2.2. Модели авторегрессии порядка p (AutoRegressive - AR(p) models)

Модели авторегрессии порядка p (AutoRegressive - AR(p) models)

Процесс **авторегрессии *p*-ого** порядка имеет вид:

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- частный случай представления

$$\alpha_\infty(L) y_t = \varepsilon_t,$$

$$\alpha_p(L) y_t = \varepsilon_t, \quad \alpha_p(L) = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \alpha_3 L^3 - \ldots - \alpha_p L^p)$$

- Стационарен и нестационарен
- ***Условие стационарности*** – условие обратимости лагового многочлена

$$\alpha_p(L) y_t = \varepsilon_t \rightarrow \quad y_t = \left[\alpha_p(L)\right]^{-1} \varepsilon_t$$

Разложение Вольда

AR(p): частные случаи

Процесс **авторегрессии *p*-ого** порядка имеет вид:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Частные случаи:

Процесс **авторегрессии *1*-го порядка AR(1)(марковский процесс)**

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Процесс **авторегрессии *2*-го порядка AR(2) (процесс Юла):**

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

AR(p): частные случаи

Процесс **авторегрессии *2*-го порядка AR(2) (процесс Юла):**

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

10- to 12-year cycle in sunspot activity

Первое приложение моделирования AR-процесса было представлено Yule (1927) on the yearly sunspot number as introduced in 1848 by the Swiss astronomer Johann Rudolph Wolf.

Australian Government

Bureau of Meteorology

Данные с 1700 г.

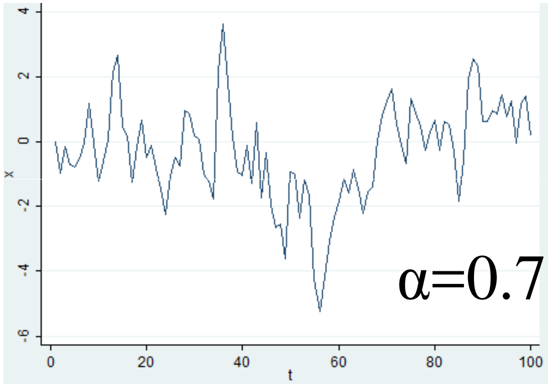
https://www.sws.bom.gov.au/Educational/2/3/6

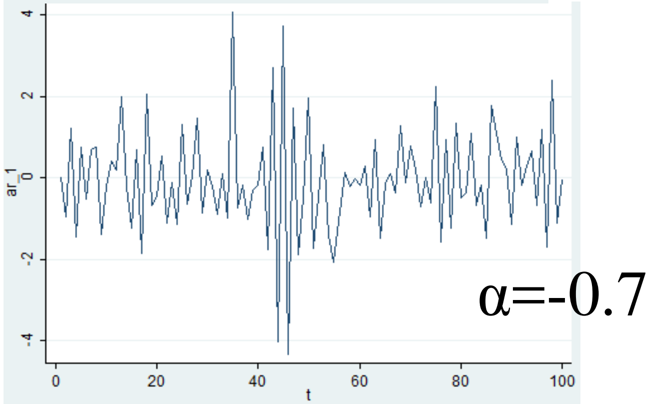
Модель авторегрессии 1-го порядка AR(1)

AR(1), марковский процесс

$$y_t = \alpha\, y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad |\alpha| < 1$$

$$E(\varepsilon_t) = 0, \qquad V(\varepsilon_t) = \sigma^2$$





Основные характеристики:

