

Семинар 17-18. Модель векторной авторегрессии (VAR)

План занятия

1. Стационарность VAR-модели.
2. Проверка значимости временного лага в VAR-модели.
3. Причинность по Грейнджеру.
4. Функция импульсного отклика и разложение дисперсии: сущность и интерпретация.
5. VAR для случая трех переменных
6. VAR в случае экзогенных переменных.

Задача 1. Стационарность VAR-модели. Записать VAR(p) в матричной форме с помощью лагового многочлена. Проверить, стационарна ли VAR(p). В случае стационарности, вычислить математическое ожидание рядов.

$$\begin{aligned} 1. \begin{cases} y_t = 4 + 0,5y_{t-1} - 0,1x_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ x_t = 2 - 0,1y_{t-1} + 0,5x_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} y_{1t} = 1 + 0,6y_{1,t-1} - 0,3y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = 3 - 0,2y_{1,t-1} + 0,1y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases} \\ 2. \begin{cases} y_t = 1 - 0,7y_{t-1} - 0,1x_{t-1} - 0,2y_{t-2} - 0,3x_{t-2} + \varepsilon_{1t} \\ x_t = 2 - 0,1y_{t-1} - 0,7x_{t-1} - 0,3y_{t-2} - 0,2x_{t-2} + \varepsilon_{2t} \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 2. Причинность по Гренджеру.

2.1. Установление причинно-следственной связи «безработица (y_t)-инфляция (x_t)».

Для модели VAR(1) $x_t = \alpha_1 + \beta_{11}x_{t-1} + \beta_{12}y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$

$$y_t = \alpha_2 + \beta_{21}x_{t-1} + \beta_{22}y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \text{WN}$$

были получены следующие результаты F-теста.

Для уравнения безработицы:

F-тесты

Все лаги для d_bezrab	F(1, 115) = 0,68370 [0,4100]
Все лаги для d_inflacia	F(1, 115) = 6,9966 [0,0093]

Для уравнения инфляции:

F-тесты .

Все лаги для d_bezrab	F(1, 115) = 73,505 [0,0000]
Все лаги для d_inflacia	F(1, 115) = 1,2255 [0,2706]

Сформулируйте нулевые гипотезы для установления причинности по Гренджеру. Какой вывод можно сделать?

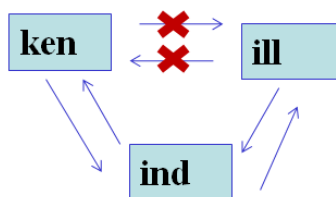
2.2. Установление причинно-следственной связи «безработица в разных штатах США».

Для модели VAR(1)-модели были получены следующие результаты F-теста.

Уравнение 1: illinois	Все лаги для illinois F(1, 307) = 1804,0 [0,0000] Все лаги для indiana F(1, 307) = 42,451 [0,0000] Все лаги для kentucky F(1, 307) = 0,075896 [0,7831]
Уравнение 2: indiana	Все лаги для illinois F(1, 307) = 3,7189 [0,0547] Все лаги для indiana F(1, 307) = 7941,5 [0,0000] Все лаги для kentucky F(1, 307) = 5,7580 [0,0170]

Уравнение 3: kentucky	Все лаги для illinois	$F(1, 307) = 0,11381 [0,7361]$
	Все лаги для indiana	$F(1, 307) = 26,857 [0,0000]$
	Все лаги для kentucky	$F(1, 307) = 3313,6 [0,0000]$

Установите причинно-следственные связи, ответ поясните схемой.



2.3. На основе схемы, сделайте вывод об эндогенности/экзогенности переменных.

	ken	эндогенность/экзогенность?
	ill	эндогенность/экзогенность?
	ind	эндогенность/экзогенность?

Задача 3. Значимость лага VAR-модели

Для определения порядка временного лага в VAR-модели были рассчитаны информационные критерии для различных порядков p .

lags	loglik	AIC	BIC	HQC
1	-154,47442	2,790859	2,934073	2,848989
2	-125,90937	2,363641	2,602331	2,460524
3	-120,55020	2,340004	2,674169	2,475640
4	-117,57900	2,357896	2,787537	2,532285

Какой лаг является оптимальным? Ответ обоснуйте.

