



Тема 3.

Модели нестационарных временных рядов



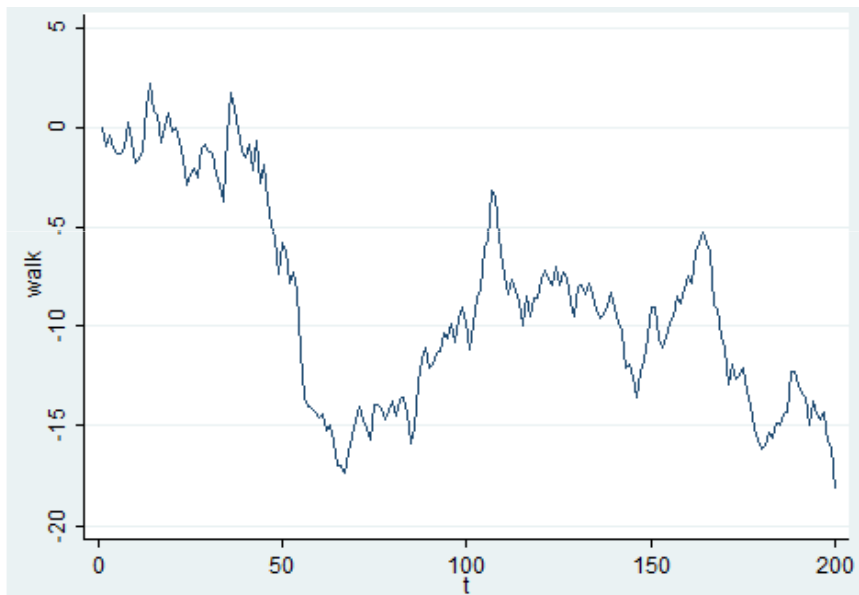
Тема 3.1.

ARIMA(p, d, q) процессы. TS и DS процессы.

Примеры нестационарных процессов

случайное блуждание $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$



Бокс и Дженкинс (1970-е г.г.) выделили класс нестационарных ВР

Опр. Ряд называется *интегрируемым* порядка d , если он и его первые $(d - 1)$ разности не являются стационарными, а d -ая разность – стационарна и его автоковариационная функция удовлетворяет условию:

$$0 < \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) < \infty$$

Обозначение: $y_t \sim I(d)$, d – порядок интегрируемости ряда.

Опр. Долгосрочная дисперсия – это сумма автоковариаций

$$H = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) = \gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{+\infty} \gamma(\tau)$$

1. $H > 0$

3. $\Delta^d y_t$ имеют $0 < H < \infty$ (*)

2. $0 < \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) < \infty$

- Долгосрочную дисперсию вычисляют для стационарных процессов.

- Вычислить H для $MA(1)$.



$I(0), I(1)$: примеры

Опр. Ряд называется *интегрируемым* порядка d , если он и его первые $(d - 1)$ разности не являются стационарными, а d -ая разность – стационарна. Обозн: $y_t \sim I(d)$

$I(0)$

1. Белый шум
2. МА-процессы
3. AR-процессы (некоторые)

$I(1)$

1. Случайное блуждание
2. AR-процессы (некоторые)

AR(2) $y_t = 1,5y_{t-1} + 0,5y_{t-2} + \varepsilon_t$

$I(2)$ $y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t$



Свойства интегрированных процессов

1. Если $y_t \sim I(d)$, $a \neq 0 \rightarrow (ay_t + b) \sim I(d)$
2. Если $y_t \sim I(0)$, $x_t \sim I(0) \rightarrow (y_t + x_t) \sim I(0)$
3. Если $y_t \sim I(0)$, $x_t \sim I(1) \rightarrow (y_t + x_t) \sim I(1)$

TSP и DSP процессы

1 тип: процесс, приводимый к стационарному путем выделения линейного тренда – тренд-стационарный процесс (trend-stationary process (TSP)).

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t.$$

Приводится к стационарному виду путем выделения в регрессию линейного тренда. Нестационарен из-за непостоянной средней.

2 тип: процесс, приводимый к стационарному путем взятия разности – разностно-стационарный процесс (difference-stationary process (DSP)). Ряды, имеющие ненулевой порядок интегрируемости.

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Нестационарен из-за непостоянной дисперсии.

- **тренд-стационарный** – $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$
- О разностно-стационарных рядах говорят, что они содержат **стохастический тренд**

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = y_0 + \sum_{i=0}^t \varepsilon_{t-i} = y_0 + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots + \varepsilon_0,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{t-i} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \dots - \text{стохастический тренд}$$