1) $E(y_t) = 0;$

2) $V(y_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\alpha^2};$

3) $\operatorname{cov}(y_t, y_{t\pm k}) = \alpha^k V(y_t);$

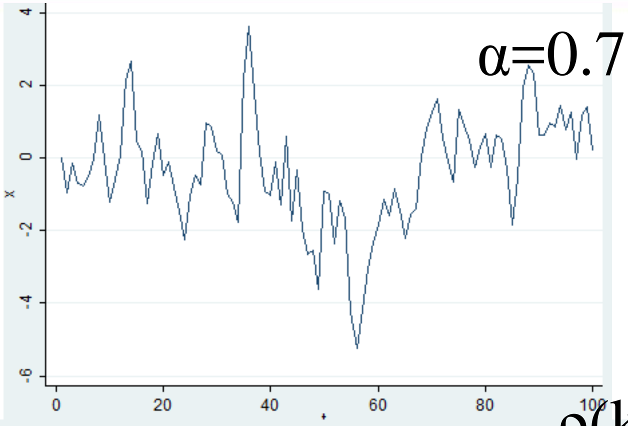
4) $\rho(y_t, y_{t\pm k}) = \alpha^k$

Условие стационарности: $|\alpha| < 1$

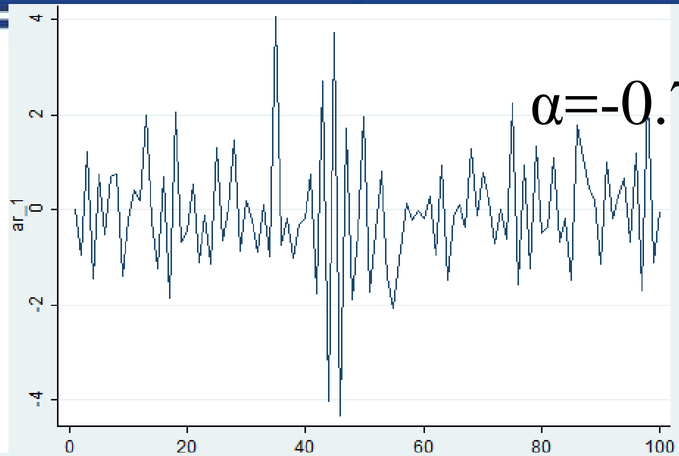
Модель авторегрессии 1-го порядка AR(1)

AR(1)

