Тема 9.

Модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью - ARCH модели

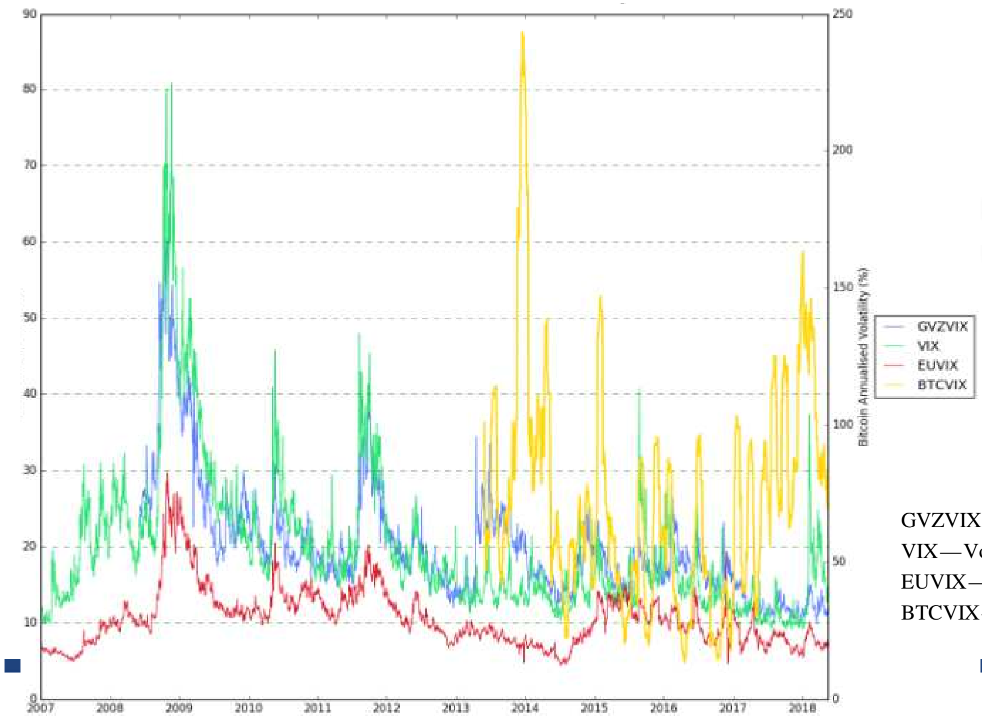
Волатильность

Волатильность (Volatility - Изменчивость) - статистический финансовый показатель, характеризующий изменчивость цены. Мера – дисперсия.

• существует негативная связь между волатильностью и ростом экономики: волатильность фондового рынка – основной признак изменения экономики.

Ramey G., Ramey V. A.(1995). Cross-country evidence on the link between volatility and growth // American Economic Review. 85,1138–51.

Например, для экономики США увеличение показателя волатильности в 2 раза, ВВП падает на 1,5%.



Прогноз волатильности используют при принятии инвестиционных решений

GVZVIX—Volatility index for Gold
VIX—Volatility index for the S&P 500
EUVIX—Volatility index for Euro/USD pair
BTCVIX—Bitcoin 30 day historical volatility (right axis)

Волатильность: показатели динамики ряда

Логарифмическая разность (Первая разность логарифма)

$\Delta \ln Y_t = \ln Y_t - \ln Y_{t-1}$ – это процентное изменение Y_t между периодами (t-1) и t, равно $100 \cdot \Delta \ln Y_t$.

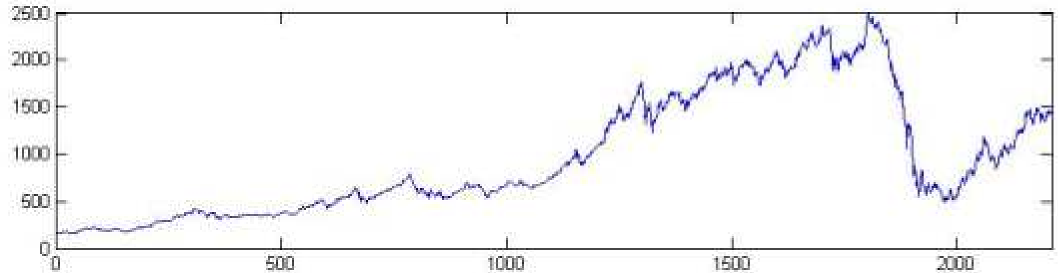
Для финансовых показателей – доходность актива.

аналог темпа прироста:

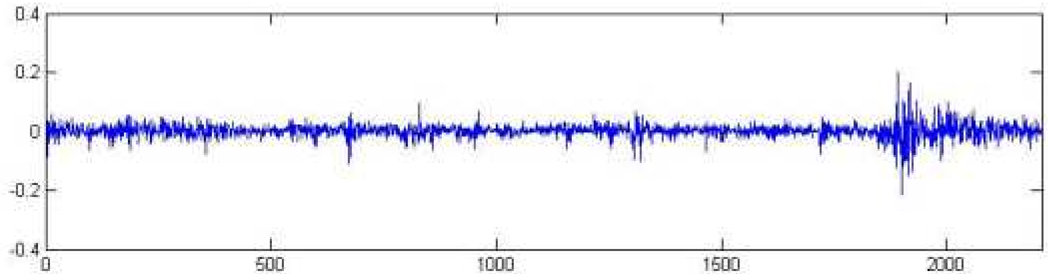
$$T_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} \cdot 100\%$$

доходность актива

$$T_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} \cdot 100\%$$



Дневные цены закрытия индекса РТС

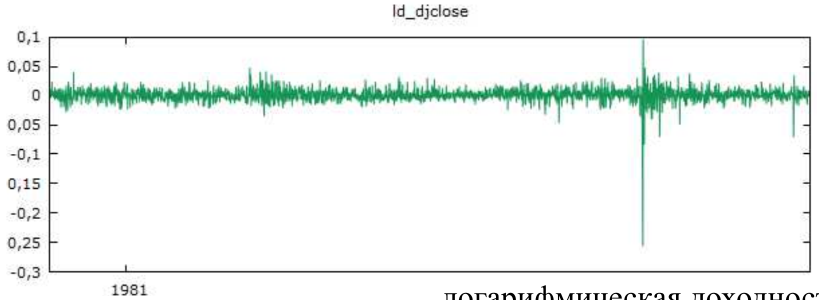


логарифмическая доходность

Волатильность: показатели динамики ряда

Логарифмическая разность (Первая разность логарифма)

Индекс



логарифмическая доходность

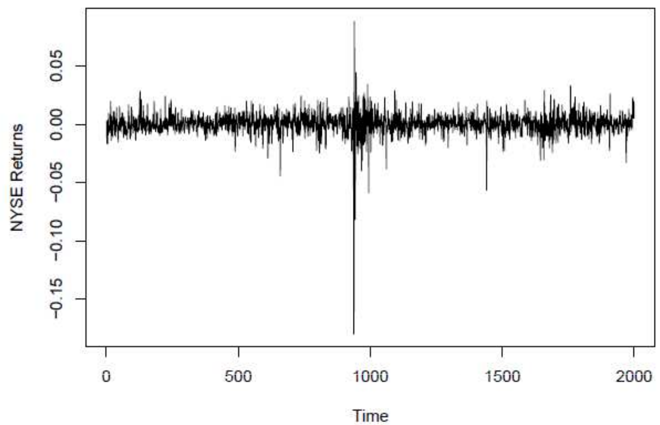


Fig. 1.4. Returns of the NYSE. The data are daily value weighted market returns from February 2, 1984 to December 31, 1991 (2000 trading days). The crash of October 19, 1987 occurs at $t = 938$.