Долгосрочная дисперсия

$$H = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) = \gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{+\infty} \gamma(\tau)$$

$$\text{для } \Delta^d y_t \quad 0 < H < \infty \quad (*)$$

Условие (*) позволяют различать TS и DS

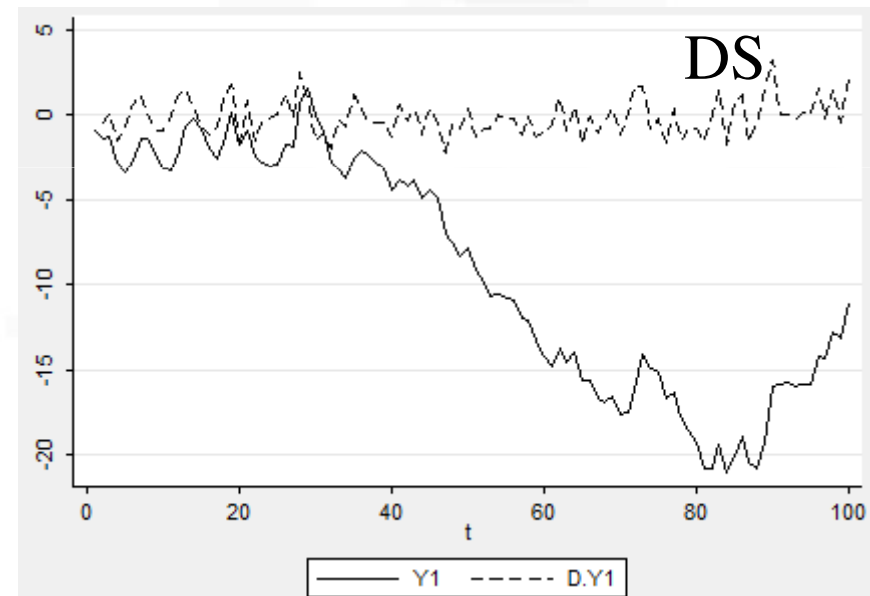
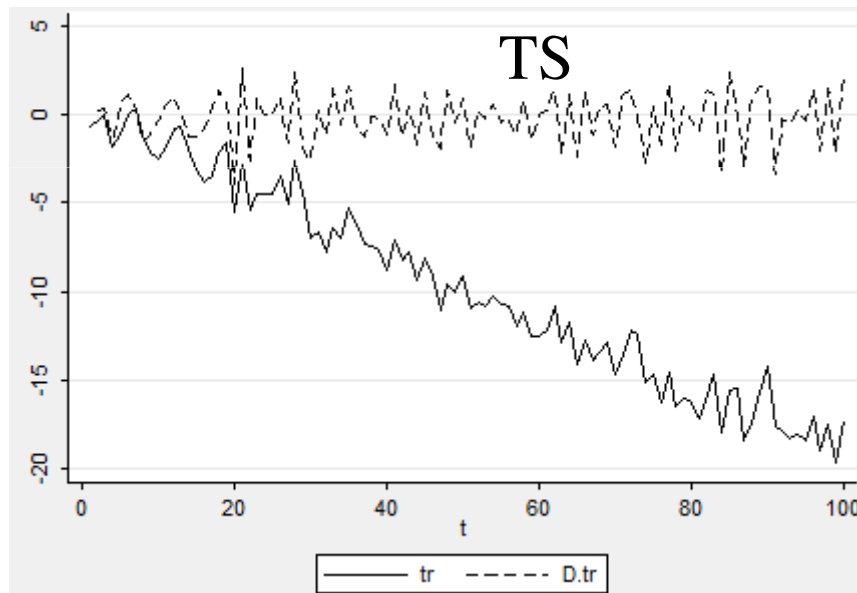
TSP и DSP процессы

Приведение к стационарному виду

- **Взятие разности:** $\Delta y_t = D.y_t = y_t - y_{t-1}$

1: TS $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (\alpha + \beta t + \varepsilon_t) - (\alpha + \beta(t-1) + \varepsilon_{t-1}) = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$,

2: DS $\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t$.



Последствия взятия разности для TS рядов: (1) приводит к модели ARMA с необратимой МА-частью: $\Delta y_t = \beta + (1 - L)\varepsilon_t$.

- Взятие разности:

$$1: TS \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = (\alpha + \beta t + \varepsilon_t) - (\alpha + \beta(t-1) + \varepsilon_{t-1}) = \beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1},$$

$$2: DS \Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \alpha + \varepsilon_t.$$

- Долгосрочные дисперсии процессов:

$$H = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \gamma(\tau) = \gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{+\infty} \gamma(\tau) \quad \text{для} \quad \Delta^d y_t \quad 0 < H < \infty \quad (*)$$

$$1: TS \quad V(\Delta y_t) = V(\beta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) =$$

$$2: DS \quad V(\Delta y_t) = V(\alpha + \varepsilon_t) =$$



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ЭКОНОМИКИ И СТАТИСТИКИ
(VSES.RU)

