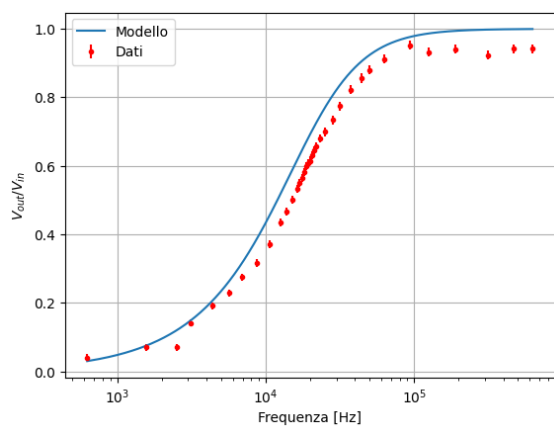


(c) Grafico fase-frequenza per R, modello con parametri ottenuti dal multimetro palmare

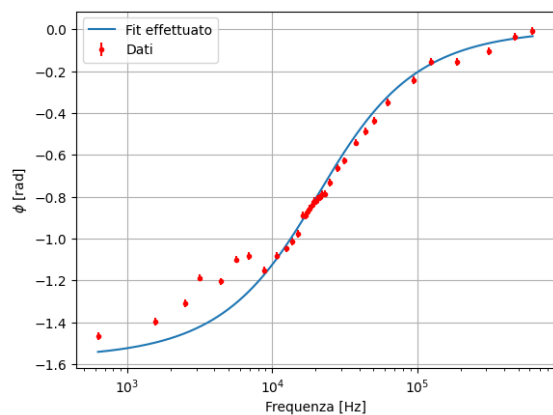


(d) Grafico modulo-frequenza per L, interpolazione

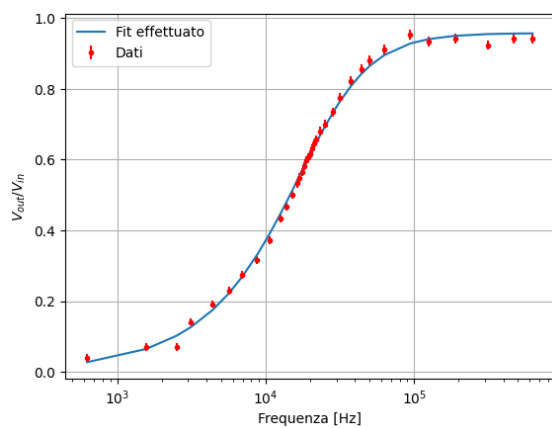
Figure 8: Grafici circuito RL



(a) Grafico modulo-frequenza per L, modello con dati presi dal multimetro palmare



(b) Grafico fase-frequenza per L, interpolazione



(c) Grafico modulo-frequenza per L con modello correttivo

Figure 9: Grafici circuiti RL

1.7 Conclusioni circuito RL

Osservando i grafici ottenuti per la resistenza, e giudicando i valori del p-value ottenuti dal test del χ^2 , possiamo dedurre una buona concordanza tra i dati raccolti e il modello teorico. Ciò che non torna sono i valori di resistenza e induttanza ottenuti dall'interpolazione, i cui errori sono esageratamente alti.

Risulta tuttavia evidente, soprattutto nel grafico di fase, la presenza di uno "shift" delle misure verso il basso. Eseguendo un test di compatibilità tra i valori ottenuti per R e L dal fit, e quelli misurati precedentemente si ottiene:

1. R $t = 0.38$

2. L $t = 0.42$

Questo conferma un sovra-accordo tra i dati ottenuti con il multimetro e quelli ottenuti tramite l'interpolazione.

Per quanto riguarda i risultati sull'induttanza, possiamo osservare il primo grafico della figura 8d per notare lo stesso "shift" verso il basso. Ripetendo il t-test, in questo caso si ottiene:

Inoltre, anche dal grafico è possibile osservare che ad alte frequenze il modulo della funzione di trasferimento non si avvicina a 1, ma si attesta a un valore leggermente più basso. Abbiamo ipotizzato che per frequenze alte diventi significativa la resistenza in serie equivalente, ovvero la resistenza interna dell'induttanza. Per fare un'analisi più approfondita, abbiamo deciso di provare a interpolare tramite un modello che contempli dilatazione e traslazione verticali. Il risultato però non è stato particolarmente soddisfacente, in quanto i valori ottenuti dall'interpolazione si discostano di poco da quelli precedentemente ottenuti. Inoltre, guardando il grafico 9b e i valori del $\tilde{\chi}^2$ e del p-value, ci accorgiamo che la fase misurata è incompatibile con il modello teorico, probabilmente per la scarsa qualità delle misure effettuate.