Нью-Йоркская фондовая биржа

New York Stock Exchange,

NYSE

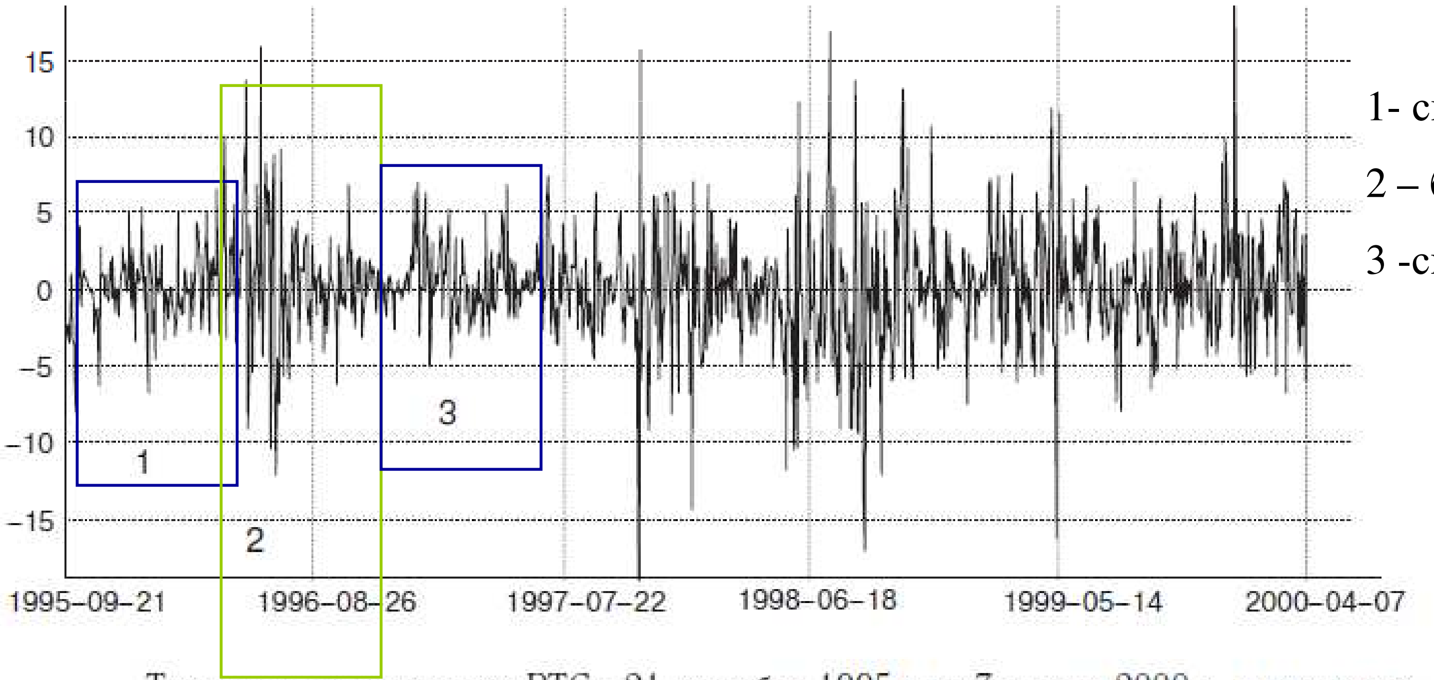
•19 октября 1987. Чёрный понедельник: индекс Доу-Джонса пережил самое большое падение в истории — на 22,6 %.

Индекс Доу-Джонса - старейший из существующих американских рыночных индексов (с 1884 г.), был создан для отслеживания развития промышленной составляющей американских фондовых рынков, индекс охватывает 30 крупнейших компаний США, рассчитывается как масштабируемое среднее цен на акции.

Волатильность

• **«Кластеризация волатильности»** - чередование периодов, когда финансовый показатель ведет себя непостоянно (высокая волатильность) и относительно спокойно.

clustering volatility: образование «пучков», концентрация волатильности, кластеризация волатильности.



1- спокойный период,

2 – более бурный,

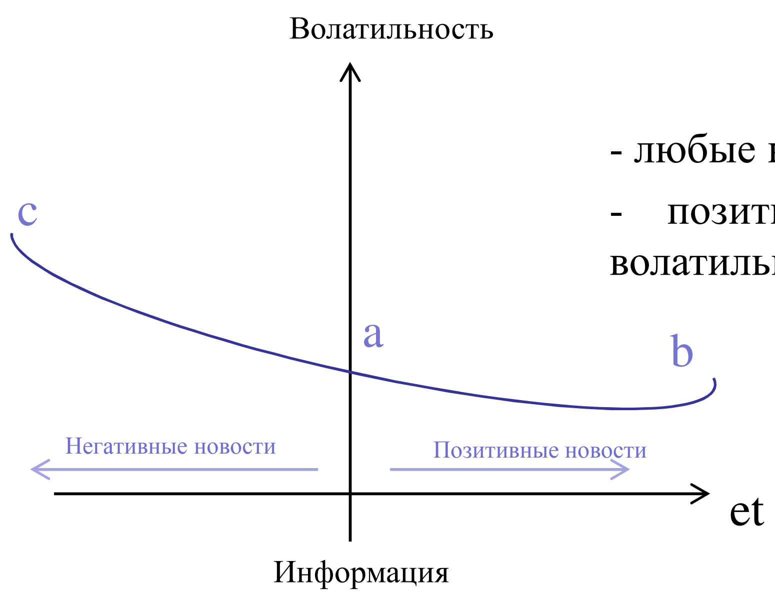
3 -спокойный

Темпы прироста индекса РТС с 21 сентября 1995 г. по 7 апреля 2000 г., в процентах.

Волатильность

• **«Асимметричная волатильность»** - плохие новости на финансовые рынки оказывают большее воздействие, чем хорошие.

•**Эффект левериджа** (эффект рычага) – эффект, при котором волатильность снижается при росте доходностей ценных бумаг и увеличивается при уменьшении доходностей.



- любые новости увеличивают волатильность.

- позитивные новости имеют меньший эффект на волатильность, чем негативные.

