Майнор «Прикладной статистический анализ»

Временные ряды и их практическое применение (Time Series and Their Application)

Родионова Лилия Анатольевна

к.э.н., доцент департамента статистики и анализа данных НИУ ВШЭ

LRodionova@hse.ru

Тема 4.4

Адаптивные сезонные модели временных рядов

Адаптивные модели временных рядов

- Основа моделей – метод экспоненциально взвешенного скользящего среднего

-Адапта́ция (лат. adapto - приспособляю)

- Характерная черта – «подстройка» под эволюцию процесса.

- Достоинство методов: простота вычислений

- используют для краткосрочного прогнозирования

Brown R.G. Smoothing forecasting and prediction of discrete time series. - N.Y., 1963.

Brown R.G., Meyer R.F. The fundamental theorum of exponential smoothing. Oper. Res. - 1961. - Vol.9. -№ 5.

Метод экспоненциально взвешенного скользящего среднего

(Exponential moving average – EMA)

$$Q(f)=\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^k(y_{t-k}-f)^2\to\min_f$$

λ – параметр сглаживания $0<\lambda<1$.

Веса λ^k *уменьшаются экспоненциально* по мере удаления наблюдений в прошлое .

$$\hat{f}(t)=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^t}\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^k y_{t-k} \qquad (4.4.1)$$

- Влияние EMA на остатки $\tilde{\varepsilon}_t=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^t}\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^k\varepsilon_{t-k},\ \varepsilon_t\sim\mathrm{WN}(0,\sigma^2)$

$$E(\varepsilon_t)=0, \qquad E\tilde{\varepsilon}_t=0,$$

$$V(\varepsilon_t)=\sigma^2 \qquad V\tilde{\varepsilon}_t=\sigma^2\frac{(1-\lambda)(1+\lambda^t)}{(1+\lambda)(1-\lambda^t)}$$

Метод экспоненциально взвешенного скользящего среднего

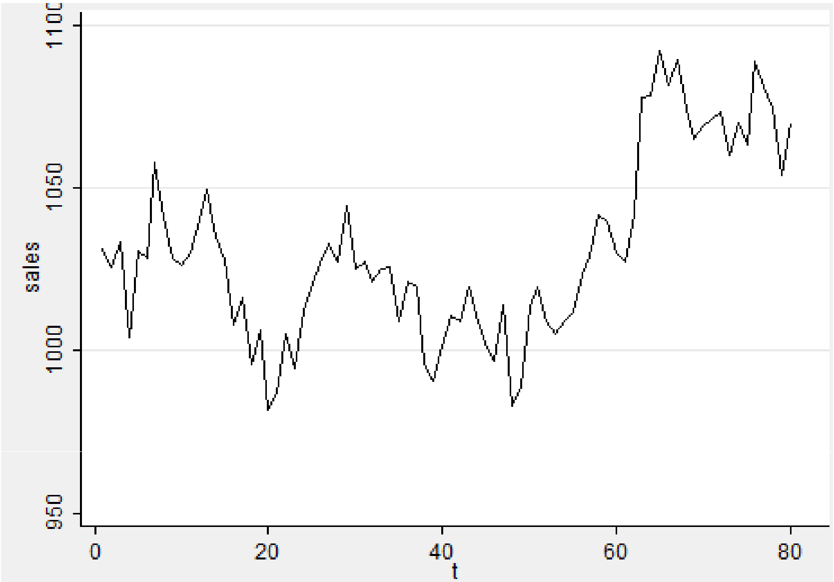
Случай «бесконечно удаленного» прошлого

$$\hat{f}(t) = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^t}\sum_{k=0}^{t-1}\lambda^k y_{t-k} \to \hat{f}(t) = (1-\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k y_{t-k} \qquad (4.4.2)$$

- Влияние ЕМА на остатки $V\tilde{\varepsilon}_t = \sigma^2 \frac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)}$
- Рекуррентное соотношение: $\hat{f}(t) = \lambda\hat{f}(t-1) + (1-\lambda)y_t$ (4.4.3)
- Выбор параметра сглаживания
- Выбор начального значения
- Пример

t	1	2	3	4
yt	2	3	4	5

Восстановление пропущенных наблюдений в середине выборки




```
exponential coefficient =       0.7000
sum-of-squared residuals =      6842.4
root mean squared error =       11.817
. list t sales2 sm3 if t>25 & t<31
```

	t	sales2	sm3
26.	26	1011.5	1007.5
27.	27	1028.3	1010.3
28.	28	.	1022.9
29.	29	1028.4	1022.9
30.	30	1054.8	1026.75

$$S_{29} = \alpha S_{28} + (1-\alpha)S_{28} = S_{28}$$

```
use http://www.stata-press.com/data/r13/sales1, clear
tssmooth exponential sm1=sales, parms(.7) forecast(3)
generate sales2=sales if t!=28
tssmooth exponential sm3=sales2, parms(.7) forecast(3)
```

Модель Брауна

$$y_t = a_0 + \varepsilon_t$$

$$E\varepsilon_t = 0, V\varepsilon_t = \sigma^2$$

Прогноз:

$$\boxed{\hat{y}(t,\tau) = \hat{a}_0 = \tilde{y}_t} \quad \textbf{(4.4.4)}$$

$$Q = \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j (y_{t-j} - a_0)^2 \to \min$$

$$\hat{a}_0 = \tilde{y}_t = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^t} \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j y_{t-j}$$