Задача 4. Функция импульсного отклика (impulse responses – IRF)

y_{1t} – дефлятор ВВП, y_{2t} – темп роста денежной массы.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim WN \quad Y_t = B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

единичный шок в y_{1t} : $y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и единичный шок в y_{2t} : $y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Запишите модель в виде системы уравнений.
2. Рассчитайте IRF для y_{1t} и y_{2t} при $t=1,2$ – эффект на единичный шок в y_{1t} и y_{2t} в момент времени $t=0$.
3. Заполните таблицу

Ед. шок в y_{1t}	t=1	t=2		Ед. шок в y_{2t}	t=1	t=2
IRF для y_{1t}				IRF для y_{1t}		
IRF для y_{2t}				IRF для y_{2t}		

Постройте график. Проинтерпретируйте результат.

Задача 5. Прогноз. Рассчитать прогноз на 1,2 шага, ошибку прогноза и дисперсию ошибки.

$$Y_t = B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim WN$$

Задача 6. Оценивание VAR-модели

Исходные данные DATA6-3: United Kingdom Annual data.

Данные: годовые данные в период с 1948 по 1989

year	время T=1,...,120
Cons	Per capita consumption expenditure in British pounds
DI	Per capita personal disposable income in British pounds

Source: Economic Trends, Annual Supplement 1991 Edition.

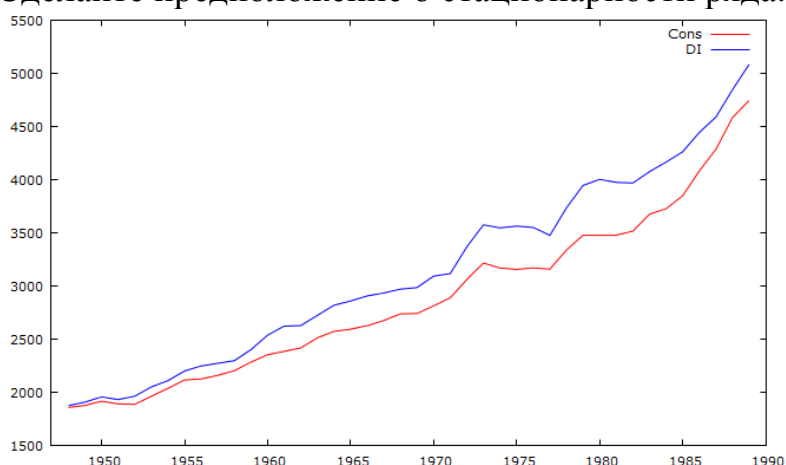
A publication of the Government Statistical Service, London, UK.

Этапы построения VAR-модели.

1. Анализ стационарности процессов.
2. Выбор лага p.
3. Анализ взаимосвязей рядов, эндогенность/экзогенность рядов (причинность по Грейнджеру).
4. Оценка VAR-модели и ее адекватности.
5. Интерпретация результатов: (IRF и разложение дисперсии).

1. Откройте файл с данными: **VAR1.gdt**.

2. Постройте графики Cons и DI и опишите поведение исследуемых рядов. Сделайте предположение о стационарности ряда.



3. **Стационарность и порядок интегрируемости рядов.** Какие предпосылки о стационарности рядов должны выполняться в VAR-модели? Используя тест Дики-Фуллера, проверьте стационарность рядов Cons и DI. Какая гипотеза проверяется? Чему равна DF-статистика?

Процесс	DF-статистика	Порядок интеграции	Вывод:
Cons	В уровнях В разностях		
DI	В уровнях В разностях		

Односторонние критические значения статистики Дики-Фуллера (Магнус)

$$y_t = b_1 y_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad (11.48)$$

$$y_t = a_2 + b_2 y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \quad (11.49)$$

$$y_t = a_2 + b_3 y_{t-1} + c_3 t + \varepsilon_{3t} \quad (11.50)$$

	Доверительный уровень			
	25	50	100	∞
AR модель (11.48)				
0.010	-2.66	-2.62	-2.60	-2.58
0.025	-2.26	-2.25	-2.24	-2.23
0.050	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95
AR модель с константой (11.49)				
0.010	-3.75	-3.58	-3.51	-3.43
0.025	-3.33	-3.22	-3.17	-3.12
0.050	-3.00	-2.93	-2.89	-2.86
AR модель с константой и трендом (11.50)				
0.010	-4.38	-4.15	-4.04	-3.96
0.025	-3.95	-3.80	-3.69	-3.66
0.050	-3.60	-3.50	-3.45	-3.41

Источник: (Fuller, 1976).

