



Тема 6.

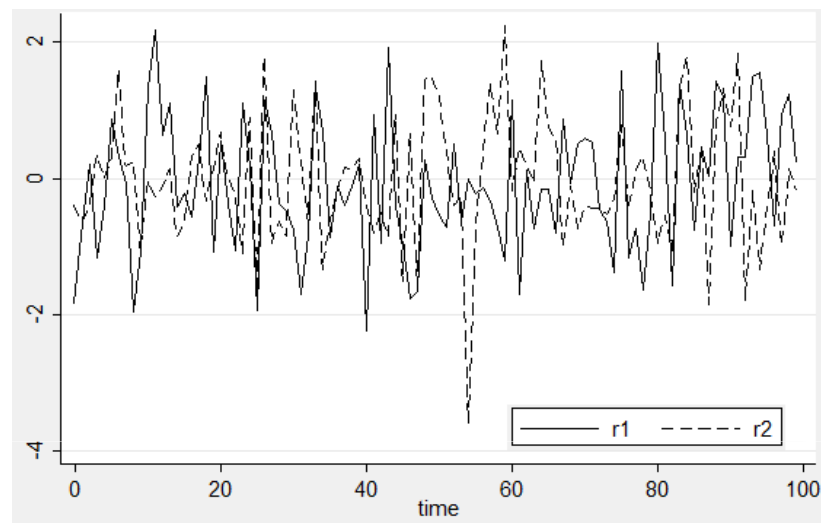
Понятие о коинтеграции временных рядов



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Проблема ложной корреляции и регрессии

Белый шум



	r1	r2
r1	1.0000	
r2	0.0378 0.7087	1.0000

Source	SS	df	MS
Model	.141634419	1	.141634419
Residual	98.8509504	98	1.00868317
Total	98.9925848	99	.999925099

Number of obs = **100**
 F(1, 98) = **0.14**
 Prob > F = **0.7087**
 R-squared = **0.0014**
 Adj R-squared = **-0.0088**
 Root MSE = **1.0043**

r1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
r2	.0397239	.1060095	0.37	0.709	-.1706486	.2500964
_cons	-.0763759	.1004767	-0.76	0.449	-.2757687	.1230168



Проблема ложной корреляции и регрессии

Гренджер и Ньюболд (1974):

100 пар случайных блужданий, 76% - значимая взаимосвязь

Table 2

Regressions of a series on m independent 'explanatory' series.

Series either all random walks or all A.R.I.M.A. (0, 1, 1) series, or changes in these. $Y_0 = 100$, $Y_t = Y_{t-1} + a_t$, $Y_t' = Y_t + kb_t$; $X_{j,0} = 100$, $X_{j,t} = X_{j,t-1} + a_{j,t}$, $X_{j,t}' = X_{j,t} + kb_{j,t}$; $a_{j,t}, b_{j,t}$ sets of independent $N(0, 1)$ white noises. $k = 0$ gives random walks, $k = 1$ gives A.R.I.M.A. (0, 1, 1) series. H_0 = no relationship, is true. Series length = 50, number of simulations = 100, \bar{R}^2 = corrected R^2 .

		Per cent times H_0 rejected ^a	Average Durbin-Watson d	Average \bar{R}^2	Per cent $\bar{R}^2 > 0.7$
		<i>Random walks</i>			
Levels	$m = 1$	76	0.32	0.26	5
	$m = 2$	78	0.46	0.34	8
	$m = 3$	93	0.55	0.46	25
	$m = 4$	95	0.74	0.55	34
	$m = 5$	96	0.88	0.59	37

Granger, C.; Newbold, P. (1974). "Spurious Regressions in Econometrics". Journal of Econometrics. 2 (2): 111-120

http://wolfweb.unr.edu/~zal/STAT758/Granger_Newbold_1974.pdf



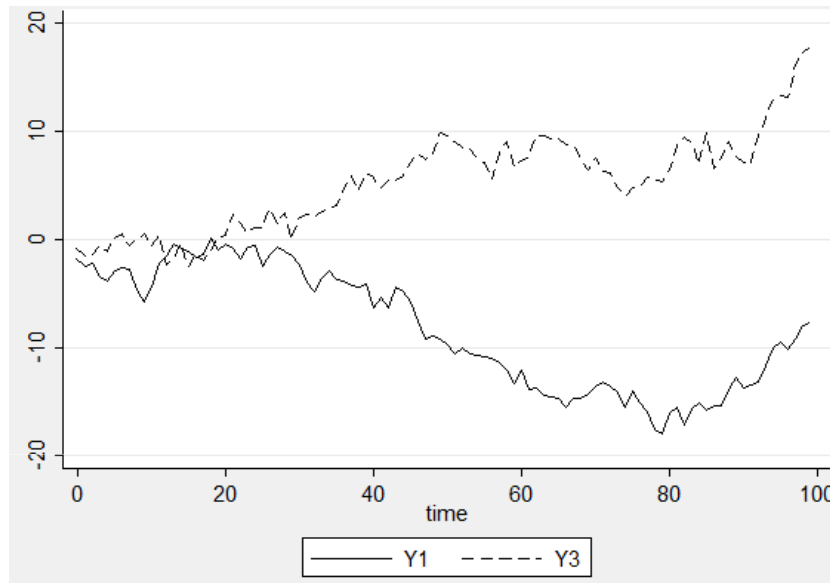
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА