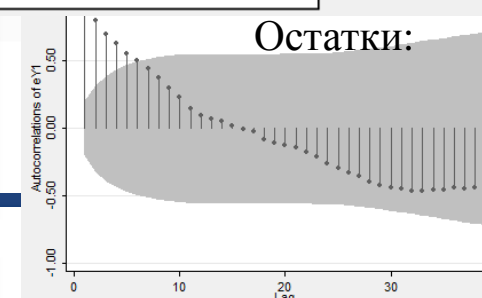
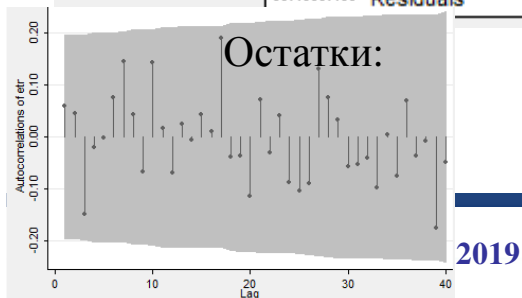
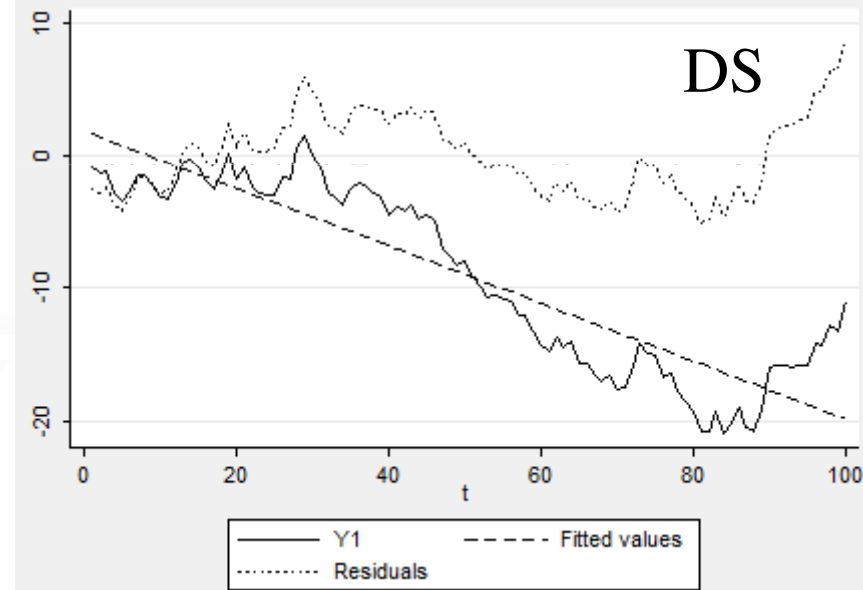
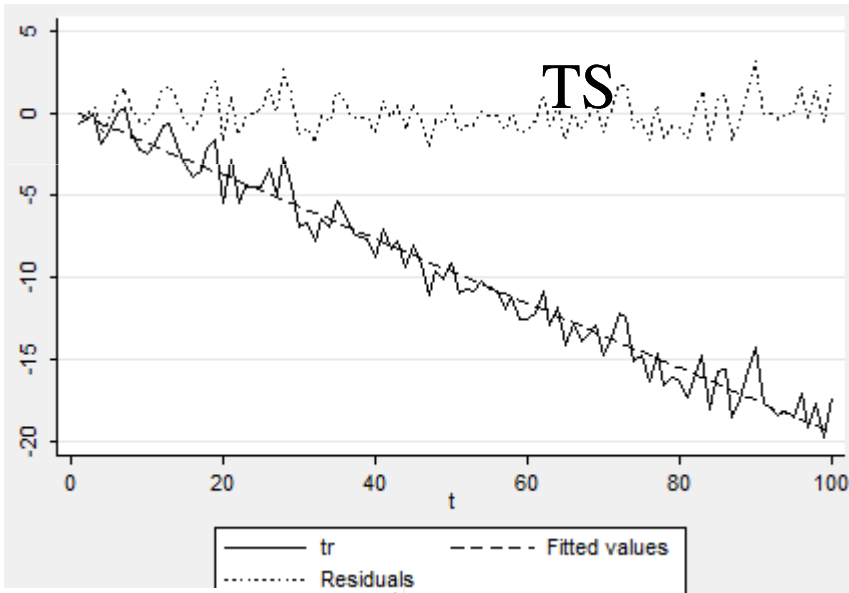
TSP и DSP процессы

Приведение к стационарному виду

-Выделение тренда

Nelson C.R., Kang H. Pitfalls in the Use of Time as an Explanatory Variable in Regression // Journal of Business and Economic Statistics. January 1984. Vol. 2. P. 73–82.

- Проблема кажущихся трендов («spurious trends»)