2 Circuito RLC

2.1 Configurazione del circuito

In questa seconda parte dell'esperimento lo scopo è quello di studiare le funzioni di trasferimento di un circuito RLC in regime di corrente alternata, per poi eseguire un fit con le forme funzionali attese al fine di ricavare delle stime per i valori di L, C e R da confrontare poi con i valori attesi per tali componenti.

Di seguito riportiamo le tre funzioni di trasferimento V_z dove z rappresenta tensione su R, L e C:

1. **Traferimento V_R**

$$|H(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (11)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}\right) \quad (12)$$

2. Traferimento V_C

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad (13)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega CR}{1 - \omega^2 LC}\right) \quad (14)$$

3. Traferimento V_L

$$|H(\omega)| = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (15)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}\right) \quad (16)$$

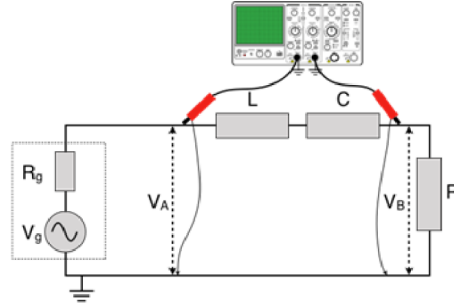


Figure 10: Configurazione circuito RLC

2.2 Dati raccolti RLC

Di seguito riportiamo i dati raccolti per il circuito RLC. Dopo aver riprodotto lo stesso circuito rappresentato nella figura 10 abbiamo posizionato le sonde dell'oscilloscopio: sonda 1 per misurare V_{in} ai capi del generatore e sonda 2 per misurare V_{out} ai capi della resistenza. A causa dei problemi con i dati riscontrati nella prima sezione e la conseguente perdita di tempo abbiamo deciso di valutare la funzione di trasferimento per L e C unite, invece che per L e C separatamente. Le componenti utilizzate per questo circuito sono:

1. Resistenza ($R = 1000 \pm 0.1$) Ω
2. Capacità $C = 10$ nF
3. Induttore $L = (0.05 \pm 0.01)$ H

Successivamente abbiamo misurato i seguenti parametri al variare della frequenza imposta dal generatore, in un range tra 1 kHz e 150 kHz:

1. Ampiezza del segnale V_{in}
2. Ampiezza del segnale V_{out}

3. Ampiezza della differenza $V_{in} - V_{out}$
4. Differenza di fase tra $V_{in} - V_{out}$ e V_{in}
5. Differenza di fase tra V_{in} e V_{out}

2.3 Analisi Dati RLC

2.3.1 Ai capi della resistenza

Dopo aver raccolto i dati in modo analogo a quanto fatto per i circuiti RC ed RL, abbiamo calcolato il modulo e la fase della funzione di trasferimento ai capi della resistenza.

Di seguito vengono riportati i dati per il modulo della funzione di trasferimento, con relativa interpolazione eseguita con la forma funzionale 11.