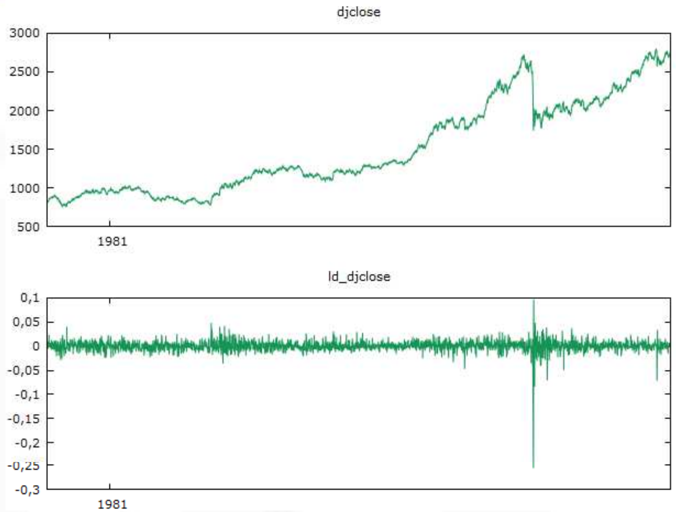
Особенности рядов доходностей активов

1. кластеризация волатильности;

2. тяжелые «хвосты» распределений шоков;

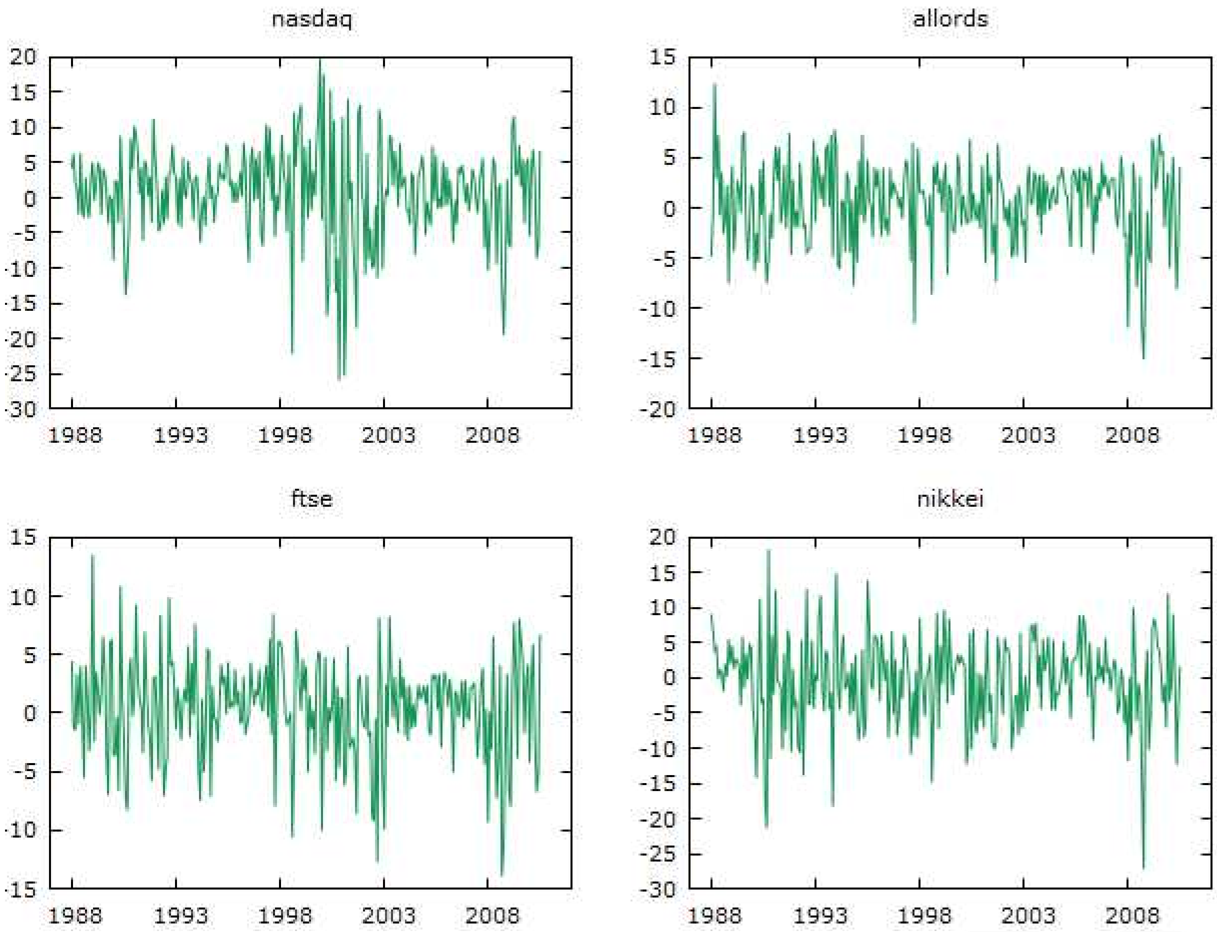
3. асимметричное влияние положительных и отрицательных шоков доходности;

4. периоды высокой волатильности часто сопровождаются большими отрицательными доходностями активов.



Philip Hans Franses, Dick van Dijk. Nonlinear time series models in empirical finance, Cambridge University Press, 2000.

Кластеризация волатильности: примеры



nasdaq: NASDAQ stock Index (USA)

allods: All Ordinaries Stock Index (Australia)

ftse : FTSE Stock Index (UK)

nikkei: NIkkei Stock Index (Japan)

Кластеризация волатильности: примеры

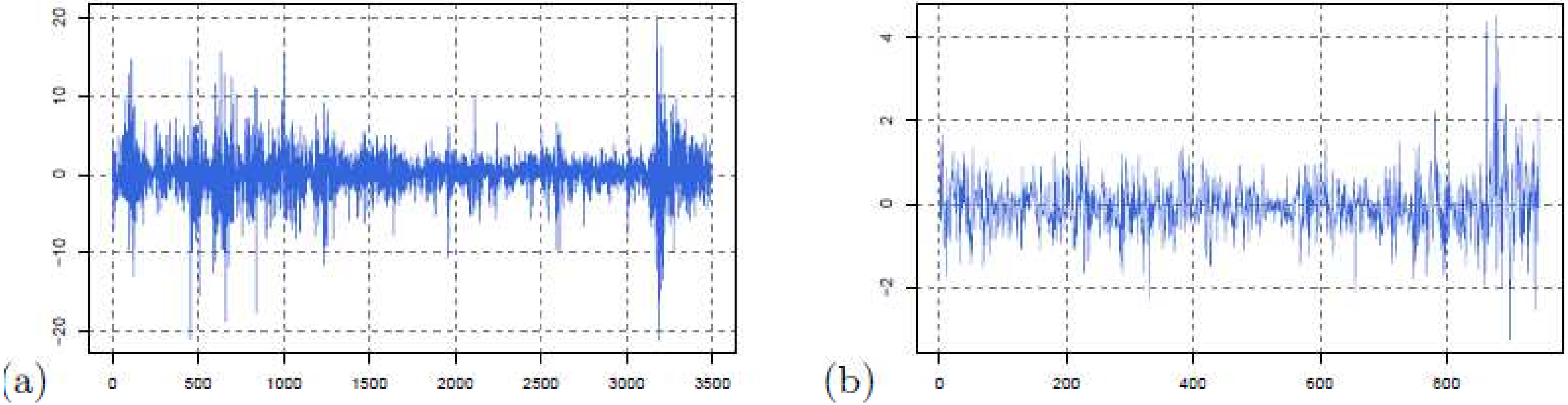
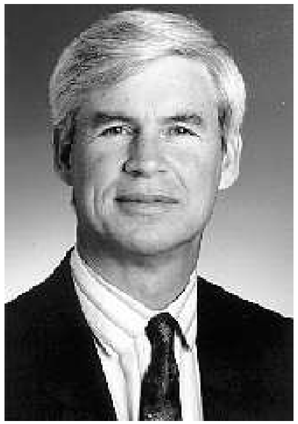


Рис. 1: (a) Доходности RTSI по дням за 1996–2009 гг., (b) темпы прироста курса £/$ по дням с октября 1981 г. по июнь 1985 г.

http://quantile.ru/08/08-AT.pdf



Роберт Ф. Энгл (Ноб премия 2003)
Robert F. Engle

- Энгл (1982) - модель ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity), модель с авторегрессионной гетероскедастичностью - моделирование кластеризации волатильности.