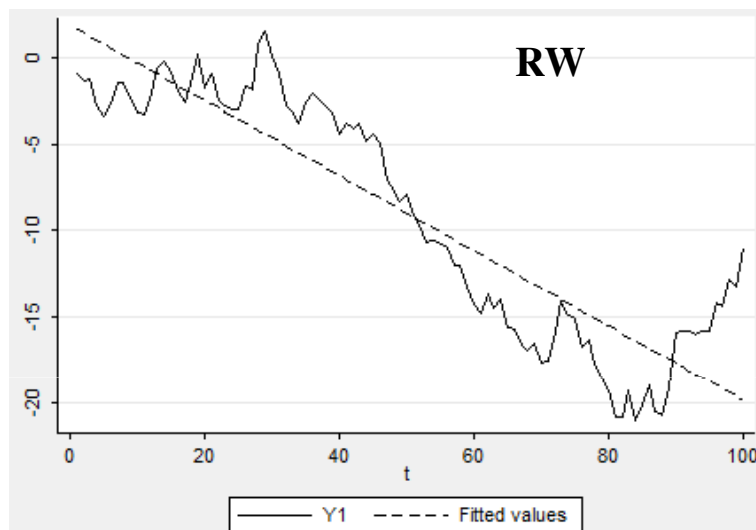




НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И СТАТИСТИКИ

Проблема кажущихся трендов

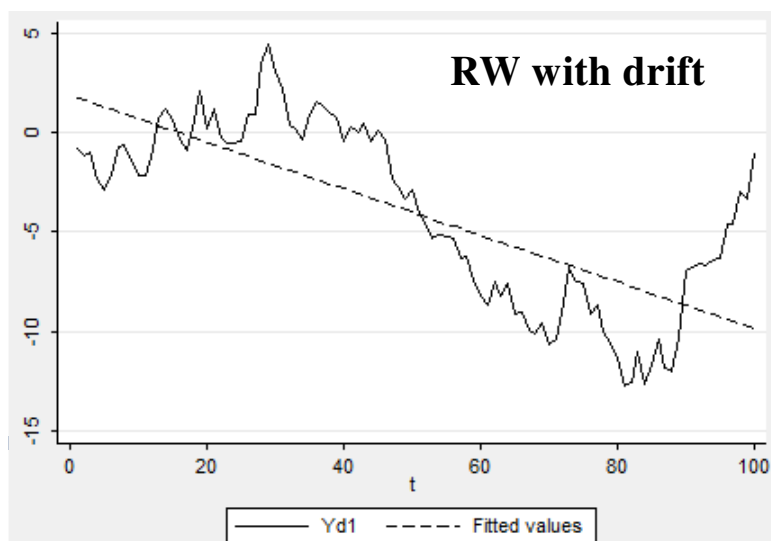
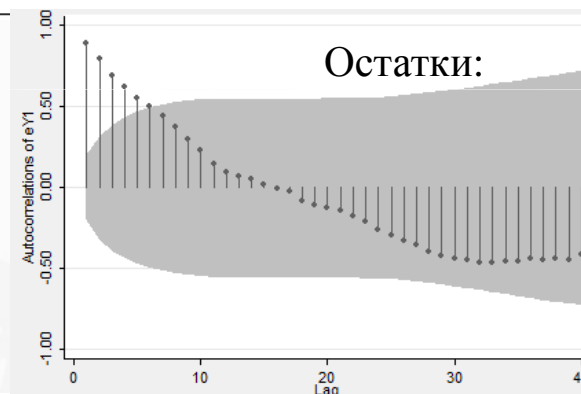
Nelson C.R., Kang H. Pitfalls in the Use of Time as an Explanatory Variable in Regression // Journal of Business and Economic Statistics. January 1984. Vol. 2. P. 73-82



Source	SS	df	MS
Model	3931.01823	1	3931.01823
Residual	925.282153	98	9.44165462
Total	4856.30038	99	49.0535392

Number of obs = 100
F(1, 98) = 416.35
Prob > F = 0.0000
R-squared = 0.8095
Adj R-squared = 0.8075
Root MSE = 3.0727

	Y1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
t		-.2172025	.0106448	-20.40	0.000	-.2383267 - .1960783
_cons		1.862015	.6191837	3.01	0.003	.6332654 3.090765



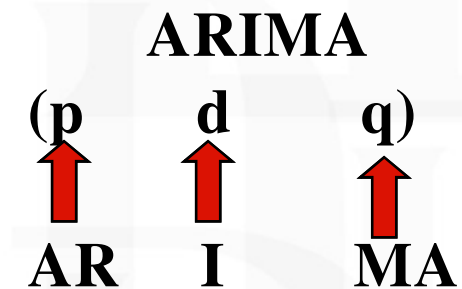
Source	SS	df	MS
Model	1144.58815	1	1144.58815
Residual	925.282113	98	9.44165421
Total	2069.87026	99	20.9077804

Number of obs = 100
F(1, 98) = 121.23
Prob > F = 0.0000
R-squared = 0.5530
Adj R-squared = 0.5484
Root MSE = 3.0727

	Yd1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
t		-.1172025	.0106448	-11.01	0.000	-.1383267 - .0960783
_cons		1.862015	.6191836	3.01	0.003	.6332655 3.090765

Опр. Нестационарные процессы, кот. путем взятия последовательных разностей приводятся к классу *ARMA* наз. процессами авторегрессии *интегрированного скользящего среднего* **ARIMA(p,d,q)** (AutoRegressive Integrated Moving Average - **ARIMA(p,d,q) models**), где
 p – порядок авторегрессии,
 d – порядок разностей (интеграции),
 q – порядок скользящего среднего.

- $ARIMA(p,0,q) = ARMA(p,q)$



Опр. Процесс y_t называют *интегрированным процессом авторегрессии скользящего среднего* $ARIMA(p, d, q)$ (AutoRegressive Integrated Moving Average - $ARIMA(p, d, q)$ models)

если $y_t \sim I(d)$ и

$$y_t \sim ARIMA(p, d, q)$$

$$\alpha_p(L) \Delta^d y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

$$\alpha_p(L) (1-L)^d y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t,$$

$$\alpha_p(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p,$$

$$\theta_q(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q.$$

Пусть процесс

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

нестационарный.