4. **Значимость лага VAR-модели.** Для зависимости «Cons - DI» на основании информационных критериев определите оптимальное значение лага в VAR-модели.

lags	loglik	p(LR)	AIC	BIC	HQC
1	-372,17669		21,610097	21,876728*	21,702138*
2	-368,17615	0,09154	21,610066	22,054451	21,763467
3	-367,23486	0,75735	21,784849	22,406989	21,999612
4	-360,54880	0,00959	21,631360	22,431253	21,907483
5	-353,41776	0,00650	21,452444	22,430091	21,789927
6	-349,38748	0,08938	21,450713*	22,606115	21,849558

Дайте интерпретацию полученным результатам.

5. **Модель 1.** Постройте VAR(1) зависимости «Cons - DI». Сколько лагов входит в VAR(1)? Опишите модель.

Уравнение 1: d_Conс

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
const	44,2458	13,0352	3,394	0,0017	***
d_Conс_1	1,22703	0,259146	4,735	3,19e-05	***
d_DI_1	-0,756293	0,238622	-3,169	0,0031	***
Среднее зав. перемен	71,67500	Ст. откл. зав. перемен	75,96537		
Сумма кв. остатков	131787,0	Ст. ошибка модели	59,68091		
R-квадрат	0,414433	Испр. R-квадрат	0,382781		
F(2, 37)	13,09330	P-значение (F)	0,000050		
Параметр rho	-0,143959	Стат. Дарбина-Вотсона	2,258569		

Уравнение 2: d_DI

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
const	42,9852	15,2266	2,823	0,0076	***
d_Conс_1	1,14754	0,302711	3,791	0,0005	***
d_DI_1	-0,562790	0,278737	-2,019	0,0508	*
Среднее зав. перемен	79,37500	Ст. откл. зав. перемен	85,14563		
Сумма кв. остатков	179821,6	Ст. ошибка модели	69,71400		
R-квадрат	0,364007	Испр. R-квадрат	0,329629		
F(2, 37)	10,58837	P-значение (F)	0,000231		
Параметр rho	-0,126323	Стат. Дарбина-Вотсона	2,252562		

-Опишите модель и ее статистические свойства. Оцените качество модели.

6. Причинность по Гренджеру. В модели VAR(1) по результатам F-теста сделайте вывод о наличии причинно-следственных связей между исследуемыми процессами.

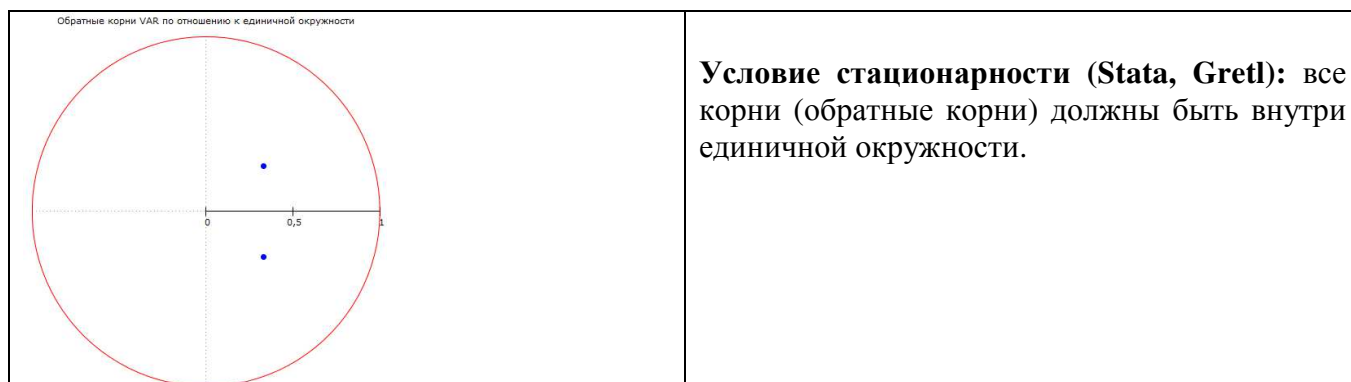
Уравнение 1: d_Conс F-тесты для нулевых ограничений: Все лаги для d_Conс F(1, 37) = 22,419 [0,0000] Все лаги для d_DI F(1, 37) = 10,045 [0,0031]	Уравнение 2: d_DI F-тесты для нулевых ограничений: Все лаги для d_Conс F(1, 37) = 14,371 [0,0005] Все лаги для d_DI F(1, 37) = 4,0767 [0,0508]
---	---

7. Адекватность модели.

Проверьте **адекватность** модели:

- стационарность модели,
- остатки на автокорреляцию,
- нормальность остатков.