Гомоскедастичность и гетероскедастичность процесса

- AR(1) $y_t = \alpha\, y_{t-1} + \varepsilon_t$
-

Числовые характеристики	Безусловные	Условные
Математическое ожидание	0	$\alpha\, y_{t-1}$
Дисперсия	σ^2	$\sigma^2/(1-\alpha^2)$
Ковариация		

ARCH(1)-модель

-Энгл (1982): безусловная дисперсия – постоянная величина, но в некоторые периоды она может значительно изменяться. Временные ряды – условно гетероскедастичны.

зависимость условной дисперсии от прошлого:

$$\sigma_t^2 = h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Модель ARCH(1)

ARCH(1)

$$y_t = x_t^{/}\beta + \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{t|t-1}^2)$$

y_t – текущее значение доходности актива (например)

x_t - вектор экзогенных переменных (возможно рассмотрение одномерного ряда)

ε_t – случайная компонента, имеющая нормальное распределение

σ_t^2 – условная дисперсия, α_0 – базовый уровень волатильности.

Другая запись:

$$y_t = x_t^{/}\beta + u_t$$

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} = \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

ARCH(1): свойства процесса

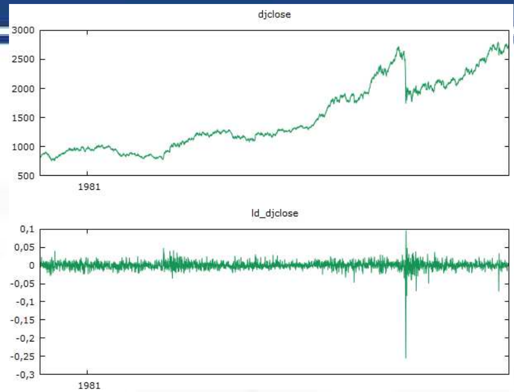
ARCH(1) $y_t = x_t^{/} \beta + u_t$

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} = \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Свойства процесса

Числовые характеристики	**Безусловные**	**Условные**
Математическое ожидание	0	0
Дисперсия	$\alpha_0 \sigma^2 / (1 - \alpha_1)$	$\left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2\right)\sigma^2$
Ковариация	0	0
Стационарность	**стационарен**	

ARCH(1): свойства процесса

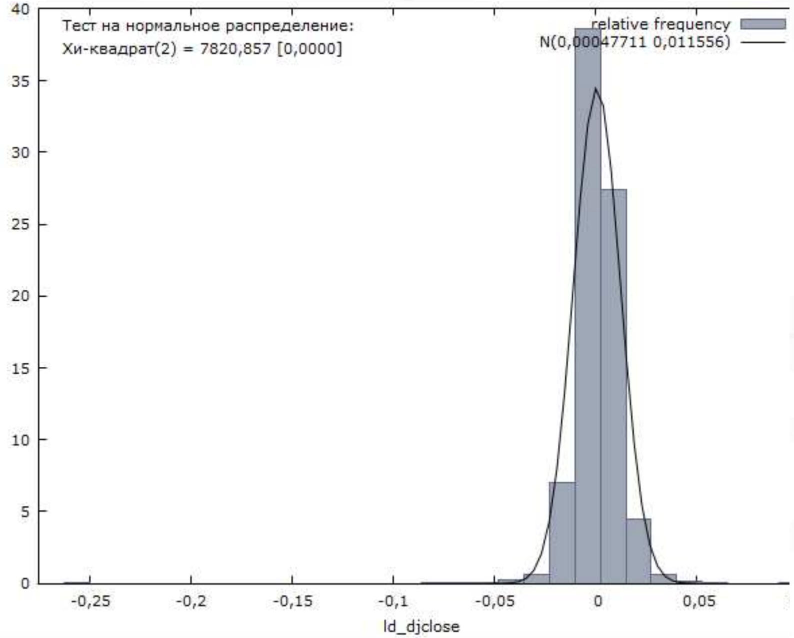


1. кластеризация волатильности;

2. тяжелые «хвосты» распределений шоков;

Коэффициент экцесса (куртозис):

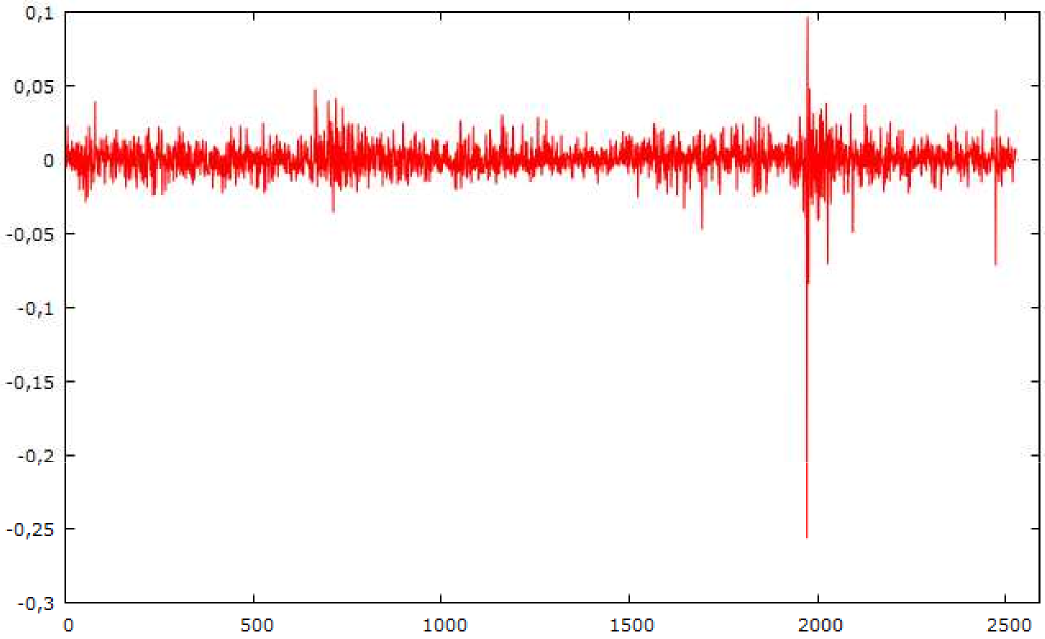
$$E_k = \frac{E(u_t^4)}{\left(E(u_t^2)\right)^2} = 3\sigma^2 \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$$