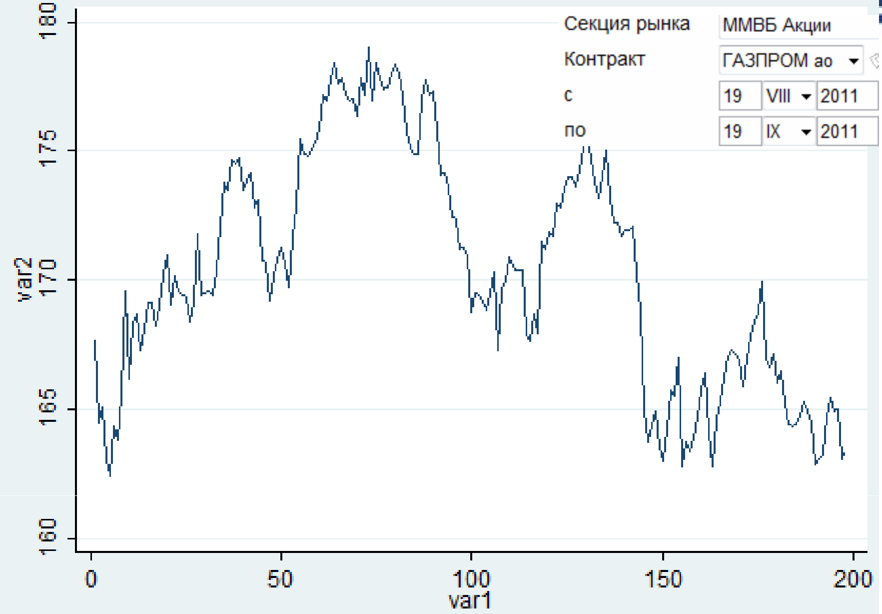
$$\hat{a}_0 = \tilde{y}_t = (1-\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_{t-j}$$

Построение прогноза: При появлении следующего (t+1)-го наблюдения y(t+1) перерасчет прогнозирующей функции

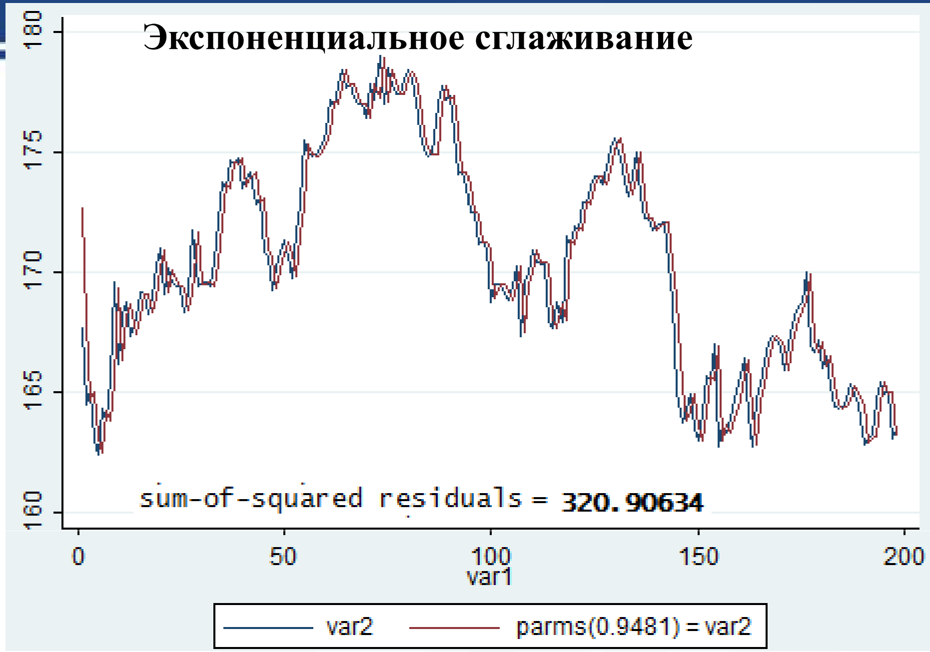
$$\hat{y}(t+1;1) = \tilde{y}_{t+1}$$

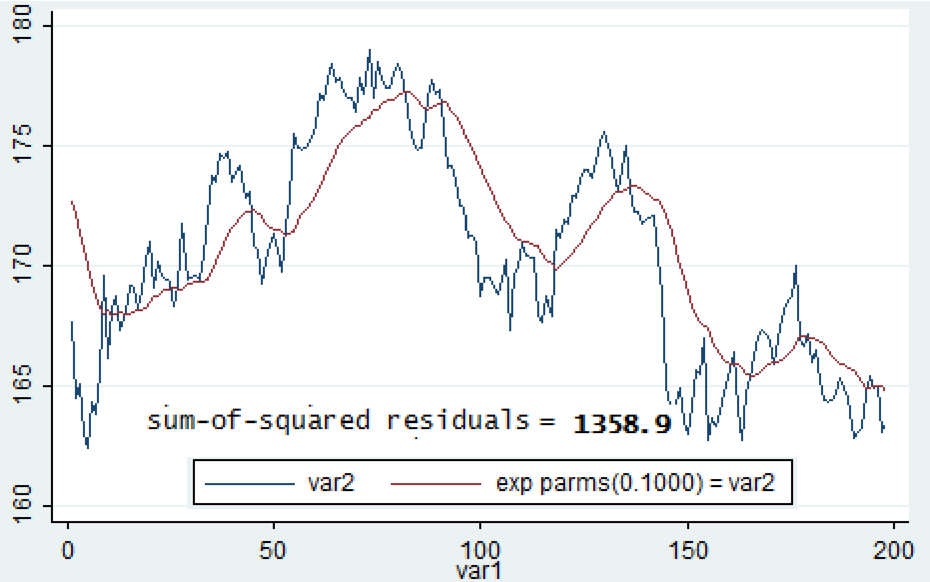
$$\tilde{y}_{t+1} = \lambda \tilde{y}_t + (1-\lambda) y_{t+1}$$