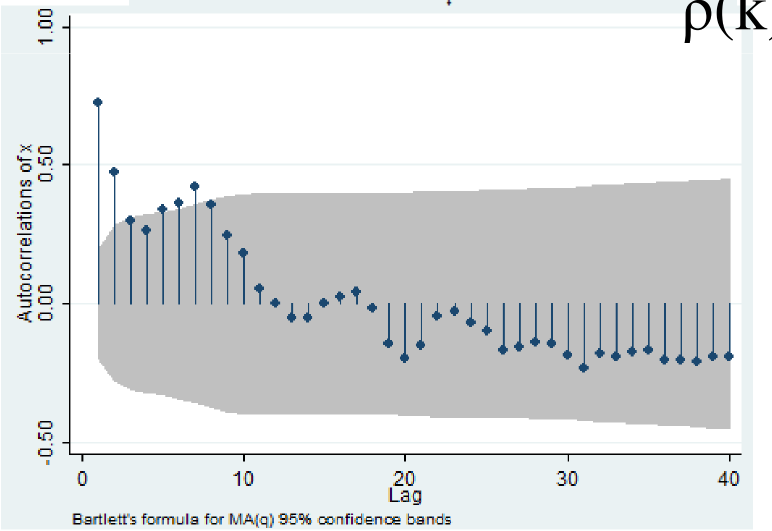
$\alpha=0.7$

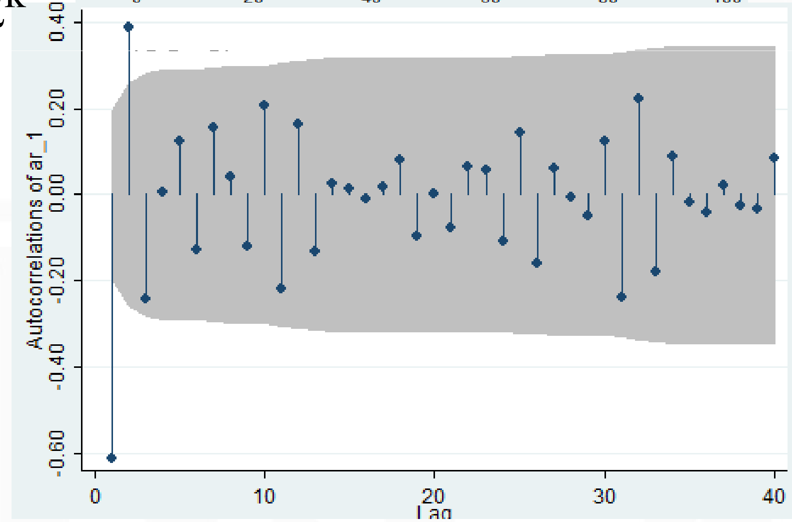


$\alpha=-0.7$



$\rho(k)= \alpha^k$





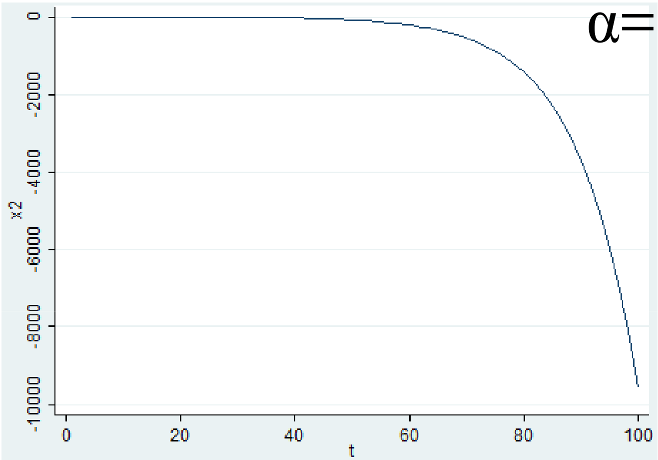
при $0<\alpha<1$ ACF - затухающая экспонента,

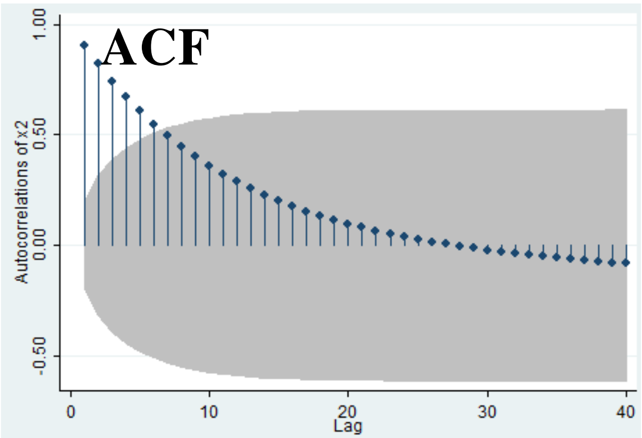
при $-1<\alpha<0$ ACF - затухающая знакопеременная экспонента

AR(1): частные случаи

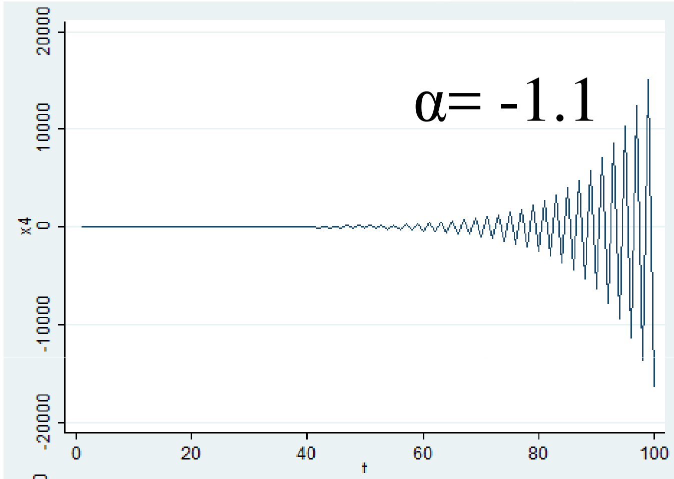
α >1 - «взрывной» процесс (в экономике такие процессы не изучаются)

