



3.3. Методология Бокса-Дженкинса



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Методология Бокса-Дженкинса

1. Идентификация модели
2. Оценивание
3. Тестирование и диагностика
4. Прогнозирование.



George Edward Pelham Box (18 October 1919 – 28 March 2013)

- Бокс и Дженкинс применили данную методологию ко всем временным рядам (финансовым, так и к микроэкономическим) в 70-е, как к.
- Было установлено, что практически все экономические процессы описываются моделями **ARIMA** с параметрами **p** и **q** не превышающими 2.
- Точность прогнозирования по моделям **ARIMA** оказалась выше.

Gwilym Meirion Jenkins (1933 – 10 July 1982)
was a Welsh statistician

Этап 1. Идентификация модели

1. Определить: является ли ряд стационарным.
2. Если ряд не является стационарным, необходимо установить *порядок интегрируемости d* , добиться стационарности ряда, взяв достаточное количество последовательных разностей (либо выделить детерминированный тренд для ряда).
3. Определение общих характеристик модели: ACF и PACF, на основе которых определяются параметры **p** и **q** модели **ARIMA(p, d, q)**.

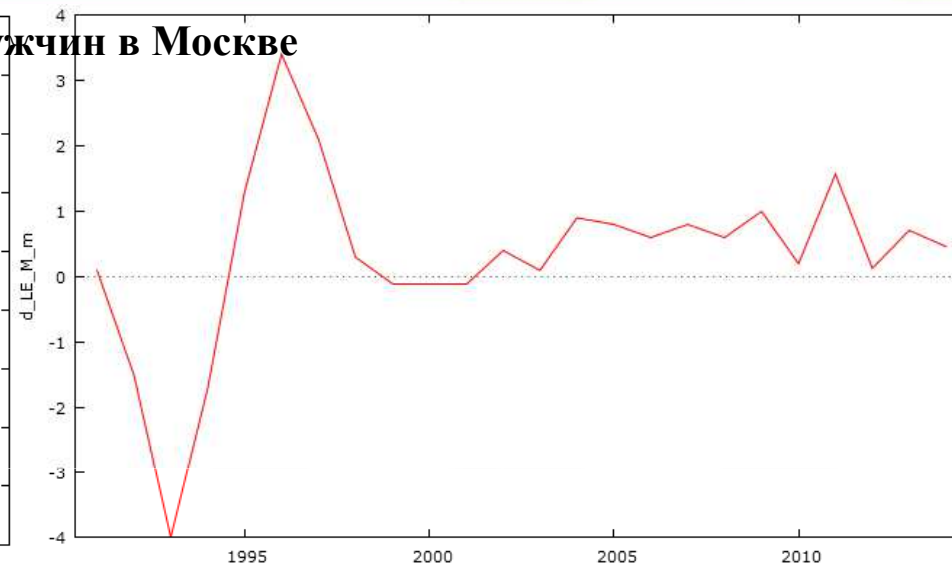
Замечание. При равных условиях всегда следует отдавать предпочтение более простой модели.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ARIMA: Идентификация модели

Ожидаемая продолжительность жизни мужчин в Москве



Исходный ряд

нулевая гипотеза единичного корня: $a = 1$
тест с константой
модель: $(1-L)y = b_0 + (a-1)y(-1) + \dots + e$
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e : -0,397
лаг для разностей: $F(3, 16) = 13,295 [0,0001]$
оценка для $(a - 1)$: 0,0165501
тестовая статистика: $\tau_{a_c}(1) = 0,38765$
асимпт. p-значение 0,9825

Первая разность

$d=?$

нулевая гипотеза единичного корня: $a = 1$
тест с константой
модель: $(1-L)y = b_0 + (a-1)y(-1) + \dots + e$
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e : -0,412
оценка для $(a - 1)$: -0,689064
тестовая статистика: $\tau_{a_c}(1) = -4,00376$
асимпт. p-значение 0,001393

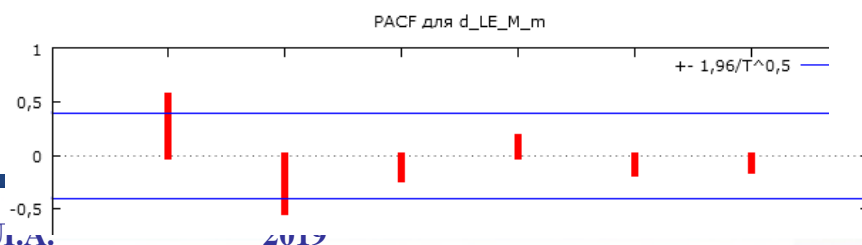
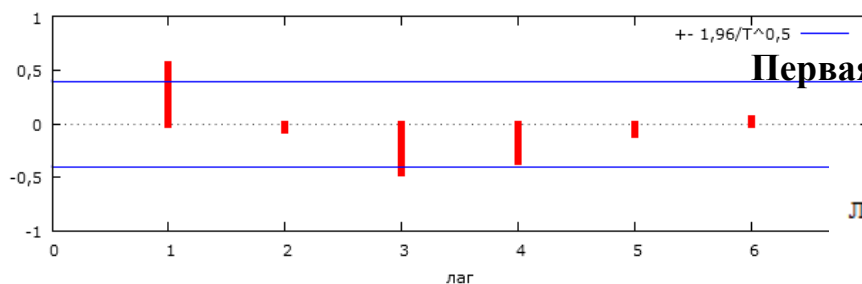
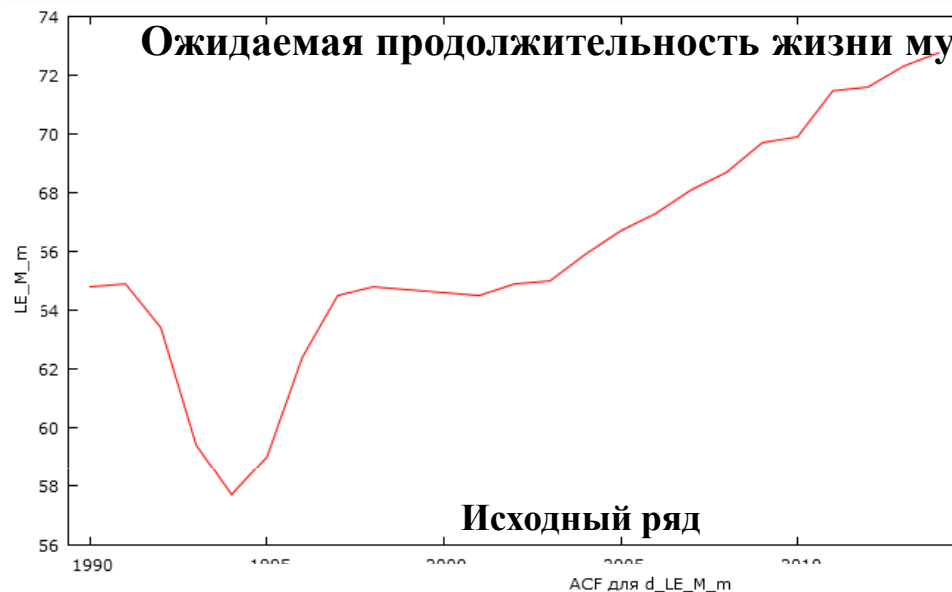
с константой и трендом
модель: $(1-L)y = b_0 + b_1*t + (a-1)y(-1) + \dots + e$
коэф. автокорреляции 1-го порядка для e : -0,412
оценка для $(a - 1)$: -0,753258
тестовая статистика: $\tau_{a_{ct}}(1) = -4,03014$
асимпт. p-значение 0,007887