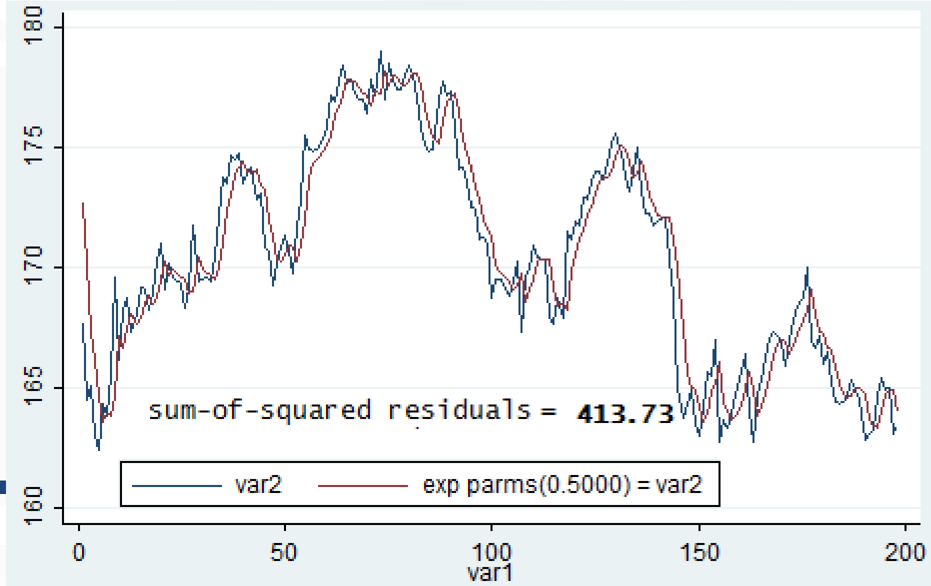
Адаптивные модели



Экспоненциальное сглаживание







Модель Брауна: случай линейного тренда

Прогнозная модель: $\hat{y}_{t+\tau} = a_t + b_t \tau$

- Параметры модели определяются $Q = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (y_{t-j} - a_j - b_j j)^2 \to \min_{a,b}$

$$\hat{a}_t = \tilde{y}_t = (1-\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j y_{t-j}$$

$$\hat{b}_t = (1-\lambda)\tilde{y}_t + (1-\lambda)^2 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \lambda^j y_{t-j}$$

- ***Прогноз:*** $\hat{y}(t;\tau = 1) = \hat{a}_t + \hat{b}_t$

- Недостатки модели:
  - неопределенность выбора λ
  - выбор аппроксимирующего полинома
  - однопараметричность подхода (λ)

Адаптивные полиномиальные модели

Развитие аппарата адаптивного прогнозирования экономических процессов:

1 направление - усложнение структуры адаптивных моделей,

2 направление - совершенствование адаптивного механизма моделей.

Метод Хольта

1. **Двухпараметрическая модель Ч. Хольта** [Holt (1957)] – введение *двух* параметров сглаживания 0<α, β<1. Прогноз на τ тактов времени в текущий момент времени t определяется линейным трендом:

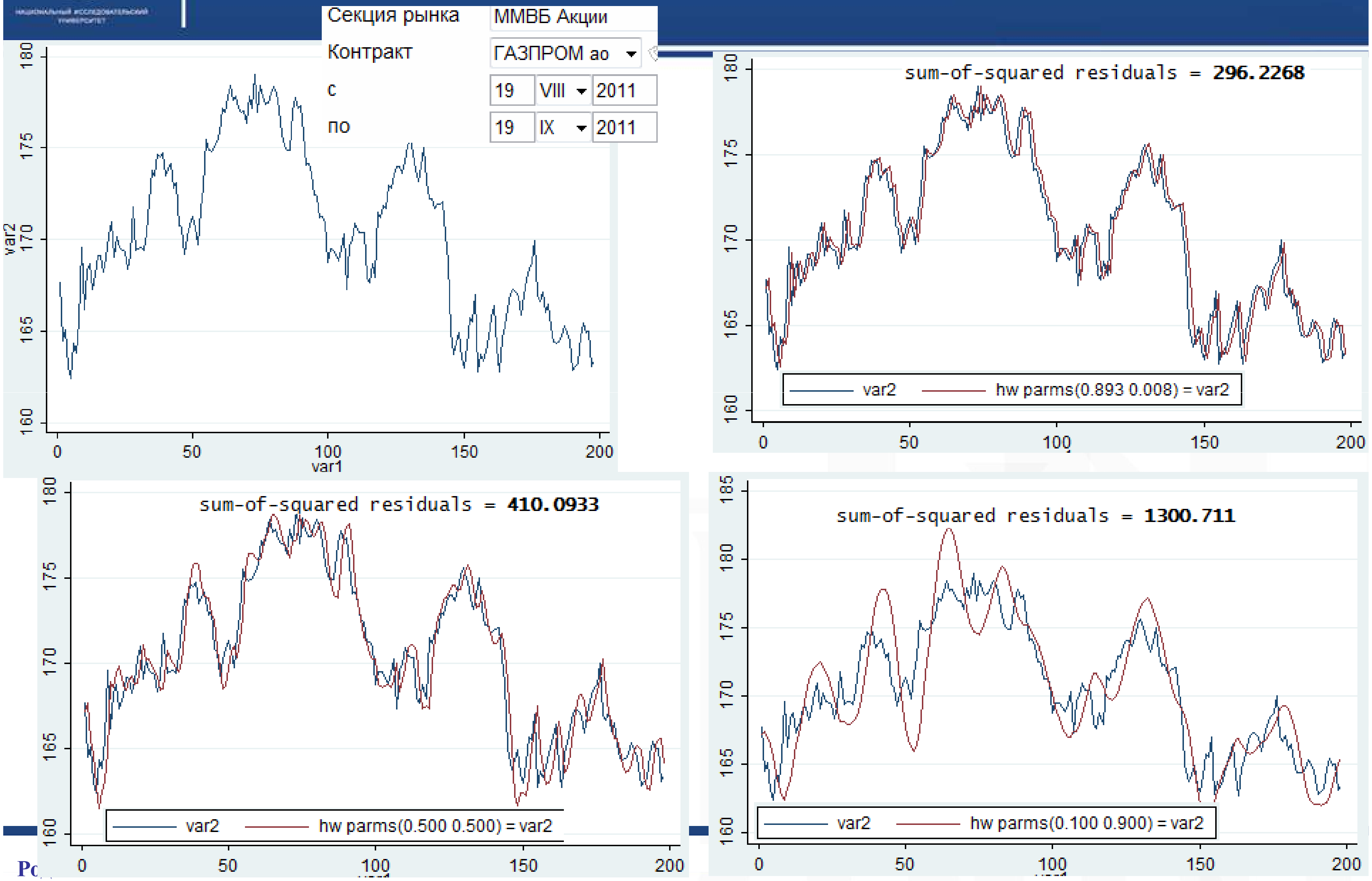
$$\hat{y}(t;\tau) = \hat{y}_{t+\tau} = \hat{a}_t + \hat{b}_t \tau$$

Определение коэффициентов:

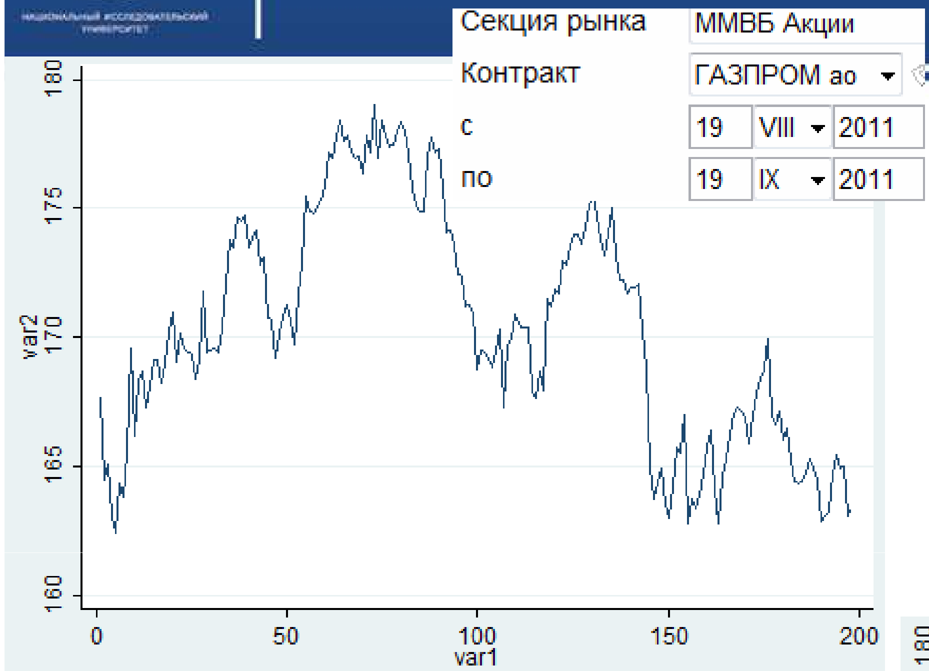
$$\hat{a}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\left\{\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}\right\},$$
$$\hat{b}_t = \beta\left\{\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}\right\} + (1-\beta)\hat{b}_{t-1}$$

Holt C.C. Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted moving averages // O.N.R. Memorandum, Carnegie Inst. of Technology. - 1957. - № 2.