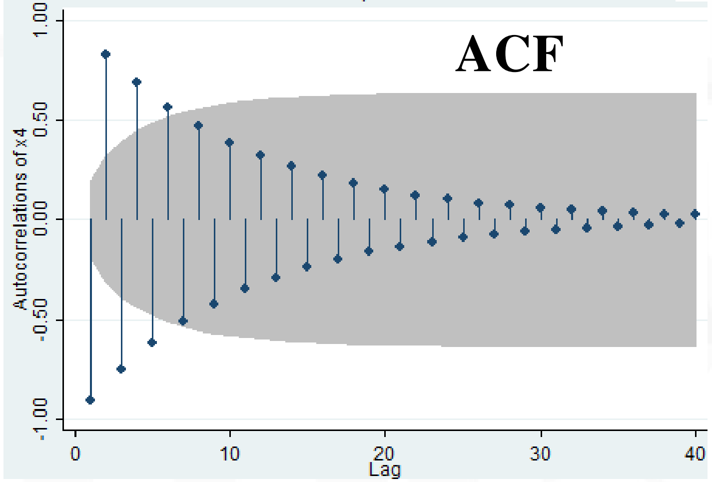
α=1.1





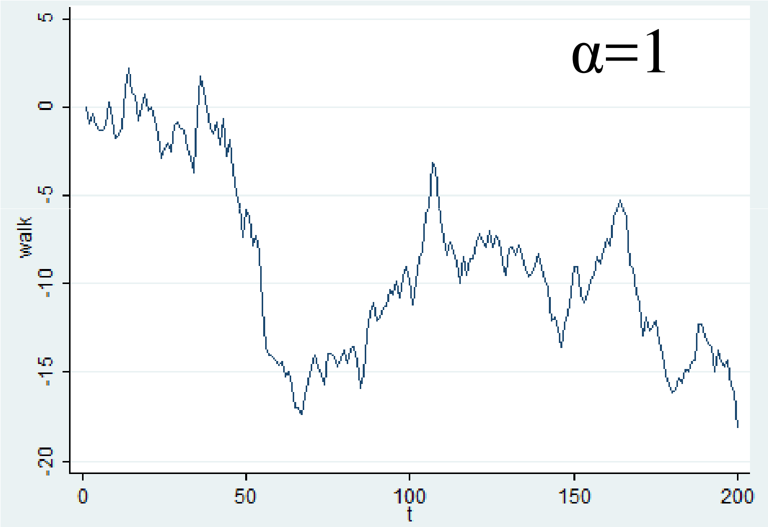
α= -1.1

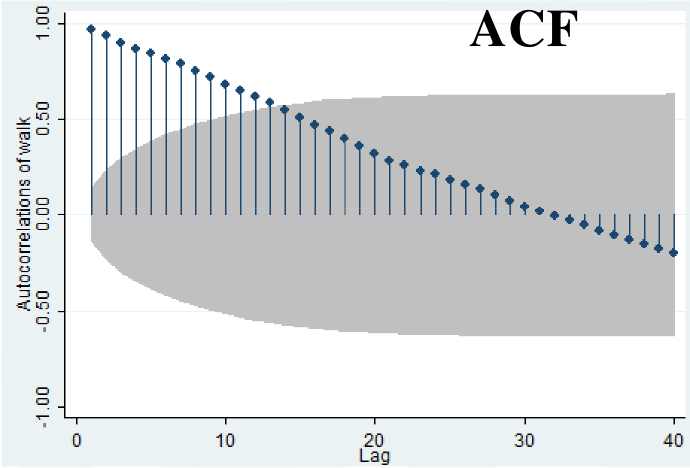




AR(1): частные случаи

α =1- случайное блуждание $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$





AR(1): частные случаи

AR(1) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$

Значения параметров	Процесс	
$\alpha_0 = \alpha_1 = 0$	Белый шум	стационарные
$\alpha_1 < 1$	Стационарный AR(1)	
$\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$	Случайное блуждание	нестационарные
$\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 1$	Случайное блуждание с дрейфом	
$\alpha_1 > 1$	Взрывной процесс	

Модель авторегрессии 2-го порядка AR(2)

AR(2) - процесс Юла: $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$$(1 - \alpha_1 \mathrm{L} - \alpha_2 \mathrm{L}^2)\mathrm{y}_t = \varepsilon_t \rightarrow \alpha(L)\mathrm{y}_t = \varepsilon_t$$

- Условие ***стационарности*** – условие обратимости α(L)

Характеристическое уравнение:

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 = 0$$

$$|z_1| > 1, \quad |z_2| > 1.$$

$$|\alpha_2| < 1;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1;$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 < 1.$$

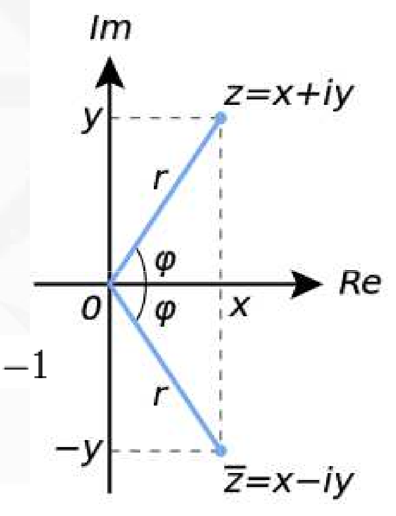
AR(2): пример

Пример. Показать, что процессы AR(2) являются (не)стационарными

$y_t = 1{,}3\, y_{t-1} - 0{,}4\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