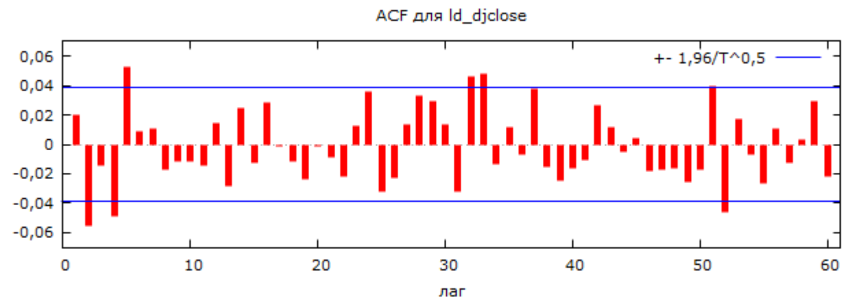


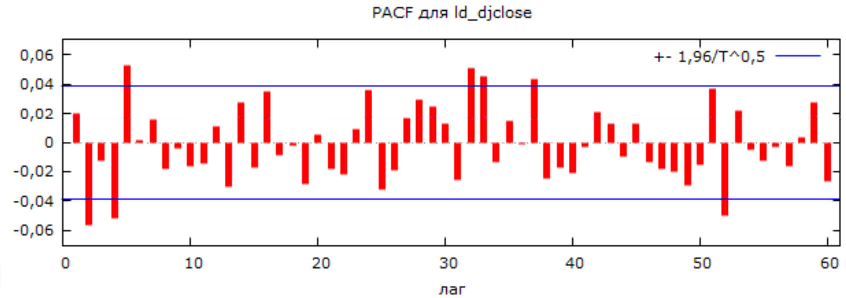
Для нормального распределения E_k=3

Для ARCH(1) E_k>3, островершинное распределение («тяжелые хвосты»).

Модель ARCH(1): характеристики процесса








```
Описательная статистика, наблюдения 1980-01-02 - 1989-12-29
для переменной 'ld_djclose' (использовано 2527 наблюдений)

  Среднее                      0,00047711
  Медиана                      0,00054160
  Минимум                        -0,25632
  Максимум                       0,096662
  Стандартное отклонение         0,011556
  Вариация                         24,221
  Асимметрия                      -4,3541
  Эксцесс                          100,70
```

Модель ARCH(p)

ARCH(p) – процесс определяется уравнением типа AR(p) для условной дисперсии

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

$$ARCH(p):$$

$$u_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} = \varepsilon_t \left(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p u_{t-p}^2\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation". Econometrica. 50 (4): 987–1008.

Модель ARCH(p): недостатки модели

Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation". Econometrica. 50 (4): 987–1008.

-исследовал зависимость з-п от инфляции в UK

-Данные: 2 кв.1938 – 2 кв.1977

-ограничения на коэффициенты

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1\left(0.4\epsilon_{t-1}^2 + 0.3\epsilon_{t-2}^2 + 0.2\epsilon_{t-3}^2 + 0.1\epsilon_{t-4}^2\right) \quad (38)$$

was proposed by Engle (1982)

Идея: H_0(***об отсутствии условной гетероскедастичности*** в остатках модели) эквивалентна равенству нулю всех коэффициентов кроме константы в уравнении дисперсии.

1. МНК к исходному уравнению

$$y_t = x_t^{/}\beta + u_t \to e_t$$

2. МНК к остаткам

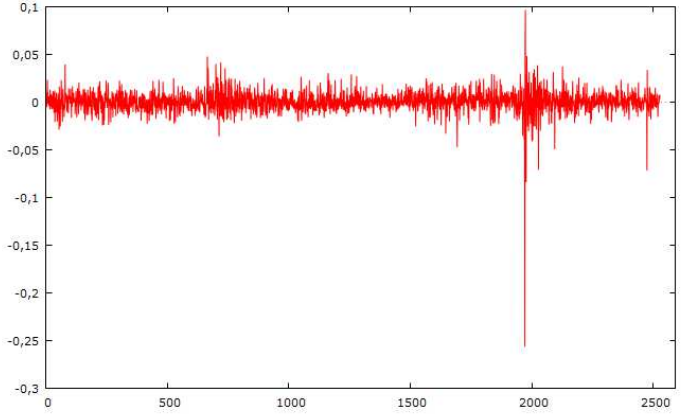
$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p e_{t-p}^2 + v_t \, (*)$$

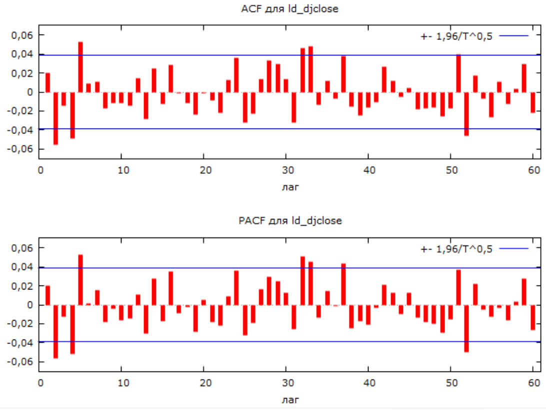
3. Проверка гипотезы об адекватности регрессии (*)

$$H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$$

4. LM-тест: $(T - p)R^2 \sim \chi^2(p)$

Тестирование наличия ARCH-эффектов





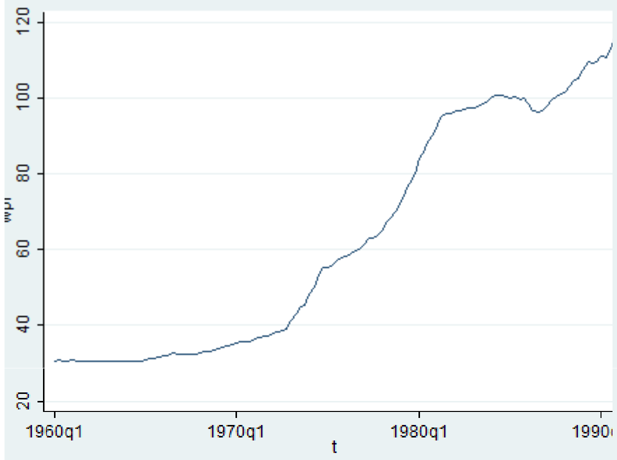
was proposed by Engle (1982)

```
Тест на наличие ARCH процессов порядка 5

             Коэффициент    Ст. ошибка    t-статистика   P-значение
  ---------------------------------------------------------------
  alpha(0)    9,24516e-05   2,64081e-05     3,501         0,0005    ***
  alpha(1)    0,0916377     0,0198437       4,618         4,07e-06  ***
  alpha(2)    0,103437      0,0199242       5,192         2,25e-07  ***
  alpha(3)    0,0301644     0,0200216       1,507         0,1320
  alpha(4)   -0,0172195     0,0199242      -0,8642        0,3875
  alpha(5)    0,0962551     0,0198433       4,851         1,30e-06  ***

  Нулевая гипотеза: ARCH процессы отсутствуют
  Тестовая статистика: LM = 85,7927
  р-значение = P(Хи-квадрат(5) > 85,7927) = 5,13379e-017
```