После первой разности:

$$\Delta y_t = \alpha_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Процесс стал стационарным $\rightarrow ARIMA(p, 1, q)$

ARIMA(p, 1, q) в операторном виде:

$$\alpha_p(L) \Delta y_t = \theta_q(L) \varepsilon_t$$

$$\alpha_p(L)(1-L)y_t = \theta_q(L)\varepsilon_t$$



3.2. Тесты на единичные корни

- Единичный корень (unit root) – характеристика нестационарного процесса.

$$\text{AR}(p) \quad y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\alpha_p(L)y_t = \varepsilon_t, \quad \alpha_p(L) = (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \alpha_3 L^3 - \dots - \alpha_p L^p)$$

$$\alpha(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i z^i = 0$$

- $|z_i|=1$ – процесс нестационарный
- Если k корней $|z_i|=1$, а остальные лежат вне ед.окружности, то по опр. это интегрированный процесс порядка k : $I(k)$

$$I(1): y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow (1-L)y_t = \varepsilon_t$$

$$I(2): y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + \varepsilon_t \rightarrow (1-L)(1-L)y_t = \varepsilon_t$$



Тесты на единичный корень

-Тест Дики-Фуллера (Dickey–Fuller test, DF-test)

Dickey, D. A., and W. A. Fuller. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association* 74: 427–431.

David Alan Dickey (1945–)

Wayne Arthur Fuller (1931–)

Тест Филлипса-Перрона (Phillips–Perron test, PP-test)

Phillips, P. C. B.; Perron, P. (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression".

Biometrika 75 (2): 335–346.

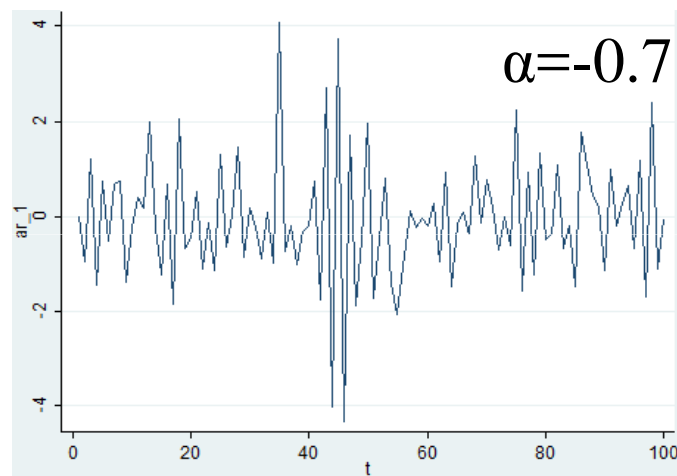
-Тест Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) (Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина)

-Kwiatkowski, D.; Phillips, P. C. B.; Schmidt, P.; Shin, Y. (1992). "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root". *Journal of Econometrics* 54 (1–3): 159–178.

Критерий Дики –Фуллера (Dickey–Fuller test, DF-test)

$$\text{AR}(1) \quad y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2)$$



Идея проверки нестационарности: тестирование уравнения (1) на единичный корень (*unit root*)

$$H_0: a=1$$

$$H_1: a<1$$

Dickey, D. A., and W. A. Fuller. 1979. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association* 74: 427–431.

Критерий Дики –Фуллера

Преобразование уравнения (1):

$$\begin{aligned} y_t = a y_{t-1} + \varepsilon_t &\Leftrightarrow y_t - y_{t-1} = a y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \Delta y_t = (a-1) y_{t-1} + \varepsilon_t &\Leftrightarrow \boxed{\Delta y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t} \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} H_0: \beta &= 0 \\ H_1: \beta &< 0 \end{aligned}$$

- Если $\beta=0$, y_t обладает единичным корнем и является $I(1)$, при условии, что Δy -стационарный. Если $\beta<0$, y – стационарный: $I(0)$.

