

## Занятие 16. ADL

### Autoregressive Distributed Lag (ADL) Model (GRETl)

(Авторегрессионные модели с распределенными лагами – ADL)

#### План

1. Кросскорреляционная функция.
2. ECM-представление.
3. Моделирование с помощью ADL/ARMAX.
4. Случай тренд-стационарного ряда.

**Задача 1.** Даны  $x_t$  и  $y_t$ . Рассчитайте значения кросскорреляционной функции для лага -1, -2, +1. Постройте график кросскорреляционной функции. Сделайте выводы о взаимосвязи  $x_t$  и  $y_t$ .

t	Yt	Xt
1	4,0	8,0
2	5,0	10,0
3	6,0	7,0
4	7,0	14,0
5	5,0	7,0

$$\rho_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y}_t)(x_{t+k} - \bar{x}_t)$$

$$\rho_{xy}(1) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \bar{y}_t)(x_{t+1} - \bar{x}_t)$$

**Замечание.** Используйте вспомогательную таблицу.

t	Yt	Xt	Xt-1	Xt-2	Xt+1	Xt+2
1	4,0	8,0	-	-		
2	5,0	10,0		-		
3	6,0	7,0				
4	7,0	14,0				-
5	5,0	7,0			-	-

Кросскорреляционная функция (вычислите и заполните таблицу)

Лаг K	-2	-1	0	1	2
$\rho_{xy}(k)$					

**Пример вычисления  $\rho_{xy}(1)$ .** Пусть известно  $\bar{y}_t = 5,4$ ;  $\bar{x}_t = 9,2$ ;  $\sigma_y = 1$ ;  $\sigma_x = 2,6$ .

t	Yt	Xt	Xt+1
1	4,0	8,0	10,0
2	5,0	10,0	7,0
3	6,0	7,0	14,0
4	7,0	14,0	7,0
5	5,0	7,0	-

$$\rho_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y}_t)(x_{t+k} - \bar{x}_t)$$

$$\rho_{xy}(1) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T-1} (y_t - \bar{y}_t)(x_{t+1} - \bar{x}_t)$$

$$\rho_{xy}(1) = \frac{1}{1 \cdot 2,6} \frac{1}{5-1} \sum_{t=1}^{5-1} (y_t - 5,4)(x_{t+1} - 9,2) =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2,6} \frac{1}{4} ((4-5,4)(10-9,2) + (5-5,4)(7-9,2) + (6-5,4)(14-9,2) + (7-5,4)(7-9,2)) =$$

$$= -0,085$$

## Задача 2. Интерпретация и прогнозирование ADL.

2.1. Пусть даны две реализации случайных процессов:

$$x_t = 0.4x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.3L)y_t = 0.5 + (0.4 + 0.2L)x_t + \varepsilon_t$$

- ADL(p, q). p, q-?
- перепишите модель в виде  $y_t = \dots$
- стационарность  $y_t$
- запишите ЕСМ-представление
- определите долгосрочный и краткосрочный эффекты влияния  $x$  на  $y_t$
- скорость коррекции к равновесному состоянию, период возврата к равновесному состоянию
- рассчитать **прогноз** на 1 шаг

2.2. Пусть даны две реализации случайных процессов:

$$x_t = 0.3x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.5L + 0.1L^2)y_t = 0.7 + (0.2 + 0.1L + 0.05L^2)x_t + \varepsilon_t$$

- ADL(p, q). p, q-?
- стационарность  $y_t$
- запишите ЕСМ-представление
- определите долгосрочный и краткосрочный эффекты влияния  $x$  на  $y_t$
- скорость коррекции к равновесному состоянию, период возврата к равновесному состоянию