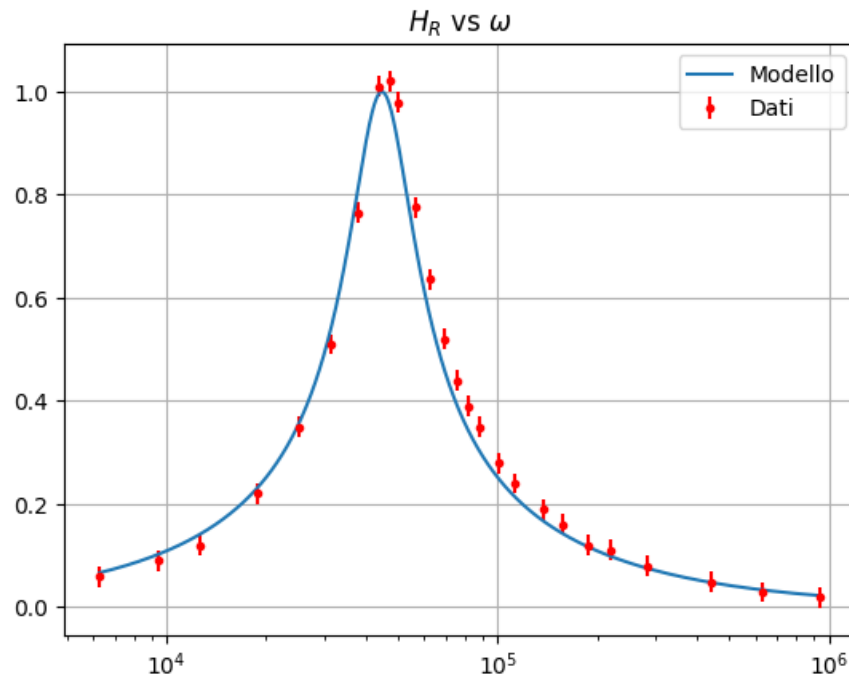


Figure 11: Modulo funzione Trasferimento per resistenza in RLC

I valori ottenuti dal fit sono:

1. Resistenza $R = (1088 \pm 165)\Omega$
2. Induttanza $L = (0.047 \pm 0.007)\text{H}$
3. Capacità $C = (9.7 \pm 1.5)\text{nF}$

La concordanza del modello è stata valutata tramite il test del χ^2 ; di seguito riportiamo i risultati ottenuti.

Concordanza del modello per il modulo:

1. : $\tilde{\chi}^2 = 0.4$

2. : $p - value = 0.99$

Abbiamo interpolato i dati della fase tramite la forma funzionale 12.

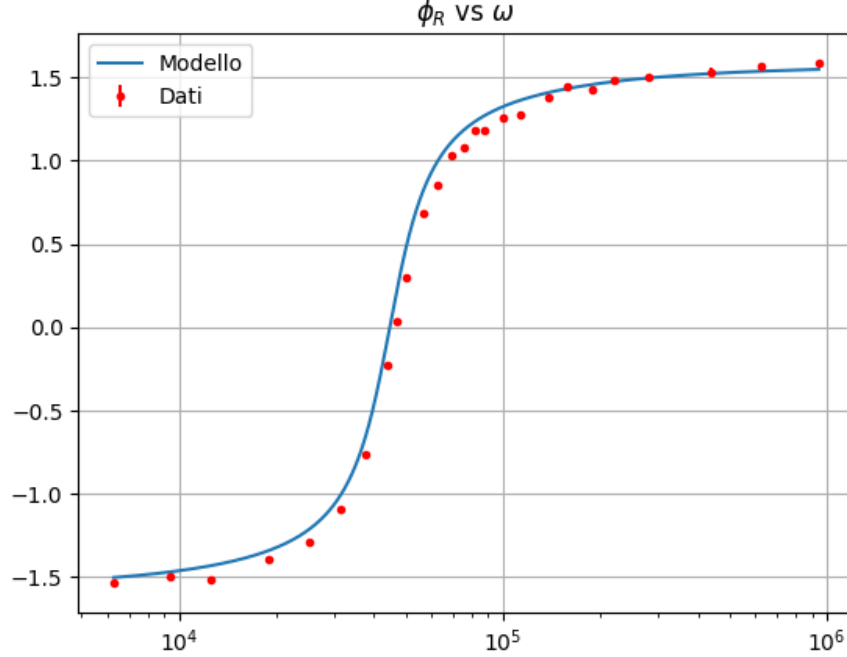


Figure 12: Grafico fase funzione di Trasferimento per resistenza in RLC

I valori ottenuti dal fit sono:

1. Resistenza $R = (1060 \pm) \Omega$

2. Induttanza $L = (0.047 \pm) \text{ H}$

3. Capacità $C = (9.52 \pm) \text{ nF}$

La concordanza del modello è stata valutata tramite il test del χ^2 ; di seguito riportiamo i risultati ottenuti. $R = 1.06\text{e}+03 \text{ pm } 2.62\text{e}+03$ $L = 0.0477 \text{ pm } 0.118$ $C = 9.51\text{e}-09 \text{ pm } 2.36\text{e}-08$ Concordanza del modello per la fase:

1. : $\tilde{\chi}^2 = 1.3$

2. : $p - value = 0.16$

2.3.2 Ai capi di LC

A causa dello scarso tempo rimanente, siamo riusciti a prendere le misurazioni della tensione solamente ai capi del sistema induttanza-capacità, e non dei due componenti singolarmente; pertanto la nostra analisi osserverà solamente le funzioni di trasferimento attorno a LC.