$y_t = 1 + 0{,}25\, y_{t-1} - 0{,}125\, y_{t-2} + \varepsilon_t$
(случай комплексных корней)

Комплексные числа



$i^2 = -1$

Геометрическое представление сопряжённых чисел

Если комплексное число $z = x + iy$, то число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряжённым**

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\bar{z}| = |z|$

Модель авторегрессии 2-го порядка AR(2)

AR(2) - процесс Юла: $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

$$(1 - \alpha_1 \mathrm{L} - \alpha_2 \mathrm{L}^2)\mathrm{y}_\mathrm{t} = \varepsilon_\mathrm{t} \rightarrow \alpha(L)\mathrm{y}_\mathrm{t} = \varepsilon_\mathrm{t}$$

- Числовые характеристики

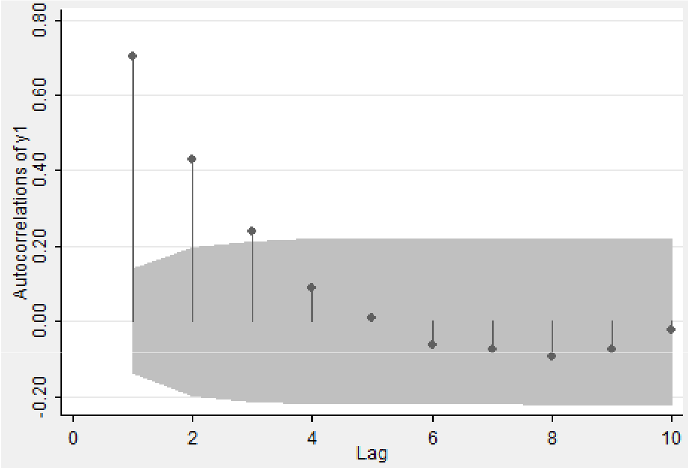
$$E(y_t) = 0; V(y_t) = \frac{(1-\alpha_2)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\alpha_2)((1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2)};$$

$$\gamma_k = \mathrm{cov}(y_t, y_{t\pm k}) = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2}$$

$$\rho_k = cor(y_t, y_{t\pm k}) = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}$$

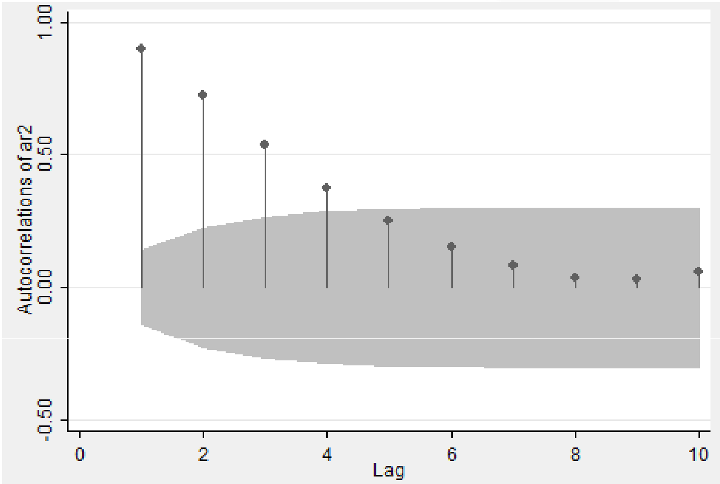
AR(1) и AR(2) : поведение ACF

AR(1): $y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$



$\rho_k = \alpha^k$

AR(2): $y_t = 1+\varepsilon_t + 1.3y_{t-1} - 0.4y_{t-2}$



$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}$$

Модель авторегрессии 2-го порядка AR(2) с константой

AR(2) $y_t = \boldsymbol{\alpha_0} + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

•**Замечание**. В случае когда $E(y_t) = \mu \neq 0,$ $\mu = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\alpha_2}$

Исходное уравнение **AR(2)** можно преобразовать к виду:

$$(y_t - \mu) = \alpha_1 (y_{t-1} - \mu) + \alpha_2 (y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \qquad (*)$$

- Представление (*) удобно использовать для вычисления числовых характеристик.