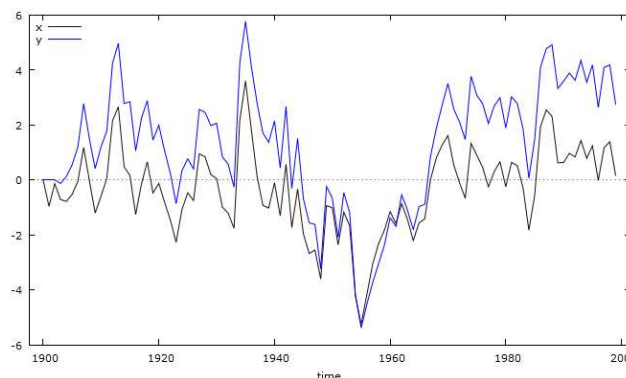
**Задача 3. Моделирование ADL.** Пусть даны две реализации случайных процессов:

$$x_t = 0.3x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.5L - 0.1L^2 - 0.05L^3)y_t = 0.7 + (0.2 + 0.1L + 0.05L^2)x_t + \varepsilon_t$$

**Исходные данные: файл ADL2.**

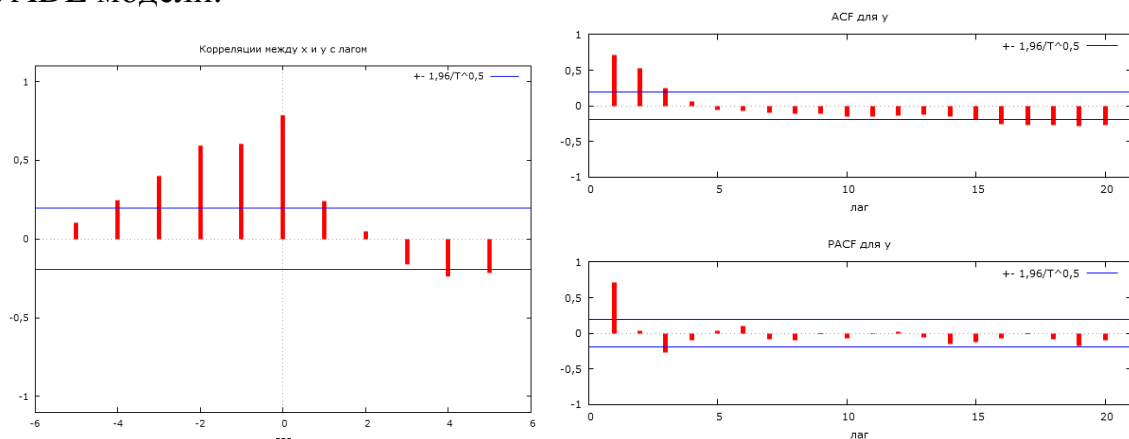
3.1. Постройте графики  $X$  и  $Y$ . Что можно сказать о характере изменения данных переменных.



3.2. Проверьте ряды на стационарность. Сделайте вывод. В случае нестационарности, приведите ряды к стационарному виду.

3.3. Оцените модель  $y_t = \mu + \alpha x_t + \varepsilon_t$  МНК. Опишите модель. Исследуйте остатки. Сделайте вывод об адекватности модели.

3.4. На основе кросскорреляционной функции сделайте предположение относительно порядка ADL модели.



3.5. На основе ACF, PACF сделайте предположение относительно порядка AR-части для  $y_t$ .

3.6. Оцените и сравните несколько ADL моделей:

$$\text{ADL}(1, 1) \quad y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$$

ADL(2, 3), ADL(2, 2), ADL(1, 2)

3.7. Для наилучшей модели запишите ECM-представление, дайте интерпретацию модели и постройте прогноз на два шага вперед (рассчитать по формулам).

3.8. Оцените и сравните несколько ARMAX моделей, самостоятельно подобрав параметры  $p$  и  $q$ .

Сравните и опишите модели, исследуйте остатки, выберите наилучшую модель.