7.1. Стационарность модели



Уравнение 1:

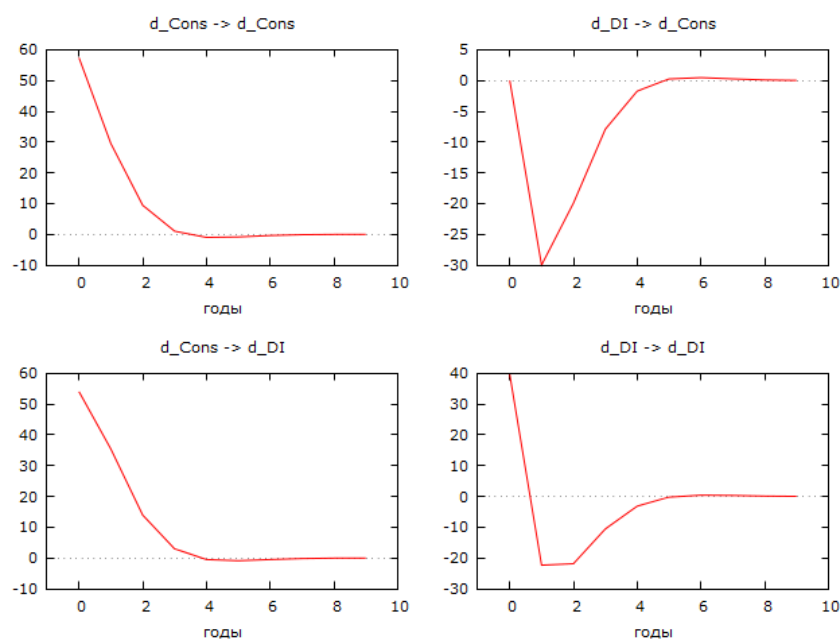
Ljung-Box $Q' = 9,1137$ p-значение = $P(\text{Хи-квадрат}(10) > 9,1137) = 0,521$

Уравнение 2:

Ljung-Box $Q' = 17,6649$ p-значение = $P(\text{Хи-квадрат}(10) > 17,6649) = 0,0609$

8. Интерпретация модели. Дайте интерпретацию модели, используя **IRF** и **VD**.

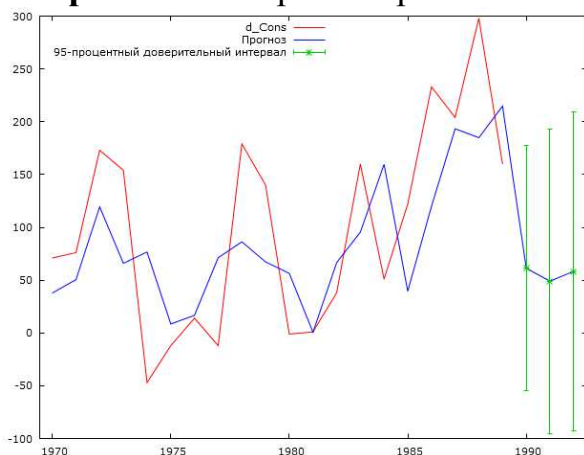
- Функция импульсного отклика (impulse responses - IRF)
- Разложение дисперсии (variance decompositions - VD)



Разложение дисперсии для d_Cons				Разложение дисперсии для d_DI			
Период	Ст. ошибка	d_Cons	d_DI	Период	Ст. ошибка	d_Cons	d_DI
1	57,3993	100,0000	0,0000	1	67,0488	65,0185	34,9815
2	71,1822	82,2476	17,7524	2	79,0552	66,8673	33,1327
3	74,5183	76,6546	23,3454	3	83,1995	63,1849	36,8151
4	74,9446	75,8042	24,1958	4	83,9201	62,2309	37,7691
5	74,9709	75,7683	24,2317	5	83,9802	62,1452	37,8548
6	74,976	75,7704	24,2296	6	83,9849	62,1488	37,8512
7	74,9785	75,7680	24,2320	7	83,9873	62,1485	37,8515
8	74,9791	75,7670	24,2330	8	83,988	62,1478	37,8522
9	74,9792	75,7669	24,2331	9	83,9881	62,1476	37,8524
10	74,9792	75,7669	24,2331	10	83,9882	62,1476	37,8524

Дисперсия (прироста потребления) объясняется в среднем собственными шоками на ____% и шоками доходов на ____%.

9. Прогноз. Постройте прогноз на 3 года вперед.



Модель 2. Добавьте в модель **VAR(1)** дополнительный лаг (**VAR(2)**), оцените модель и сравните с моделью 1.