Адаптивные модели – модель Хольта



Адаптивные модели – модель Хольта

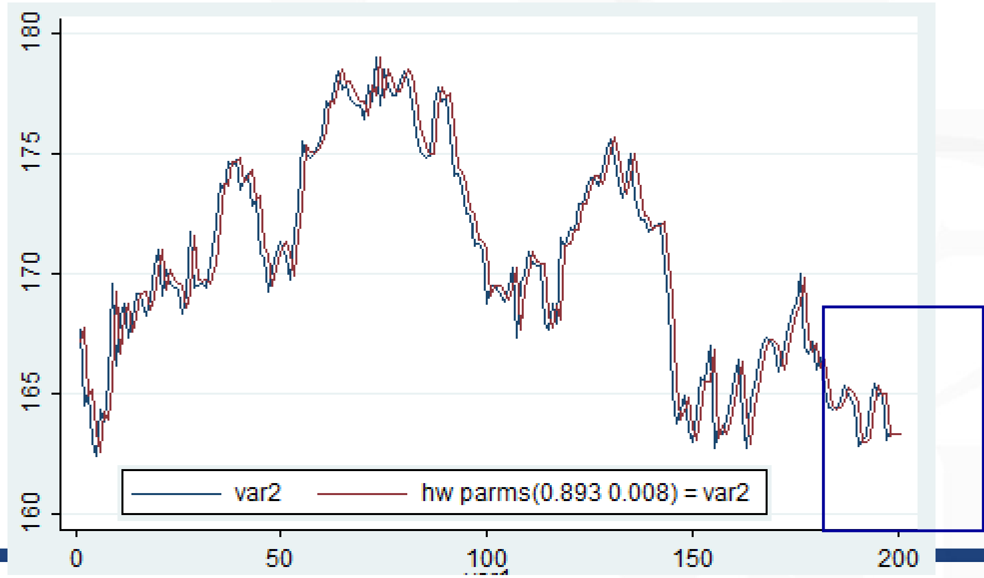


Прогнозирование

tssmooth hwinters hw4 = var2, forecast(3)

Вычисленные значения:

	hw3	hw4
193	162.1872	163.1678
194	162.6979	164.506
195	163.4803	165.3345
196	164.2582	164.9381
197	165.0313	164.9674
198	165.3653	163.2788
199	.	163.3665
200	.	163.3461
201	.	163.3256



Замечание. В эконометрических пакетах (Stata) представлена ***модель Хольта*** с возможностью выбора оптимальных параметров по критерию минимума среднеквадратической ошибки путем перебора на сетке возможных значений.

В Stata: модель Хольта = Holt–Winters nonseasonal smoothing (tssmooth hwinters)

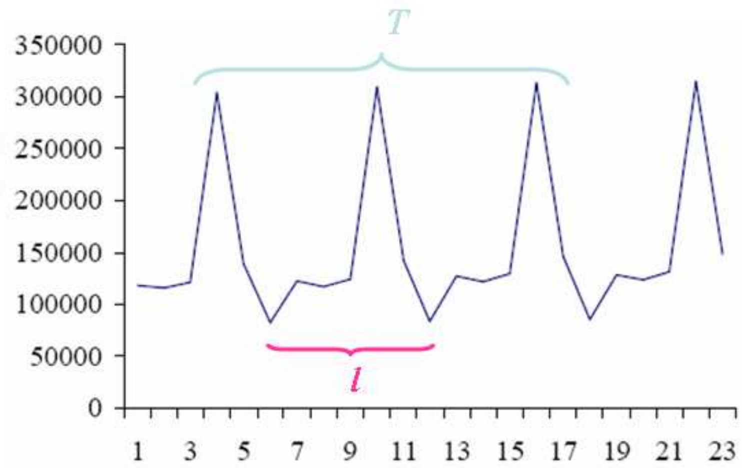
Модель Хольта-Уинтерса

Уинтерс [Winters (1960)] развил метод Хольта с учетом сезонных эффектов.

Модель Хольта-Уинтерса – сезонная мультипликативная модель с линейным трендом

Прогноз на τ шагов вперед : $\hat{y}(t,\tau) = \hat{y}_{t+\tau} = \left\{\hat{a}_t + \tau \cdot \hat{b}_t\right\} \cdot \hat{s}_{t-L+\tau}$

L-число временных тактов, содержащихся в полном сезонном цикле (в одном году 12 месяцев, L=12)



Winters, P. R. (April 1960). "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages". Management Science 6 (3): 324–342.

Мультипликативная модель Хольта-Уинтерса

$$\hat{y}(t,\tau) = \hat{y}_{t+\tau} = \left\{\hat{a}_t + \tau \cdot \hat{b}_t\right\} \cdot \hat{s}_{t-L+\tau}$$

Расчет коэффициентов:

$$\hat{a}_t = \alpha \frac{y_t}{\hat{S}(t-L)} + (1-\alpha)\left\{\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}\right\};$$

$$\hat{b}_t = \beta\{\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}\} + (1-\beta)\hat{b}_{t-1};$$

$$\hat{S}_t = \gamma \frac{y_t}{\hat{a}_t} + (1-\gamma)\hat{S}(t-L);$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1.$$

Определение начальных значений:

$$\hat{b}_t(0) = \frac{\bar{y}_m - \bar{y}_1}{(m-1)L};$$

$$\hat{a}_t(0) = \bar{y}_1 - {}^{L}\!/_{2}\,\hat{b}_t(0);$$

$$\hat{S}_{0l} = \bar{S}_l\left(\frac{l}{\sum_{l=1}^{L} \bar{S}_l}\right), l = \overline{1, L};$$