- МНК \rightarrow оценка коэффициента и ст. ошибки, вычисляют $t_{набл.}$

$$\hat{t}_{набл.} = \hat{\tau} = \frac{\hat{\beta}}{S(\hat{\beta})} \sim DF$$

Критерий Дики –Фуллера

- t-распределение и DF-распределение

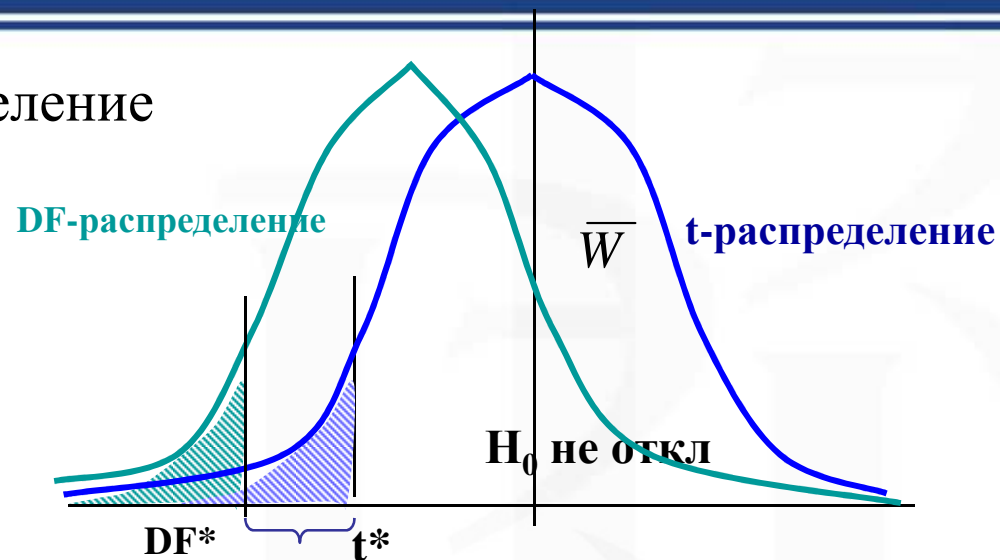


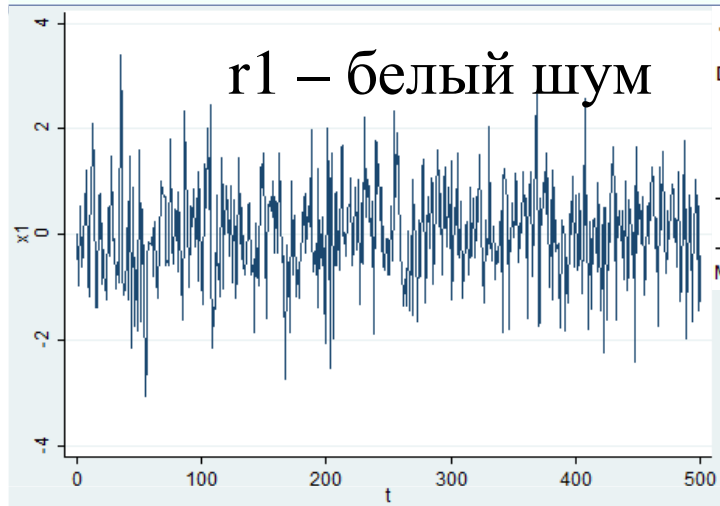
Table A2.7 Dickey–Fuller critical values for different significance levels, α

Sample size T	0.01	0.025	0.05	0.10
	τ			
25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60
50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61
100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61
250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
∞	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62

Brooks 2014

Значения τ – метод Монте-Карло (см. Brooks)

Критерий Дики –Фуллера: пример



```
. dfuller r1
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 199

	Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
		1% Critical value	5% Critical value	10% Critical value
z(t)	-14.976	-3.477	-2.883	-2.573

MacKinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000

D.r1	Coef.	Std. Err.	t	P> t
r1				
L1.	-1.063662	.0710224	-14.98	0.000
_cons	.0462279	.074225	0.62	0.534

$$t_{набл} = -14.976 < DF_{кр} = -3.47$$

Вывод: Гипотеза о том, что ряд является нестационарным отвергается



Критерий Дики –Фуллера

Случай 2. наличие свободного члена: $y_t = \delta + a y_{t-1} + \varepsilon_t$,

$$y_t - y_{t-1} = \delta + a y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad y_t - y_{t-1} = \delta + y_{t-1}(a - 1) + \varepsilon_t,$$

$$\Delta y_t = \delta + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Случай 3. наличие детерминированного тренда:

$$y_t = \delta + a y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t,$$

$$y_t - y_{t-1} = \delta + a y_{t-1} - y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t,$$

$$\Delta y_t = \delta + (a - 1) y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t, \quad \Delta y_t = \delta + \beta y_{t-1} + \gamma t + \varepsilon_t.$$



Критерий Дики –Фуллера

Table A2.7 Dickey–Fuller critical values for different significance levels, α

Sample size T	0.01	0.025	0.05	0.10
τ				
25	−2.66	−2.26	−1.95	−1.60
50	−2.62	−2.25	−1.95	−1.61
100	−2.60	−2.24	−1.95	−1.61
250	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
500	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
∞	−2.58	−2.23	−1.95	−1.62
τ_μ				
25	−3.75	−3.33	−3.00	−2.63
50	−3.58	−3.22	−2.93	−2.60
100	−3.51	−3.17	−2.89	−2.58
250	−3.46	−3.14	−2.88	−2.57
500	−3.44	−3.13	−2.87	−2.57
∞	−3.43	−3.12	−2.86	−2.57
τ_τ				
25	−4.38	−3.95	−3.60	−3.24
50	−4.15	−3.80	−3.50	−3.18
100	−4.04	−3.73	−3.45	−3.15
250	−3.99	−3.69	−3.43	−3.13
500	−3.98	−3.68	−3.42	−3.13
∞	−3.96	−3.66	−3.41	−3.12

Source: Fuller (1976). Reprinted with the permission of John Wiley & Sons.

Результат Маккинона

MacKinnon approximate, 1991

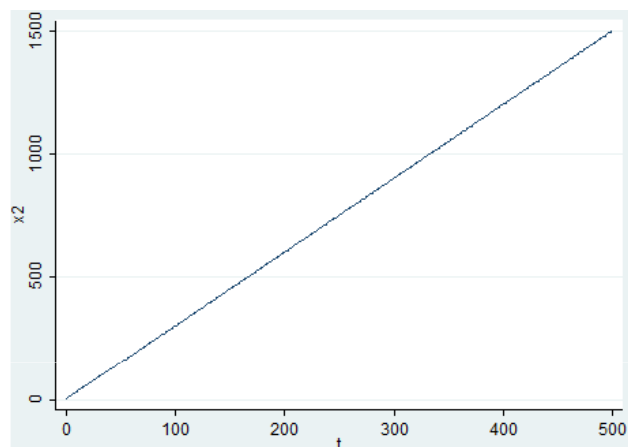
Оценивание в Gretl

$$\Delta y_t = \mu_t + \varphi y_{t-1} + \sum_{i=1}^p y_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t.$$

$$\begin{array}{c} \hline \mu_t \\ \hline 0 \\ \mu_0 \\ \mu_0 + \mu_1 t \\ \hline \mu_0 + \mu_1 t + \mu_1 t^2 \end{array}$$

Критерий Дики –Фуллера: пример

$x2$ – линейный тренд ($x2_t = 3 + 3t + \varepsilon_t$)



`. dfuller x2`

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 499

	Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
$z(t)$	-0.110	-3.440	-2.870	-2.570

Mackinnon approximate p-value for $z(t)$ = 0.9485

`. dfuller x2, trend`

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 499

	Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
$z(t)$	-22.090	-3.980	-3.420	-3.130

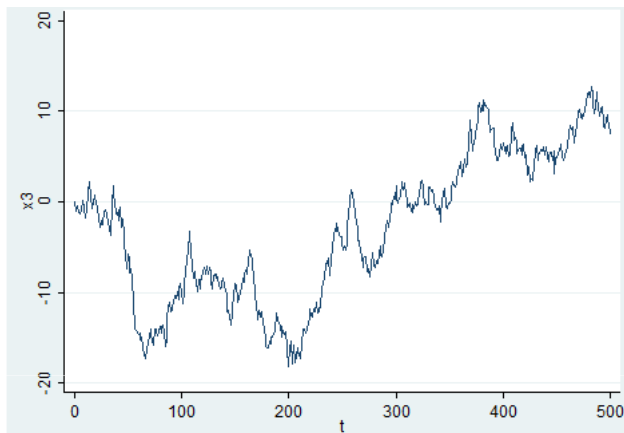
Mackinnon approximate p-value for $z(t)$ = 0.0000

Вывод: Ряд является тренд - стационарным



Критерий Дики –Фуллера: пример

$x3$ – случайное блуждание ($x3_t = x3_{t-1} + \varepsilon_t$)