Опишите и сравните построенные модели. Выберите наилучшую. Ответ обоснуйте. Проинтерпретируйте результаты.

модели	Стационарность	Инф.критерии	Анализ остатков	Наилучшая модель
1.				
2.				

Если остатки автокоррелированы, необходимо включить дополнительные лаги.

Задача 7. Оценивание VAR-модели (многомерный случай)

Файл:

urates.gdt

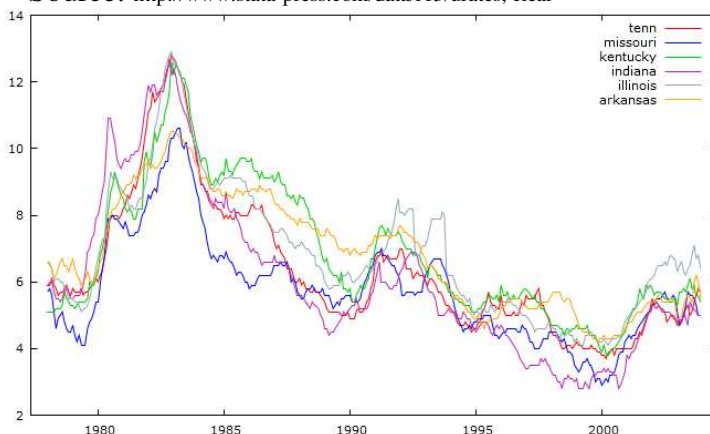


urates.dta

Данные: ежемесячные данные по уровню безработицы в разных штатах США в период с янв 1978 по дек 2003

We have data on monthly unemployment rates in Indiana, Illinois, Kentucky, and Missouri from January 1978 through December 2003. We suspect that factor mobility will keep the unemployment rates in equilibrium.

Source: <http://www.stata-press.com/data/r13/urates, clear>



Оцените VAR-модель для трех переменных.

Этапы построения VAR-модели.

1. Анализ стационарности процессов.
2. Выбор лага p .
3. Причинность по Грейнджеру: анализ взаимосвязей рядов, эндогенность/экзогенность рядов.
4. Оценка VAR-модели и ее адекватности.
5. Интерпретация результатов: (IRF и разложение дисперсии).
6. Построение прогноза.

Опишите и сравните построенные модели. Выберите наилучшую. Ответ обоснуйте.

модели	Стационарность	Инф.критерии	Анализ остатков	Наилучшая модель
1.				
2.				

Проинтерпретируйте результаты.

7.1. Модель 1. Как связаны уровень безработицы в tenn, kentucky, missouri?

7.2. Модель 2. Случай экзогенной переменной. Как связаны уровень безработицы tenn kentucky arkansas?

7.3. Модель 3. Исследуйте взаимосвязи безработицы в произвольных трех штатах.

Домашнее задание (ТДЗ) 17-18. Модель векторной авторегрессии (VAR)

1. Дана VAR

$$\begin{cases} y_{1t} = 1 + 0,6y_{1,t-1} - 0,2y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = 3 - 0,1y_{1,t-1} + 0,4y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t} \end{cases}$$

1.1. Запишите VAR(1) в матричной форме с помощью лагового многочлена. Проверить, стационарна ли VAR(1). В случае стационарности, вычислите математическое ожидание рядов. Приведите подробные вычисления.

1.2. Рассчитайте (по формулам) IRF для y_{1t} и y_{2t} при $t=1,2$ - эффект на единичный шок в y_{1t} и y_{2t} в момент времени $t=0$. Схематично постройте график и проинтерпретируйте результат.

2. Файл:

Файл:



urates.gdt



urates.dta

Данные: ежемесячные данные по уровню безработицы в разных штатах США

!Можно взять свои данные

2.1. Выберите три штата. Постройте график ряда и опишите исходные данные.

2.2. Оцените VAR-модель, используя алгоритм:

1. Анализ стационарности процессов, в случае необходимости перейти к первым разностям.

2. Выбор лага p .
3. Причинность по Грейнджеру. В случае экзогенности переменной, добавьте в модель переменную как экзогенную.
4. Оценка VAR-модели и ее адекватности.
5. Интерпретация результатов: (IRF и разложение дисперсии).
6. Прогноз на 6 шагов вперед.

- Напишите решение задач (скан рукописного варианта по необходимости) и краткий отчет с выводами и полученными графиками, где это необходимо. Допускается сдача работы в группе по 2 человека (не забывайте указывать авторов).
- Выполненная домашняя работа загружается в LMS. Срок выполнения – 1 неделя.