Проблема ложной корреляции и регрессии

Случайное
блуждание

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$y_t = y_{t-1} + v_t.$$



reg Y1 Y3

Source	SS	df	MS			
Model	1383.48774	1	1383.48774	Number of obs =	100	
Residual	1659.84186	98	16.9371618	F(1, 98) =	81.68	
Total	3043.3296	99	30.7407031	Prob > F =	0.0000	
				R-squared =	0.4546	
				Adj R-squared =	0.4490	
				Root MSE =	4.1155	

Y1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
Y3	-.8375525	.0926712	-9.04	0.000	-1.021455	-.6536496
_cons	-3.881929	.63736	-6.09	0.000	-5.146749	-2.617109

	Y1	Y3
Y1	1.0000	
Y3	-0.6742 0.0000	1.0000

Гренджер и Ньюболд
(1974):

100 пар случайных
блужданий, 76% -
значимая взаимосвязь



Коинтеграция

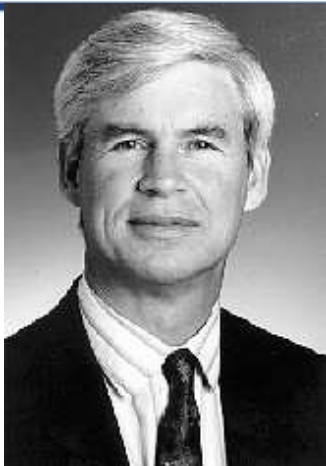
- Когда анализируют временные ряды, необходимо **выявить долгосрочную устойчивую связь между переменными.**
- Недостаток ADL-моделей
- **Коинтеграция** – первый подход к регрессии нестационарных ВР
- Engle, Granger (1987): **концепция коинтеграции**
- предложил Грейнджер (1981г.).

Engle, R. F. and C. W. J. Granger (1987) "Co-integration and error correction: Representation, estimation, and testing", *Econometrica* 55: 251-276.



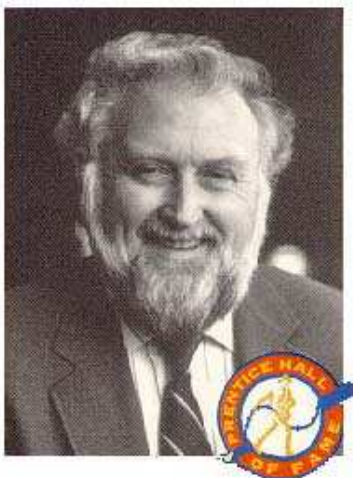
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Нобелевские лауреаты 2003



«за методы анализа экономических временных рядов с меняющейся во времени волатильностью (ARCH)»

Роберт Ф. Энгл
Robert F. Engle (1942-)



«за методы анализа экономических временных рядов с общими трендами (коинтеграция)»

Клайв У. Дж. Грейнджер
Clive W. J. Granger (1934-2009)



Robert F. Engle III (left) and Clive W. J. Granger at the Prize Award Ceremony at the Stockholm Concert Hall, 10 December 2003.

- Пример 1

Опр. Процесс называется *интегрируемым* порядка d , если процесс и его первые $(d - 1)$ разности не являются стационарными, а d -ая разность – стационарна.

$$x_t \sim I(d)\text{-процесс}$$

$$y_t \sim I(d)$$

Опр. $I(1)$ -процессы x_t и y_t являются **коинтегрированными**, если существует коэффициент λ такой, что линейная комбинация $\{y_t - \lambda x_t\} \sim I(0)$ (стационарна).

вектор $\beta = (1, -\lambda)$ – коинтегрирующий вектор.