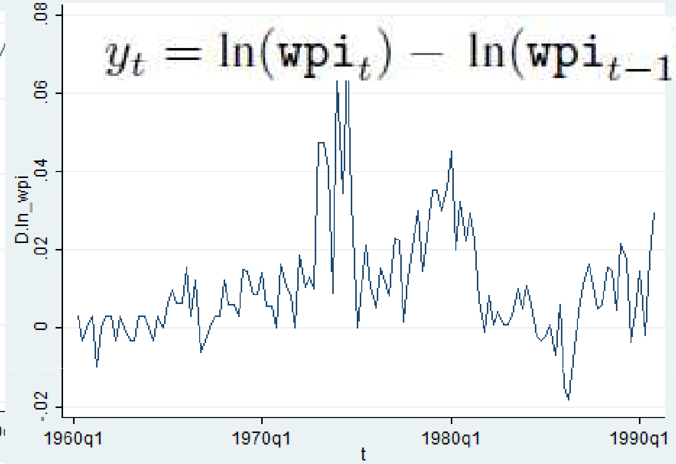
Пример оценивания 1

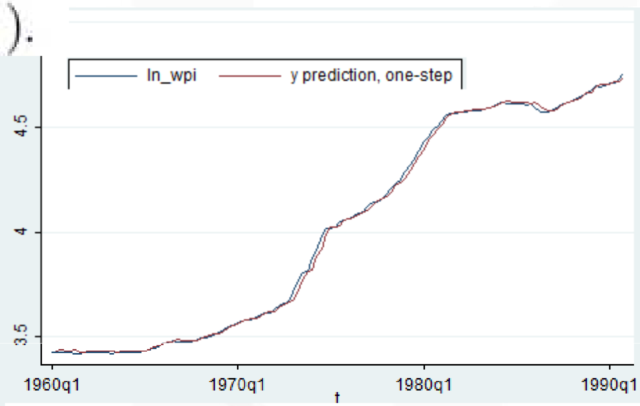
модель индекса оптовых цен (США)

Model of the U.S. Wholesale Price Index (WPI) (Enders 2004, 87–93)



$$y_t = \ln(\mathtt{wpi}_t) - \ln(\mathtt{wpi}_{t-1}).$$






```
arch D.ln_wpi, arch(1)

Sample: 1960q2 - 1990q4                        Number of obs   =        123
Distribution: Gaussian                         Wald chi2(.)    =          .
Log likelihood =  358.9719                     Prob > chi2     =          .

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
    D.ln_wpi |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
ln_wpi       |
       _cons |   .0078156   .0015534     5.03   0.000     .0047709    .0108602
-------------+----------------------------------------------------------------
ARCH         |
        arch |
         L1. |   .4441128   .1355637     3.28   0.001     .1784129    .7098128
             |
       _cons |   .0001174   9.67e-06    12.13   0.000     .0000984    .0001363
------------------------------------------------------------------------------
```

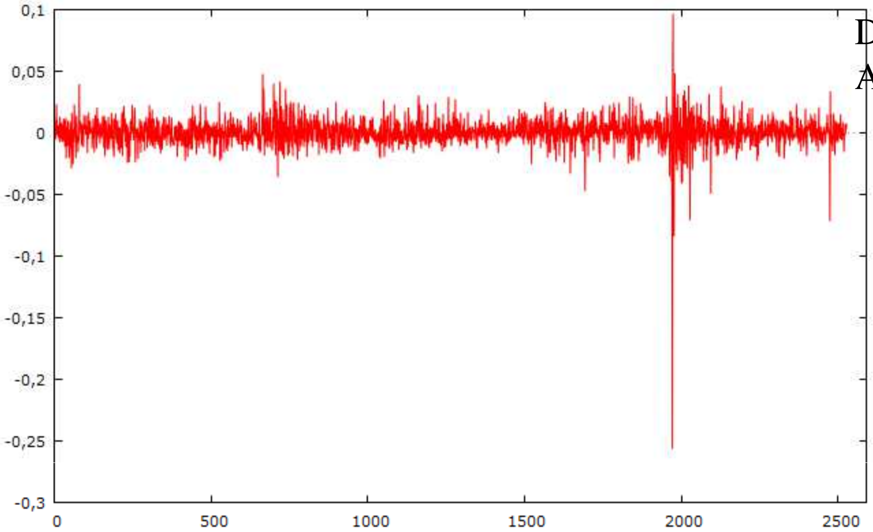
```
. estat archlm, lags(1)
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
---------------------------------------------------------------------------
    lags(p)  |          chi2               df                 Prob > chi2
-------------+-------------------------------------------------------------
       1     |          8.366               1                   0.0038
---------------------------------------------------------------------------
                     H0: no ARCH effects     vs.  H1: ARCH(p) disturbance
```

$$y_t = 0.0078 + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.0001 + 0.444\varepsilon_{t-1}^2$$

use http://www.stata-press.com/data/r11/wpi1

Пример оценивания 2



Daily stock price data (closing value of the Dow-Jones Industrial Average) from the 1980s. Gretl: djclose.gdt

Тест на наличие ARCH процессов порядка 5

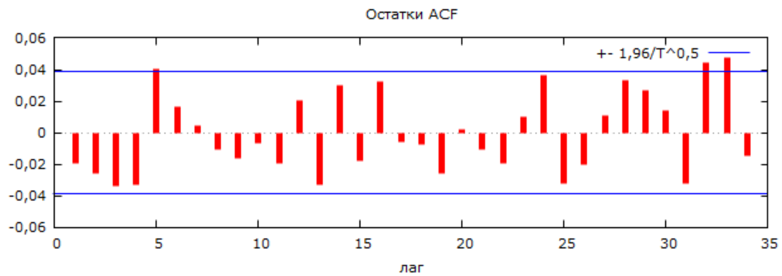
	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	P-значение	
alpha(0)	9,24516e-05	2,64081e-05	3,501	0,0005	***
alpha(1)	0,0916377	0,0198437	4,618	4,07e-06	***
alpha(2)	0,103437	0,0199242	5,192	2,25e-07	***
alpha(3)	0,0301644	0,0200216	1,507	0,1320	
alpha(4)	-0,0172195	0,0199242	-0,8642	0,3875	
alpha(5)	0,0962551	0,0198433	4,851	1,30e-06	***

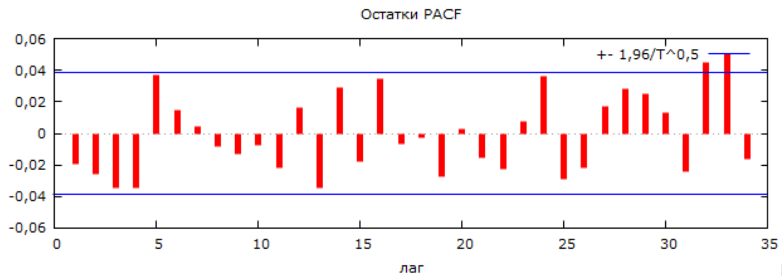
Нулевая гипотеза: ARCH процессы отсутствуют
Тестовая статистика: LM = 85,7927
p-значение = P(Хи-квадрат(5) > 85,7927) = 5,13379e-017

Модель 23: ARMA, использованы наблюдения 1980-01-03:1989-12-29 (T = 25
Оценено при помощи фильтра Кальмана (Kalman) (точный метод МП)
Зависимая переменная: ld_djclose
Стандартные ошибки рассчитаны на основе Гессиана