Пример: $y_t = 1 + 1{,}3\, y_{t-1} - 0{,}4\, y_{t-2} + \varepsilon_t \rightarrow$ $E(y_t) = \mu = 10$

(*) имеет вид: $(y_t - 10) = 1{,}3\,(y_{t-1} - 10) - 0{,}4(y_{t-2} - 10) + \varepsilon_t$

*Проверка: -10=-1,3*10+0,4*10*

Частная автокорреляционная функция (PACF)

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \ldots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Частная автокорреляционная функция (partial autocorrelation function, PACF)

-$\rho_{part}(k)$ – это коэффициент корреляции между случайными величинами Y_t и Y_{t+k}, очищенными от влияния случайных величин $Y_{t+1}, \ldots, Y_{t+k-1}$.

Вычисление: 1 способ – формулы из мат.статистики (см.тема 1.1)

-2 способ (Т.Фриша-Вау): Значение выборочного частного коэффициента автокорреляции φ_k - это МНК-оценка последнего коэффициента в уравнении авторегрессии AR(k).

- 3 способ – Уравнения Юла-Уолкера (Yule-Walker)

Вычисление PACF:
Уравнения Юла –Уолкера (Yule-Walker)

Частный случай AR(1): $y_t = \alpha\, y_{t\text{-}1} + \varepsilon_t$

$$\rho_1^{част} = \varphi_1 = \alpha \leftarrow \quad \mathrm{y}_t = \varphi_1 \mathrm{y}_{t\text{-}1} + \varepsilon_t$$

$$\gamma_k = E((y_t - E(y_t))\cdot(y_{t-k} - E(y_t)))$$

$$\rho_2^{част} = \varphi_2 = 0 \leftarrow \quad \mathrm{y}_t = \varphi_1 \mathrm{y}_{t\text{-}1} + \varphi_2 \mathrm{y}_{t\text{-}2} + \varepsilon_t$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 \cdot 1 + \varphi_2 \rho_1, \\ \rho_2 = \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2, \end{cases} \rightarrow$$

Матричная форма:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

Формулы Крамера: $PACF(2) = \varphi_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$

Δ-определитель матрицы

Вычисление PACF:
Уравнения Юла –Уолкера (Yule-Walker)

$$\mathrm{AR(p)}: \mathrm{y_t} = \alpha_1 \mathrm{y_{t-1}} + \alpha_2 \mathrm{y_{t-2}} + \ldots + \alpha_p \mathrm{y_{t-p}} + \varepsilon_t$$

$$\gamma_k = E((y_t - E(y_t))\cdot(y_{t-k} - E(y_t))) = \varphi_1\gamma_{k-1} + \varphi_2\gamma_{k-2} + \ldots + \varphi_p\gamma_{k-p}, k > 0$$

$$\rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \ldots + \varphi_p\rho_{k-p}, k > 0, \quad k = \overline{1, p}$$

Матричная форма:

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_1 + \varphi_2\rho_1 + \ldots + \varphi_p\rho_{k-1}, \\ \rho_2 = \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p\rho_{k-2}, \\ \ldots\ldots \\ \rho_k = \varphi_1\rho_{k-1} + \varphi_2\rho_{k-2} + \ldots + \varphi_p. \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \ldots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \ldots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \ldots & \rho_{k-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix}}_{\Delta\text{-определитель матрицы}} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \ldots \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \ldots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

Формулы Крамера: $$PACF(k) = \varphi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$$

AR(1) и AR(2): пример PACF

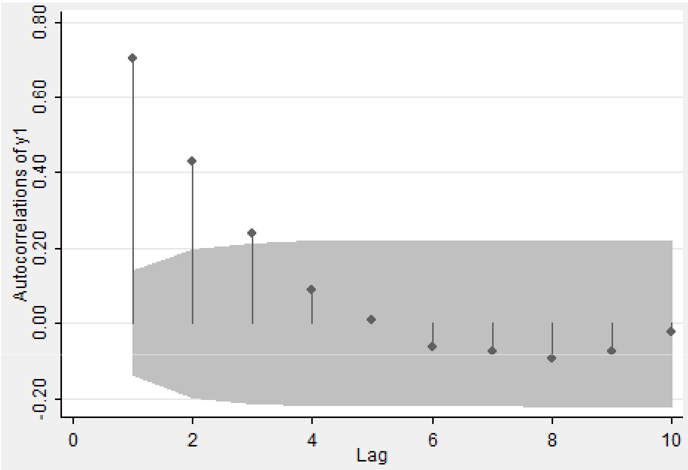
Пример. Для процессов AR(1) и AR(2) рассчитать PACF 1, 2, 3-го порядков, используя формулы Юла-Уолкера.