Di seguito riportiamo i dati per il modulo e la fase della funzione di trasferimento ai capi di LC con relativa interpolazione. Le forme funzionali utilizzate per il fit seguono le relazioni: (13) per il modulo, e (14) per la fase.

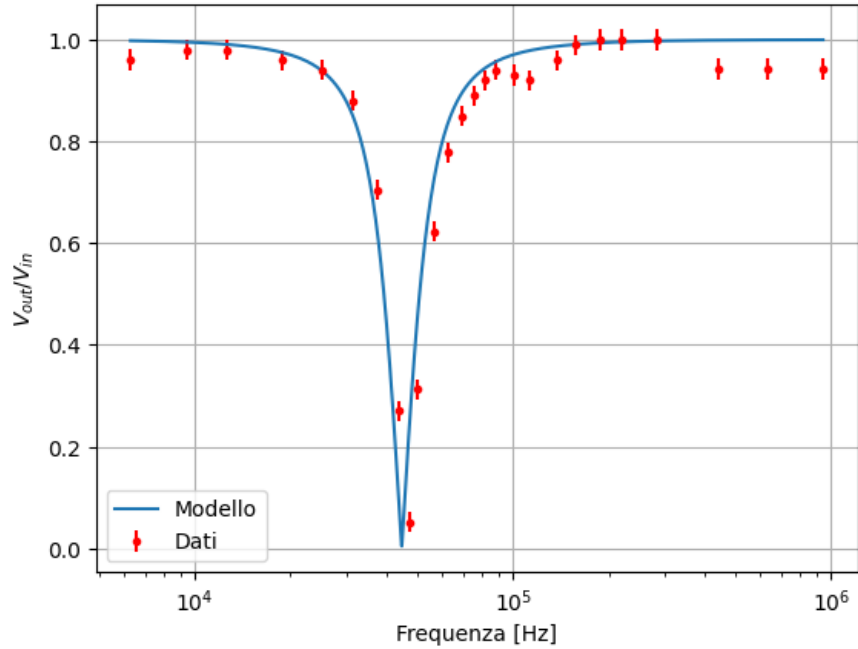


Figure 13: Grafico modulo funzione di Trasferimento per sistema induttanza-capacità in RLC

Fit del modulo della funzione di trasferimento I valori di R , L e C estratti dal fit dei dati sono i seguenti:

1. Resistenza $R = (1050 \pm 90) \, \Omega$
2. Induttanza $L = (0.048 \pm 0.004) \, \text{H}$
3. Capacità $C = (9.5 \pm 0.8) \, \text{nF}$

Effettuando un test di compatibilità tra le misure effettuate ed il modello si ottengono i seguenti risultati:

1. : $\tilde{\chi}^2 = 2.0$
2. : $p - value = 0.002$

Eseguendo infine un t-test tra i valori dei parametri misurati e quelli estratti dal fit, si ottiene una distanza in deviazioni standard dal valore atteso di:

1. $R \quad t = 0.86$
2. $L \quad t = 0.95$
3. $C \quad t = 0.97$

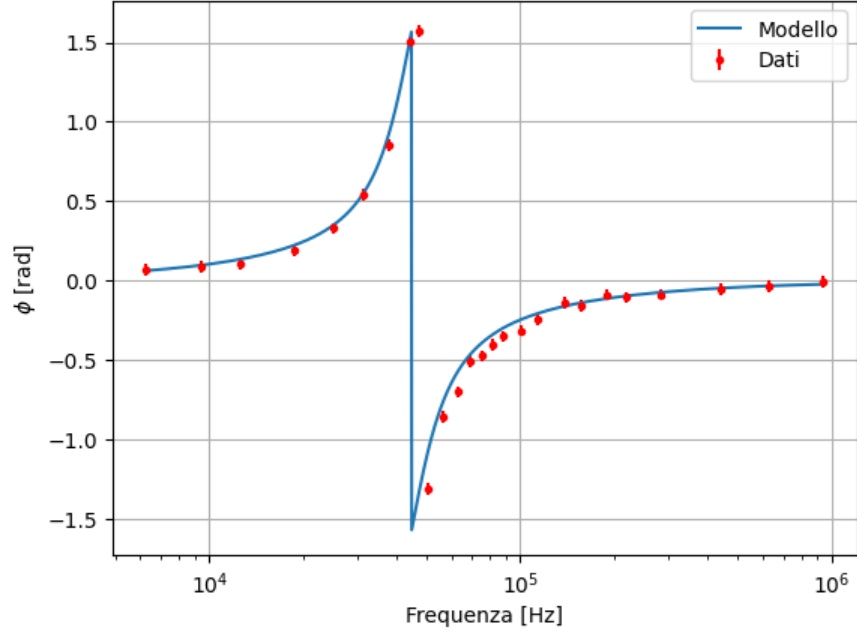


Figure 14: Grafico fase funzione di Trasferimento per sistema induttanza-capacità in RLC

Fit della fase della funzione di trasferimento Per quanto riguarda la fase, dal grafico 14 si osserva chiaramente una discontinuità nella differenza di fase misurata. La libreria utilizzata per eseguire il fit (Minuit) non è adatta ad operare con dati del genere. Per questo motivo abbiamo separato il set di misure in due, in modo da fittare separatamente le due parti della curva, e ottenuto due stime distinte per i parametri. Successivamente, per ricavare la miglior stima dei parametri, abbiamo combinato i valori secondo una media aritmetica e le incertezza sotto media in quadratura.

1. $R_1 = (913 \pm 159) \, \Omega$, $R_2 = (1070 \pm 1170) \, \Omega \implies R_{best} = (992 \pm 1180) \, \Omega$
2. $L_1 = (0.050 \pm 0.008) \, \text{H}$, $L_2 = (0.048 \pm 0.053) \, \text{H} \implies L_{best} = (0.049 \pm 0.053) \, \text{H}$
3. $C_1 = (9.98 \pm 1.65) \, \text{nC}$, $C_2 = (9.4 \pm 10.2) \, \text{nC} \implies C_{best} = (9.7 \pm 10.4) \, \text{nC}$

Abbiamo sottoposto entrambi i fit ad un test di compatibilità, ottenendo nel primo caso:

$$\tilde{\chi}^2 = 0.3, \quad p - value = 0.92$$

mentre nel secondo caso:

$$\tilde{\chi}^2 = 2.3, \quad p - value = 0.003$$

2.4 Conclusioni sul circuito RLC

2.4.1 Funzioni di trasferimento sulla resistenza

Per quanto riguarda le misure fatte sulla resistenza, dai test di compatibilità effettuati possiamo confermare la compatibilità delle misure con il modello per le funzioni di trasferimento

attese.

La "bell curve" risultante dal grafico del modulo¹¹ rappresenta la risposta della resistenza e in generale di tutto il circuito. La **larghezza** della campana è legata al range di frequenze imposte sul circuito e rispecchia l'intervallo in cui il circuito risponde in modo significativo, una maggiore R corrisponde ad una campana più larga e dunque un intervallo di frequenze maggiore. **L'altezza** della campana invece è legata alla "forza" della risposta del circuito, se sono presenti risonanze i valori si sommano e il picco si alzerà. Possiamo inoltre trarre delle conclusioni per la risposta in frequenza del circuito per certi valori di R che come sappiamo determinano il **regime** di tale circuito: sottosmorzato, sovrasmorzato e criticamente smorzato. Tenendo conto di che cosa ci si aspetta da ciascuno dei tre casi, guardando il grafico da noi ottenuto è possibile riconoscere un sistema sottosmorzato, questo perché la presenza di un picco ad una determinata frequenza indica un fenomeno di risonanza, inoltre come ci si aspetta dopo tale frequenza di risonanza, l'ampiezza della risposta segue un graduale decadimento senza incontrare nuovi picchi, mimando lo smorzamento che appunto rallenta l'oscillazione del circuito. Per altri regimi, ad esempio quello sovrasmorzato, ci si aspetterebbe invece l'assenza di fenomeni di risonanza, ciò è dovuto al fatto che un sovrasmorzato oppone molta resistenza all'oscillazione. Dunque ogni regime riflette le proprie caratteristiche nella risposta in frequenza.

2.4.2 Funzioni di trasferimento su induttanza e capacità

Per quanto riguarda la seconda parte relativa al fit del modulo della funzione di trasferimento su LC, il test di compatibilità tra misure ci conferma la bontà della stima dei parametri. Il $\tilde{\chi}^2$ di 2 e un p-value basso, ci suggeriscono una leggera discrepanza tra il modello e i dati raccolti.