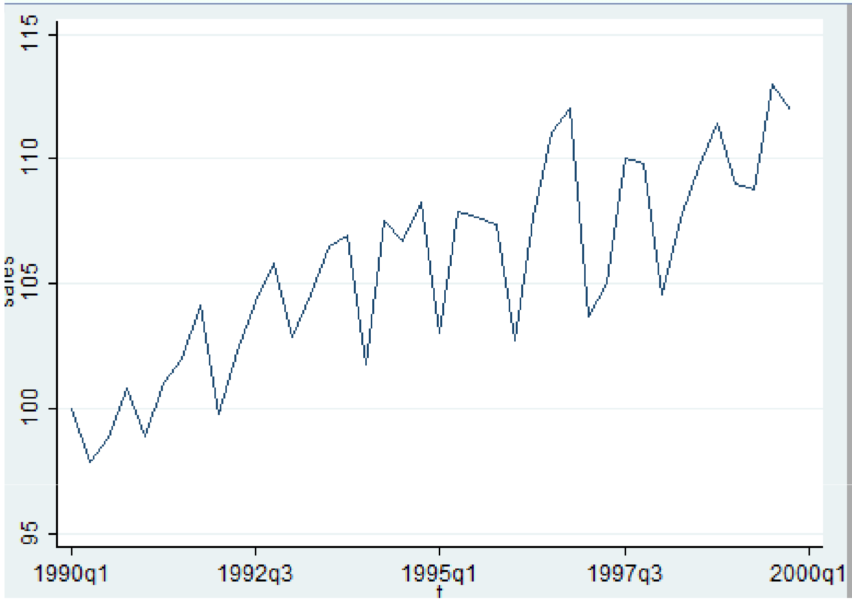
$$\bar{S}_l = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} S_{l+kL}$$

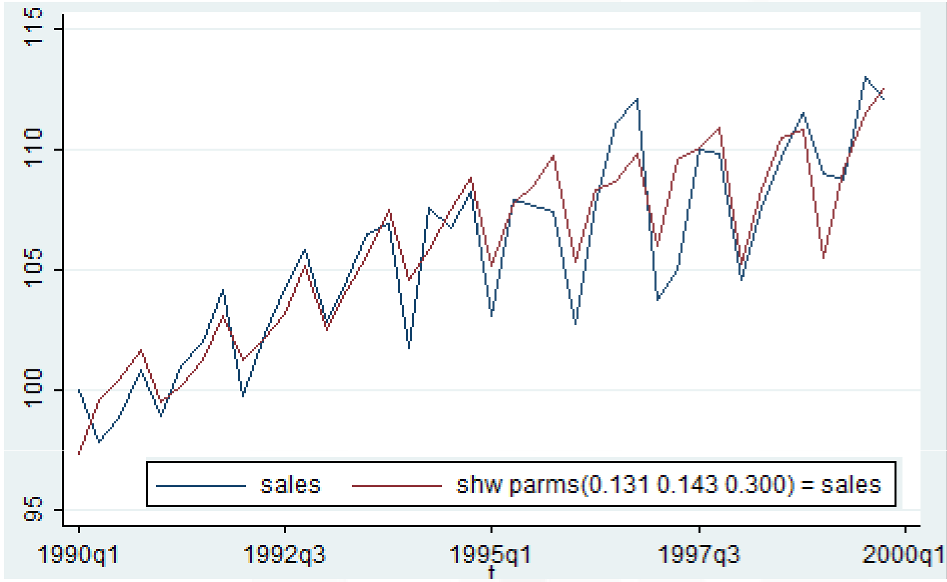
Пример

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
yt	2	1	3	5	3	0.5	3.5	6	2.5	1	3.2	5.5

Пусть α=0.1, β=0.2, γ=0.3

Модель Хольта-Уинтерса





$$\hat{a}_t = \alpha \frac{y_t}{\hat{S}(t-L)} + (1-\alpha)\{\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}\},$$

$$\hat{b}_t = \beta\{\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}\} + (1-\beta)\hat{b}_{t-1};$$

$$\hat{S}_t = \gamma \frac{y_t}{\hat{a}_t} + (1-\gamma)\hat{S}(t-L);$$

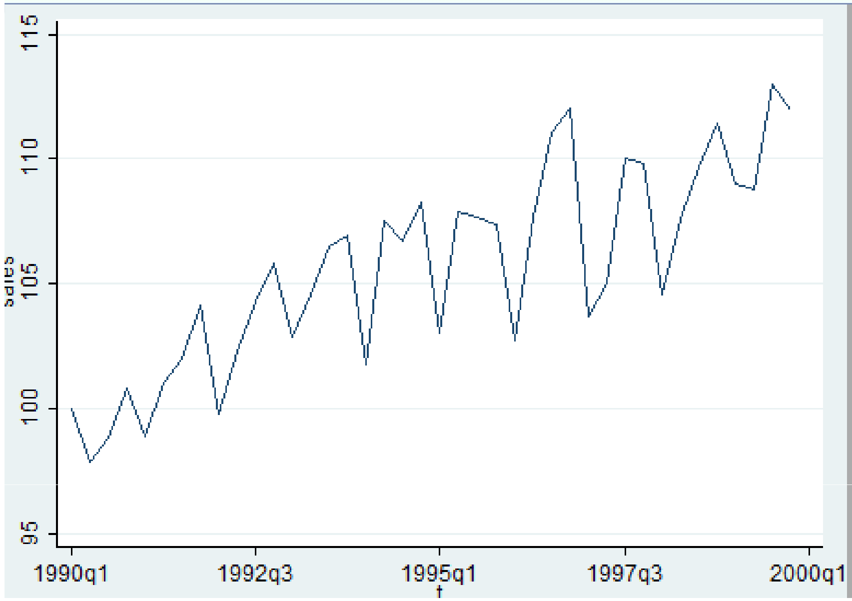
$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1.$$