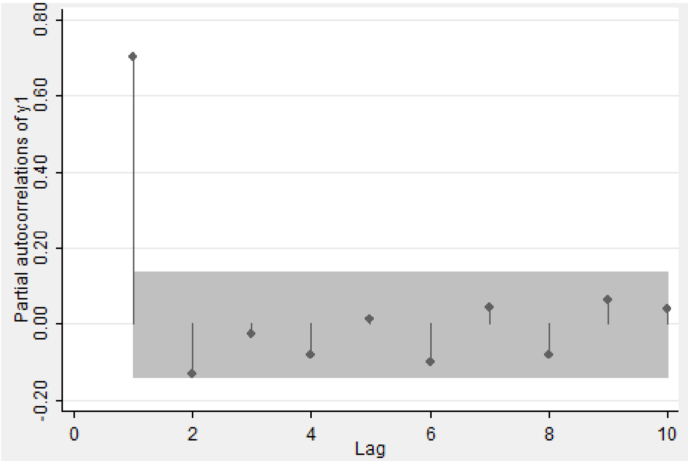
$$y_t = 0{,}5y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = 0{,}25\, y_{t-1} - 0{,}125\, y_{t-2} + \varepsilon_t$$

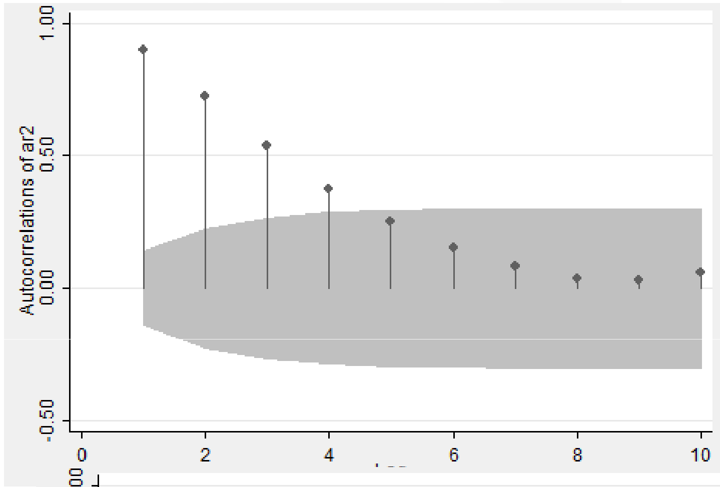
Модели авторегрессии порядка p поведение ACF и PACF

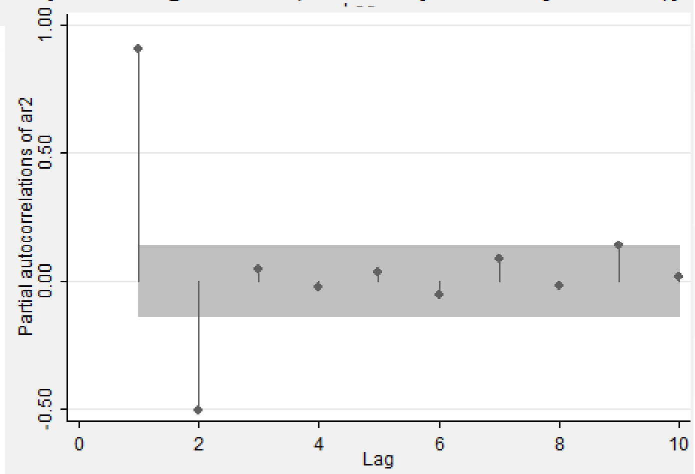
AR(1): $y_t = \varepsilon_t + 0.7y_{t-1}$