Обозначение: $x_t, y_t \sim I(1), y_t - \lambda x_t \sim I(0) \rightarrow x_t, y_t \sim CI(1,1),$

$$x_t, y_t \sim CI \quad (\text{параметры в скобках опускают})$$

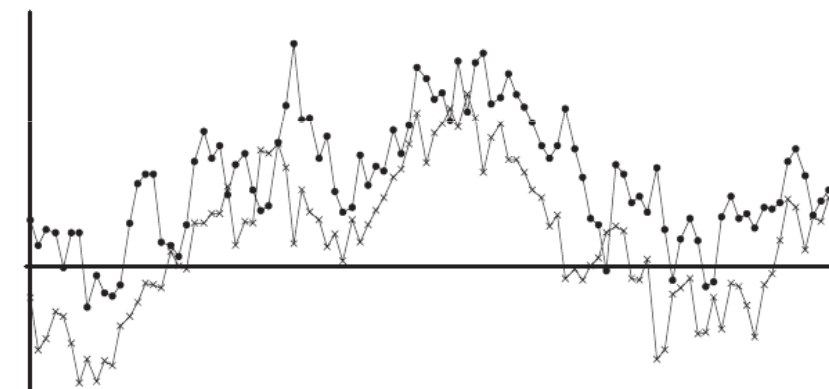
-Пример 2



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Коинтеграция: примеры

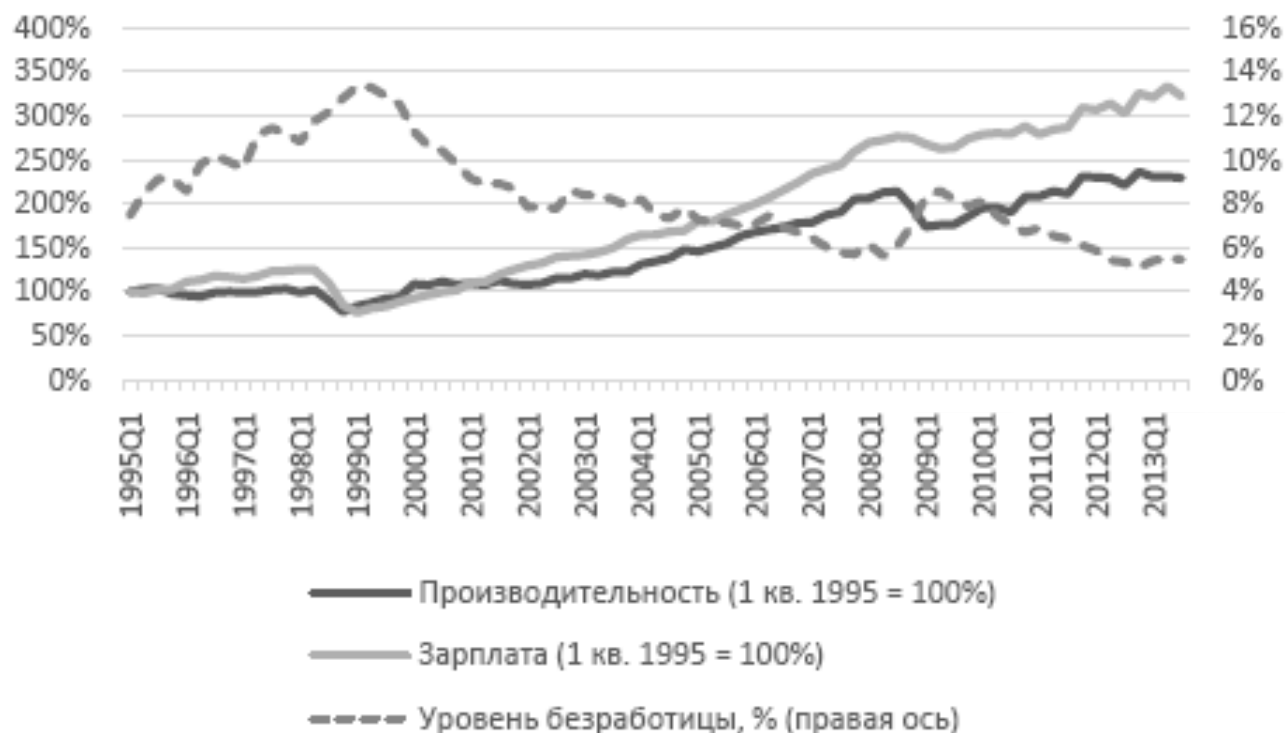
- цены на идентичные товары на разных рынках,
- доходы и расходы домашних хозяйств,
- кратко- и долгосрочные ставки процента,
- ставка процента в различных частях страны и др.