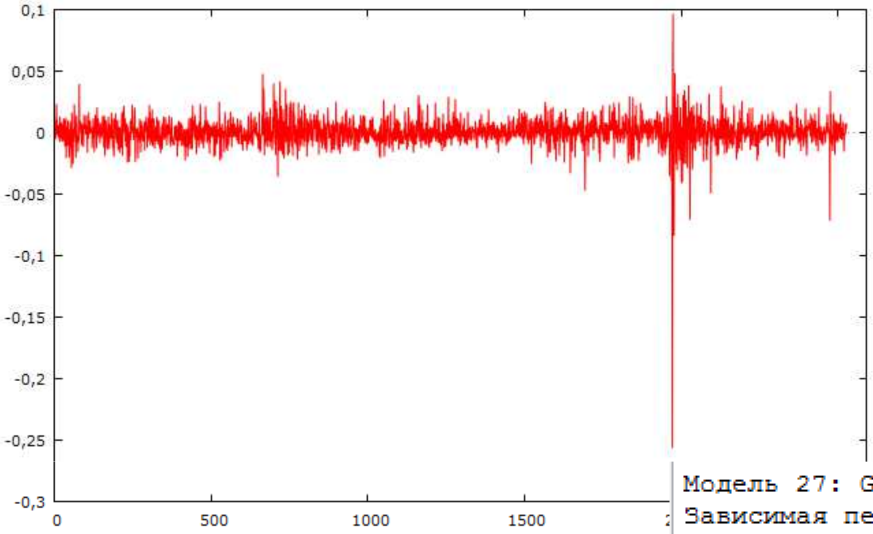
	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
const	0,000476952	0,000235101	2,029	0,0425	**
phi_1	-0,732911	0,0795164	-9,217	3,05e-020	***
theta_1	0,776146	0,0730024	10,63	2,12e-026	***

Среднее зав. перемен	0,000477	Ст. откл. зав. перемен	0,011556
Среднее инноваций	2,50e-07	Ст. откл. инноваций	0,011531
Лог. правдоподобие	7691,682	Крит. Акаике	-15375,36
Крит. Шварца	-15352,03	Крит. Хеннана-Куинна	-15366,90





Пример оценивания 2



Модель 27: GARCH, использованы наблюдения 1980-01-04:1989-12-29 (T = 2526)
Зависимая переменная: ld_djclose
Стандартные ошибки рассчитаны на основе Гессиана

	Коэффициент	Ст. ошибка	z	P-значение	
const	0,000637726	0,000187000	3,410	0,0006	***
ld_djclose_1	0,0508760	0,0224700	2,264	0,0236	**
alpha(0)	6,37795e-05	3,10724e-06	20,53	1,26e-093	***
alpha(1)	0,0957053	0,0280063	3,417	0,0006	***
alpha(2)	0,0374442	0,0169582	2,208	0,0272	**
alpha(3)	0,180461	0,0333940	5,404	6,52e-08	***
alpha(4)	0,130072	0,0260888	4,986	6,17e-07	***

Среднее зав. перемен	0,000479	Ст. откл. зав. перемен	0,011558
Лог. правдоподобие	8044,537	Крит. Акаике	-16073,07
Крит. Шварца	-16026,40	Крит. Хеннана-Куинна	-16056,14

- **Обобщенный *ARCH* процесс** (*Generalized ARCH*, *GARCH*), Т.Боллерслев (Bollerslev, 1986):

Bollerslev, Tim (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*. **31** (3): 307–327.

$$GARCH(p,q):$$

$$h_t = \mathrm{var}(\varepsilon_t) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \boxed{\gamma_1 h_{t-1} + \ldots + \gamma_q h_{t-q}}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_p(L)\,\varepsilon_t^2 + \gamma_q(L) h_t$$

$$[1 - \gamma_q(L)]h_t = \alpha_0 + \alpha_p(L)\,\varepsilon_t^2$$

$$h_t = \frac{\alpha_0}{1-\gamma_q(L)} + \frac{\alpha_p(L)}{1-\gamma_q(L)}\varepsilon_t^2 \to ARCH(\infty)$$

Tim Bollerslev, (1958-) (age 59), Denmark, Duke University NBER

Когда возможен переход *GARCH→ARCH(∞)?*

GARCH(1,1) → ARCH(∞)

Пример: GARCH(1,1)→ ARCH(∞)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\,\sigma_{t-1}^2$$

$$(1-\gamma L)\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{(1-\gamma L)} + \frac{\alpha}{(1-\gamma L)}\varepsilon_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0/(1-\gamma) + \alpha(1+\gamma L + \gamma^2 L^2 + \gamma^3 L^3 + \ldots)\varepsilon_{t-1}^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0/(1-\gamma) + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha\gamma\varepsilon_{t-2}^2 + \alpha\gamma^2\varepsilon_{t-3}^2 + \ldots$$

Самостоятельно

$$\sigma_t^2 = 0.5 + 0.7\,\varepsilon_{t-1}^2 + 0.1\,\sigma_{t-1}^2 + 0.2\,\sigma_{t-2}^2 \rightarrow ARCH(\infty)$$

ARCH(1), GARCH(1,1): распределение ошибок

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

Предположения о распределении ошибок, которые чаще всего используют при работе с GARCH-моделями:

-нормальное (Гауссово) распределение,

- t-распределение Стьюдента (и асимметричное)

-обобщенное распределение ошибок (Generalized Error Distribution (GED).

Учитывая предположение о распределении, параметры модели оцениваются ММП (методом максимального правдоподобия).

- Для t-распределения Стьюдента (при степенях свободы ν>2) моделируются «толстые хвосты».

- Для учета асимметрии используют асимметричные распределения с «толстыми хвостами», например, скошенное t-распределение Хансена.

GARCH(1,1): ММП

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\,\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\,\sigma_{t-1}^2$$

нормальное (Гауссово) распределение ошибок

Ф. правдоподобия

$$l_t = -\frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\log\sigma_t^2 - \frac{1/2(y_t - X_t^{/}\theta)^2}{\sigma_t^2}$$

t-распределение Стьюдента ошибок

Ф. правдоподобия

$$l_t = -\frac{1}{2}\log\frac{\pi(\nu-2)\Gamma(\nu/2)^2}{\Gamma((\nu+1)/2)^2} - \frac{1}{2}\log\sigma_t^2 - \frac{\nu+1}{2}\log(1+\frac{(y_t - X_t^{/}\theta)^2}{\sigma_t^2(\nu-2)})$$

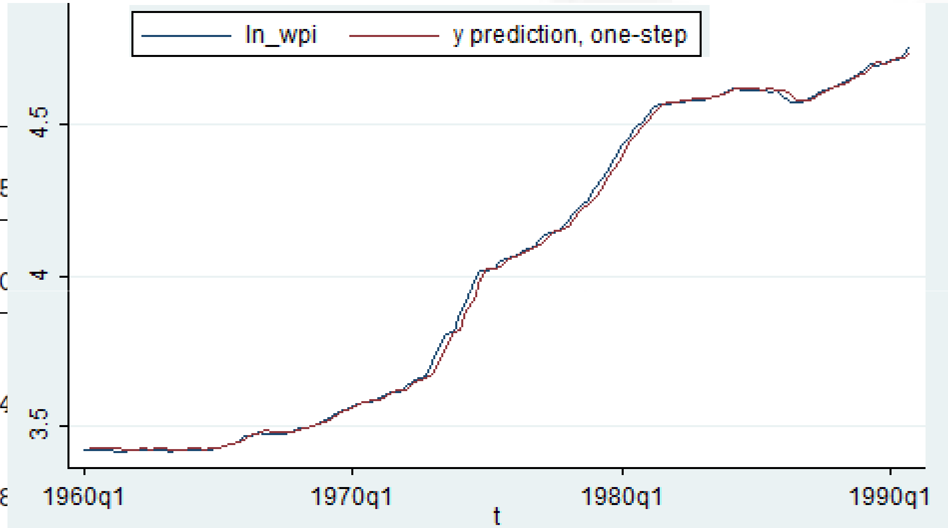
при степенях свободы ν>2 моделируются «толстые хвосты»