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ARIMA: Идентификация модели

Ожидаемая продолжительность жизни мужчин в Москве



ARIMA(p=?, d=1, q=?)

Автокорреляционная функция для d_LE_M_m

Лег	ACF		PACF		Q-стат.	[p-значение]
1	0,5525	***	0,5525	***	8,2830	[0,004]
2	-0,0605		-0,5266	***	8,3869	[0,015]
3	-0,4525	**	-0,2200		14,4703	[0,002]
4	-0,3493	*	0,1692		18,2779	[0,001]
5	-0,1012		-0,1647		18,6143	[0,002]
6	0,0406		-0,1449		18,6713	[0,005]

Этап 2. Оценивание коэффициентов модели

$$\text{AR}(p) \quad y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

1. МНК.

ε_t — белый шум, то корреляция регрессоров со случайным возмущением отсутствует.

- Если ε_t - *гауссовский*, то y_t распределены нормально, а МНК оценки коэффициентов - *состоятельны и асимптотически нормальны*.

2. ММП $\text{AR}(1) \quad y_t = c + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$

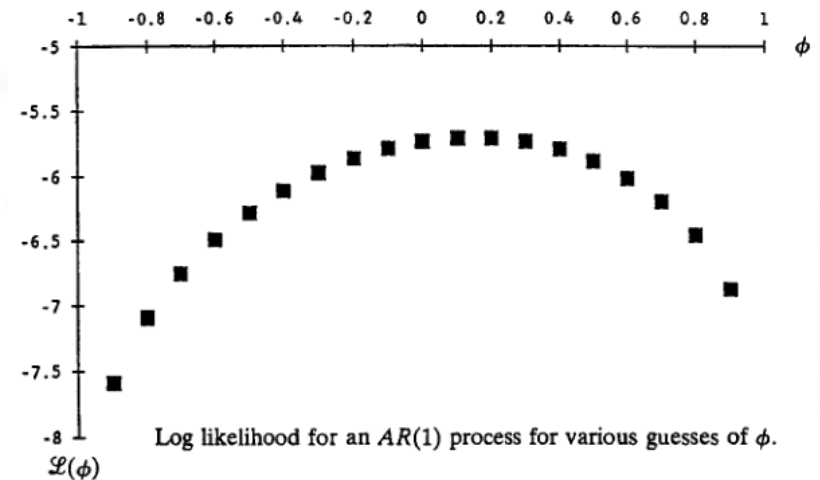
- в-р неизвестных параметров:

$$\theta = \theta(c, \alpha, \sigma^2) = \theta(0, \alpha, 1)$$

- Задаем $\alpha = -0.9$ до 0.9

- Вычисляем $L(\theta) =$

- Выбираем $\max L(\theta)$



процедура нелинейной оптимизации: grid search

Этап 2. Оценивание коэффициентов модели

2. ММП $AR(1)$ $y_t = c + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$

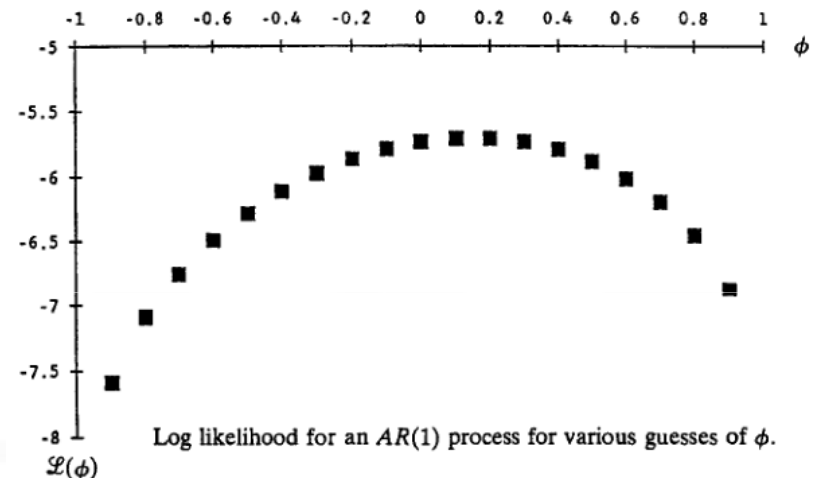
- в-р неизвестных параметров: $\theta = \theta(c, \alpha, \sigma^2) = \theta(0, \alpha, 1)$
- Задаем $\alpha = -0.9$ до 0.9
- Вычисляем $L(\theta) =$
- Выбираем $\max L(\theta)$

Задание. Дано

$y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5$

0,8 0,2 -1,2 -0,4 0

- Запишите ф.правдоподобия для определения θ
- Изменяя $\alpha = -0.9$ до 0.9 (шаг 0.1), определите $\max L(\theta)$





Этап 2. Оценивание коэффициентов модели

Процедуры **численной оптимизации** позволяют найти оценки ММП, обладающие свойствами состоятельности и асимптотической нормальности.