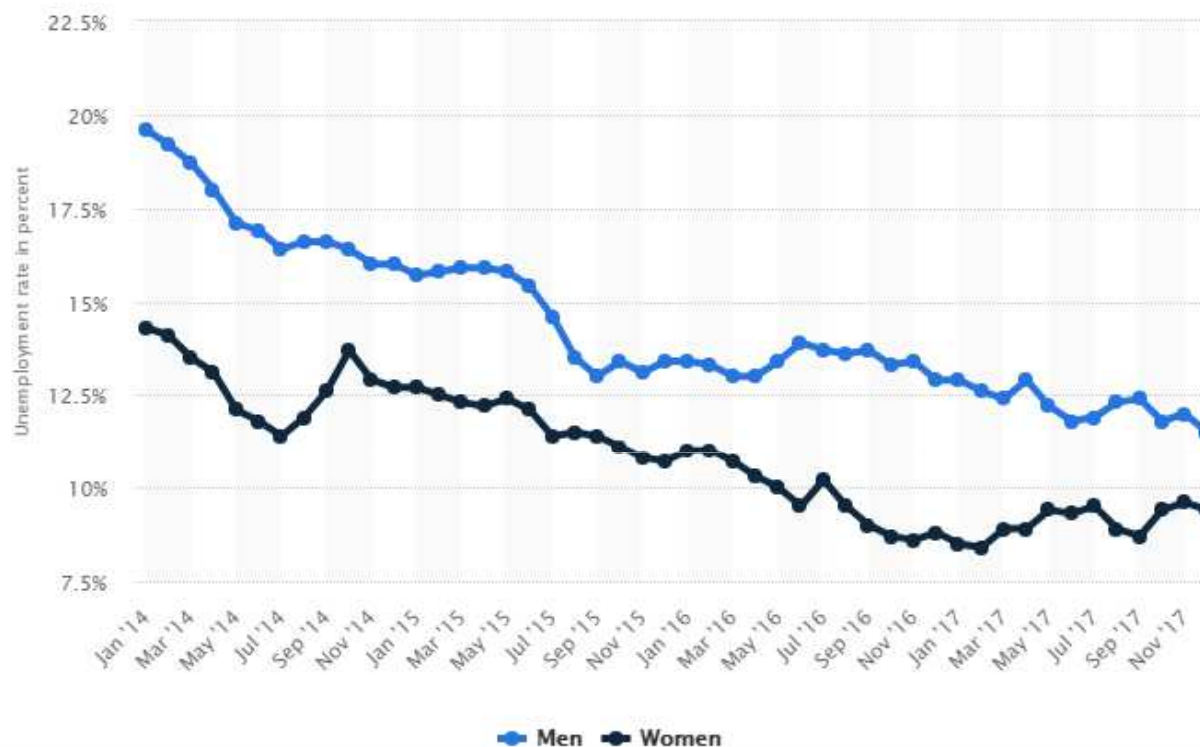
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Коинтеграция: примеры



Динамика производительности труда, средней заработной платы и уровня безработицы, сглаженные на сезонность

наличие структурных сдвигов!



Monthly youth unemployment rate (18-24 years old) in UK, by gender

<https://www.statista.com/statistics/280326/monthly-youth-unemployment-rate-18-24-in-the-uk-by-gender/>



Коинтегрирующее соотношение: интерпретация

- долгосрочное и краткосрочное поведение

- $y_t = \lambda x_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim \text{WN}$ Долгосрочное поведение

$$x_t, y_t \sim I(1), \quad \Delta x_t, \Delta y_t \sim I(0),$$

$$x_t = x_{t-1} + \Delta x_t, \quad y_t = y_{t-1} + \Delta y_t$$

$$\Delta y_t = \alpha \Delta x_t + \beta (y_{t-1} - \lambda x_{t-1}) + v_t \quad ECM$$

Краткосрочное
поведение

Granger representation theorem

Вопросы:

1. Существуют ли такие процессы?
2. Что делать дальше?

- суперсостоятельность МНК-оценок
при наличии коинтеграции

$V_{\text{сход-ти}}$ пропорц-но $1/T^{-1}$



Процедура Энга-Гренджера

Пусть $x_t \sim I(1)$ и $y_t \sim I(1)$. Есть ли **коинтеграция**?

Основная идея: Если λ - известен, то выяснение того, коинтегрированы ли переменные x_t и y_t , было бы эквивалентно выяснению, стационарна ли комбинация $y_t - \lambda x_t$
- на практике: стационарная линейная комбинация неизвестна.

- 1) необходимо оценить коинтегрирующий вектор.
- 2) выяснить, действительно ли этот вектор дает стационарную линейную комбинацию.

Процедура Энгла-Гренджера

Этап 1. Строим регрессию

$$y_t = \alpha + \beta x_t + w_t \rightarrow \hat{\alpha}, \hat{\beta}, e_t$$

$$e_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t \sim I(0)$$

Этап 2. DF-test для e_t

$$\Delta e_t = \rho e_{t-1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \Delta e_{t-1} + v_t$$

$H_0: \rho=0$ наличие ед.корня для CI-соотношения (коинтеграции нет)

Если H_0 откл., то e_t является стационарным рядом и существует коинтеграция.

- критерий Девидсона-МакКиннона (MacKinnon, Davidson (1993))

— уточненные асимптотические критические значения t-статистики.

Davidson, R., and J. G. MacKinnon (1993). Estimation and Inference in Econometrics, New York: Oxford University Press.