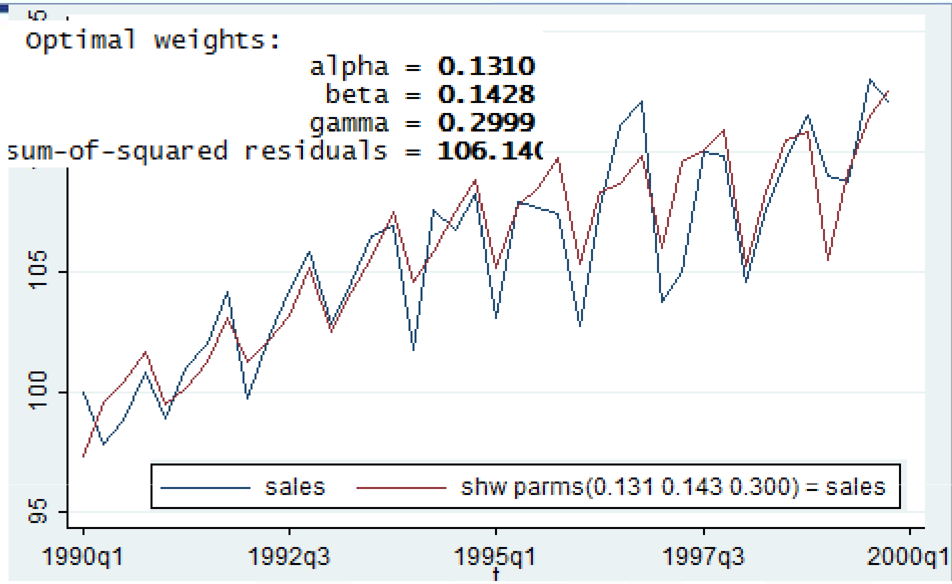
```
Optimal weights:
                          alpha = 0.1310
                           beta = 0.1428
                          gamma = 0.2999
  sum-of-squared residuals = 106.1409
```

tssmooth shwinters shw1=sales

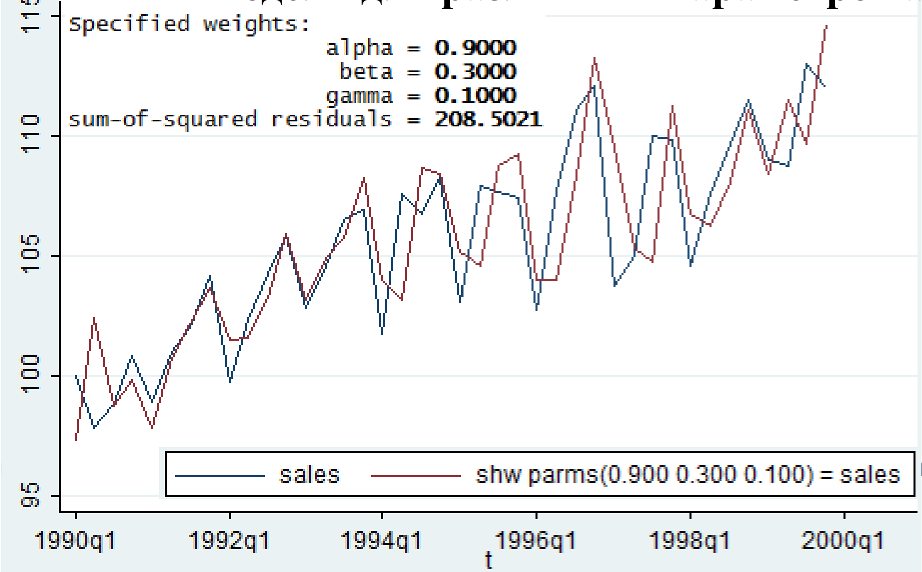
Menu Statistics > Time series > Smoothers/univariate forecasters >Holt-Winters seasonal smoothing