- Поиск на сетке (grid search)
- метод наискорейшего подъема (steepest ascent)
- Метод Newton-Raphson
- Метод Davidon-Fletcher-Powell

(См. Hamilton (1994), Chapter 5.8)

Этап 2. Оценивание коэффициентов модели

МА(q): применение МНК затруднительно из-за ненаблюдаемости $\varepsilon_e \rightarrow$

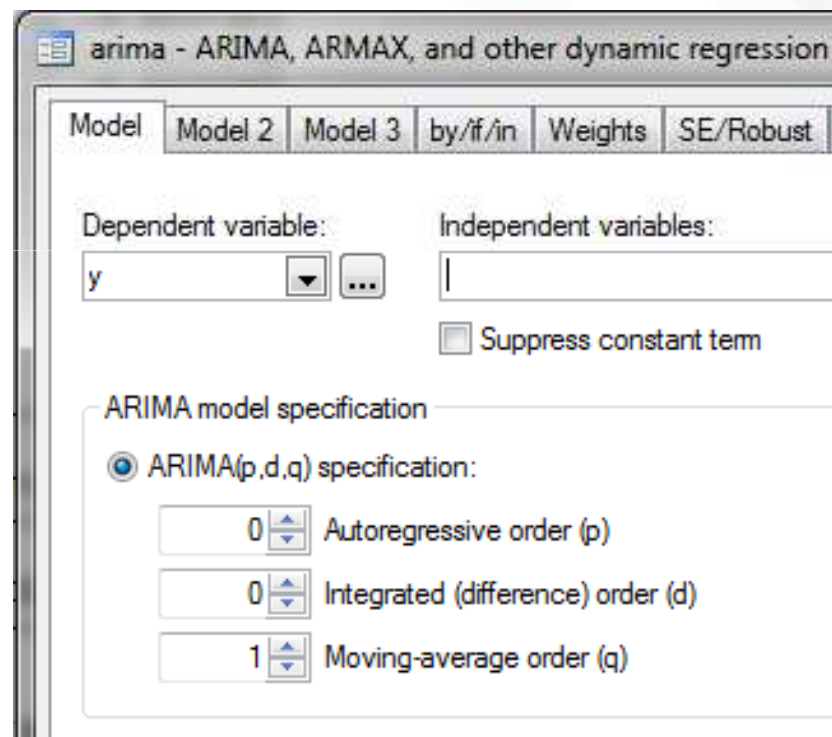
1. Использование метода максимального правдоподобия
2. Использование процедур нелинейной оптимизации

$ARMA(p,q)$

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

ARIMA

(p d q)
↑ ↑ ↑
AR I MA





Этап 3. Тестирование и диагностика модели

- Выполнение предпосылок ARMA моделей:
 1. Проверка стационарности и обратимости ARMA модели.
 2. Проверка гипотез о значимости коэффициентов модели.
- Диагностика остатков модели:
 - некоррелированность** остатков (первоначальное предположение, что случайное возмущение является белым шумом)
 - нормальность** остатков
- Качество модели → **информационные критерии AIC и BIC**

информационные критерии отбора моделей

Информационный критерий Акаике (AIC) для ARMA(p,q) [Akaike (1973)].

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2(p+q)}{T}$$

Информационный критерий Шварца (BIC) для ARMA(p,q) [Schwarz (1978)]:

$$BIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \ln T \frac{(p+q)}{T}$$

$\ln \hat{\sigma}^2$ - логарифм остаточной дисперсии, T – число наблюдений

! Лучшая модель соответствует минимальным значениям критериев Акаике и Шварца.

SBIC - Schwarz's Bayesian information criterion, AIC - Akaike's information criterion

estat ic

Model	obs	ll(null)	ll(model)	df	AIC	BIC
.	74	-695.7129	-685.0518	5	1380.104	1391.624



Диагностика модели

информационные критерии отбора моделей

критерий Хеннана – Куинна [Hannan, Quinn (1979)]

$$HQIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2 \ln(\ln T)}{T} (p + q)$$



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Некоррелированность остатков

- Q-статистика Бокса – Пирса, Льюнга – Бокса
- Анализ автокорреляции на основании ACF, PACF (выявление у процесса свойств белого шума)
- Статистика Дарбина-Уотсона
 - недостатки теста
- Тест Бройша-Годфри

Тест Бройша-Годфри

Тест Бройша-Годфри (*Breusch-Godfrey*) (тест множителей Лагранжа)

$$H_0: \rho_1 = \dots = \rho_m = 0$$

$$e_t = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i y_{t-i} + \sum_{s=1}^m \rho_s e_{t-s} + \varepsilon_t \quad (*)$$

где e_i - остатки, полученные при оценивании основной модели наблюдений.

$$LM = nR^2 \sim \chi^2(m)$$

где n – количество наблюдений, R^2 для (*)

```
. estat bgodfrey
```

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
1	9.600	1	0.0019

H0: no serial correlation

```
. . estat bgodfrey, lags(5)
```

Breusch-Godfrey LM test for autocorrelation

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
5	9.444	5	0.0926

H0: no serial correlation

- Устранение автокорреляции – наращивание лаговой структуры

Свойство нормальности

Тест Хэрке-Бэра (Jarque-Bera test):

$$H_0: S=0, K=3$$

$$H_1: S \neq 0, K \neq 3$$

где S - коэффициент асимметрии (Skewness),
 K - коэффициент эксцесса (Kurtosis)

$$JB = n \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right), \text{ где } S = \frac{\sum e_i^3}{n\hat{\sigma}^3}, K = \frac{\sum e_i^4}{n\hat{\sigma}^4}, \sim \chi^2(2)$$

Jarque, Carlos M.; Bera, Anil K. (1987). "A test for normality of observations and regression residuals". International Statistical Review 55 (2): 163–172.