Процедура Энгла-Гренджера

- критерий Девидсона-МакКиннона (MacKinnon, Davidson (1993))

Table 1. Response Surface Estimates of Critical Values

N	Variant	Level	Obs.	β_{∞}	(s.e.)	β_1	β_2
1	no constant	1%	600	-2.5658	(0.0023)	-1.960	-10.04
		5%	600	-1.9393	(0.0008)	-0.398	
		10%	560	-1.6156	(0.0007)	-0.181	
1	no trend	1%	600	-3.4336	(0.0024)	-5.999	-29.25
		5%	600	-2.8621	(0.0011)	-2.738	-8.36
		10%	600	-2.5671	(0.0009)	-1.438	-4.48
1	with trend	1%	600	-3.9638	(0.0019)	-8.353	-47.44
		5%	600	-3.4126	(0.0012)	-4.039	-17.83
		10%	600	-3.1279	(0.0009)	-2.418	-7.58
2	no trend	1%	600	-3.9001	(0.0022)	-10.534	-30.03
		5%	600	-3.3377	(0.0012)	-5.967	-8.98
		10%	600	-3.0462	(0.0009)	-4.069	-5.73
2	with trend	1%	600	-4.3266	(0.0022)	-15.531	-34.03
		5%	560	-3.7809	(0.0013)	-9.421	-15.06
		10%	600	-3.4959	(0.0009)	-7.203	-4.01

Explanation of Table 1

N: Number of I(1) series for which null of non-cointegration is being tested.

Level: Level of one-tail test of the unit root null against the alternative of stationarity.

Obs.: Number of observations used in response surface regression. Possible values are 600, 560, 520, and 480. If Obs. = 600, the regression used 40 observations from each of $T = 18, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 40, 50, 75, 100, 150, 200, 250$, and 500. If Obs. = 560, observations for $T = 18$ were not used. If Obs. = 520, observations for $T = 18$ and $T = 20$ were not used. If Obs. = 480, the regression used 40 observations from each of $T = 20, 22, 25, 28, 30, 32, 36, 40, 50, 100, 250$, and 275.

$$C(\alpha, T) = \beta_{\infty} + \beta_1 \frac{1}{T} + \beta_2 \frac{1}{T^2}$$

Critical Values for Cointegration Tests

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.456.4786&rep=rep1&type=pdf>

Davidson, R., and J. G. MacKinnon (1993). Estimation and Inference in Econometrics, New York: Oxford University Press.

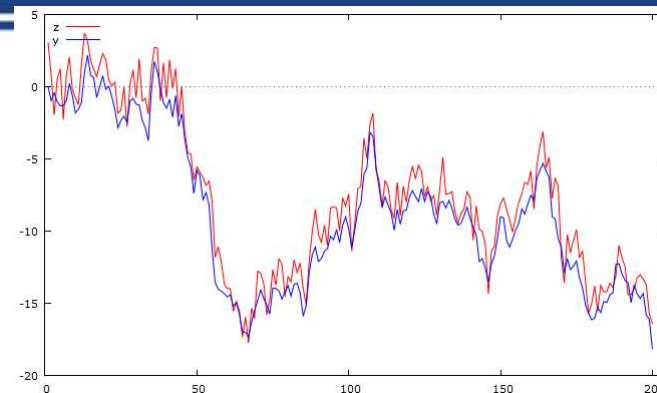
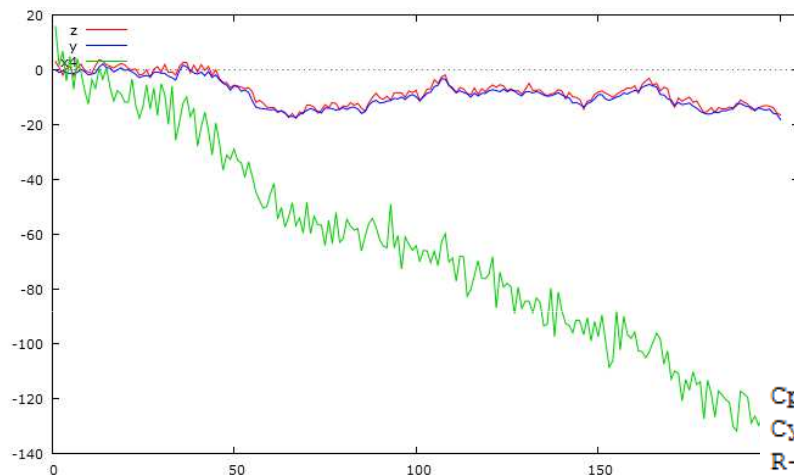


НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Процедура Энгла-Гренджера: пример

$$y_t = \alpha + \beta x_t + w_t \rightarrow \hat{\alpha}, \hat{\beta}, e_t$$

Этап 1. $e_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t \sim I(0)$



	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение
const	1,33484	0,130042	10,26	4,31e-020 ***
y	1,02413	0,0127474	80,34	4,51e-153 ***