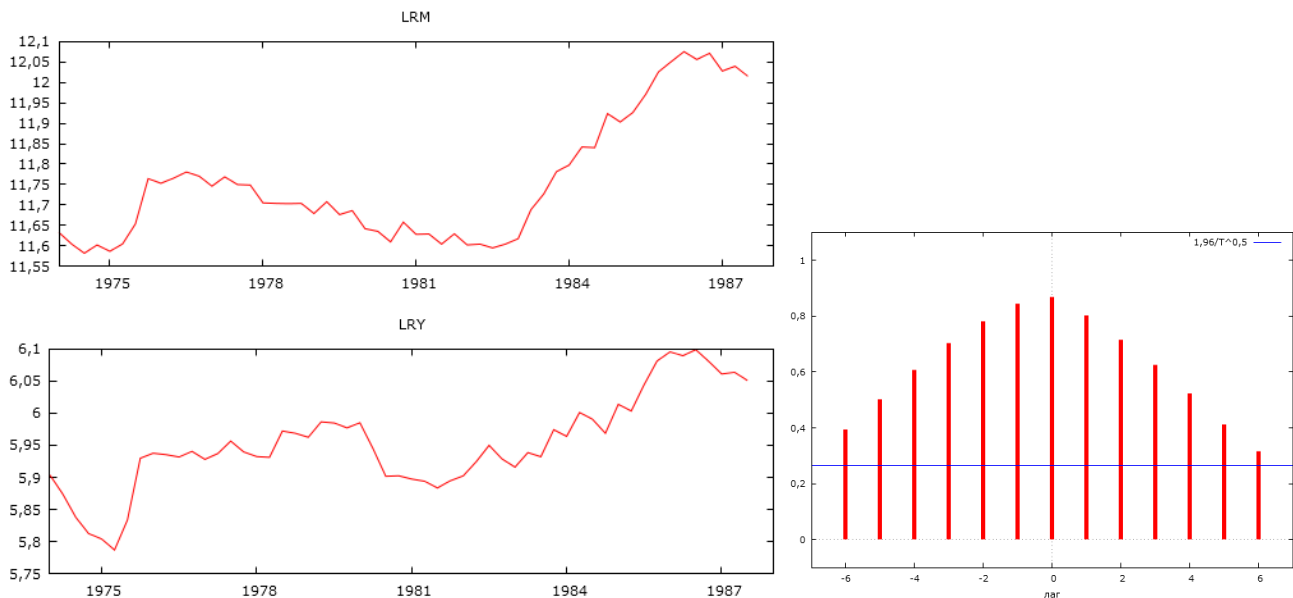
ADL модели	Значимость коэффициентов	Ошибка модели, инф.критерии	Анализ остатков	Общий вывод
ADL(1, 1)				
ADL(2, 3)				
!ADL(2, 2)				
!ADL(1, 2)				
ARMAX				

#### Задача 4. Случай трендстационарного ряда.

Данные: denmark.gdt

Danish macroeconomic data used in Johansen, "Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models", Oxford University Press, 1995.

- 1 LRM log of real money supply, m2
- 2 LRY log of real income



Исследуйте взаимосвязь между денежной массой и доходами на основе ADL-моделей. Предварительно исследуйте стационарность рядов.

Расширенный тест Дики-Фуллера для LRM  
testing down from 10 lags, criterion Крит. Акаике  
объем выборки 52  
нулевая гипотеза единичного корня:  $\alpha = 1$

тест с константой  
включая 2 лага(-ов) для (1-L)LRM  
модель:  $(1-L)y = b_0 + (\alpha-1)y(-1) + \dots + e$   
оценка для  $(\alpha - 1)$ : -0,0382455  
тестовая статистика:  $\tau_{c(1)} = -1,26302$   
асимпт. p-значение 0,6489

с константой и трендом  
включая 10 лага(-ов) для (1-L)LRM  
модель:  $(1-L)y = b_0 + b_1t + (\alpha-1)y(-1) + \dots + e$   
оценка для  $(\alpha - 1)$ : -0,184565  
тестовая статистика:  $\tau_{ct(1)} = -3,15109$   
асимпт. p-значение 0,09455