Тест Шапиро-Уилкса

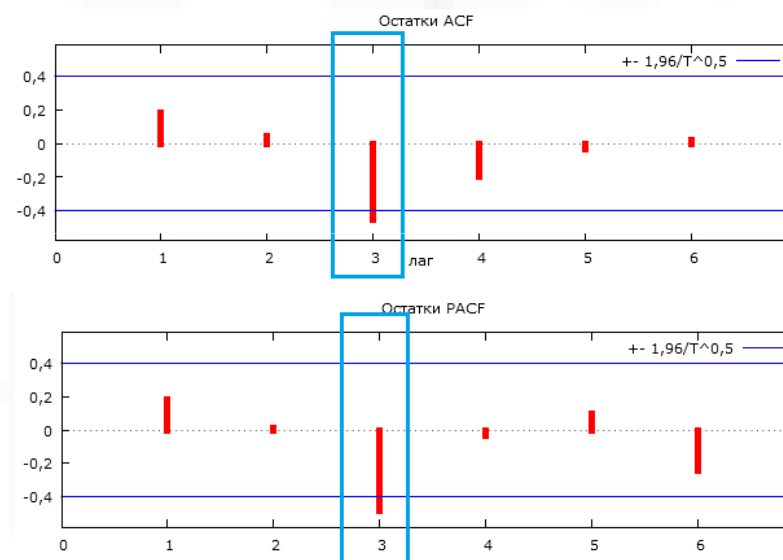
ARIMA: пример оценивания

Ожидаемая продолжительность жизни мужчин в Москве



	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение
const	0,314115	0,345542	0,9090	0,3633
theta_1	0,589906	0,143867	4,100	4,13e-05 ***

Среднее зав. перемен	0,332083	Ст. откл. зав. перемен	1,375260
Среднее инноваций	-0,000356	Ст. откл. инноваций	1,079641
Лог. правдоподобие	-36,10745	Крит. Акаике	78,21490
Крит. Шварца	81,74906	Крит. Хеннана-Куинна	79,15251

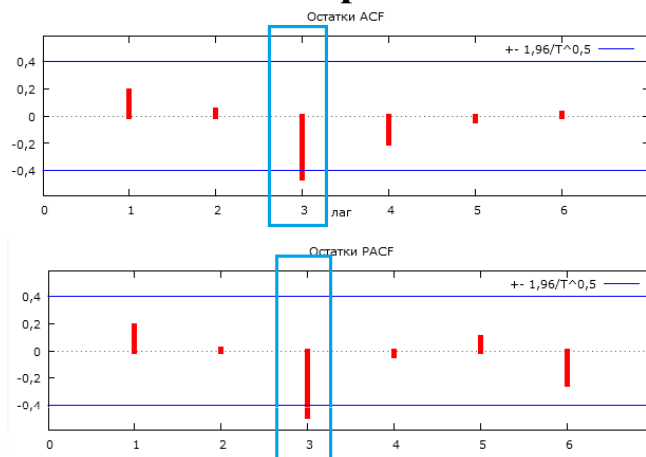


Тест на наличие автокорреляции до порядка 3
 Ljung-Box $Q' = 7,05197$,
 p-значение = $P(\text{Хи-квадрат}(2) > 7,05197) = 0,02942$

Устранение автокорреляции – наращивание лаговой структуры

ARIMA: пример оценивания

Ожидаемая продолжительность жизни мужчин в Москве



Устранение автокорреляции – наращивание лаговой структуры

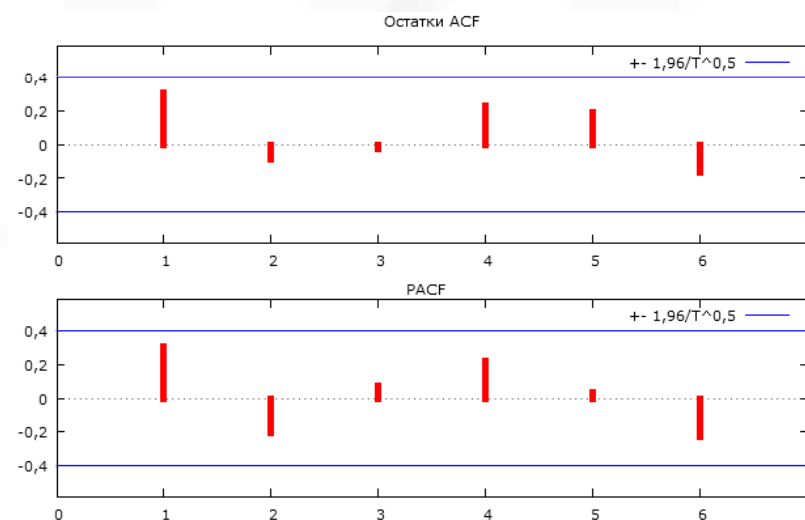
Порядок AR: 3 ☒ или отдельные лаги 13

Разность: 1

Порядок MA: 0 ☐ или отдельные лаги

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
const	0,488032	0,139626	3,495	0,0005	***
phi_1	0,458775	0,116365	3,943	8,06e-05	***
phi_3	-0,674663	0,110950	-6,081	1,20e-09	***

Среднее зав. перемен	0,332083	Ст. откл. зав. перемен	1,375260
Среднее инноваций	-0,161711	Ст. откл. инноваций	0,793458
Лог. правдоподобие	-29,97271	Крит. Акаике	67,94542
Крит. Шварца	72,65764	Крит. Хеннана-Куинна	69,19557



Тест на наличие автокорреляции до порядка 4
Ljung-Box Q' = 4,40567,
p-значение = P(Chi-квадрат(2) > 4,40567) = 0,1105



Этап 4. Прогнозирование

Существует два источника ошибок:

- Неопределенность будущих значений случайной величины ε_t
- Отсутствие точных значений коэффициентов модели
- Значение переменной прогнозируется для некоторого будущего момента времени, при этом лаговые значения переменной можно рассматривать *фиксированными* или *случайными*.
- Первая возможность приводит к условному *прогнозу* (как в модели множественной регрессии), а вторая к *безусловному*.

Из ТВиМС: условная дисперсия СВ не превышает ее безусловную дисперсию → *точность* условного прогноза *выше*.