Этап 2. DF-test для e_t

Среднее зав. перемен	-7,643291	Ст. откл. зав. перемен	5,437705
Сумма кв. остатков	175,1314	Ст. ошибка модели	0,940480
R-квадрат	0,970237	Испр. R-квадрат	0,970086
Лог. правдоподобие	-270,5096	Крит. Акаике	545,0192
Крит. Шварца	551,6159	Крит. Хеннана-Куинна	547,6888
Параметр rho	-0,008698	Стат. Дарбина-Вотсона	1,996888

нулевая гипотеза единичного корня: $a = 1$

оценка для $(a - 1)$: -1,11149

тестовая статистика: $\tau_{a_c}(2) = -3,92522$

асимпт. p-значение 0,009128

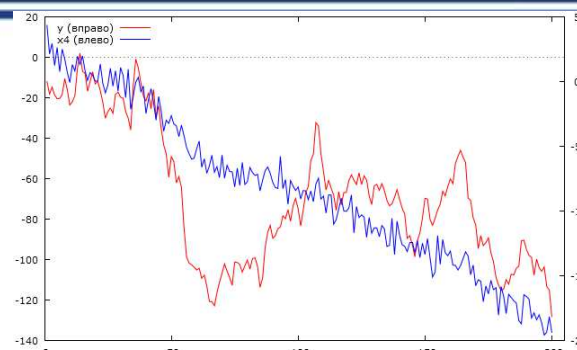
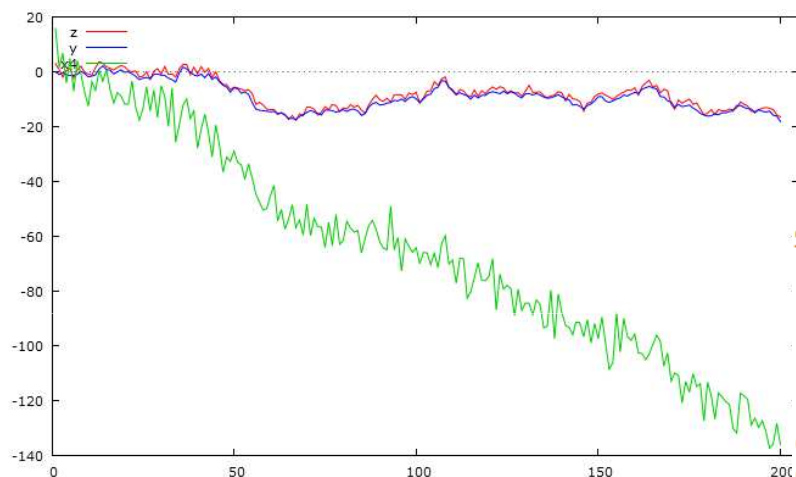


НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Процедура Энгла-Гренджера: пример

$$y_t = \alpha + \beta x_t + w_t \rightarrow \hat{\alpha}, \hat{\beta}, e_t$$

Этап 1. $e_t = y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t \sim I(0)$



Зависимая переменная: y

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
const	-2,57523	0,513358	-5,016	1,17e-06	***
x4	0,0949598	0,00676637	14,03	1,64e-031	***

Этап 2. DF-test для e_t

Среднее зав. перемен	-8,766604	Ст. откл. зав. перемен	5,229978
Сумма кв. остатков	2728,787	Ст. ошибка модели	3,712378
R-квадрат	0,498678	Испр. R-квадрат	0,496146
Лог. правдоподобие	-545,1172	Крит. Акаике	1094,234
Крит. Шварца	1100,831	Крит. Хеннана-Куинна	1096,904
Параметр rho	0,955821	Стат. Дарбина-Вотсона	0,090300

оценка для $(\alpha - 1)$: -0,0562427

тестовая статистика: $\tau_{\alpha}(2) = -2,32975$

асимпт. p-значение 0,3583



Схема исследования рядов

1. Пусть $y_t \sim I(0)$, $x_t \sim I(0) \rightarrow$ строим регрессию (возможно ADL).
2. Пусть $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(0)$. Переходим к $\Delta y_t \sim I(0)$ и строим регрессию.
3. Пусть $y_t \sim I(1)$, $x_t \sim I(1) \rightarrow$ проверяем наличие коинтеграции. –
 - нет CI \rightarrow краткосрочные соотношения
 - существует CI \rightarrow ECM

1. Находим СИ-соотношение

$$y_t = \alpha + \beta x_t + w_t, \quad OLS \rightarrow e_t$$

$$2. \quad \Delta y_t = \alpha + \beta \Delta x_t + c e_t + \varepsilon_t \quad ECM$$

Замечание. Адекватность модели: остатки в ЕСМ-модели должны обладать свойствами *белого шума*. Если остатки автокоррелированы, необходимо включить больше лагов в ЕСМ (наращивание лаговой структуры):

$$\Delta y_t = \alpha + c e_t + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} \Delta y_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_{2i} \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t$$



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Коинтеграция: примеры моделирования (1)

ПЭ №3, 2013 Айвазян, Бродский и др. Макроэкономическое моделирование экономик России и Армении.