AR(2): $y_t = 1+\varepsilon_t + 1.3y_{t-1} - 0.4y_{t-2}$



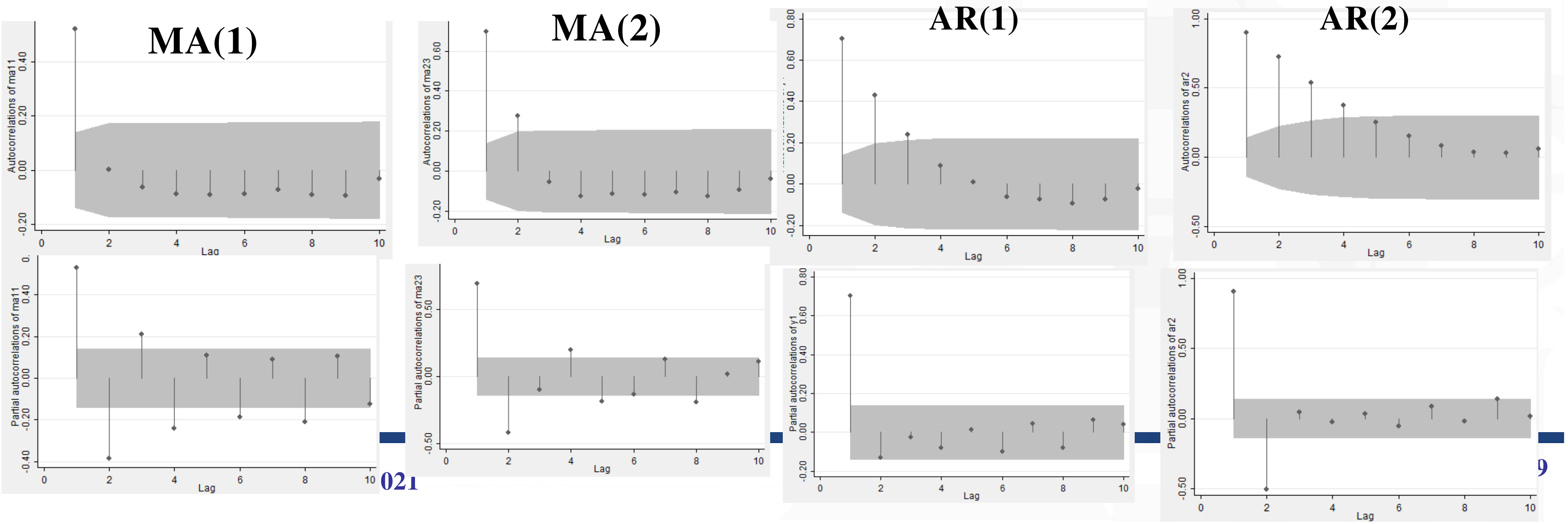


AR(p); MA(q): сравнение ACF и PACF

Свойства автокорреляционных** и **частных автокорреляционных функций

	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA(2)
ACF	Экспоненциально затухает	Экспоненциально затухает	Пик на лаге 1	Пик на лагах 1,2
PACF	Пик на лаге 1	Пик на лагах 1,2	Экспоненциально затухает	Экспоненциально затухает

симметрия: пара графиков (ACF, PACF) для MA(q) имеет тот же вид, что и (PACF, ACF) для AR(p)



Двойственность в представлении AR(p) и MA(q)

Один и тот же линейный процесс может быть представлен либо в виде AR(∞) либо в виде MA(∞).

если MA обратим

MA(1): $y_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \rightarrow$

$$AR(\infty): y_t = \varepsilon_t - \theta y_{t-1} - \theta^2 y_{t-2} + \ldots$$

MA(q): $y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t \rightarrow$

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1^/ y_{t-1} - \left(\theta_2^/\right)^2 y_{t-2} + \ldots$$

если AR стационарен

AR(1): $y_t = \alpha\, y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow$

$$MA(\infty): y_t = \varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{t-1} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

AR(p): $\alpha_p(L)\, y_t = \varepsilon_t \rightarrow$

$$y_t = \varepsilon_t + \alpha_1^/ \varepsilon_{t-1} + \left(\alpha_2^/\right)^2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

Примеры

Задание

AR(2) $y_t = 0.25y_{t-1} - 0.125y_{t-2} + \varepsilon_t$.

$y_t = 1.3y_{t-1} - 0.4y_{t-2} + \varepsilon_t$.

$y_t = -0.3y_{t-1} - 0.28y_{t-2} + \varepsilon_t$.

1. Проверить, является ли процесс стационарным, представить AR(2) в виде процесса MA(∞).
2. Вычислить числовые характеристики
3. Найти ACF и PACF. Схематично построить графики.