Этап 4. Прогнозирование



Прогноз y_{T+h}

I_T – информационное множество $I_T = \{y_{-\infty}, y_1, \dots, y_{T-1}, y_T\}$

Критерий выбора прогнозирующей функции:

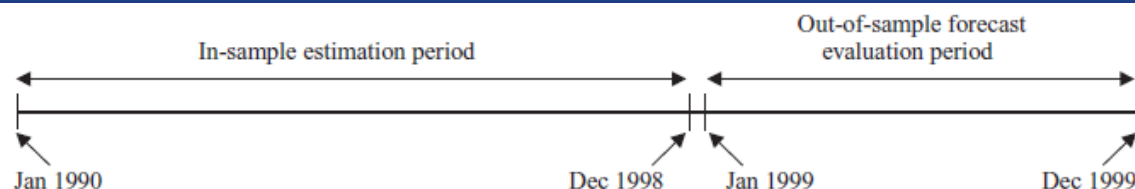
$$E((y_{T+h} - \hat{y}_{T+h})^2 | I_T) \rightarrow \min$$

Наилучший прогноз – при минимальной
среднеквадратической ошибке:

$$E\{y_{T+h} | y_1, \dots, y_T\}$$

Точность прогнозирования:

- ошибка прогноза
- дисперсия ошибки



$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{t+s} - f_{t,s})$$

$$MAA = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_{t+s} - f_{t,s}|$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{t+s} - f_{t,s})^2$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{t+s} - f_{t,s})^2}$$

$$MPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_{t+s} - f_{t,s}}{y_{t+s}} 100\%$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_{t+s} - f_{t,s}}{y_{t+s}} \right| 100\%$$

Table 6.2 Forecast error aggregation

Steps ahead	Forecast	Actual	Squared error	Absolute error
1	0.20	-0.40	$(0.20 - -0.40)^2 = 0.360$	$ 0.20 - -0.40 = 0.600$
2	0.15	0.20	$(0.15 - 0.20)^2 = 0.002$	$ 0.15 - 0.20 = 0.050$
3	0.10	0.10	$(0.10 - 0.10)^2 = 0.000$	$ 0.10 - 0.10 = 0.000$
4	0.06	-0.10	$(0.06 - -0.10)^2 = 0.026$	$ 0.06 - -0.10 = 0.160$
5	0.04	-0.05	$(0.04 - -0.05)^2 = 0.008$	$ 0.04 - -0.05 = 0.090$

Theil's U -statistic (1966)

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{t=T_1}^T \left(\frac{y_{t+s} - f_{t,s}}{y_{t+s}} \right)^2}}{\sqrt{\sum_{t=T_1}^T \left(\frac{y_{t+s} - f_{b,t,s}}{y_{t+s}} \right)^2}}$$

Mean Error (ME),
Mean Squared Error (MSE),
Root Mean Squared Error (RMSE),
Mean Absolute Error (MAE),
Mean Percentage Error (MPE)
Mean Absolute Percentage Error (MAPE).



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Качество прогноза: пример

Ожидаемая продолжительность жизни мужчин в Москве



Статистика для оценки прогноза

Средняя ошибка (ME)	-0,16171
Средняя квадратичная ошибка (MSE)	0,8921
Корень из средней квадратичной ошибки (RMSE)	0,94451
Средняя абсолютная ошибка (MAE)	0,68664
Средняя процентная ошибка (MPE)	-0,28416
Средняя абсолютная процентная ошибка (MAPE)	1,0642
U-статистика Тейла (Theil's U)	0,65651



3.4. Обобщение: ARFIMA дробноинтегрированный процесс



Обобщение: дробноинтегрированный процесс

$$ARIMA(p,d,q) \quad \alpha_p(L)\Delta^d y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \rightarrow d \in \{0,1,2\}$$

$$\alpha_p(L)(1-L)^d y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$

Дробноинтегрированный процесс: d - действительное число.

Пример:

$$(1-L)^d y_t = \varepsilon_t (*)$$

$$d = 0$$

$$d = 1$$

$$(1-L)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-d) \dots (-d-j+1)}{j!} (-L)^j = \sum_{j=0}^{\infty} h_j L^j,$$

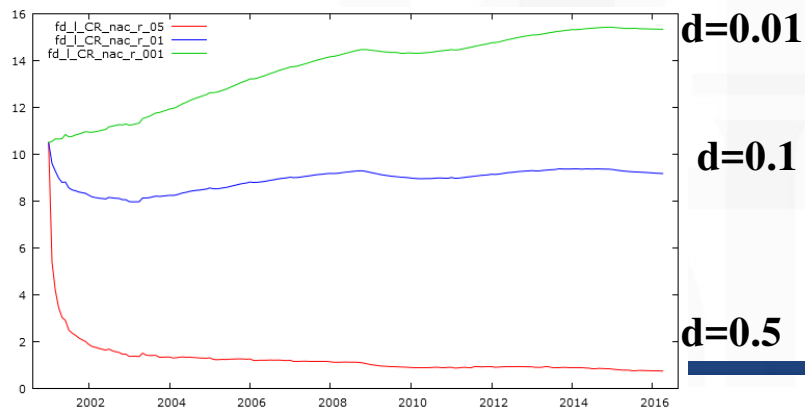
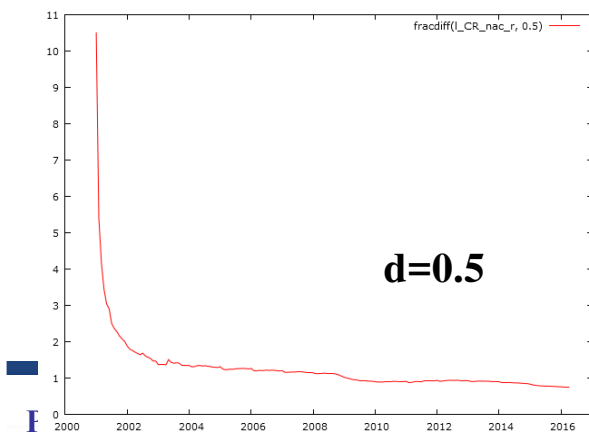
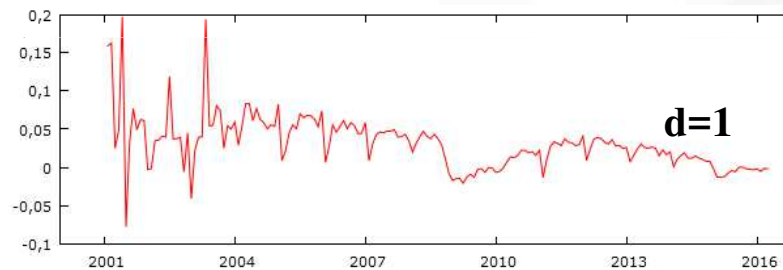
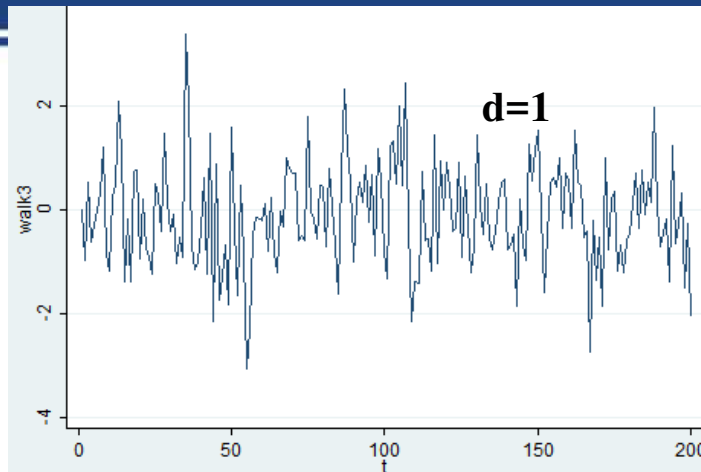
$$h_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \text{ и } \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция Эйлера.}$$