Questo può essere dovuto a molti fattori, come all'aver preso le misure a frequenze più alte in un secondo momento, o all'aver sottostimato gli errori presenti.

Infine, studiando la fase di $H(\omega)$ di LC, ci accorgiamo che si ripresentano alcuni dei problemi osservati in precedenza. In particolare il fatto che l'incertezza sulle misure estratte dal fit sia maggiore del valore stesso del parametro, nonostante un valore di $\tilde{\chi}^2$ non particolarmente alto. Abbiamo tentato di spiegare questo fatto in diversi modi.

Una probabile spiegazione è la scarsa qualità dei dati raccolti, giustificabile almeno in parte dai numerosi problemi tecnici accaduti durante l'esperienza. Un'altra possibile motivazione è il fatto che i nostri dati non seguano a pieno il modello previsto, dal momento che diversi fattori possono influire su questo aspetto, come la presenza di induttanze/capacità non previste, una configurazione del circuito non ottimale o possibili comportamenti non lineari dei componenti, come già osservato nel punto 1.3.

2.5 Inciso sulle incertezze

Nello svolgimento dell'analisi dati, abbiamo tenuto conto degli errori sulle misure basandoci sulla precisione dell'oscilloscopio.

Al fine di leggere chiaramente i valori rilevati dallo strumento, abbiamo impostato una media su 64 cicli e osservato l'ampiezza massima delle oscillazioni nel valore riportato. Dopo la

prima decina di misure, ci siamo resi conto del fatto che la lettura oscillava tra circa ± 20 mV dal valore medio, dunque abbiamo preso questo come valore standard per le nostre incertezze.

Per ottenere l'errore su $H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$, abbiamo propagato l'errore tramite la formula:

$$\sigma_H = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{out}}{V_{in}}\right)^2 + \left(\frac{V_{out}}{V_{in}}\right)^2 \cdot \sigma_{in}^2}$$

Infine, per stimare l'errore sullo sfasamento tra i segnali, abbiamo ripetuto la stessa procedura fatta per quello sul modulo. Questa volta però, la lettura del valore è risultata più stabile consentendoci di stabilire con sicurezza un errore di 1 grado, convertito poi in radianti.

Valori di incertezza elevati In diversi dei nostri risultati, riscontriamo un'incertezza di molto superiore al valore stesso del parametro stimato tramite fit. Eseguendo una stima a posteriori dell'incertezza da assegnare alle misure, abbiamo notato che dopo un leggero aumento dell'errore, il $\tilde{\chi}^2$ tendeva a 1, ma l'imprecisione sulla stima dei parametri del modello aumentavano rapidamente. Per questo motivo abbiamo deciso di tenere l'incertezza valutata inizialmente e continuare con l'analisi.

3 Tabelle misurazioni

Table 1: Dati RC

Frequenza	Ampiezza Va	Ampiezza Vb	Ampiezza Va-b	ddf a/b	ddf a-b/a
200	10.2	0.17	10.17	92.0	0.6
400	10.19	0.25	10.2	90.5	1.2
600	10.19	0.37	10.21	89.8	2.0
800	10.17	0.49	10.22	89.3	2.7
1000	10.18	0.62	10.23	87.5	3.4
2000	10.0	1.28	10.06	85.3	4.1
3000	9.9	1.92	9.9	82.2	8.6
4000	9.8	2.55	9.7	78.4	14.5
5000	9.66	3.1	9.4	75.5	18.2
6000	9.45	3.6	9.1	73.0	21.7
8000	9.08	4.46	8.3	65.1	25.9
10000	8.74	5.13	7.67	59.5	35.3
12000	8.45	5.58	7.05	54.3	40.6
13000	8.36	5.82	6.75	52.8	40.7
14000	8.23	5.98	6.46	50.7	44.5
15000	8.1	6.15	6.25	48.2	48.9
15500	8.075	6.18	6.06	47.9	50.1
16000	8.05	6.28	5.95	46.0	50.4
16500	7.9	6.32	5.88	46.2	51.8
17000	7.9	6.38	5.74	45.5	49.5
18000	7.8	6.48	5.54	43.1	54.1
19000	7.77	6.6	5.31	42.2	54.5
20000	7.75	6.65	5.13	40.7	58.4
22000	7.6	6.8	4.77	37.8	62.5
30000	7.29	7.14	3.72	26.6	73.5
40000	7.13	7.39	2.9	22.1	83.9
50000	7.05	7.45	2.4	17.9	90.2
100000	6.94	7.52	1.39	8.8	112.0
150000	6.9	7.56	1.08	7.2	125.0
300000	6.91	7.6	0.84	4.5	144.0
500000	6.91	7.63	0.83	1.4	162.0
1000000	6.9	7.6	0.78	1.1	170.0
1500000	6.94	7.63	0.77	0.9	171.0
3000000	6.96	7.6	0.74	0.0	178.0