Model of the U.S. Wholesale Price Index (WPI) (Enders 2004, 87–93)

use http://www.stata-press.com/data/r11/wpi1

```
arch D.ln_wpi, arch(1) garch(1)
Sample: 1960q2 - 1990q4                     Number of obs
Distribution: Gaussian                      Wald chi2(.)
Log likelihood =   373.234                  Prob > chi2
```

D.ln_wpi	Coef.	OPG Std. Err.	z	P>|z|	[95	
ln_wpi						
_cons	.0061167	.0010616	5.76	0.000	.00	
ARCH						
arch L1.	.4364123	.2437428	1.79	0.073	-.04	
garch L1.	.4544606	.1866605	2.43	0.015	.08	
_cons	.0000269	.0000122	2.20	0.028	2.97e-06	.0000508



$$y_t = 0.0061 + \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.436\,\epsilon_{t-1}^2 + \boxed{0.454\,\sigma_{t-1}^2}$$

$$y_t = \ln(\mathtt{wpi}_t) - \ln(\mathtt{wpi}_{t-1}).$$

GARCH(1,1): прогнозирование волатильности

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2$$

-Волатильность в рамках модели *GARCH(1,1)*

- Прогноз

$$\mathrm{h} = 1 \rightarrow \hat{\sigma}_{T+1}^2 = E(\sigma_{T+1}^2 | \Omega_T) = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_T^2 + \gamma \sigma_T^2 \ |\Omega_T) = \ldots$$

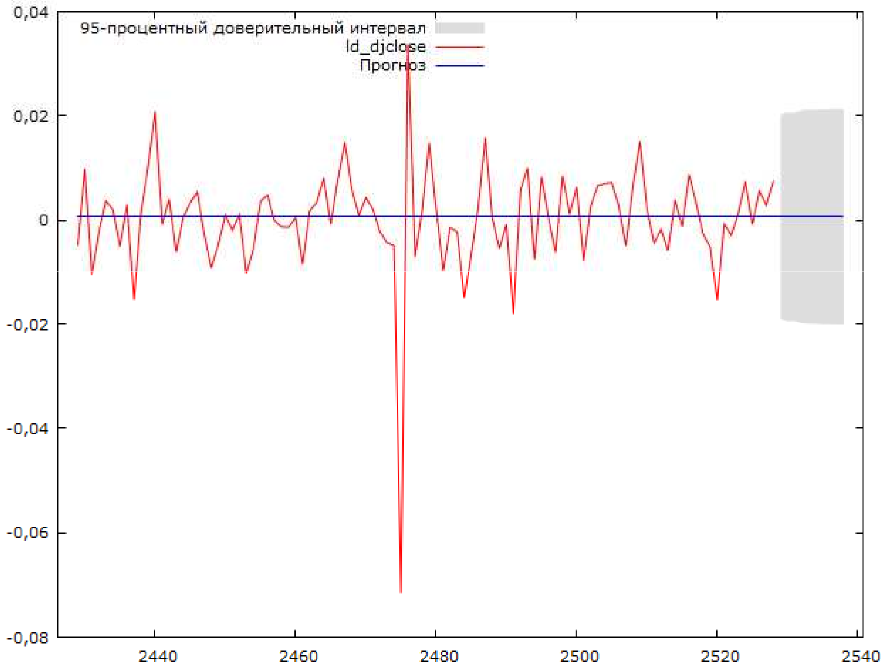
$$\mathrm{h} = 2 \rightarrow \hat{\sigma}_{T+2}^2 = E(\sigma_{T+2}^2 | \Omega_T) = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+1}^2 + \gamma \sigma_{T+1}^2 \ |\Omega_T) = \ldots$$

$$\hat{\sigma}_{T+\mathrm{h}}^2 = E(\sigma_{T+\mathrm{h}}^2 | \Omega_T) = E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{T+\mathrm{h}\text{-}1}^2 + \gamma \sigma_{T+\mathrm{h}\text{-}1}^2 \ |\Omega_T) =$$

$$= \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma) E(\sigma_{T+\mathrm{h}\text{-}1}^2 | \Omega_T) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma)\hat{\sigma}_{T+\mathrm{h}\text{-}1}^2$$

GARCH(1,1): прогнозирование волатильности

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \, \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \, \sigma_{t-1}^2$$



GARCH(1,1): прогнозирование волатильности пример

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2$$

t	$\hat{\sigma}_t^2$	$\hat{\varepsilon}_t^2$
499	0,003	0,001
500		0,002
501		–
502		–

$$t = 500 \rightarrow \hat{\sigma}_{500}^2 = \ldots$$

$$t = 501 \rightarrow \hat{\sigma}_{501}^2 = \ldots$$

$$t = 502 \rightarrow \hat{\sigma}_{502}^2 = \ldots$$

GARCH(1,1): модификации

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\, \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1\, \sigma_{t-1}^2$$

- Нельсон (1991): Экспоненциальная *GARCH* - **EGARCH**

$$\log(\sigma_t^{\ 2}) = \omega + \beta \log(\sigma_{t-1}^{\ 2}) + \boxed{\gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^{\ 2}}} + \alpha \left[\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^{\ 2}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]}$$

-реакция на «новости»

- Glosten, Jaganathan and Runkle (1993) **GJR model**

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^{\ 2} + \gamma u_{t-1}^{\ 2} I_{t-1}$$

где $I_{t-1} = 1$ if $u_{t-1} < 0$

$= 0$ otherwise

Класс моделей ARCH в *Stata*

ARCH (Engle 1982)
GARCH (Bollerslev 1986)
ARCH-in-mean (Engle, Lilien, and Robins 1987)
GARCH with ARMA terms
EGARCH (Nelson 1991)
TARCH, threshold ARCH (Zakoian 1994)
GJR, form of threshold ARCH (Glosten, Jagannathan, and Runkle 1993)
SAARCH, simple asymmetric ARCH (Engle 1990)
PARCH, power ARCH (Higgins and Bera 1992)
NARCH, nonlinear ARCH
NARCHK, nonlinear ARCH with one shift
A-PARCH, asymmetric power ARCH (Ding, Granger, and Engle 1993)
NPARCH, nonlinear power ARCH

Рекомендуемая литература:

- Engle, Robert F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of Variance of United Kingdom Inflation". Econometrica. 50 (4): 987–1008.

- Bollerslev, Tim (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*. **31** (3): 307–327.

- Эконометрический ликбез: волатильность// Квантиль№8. http://quantile.ru/08/08-ER.pdf