$$d - \text{действ.число} \rightarrow y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon_{t-j} (**)$$

Пример: Каким будет разложение при $d=0.3, 0.5$? (показать)



Разностный оператор: преобразования рядов



Дробноинтегрированный процесс (fractionally-integrated)

ARFIMA: Autoregressive fractionally integrated moving-average models

$$ARFIMA: \alpha_p(L) \Delta^d y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \rightarrow d - \text{действ. число}$$

$$\alpha_p(L)(1-L)^d y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t \quad (1-L)^d y_t = \varepsilon_t \rightarrow y_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \varepsilon_{t-j} (**)$$

Теорема (основные свойства I(d)-процесса), Hosking (1981).

(а) Если $d < 0.5$, то y_t – стационарный процесс;

(б) Если $d > -0.5$, то разложение (**) обратимо.

(в) Если $-0.5 < d < 0.5$, то ковариационная функция y_t : $\gamma_k = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(k+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(k+1-d)} \sigma_\varepsilon^2$

корреляционная функция ведет себя при $k \rightarrow \infty$ как $\rho_k \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} k^{2d-1}$

(г) $d > 0.5$ - процесс нестационарен.

Условия $-0.5 < d < 0.5$ всегда можно добиться, применив необходимое количество обычных дифференцирований.

Стационарный процесс является **процессом с длинной памятью (Long-memory processes)**, если существуют α , c ($0 < \alpha < 1$, $c > 0$) и для ACF выполняется соотношение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho_k}{ck^{-\alpha}} = 1$$

Обнаружение «длинной памяти»

- Тесты Дики–Фуллера и Филипса–Перрона имеют малую мощность, плохо отличают $I(1)$ процессы от $I(d)$ процессов с $d < 1$.
- Тест KPSS, имеющий H_0 о стационарности, состоятелен при стационарных процессах с длинной памятью ($I(d)$ -процессах с $|d| < 0.5$), но необходимо большое количество наблюдений (не менее 1000).
- использование R/S статистики (rescaled range).



Дробноинтегрированный процесс (fractionally-integrated)

ARFIMA: Autoregressive fractionally integrated moving-average models

$$ARFIMA: \alpha_p(L) \Delta^d y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t, \quad d - \text{дейст.число}$$

$$y_t = \underbrace{(1-L)^{-d}}_{\text{long-run effects}} \underbrace{(\alpha_p(L))^{-1} \theta_q(L)}_{\text{short-run effects}} \varepsilon_t$$

1. Оценивание d .
2. Оценивание p и q , полагая $d=0$.

Практическое использование ARFIMA:

Hurst (1951), Hosking (1981) – в гидрологии (разливы Нила)

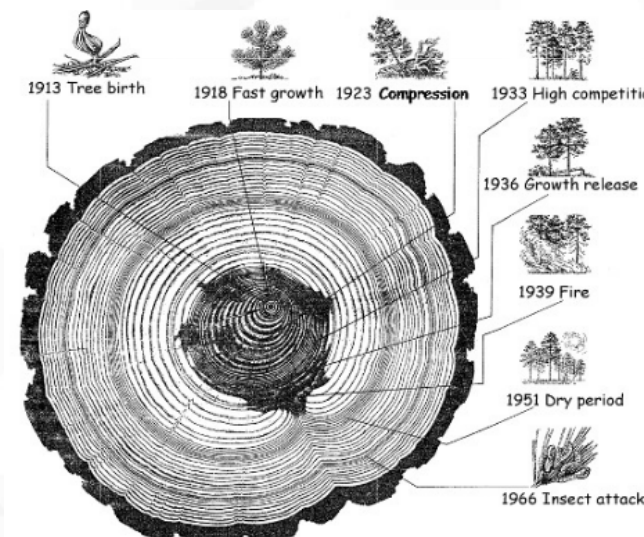
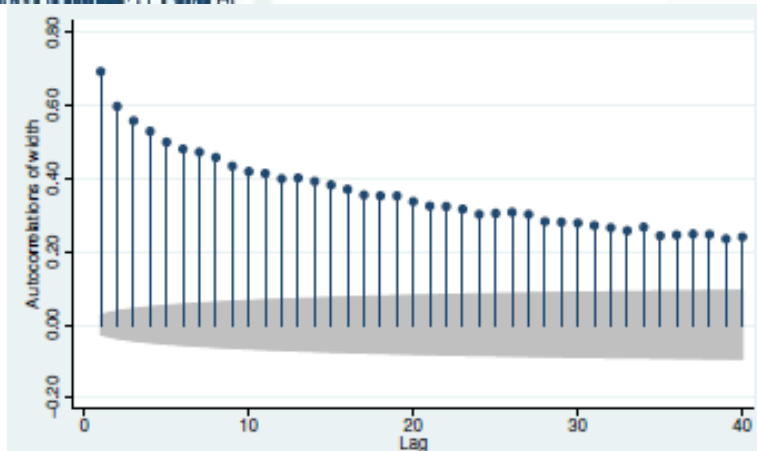
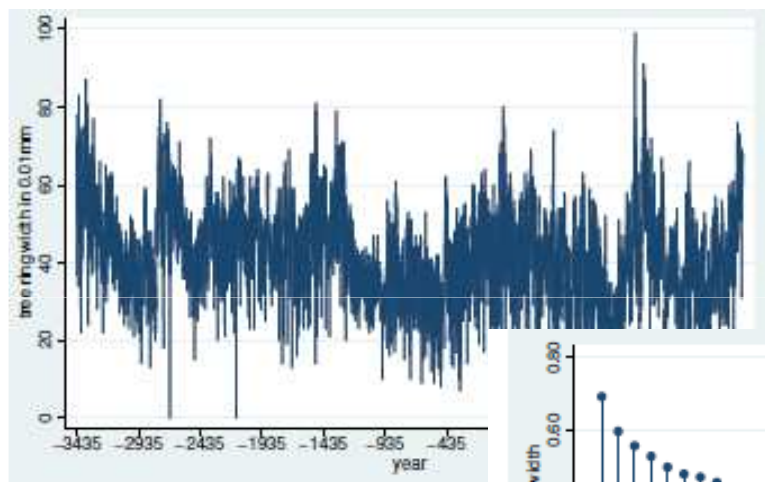
Granger and Joyeux (1980) – в экономике для макроагрегированных данных