```
. dfuller x3
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 499

	Test Statistic	1% Critical value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical value	10% Critical value
z(t)	-1.072	-3.440	-2.870	-2.570

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.7259

```
. dfuller x3, trend
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 499

	Test Statistic	1% Critical value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical value	10% Critical value
z(t)	-2.689	-3.980	-3.420	-3.130

```
. dfuller D.x3
```

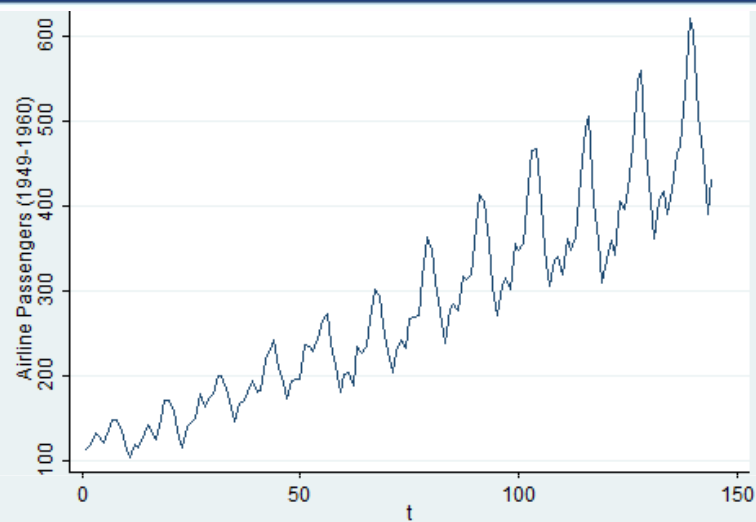
Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 498

	Test Statistic	1% Critical value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical value	10% Critical value
z(t)	-22.065	-3.440	-2.870	-2.570

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000

Критерий Дики –Фуллера: пример



```
. use http://www.stata-press.com/data/r13/air2
(TIMESLAB: Airline passengers)
```