Расширенный тест Дики-Фуллера для LRY  
testing down from 10 lags, criterion Крит. Акаике  
объем выборки 54  
нулевая гипотеза единичного корня:  $\alpha = 1$

тест с константой  
включая 0 лага(-ов) для (1-L)LRY  
модель:  $(1-L)y = b_0 + (\alpha-1)y(-1) + e$   
оценка для  $(\alpha - 1)$ : -0,0484706  
тестовая статистика:  $\tau_{c(1)} = -1,00236$   
P-значение 0,7463

с константой и трендом  
включая 0 лага(-ов) для (1-L)LRY  
модель:  $(1-L)y = b_0 + b_1t + (\alpha-1)y(-1) + e$   
оценка для  $(\alpha - 1)$ : -0,151292  
тестовая статистика:  $\tau_{ct(1)} = -2,11129$   
P-значение 0,5279

Запишите модель, дайте интерпретацию полученным результатам.

### Домашняя работа (ТДЗ) 16. ADL (самоконтроль, сдавать не надо).

1. Даны  $x_t$  и  $y_t$ .

t	$Y_t$	$X_t$
1	2	8
2	7	10
3	4	7
4	5	12
5	3	5

1.1. Рассчитайте по формулам значения кросскорреляционной функции для лагов -1, -2, 0, 1, 2.( для одного лага приведите подробные вычисления)

1.2. Схематично постройте график кросскорреляционной функции и дайте интерпретацию.

2. На основе ADL моделей исследуйте взаимосвязь между температурой воздуха и потреблением электричества. Обоснуйте выбор моделей.

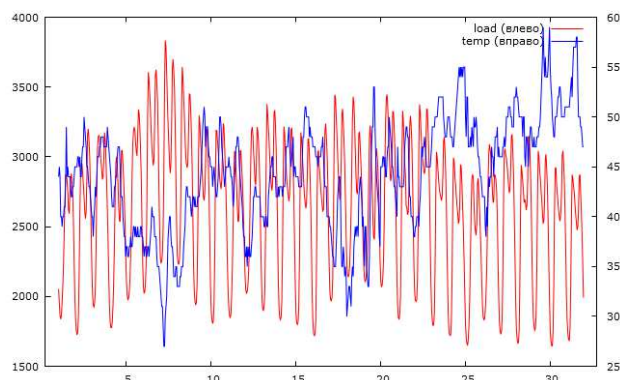
**Исходные данные: DATA10-2 (Gretl):**

Hourly load and temperature data for an electric company in the Northwest region of the U.S. for the period Jan 1, 1992 -Jan 31, 1992.

day\_hour = Day and hour, Range 1.01 - 31.24.

load = Electricity usage in megawatts, Range 1646 - 3833.

temp = Temperature in Farenheit, Range 27 - 59.



2.1. Проверьте ряды на стационарность (Опишите результаты) при  $\alpha=0,12$ .

2.2. Оцените несколько ADL/ARMAX моделей (3 модели), предварительно построив коррелограммы, кросскорреляционную функцию и сделав предположение о порядке ADL(p,q). Сравните и опишите полученные модели, исследуйте остатки, выберите наилучшую модель в виде сводной таблицы.

ADL модели	Значимость коэффициентов	Ошибка модели, инф.критерии	Анализ остатков	Общий вывод

2.3. Дайте интерпретацию (долгосрочный эффект) одной из моделей.

- Напишите решение задач (скан рукописного варианта) и краткий отчет с выводами и полученными графиками, где это необходимо. Допускается сдача работы в группе по 2 человека (не забывайте указывать авторов).
- Выполненная домашняя работа загружается в LMS. Срок выполнения – 1 неделя.
- Оценка: зачет/незачет.