Baillie (1996): обзор работ

Дробноинтегрированный процесс: пример

Пример: Mount Campito tree ring data (Stata)

Baillie (1996): measurements of the widths of the annual rings of a Mount Campito Bristlecone pine. Данные: from 3436 BC to 1969 AD.



Granger and Joyeux (1980) показали, что для ARFIMA процесса ACF убывает с более медленной гиперболической скоростью (по сравнению с ARMA)



R/S анализ (Rescaled range statistics)

- Ввел Хёрст (1951): исследования разливов Нила
- Мандельброт (1972) применил к финансовым временным рядам
- **R/S-статистика** – это отношение размаха частичных сумм центрированных значений к стандартному отклонению.
- Рассмотрим ряд y_1, y_2, \dots, y_T
- Делим ряд на несколько интервалов $n=T, n=T/2, n=T/4, n=T/8$ и т.д.
- Рассчитываем и сравниваем частичные суммы

$$\left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{1}{\hat{\sigma}_t} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^t (y_j - \bar{y}) - \min_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^t (y_j - \bar{y}) \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i$$

Hurst H. E. Long term Storage Capacity of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1951. N 116. P. 770–799.

Mandelbrot B. Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: From the Covariance to R/S Analysis // Annals of Economic and Social Measurement. 1972. N 1. P. 259–290;

Показатель Херста

-На основе **R/S-статистики** рассчитывается показатель Херста **H**

$$\frac{R}{S} \approx \frac{\sum_{i=1}^t R_i}{\sum_{i=1}^t S_i} = E\left(\frac{R}{S}\right)_t \approx (cn)^H, n \rightarrow \infty$$

R_n - размах первых n значений ряда

S_n - стандартное отклонение

C - константа

H – показатель Херста

$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_t = \hat{c} + \hat{H} \log \hat{n}$$

$$H = d + 0.5$$

Экспонента Хёрста - мера, используемая для анализа процессов с длинной памятью.

$H > 0.5$ процесс **персистентен** (следующие друг за другом приращения процесса имеют тенденцию **сохранять знак**) и имеют положительную автокорреляцию .

$H = 0.5$ - тенденции не выражено (например, белый шум),

$H < 0.5$ процесс характеризуется **антиперсистентностью** и отрицательной автокорреляцией — любая тенденция стремится смениться противоположной.

Показатель Херста

$$\frac{R}{S} \approx \frac{\sum_{i=1}^t R_i}{\sum_{i=1}^t S_i} = E\left(\frac{R}{S}\right)_t \approx (cn)^H, n \rightarrow \infty$$

$$H=d+0.5$$

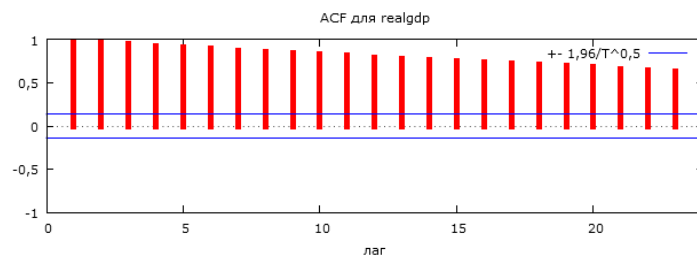
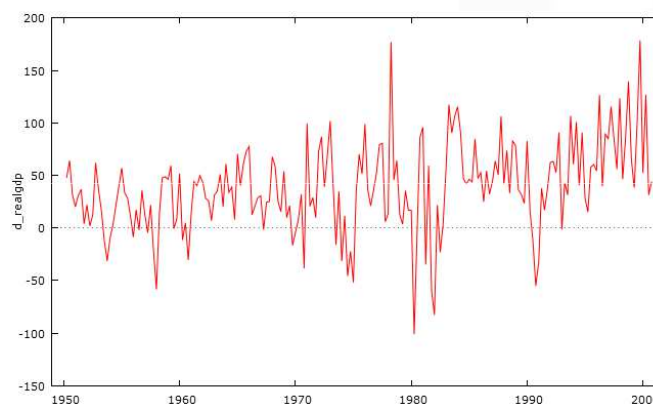
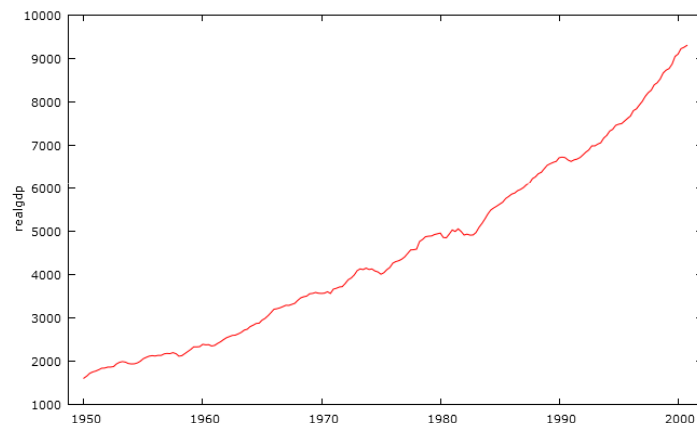
$$\log\left(\frac{R}{S}\right)_t = \hat{c} + \hat{H} \log \hat{n}$$

gretl

Файл Инструменты Данные Вид Добавить

greene5_1.gdt *

№	Название переменной	Описание
0	const	
1	realgdp	Real GDP (\$bil.)