ВВП Армении

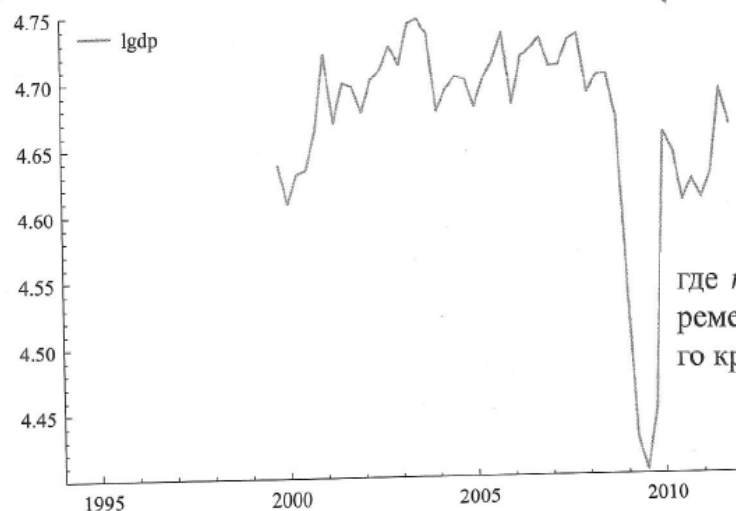
$$\ln(GDP_t) = 0.580 + 0.199 \ln(M2_t) - 0.328 \ln(rdram_t) + 0.078 \ln(woil_t)$$

(0.88) (4.86) (-6.77) (1.99)

$$D\ln(GDP_t) = -0.011 - 0.312 R\ln(GDP_{t-1}) + 0.174 mu_t - 0.111 \cdot i2009p2_t,$$

(-2.31) (-3.78) (6.39) (-3.98)

$$R^2 = 0.69, DW = 2.23$$



где $mu_t = M2_t / M2_{t-1} - 1$ — темп роста денежного агрегата М2; $i2009p2$ — фиктивная переменная (индикатор 2-го квартала 2009 года), отражающая влияние мирового финансового кризиса на динамику ВВП РА.

Рис. 3. Квартальная динамика ВВП Армении
в период 1-й квартал 2000 г. — 4-й квартал 2011 г.

Айвазян С. А., Б. Е. Бродский, Э. М. Сандоян, М. А. Восканян, Д. Э. Манукян.
Макроэконометрическое моделирование экономик России и Армении // ПЭ. 2013.
№3(31) http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2013_3_03-31.pdf



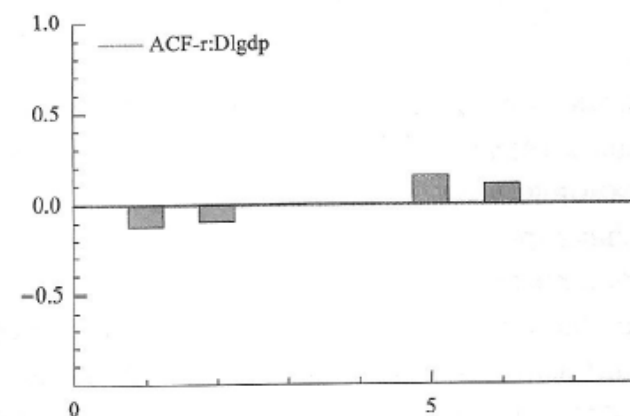
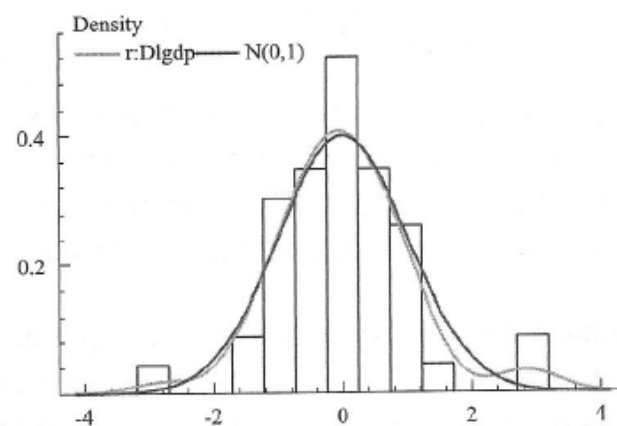
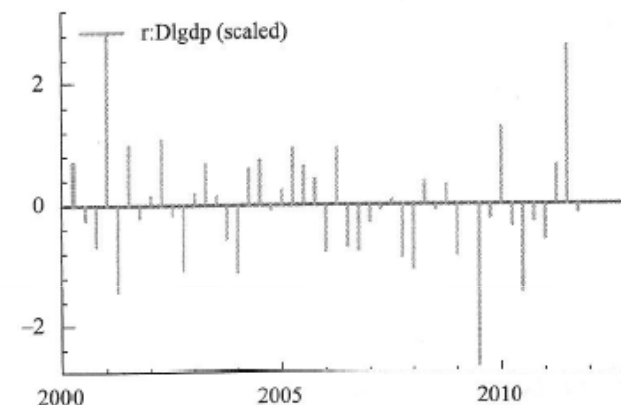
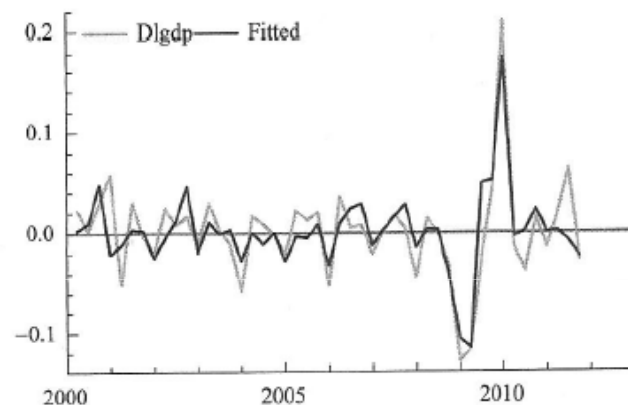
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Коинтеграция: примеры моделирования