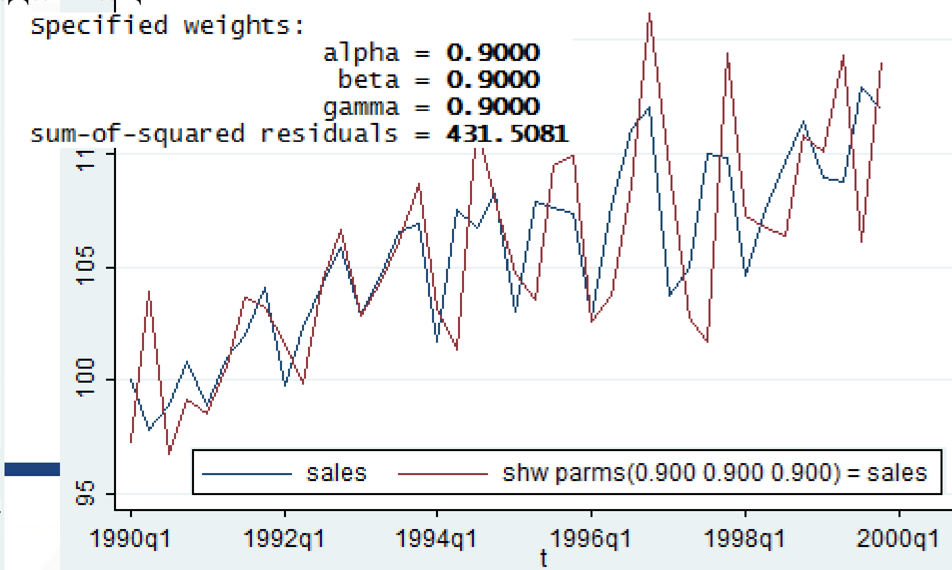
Модель Хольта-Уинтерса



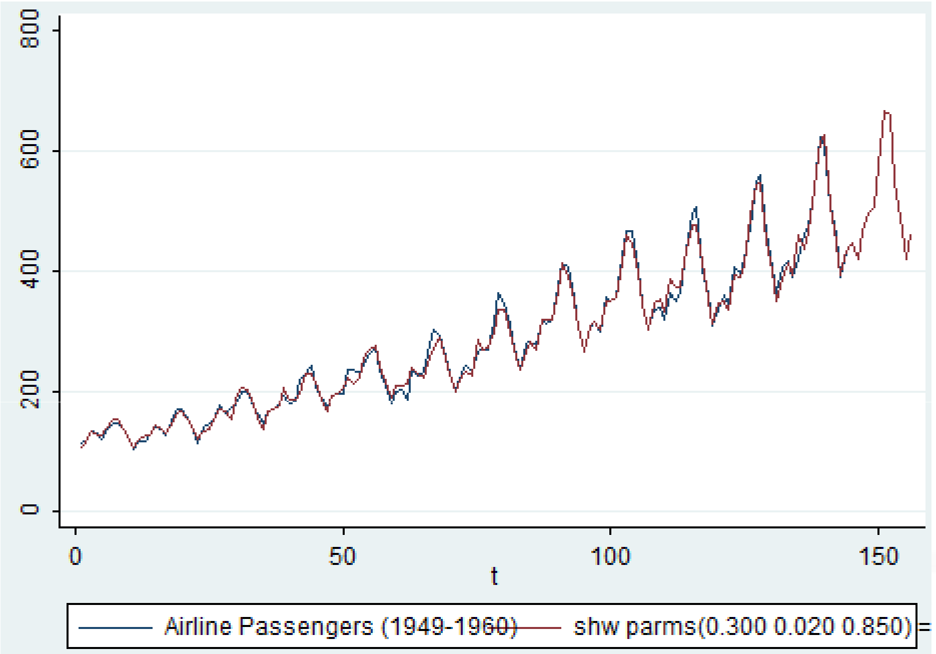


Модели для различных параметров адаптации



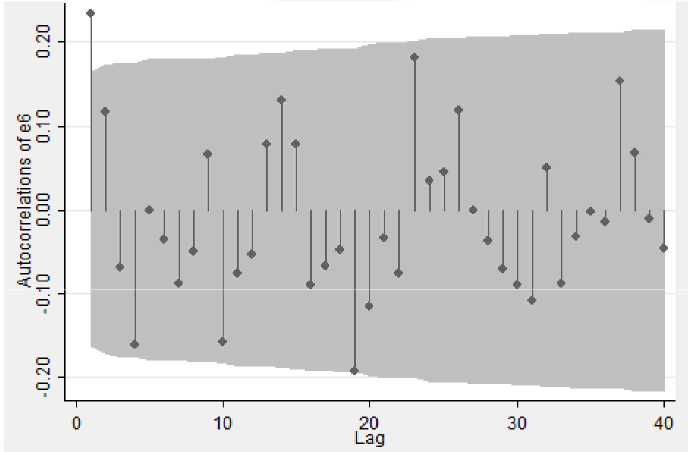


Модель Хольта-Уинтерса




```
Optimal weights:
                               alpha = 0.2891
                                beta = 0.0212
                               gamma = 0.8579
penalized sum-of-squared residuals = 16514.49
          sum-of-squared residuals = 16514.49
          root mean squared error  = 10.70906
```

Остатки




```
. wntestq e6

Portmanteau test for white noise
---------------------------------------
 Portmanteau (Q) statistic =    60.7559
 Prob > chi2(40)           =     0.0187
```

Сезонная аддитивная модель с линейным трендом

Аддитивная модель Хольта-Уинтерса (Модель Тейла – Вейджа)

- На практике часто встречаются экспоненциальные тенденции с мультипликативным сезонным эффектом.
- Логарифмирование: мультипликативную сезонность заменяют на аддитивную.
- ***Преимущество*** аддитивной модели: относительная простота вычислений.

$$\hat{y}(t,\tau) = \hat{y}_{t+\tau} = \left\{\hat{a}_t + \tau \cdot \hat{b}_t\right\} + \hat{s}_{t-L+\tau}$$

Расчет коэффициентов:

$$\hat{a}_t = \alpha\left(y_t - \hat{S}(t-L)\right) + (1-\alpha)\left\{\hat{a}_{t-1} + \hat{b}_{t-1}\right\};$$

$$\hat{b}_t = \beta\left\{\hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}\right\} + (1-\beta)\hat{b}_{t-1};$$

$$\hat{S}_t = \gamma\left(y_t - \hat{a}_t\right) + (1-\gamma)\hat{S}(t-L);$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1.$$

Начальные значения:

$$y_t = a_t(0) + b_t(0)t + \beta_{s,1-L}d_1 + \beta_{s,2-L}d_2 + \ldots + \beta_{s0}d_L + \varepsilon_t$$