Table 2: Dati RL

Frequenza	Ampiezza Va	Ampiezza Vb	Ampiezza Va-b	ddf a/b	ddf a-b/a
100	10.0	9.8	0.4	0	-84.0
250	9.9	9.8	0.7	1	-80.0
400	9.9	9.8	0.7	1	-75.0
500	9.6	9.04	1.36	7	-68.0
700	9.6	9.04	1.84	10	-69.0
900	9.6	8.9	2.2	12	-63.0
1100	9.6	8.8	2.64	15	-62.0
1400	9.6	8.7	3.04	19	-66.0
1700	9.7	8.4	3.6	23	-62.0
2000	9.76	8.32	4.24	26	-60.0
2200	9.76	8.1	4.56	29	-58.0
2400	9.76	8.0	4.88	31	-56.0
2600	9.76	7.76	5.2	33	-51.0
2700	9.76	7.68	5.36	35	-51.0
2800	9.76	7.68	5.52	35	-50.0
2900	9.76	7.5	5.68	37	-49.0
3000	9.76	7.44	5.84	36	-48.0
3100	9.76	7.36	5.92	38	-47.0
3200	9.76	7.28	6.0	39	-47.0
3300	9.76	7.2	6.16	40	-46.0
3400	9.76	7.12	6.3	41	-46.0
3500	9.76	7.04	6.4	41	-45.0
3700	9.76	6.88	6.64	43	-45.0
4000	9.84	6.64	6.88	45	-42.0
4500	9.92	6.24	7.28	49	-38.0
5000	9.92	5.84	7.68	52	-36.0
6000	9.92	5.2	8.16	58	-31.0
7000	10.0	4.64	8.56	60	-28.0
8000	10.0	4.24	8.8	64	-25.0
10000	10.0	3.6	9.12	68	-20.0
15000	10.08	2.48	9.6	76	-14.0
20000	10.08	1.8	9.4	79	-9.0
30000	10.2	1.28	9.6	83	-9.0
50000	10.4	0.8	9.6	85	-6.0
75000	10.4	0.48	9.8	89	-2.0
100000	10.4	0.34	9.8	89	-0.5

Table 3: Dati RLC

Frequenza	Ampiezza Va	Ampiezza Vb	Ampiezza Va-b	ddf a/b	ddf a-b/a
1000	10.2	0.6	9.8	-88	4.0
1500	10.0	0.9	9.8	-86	5.0
2000	10.0	1.2	9.8	-87	6.0
3000	10.0	2.2	9.6	-80	11.0
4000	10.0	3.5	9.4	-74	19.0
5000	10.0	5.1	8.8	-63	31.0
6000	9.8	7.5	6.9	-44	49.0
7000	9.6	9.7	2.6	-13	86.0
7500	9.6	9.8	0.5	2	90.0
8000	9.6	9.4	3.0	17	-75.0
9000	9.8	7.6	6.1	39	-49.0
10000	9.9	6.3	7.7	49	-40.0
11000	10.0	5.2	8.5	59	-29.0
12000	10.0	4.4	8.9	62	-27.0
13000	10.0	3.9	9.2	68	-23.0
14000	10.0	3.5	9.4	68	-20.0
16000	10.0	2.8	9.3	72	-18.0
18000	10.0	2.4	9.2	73	-14.0
22000	10.0	1.9	9.6	79	-8.0
25000	10.0	1.6	9.9	83	-9.0
30000	10.0	1.2	10.0	82	-5.0
35000	10.0	1.1	10.0	85	-6.0
45000	10.0	0.8	10.0	86	-5.0
70000	10.4	0.5	9.8	88	-3.0
100000	10.4	0.3	9.8	90	-2.0
150000	10.4	0.19	9.8	91	-0.4