Rescaled range figures for d_realgdp
(логарифмы имеют основание 2)

Размер	RS (avg)	log (Размер)	log (RS)
203	40,056	7,6653	5,3240
101	18,430	6,6582	4,2040
50	11,352	5,6439	3,5048
25	6,5677	4,6439	2,7154
12	4,0570	3,5850	2,0204

Результаты регрессии (n = 5)

	коэфф.	Ст. ошибка
Константа	-0,93040	0,26810
Угл. коэф.	0,79516	0,046066

Оценка модели экспонента Хёрста = 0,795165

$$\left(\frac{R}{S}\right)_t = \frac{1}{\hat{\sigma}_t} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^t (y_j - \bar{y}) - \min_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^t (y_j - \bar{y}) \right)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (y_i - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i$$

Недостатки R/S-статистики - чувствительность к краткосрочным зависимостям и гетероскедастичности.

Э. Ло (1988, 1991) модифицировал статистику, преобразовал σ

$$Q_n = \left(\frac{R}{S}\right)_n = \frac{1}{\hat{\sigma}_n} \left(\max_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}) - \min_{1 \leq j \leq T} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y}) \right)$$

$$\hat{\sigma}_n^2(Q) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q \hat{\phi}_j(q) \gamma_j$$

$$\hat{\phi}_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1}, \quad q < n$$

H_0 : наличие краткосрочной зависимости

H_1 : наличие долгосрочной зависимости

Э. Ло (1988, 1991) вывел таблицу критических значений - интервалы, при попадании в которые статистики, нулевая гипотеза не отвергается.

Критические значения модифицированного R/S теста

1%	(0.721; 2.098)
5%	(0.809; 1.862)
10%	(0.861; 1.747)

Lo A.W. Long Term Memory in Stock Market Prices // Econometrica. 1991. N 59. P. 1279–1313.

ARFIMA: приложения

Таблица 1: ARFIMA-модели для японских цен (переменная p)

AR и MA	$10^3 \times \hat{\sigma}_T^2$	SIC	\hat{d}
–	3,715	–2,4226	0,461
MA(1)	3,700	–2,4169	0,546
AR(1)	3,700	–2,4169	0,531
AR(2)	3,709	–2,4159	0,444
MA(2)	3,710	–2,4158	0,448
AR(1), AR(2)	3,700	–2,4096	0,551

Таблица 3: ARFIMA-модели для обменного курса (переменная e)

AR и MA	$10 \times \hat{\sigma}_T^2$	SIC	\hat{d}
MA(1)	2,384	–0,6078	0,0056
AR(1), MA(1)	2,383	–0,6007	0,0406
AR(1), MA(2)	2,383	–0,6007	–0,0962
MA(1), MA(2)	2,383	–0,6006	0,0306
AR(2), MA(1)	2,383	–0,6006	–0,0413
AR(1)	2,425	–0,6006	–0,0914

Таблица 2: ARFIMA-модели для цен США (переменная p^*)

AR и MA	$10^3 \times \hat{\sigma}_T^2$	SIC	\hat{d}
–	1,995	–2,6926	0,465
MA(1)	1,976	–2,6894	0,382
AR(1)	1,979	–2,6888	0,377
MA(2)	1,980	–2,6885	0,495

Таблица 4: Оптимальные модели

Ряд	Описание	Модель	\hat{d}
p	Японская инфляция	ARFIMA(0, d , 0)	0,461 (0,043)
p^*	Инфляция США	ARFIMA(0, d , 0)	0,465 (0,045)
$p - p^*$	Инфляционный спред Япония–США	AR(2)+FI(d)	0,332 (0,051)
e	Номинальный обменный курс	ARFIMA(0, d , 1)	0,006 (0,055)
$p - e - p^*$	Реальный обменный курс	ARFIMA(0, d , 1)	–0,009 (0,054)



Литература

1. О. Обрезков. Долгосрочная связь временных рядов и паритет покупательной способности.// Квантиль, No2, март 2007 г. – 131-140 сс. <http://quantile.ru/02/02-OO.pdf>
2. П. В. Конюховский, О. А. Подкорытова. «ДЛИННАЯ ПАМЯТЬ» В ОБМЕННЫХ КУРСАХ// Вестник СПбГУ. Сер. 5. 2007. Вып. 3. – 102-108 сс. <http://pi.314159.ru/konjuhovsky1.pdf>
3. Перцовский О.Е. Моделирование валютных рынков на основе процессов с длинной памятью: Препринт WP2/2004/03 — М.: ГУ ВШЭ, 2003. — 52 с. https://www.hse.ru/data/2010/05/04/1216407546/WP2_2004_03.pdf
4. Baillie, R.T., 1996, Long memory processes and fractional integration in econometrics, Journal of Econometrics, 73(1), 1996, 5-59. <http://www.long-memory.com/volatility/Baillie1996.pdf>
5. Jason Voss, CFA. Rescaled Range Analysis: A Method for Detecting Persistence, Randomness, or Mean Reversion in Financial Markets//CFA Institute Enterprising Investor. Practical analysis for investment professionals. – 30 January 2013. <https://blogs.cfainstitute.org/investor/2013/01/30/rescaled-range-analysis-a-method-for-detecting-persistence-randomness-or-mean-reversion-in-financial-markets/>
6. Handong Li, Xunyu Ye. Forecasting High-Frequency Long Memory Series with Long Periods Using the SARFIMA Model <http://www.scirp.org/journal/PaperDownload.aspx?paperID=54179>
7. Leila Sakhabakhsh, Hamidreza Mostafaei. Department of Statistics, North Tehran Using SARFIMA Model to Study and Predict the Iran's Oil Supply <http://www.econjournals.com/index.php/ijeep/article/download/107/69>