ПЭ №3, 2013 Айвазян, Бродский и др. Макроэкономическое моделирование экономик России и Армении.

ВВП Армении

Анализ
остатков



Краснопеева Н. А., Назруллаева Е. Ю. Моделирование влияния инвестиций в основной капитал на материальные затраты в отраслях промышленности США в 1958–2005 гг.

Текстильная промышленность

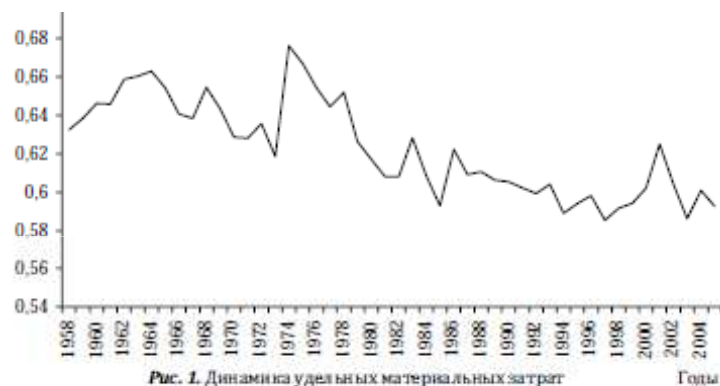


Рис. 1. Динамика удельных материальных затрат в текстильной промышленности

Таблица 3.

Оценки параметров ЕСМ-модели

	coef_cointegration	const	$\Delta \text{Log}(I)_{t-1}$	$\Delta \text{Log}(C)_{t-1}$	$\Delta \text{Log}(Y)_{t-1}$
$\Delta \text{Log}(C)$	-1,035***	0,011	-0,21***	0,70**	-0,26

Примечание: ***, **, * – МНК-оценки значимы на одно-, пяти- и десятипроцентном уровнях соответственно.

«Заметим, что как выпуск, так и инвестиции в долгосрочной перспективе влияют на материальные затраты отрицательно. В краткосрочной перспективе было выявлено статистически значимое отрицательное влияние инвестиций на материальные затраты и положительное влияние со стороны материальных затрат предыдущего периода. Стоит отметить, что инвестиции в большей степени влияют на материальные затраты именно в случае долгосрочного равновесия, что вполне логично, так как инвестиции в основной капитал носят прежде всего долгосрочный характер».

Краснопеева Н. А., Назруллаева Е. Ю. Моделирование влияния инвестиций в основной капитал на материальные затраты в отраслях промышленности США в 1958–2005 гг. // Экономический журнал ВШЭ [2014] Т. 18 № 1. С. 102–132 ej.hse.ru/2014-18-1/119907605.html

Процедура Энгла-Гренджера: недостатки

1. Малая мощность DF-test
2. Установление причинно-следственной связи
3. В многомерном случае возможно определение более одного коинтеграционного соотношения

Опр. (Обобщение) $I(d)$ -процессы $\{x_t\}$ и $\{y_t\}$ являются **коинтегрированными**, если существует вектор (α, β) такой, что линейная комбинация $\{\alpha x_t + \beta y_t\} \sim I(d-b)$, $b > 0$.

Обозначение:

$$x_t, y_t \sim CI(d, b)$$

d – исходный порядок интеграции
 b – на сколько порядок понижается

Пример

$$x_t, y_t \sim I(3), \quad (\alpha x_t + \beta y_t) \sim I(1) \rightarrow x_t, y_t \sim CI(3, 2)$$



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