```
. dfuller air, lags(3) trend regress
```

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 140

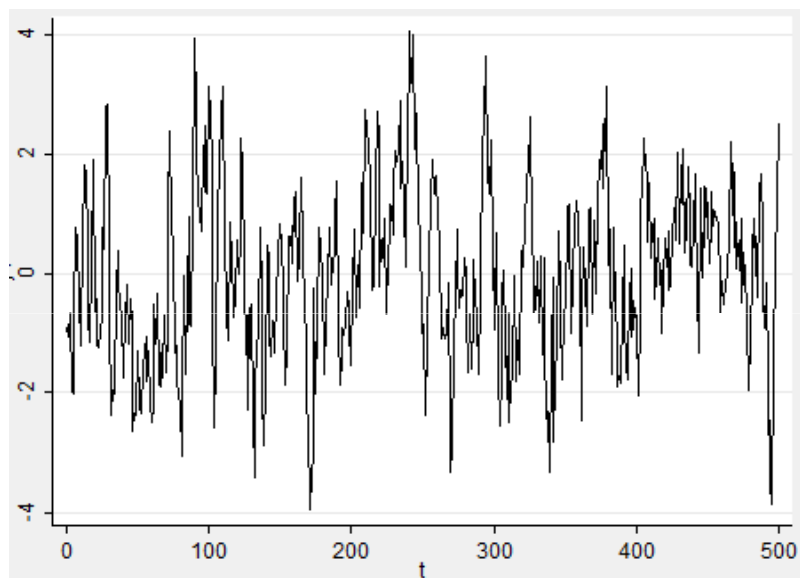
	Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
		1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
Z(t)	-6.936	-4.027	-3.445	-3.145

MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000

D.air	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
air						
L1.	-.5217089	.0752195	-6.94	0.000	-.67048	-.3729379
LD.	.5572871	.0799894	6.97	0.000	.399082	.7154923
L2D.	.095912	.0876692	1.09	0.276	-.0774825	.2693065
L3D.	.14511	.0879922	1.65	0.101	-.0289232	.3191433
_trend	1.407534	.2098378	6.71	0.000	.9925118	1.822557
_cons	44.49164	7.78335	5.72	0.000	29.09753	59.88575

Критерий Дики –Фуллера: недостаток

$$AR(1) \quad x_t = 0.7x_{t-1} + \varepsilon_t$$



Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = **499**

Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
$z(t)$	-9.227	-3.440	-2.870

MacKinnon approximate p-value for $z(t)$ = **0.0000**

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = **18**

Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
$z(t)$	-1.586	-3.750	-3.000

MacKinnon approximate p-value for $z(t)$ = **0.4906**

Classifying hypothesis testing errors and correct conclusions

		Reality	
		H_0 is true	H_0 is false
Result of test	Significant (reject H_0)	Type I error = α	✓
	Insignificant (do not reject H_0)	✓	Type II error = β

! DF-тест имеет малую мощность



Расширенный тест Дики –Фуллера для AR(p)

augmented Dickey-Fuller tests – ADF - tests

Общая стратегия: в регрессию включают лаговые разности, так что остаточный член соответствует белому шуму.

$$\mathbf{AR(2)} \quad y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$a(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 = 0$$

$$\text{Пусть } z = 1 \rightarrow a(z) = 0,$$

$$1 - a_1 - a_2 = 0 \Leftrightarrow 1 - a_1 - a_2 = 0, a_1 + a_2 = 1.$$

ADF – tests: AR(2)

$$y_t - y_{t-1} = a_1 y_{t-1} - y_{t-1} + \underline{a_2 y_{t-2}} + \underline{\varepsilon_t},$$

$$\Delta y_t = -y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$\Delta y_t = -y_{t-1} + a_1 y_{t-1} + \underline{a_2 y_{t-1} - a_2 y_{t-1}} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

$$\Delta y_t = (-1 + a_1 + a_2) y_{t-1} + \underline{-a_2 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}} + \varepsilon_t,$$

$$\Delta y_t = (-1 + a_1 + a_2) y_{t-1} + \underbrace{-a_2 y_{t-1} + a_2 y_{t-2}}_{\Delta y_{t-1}} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \boxed{\pi y_{t-1}} - a_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

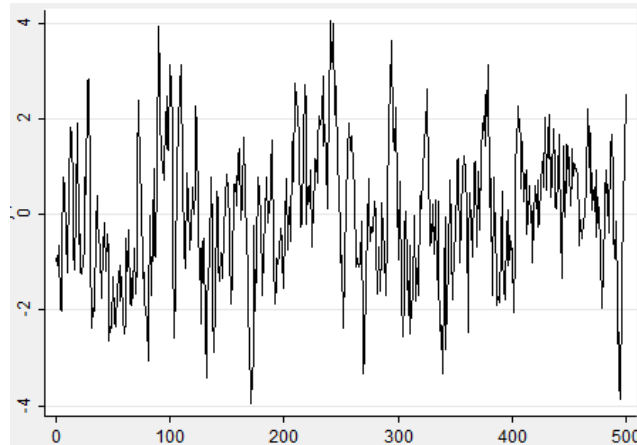
$$H_0: \pi = 0$$

$$H_1: \pi < 0$$

$$\hat{t}_{набл.} = \frac{\hat{\pi}}{S(\hat{\pi})} \sim \text{ADF}$$

ADF – tests: AR(2)

AR(2)



. dfuller ar2 if t<25, regress lags(1)

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 22

	Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-2.592	-3.750	-3.000	-2.630

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0946

D.ar2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
ar2					
L1.	-.8698574	.3355591	-2.59	0.018	-1.572191 - .167524
L2.	-.2265451	.2257198	-1.00	0.328	-.698982 .2458918
_cons	-.1585695	.2321728	-0.68	0.503	-.6445128 .3273738

. dfuller ar2 if t<25, regress lags(0)

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 23

	Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-5.048	-3.750	-3.000	-2.630

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000

D.ar2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
ar2					
L1.	-1.107058	.219294	-5.05	0.000	-1.563105 - .651011
_cons	-.2196067	.218435	-1.01	0.326	-.6738672 .2346538

. dfuller ar2 if t<25, regress lags(2)

Augmented Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 21

	Test Statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-3.123	-3.750	-3.000	-2.630

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0249

D.ar2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
ar2					
L1.	-1.252461	.4010335	-3.12	0.006	-2.098567 - .4063537
L2.	.2134811	.3421837	0.62	0.541	-.5084635 .9354257
L2D.	.4154777	.2458305	1.69	0.109	-.1031794 .9341347
_cons	-.19728	.2316377	-0.85	0.406	-.6859927 .2914327

Количество лагов (k)?

-k-велико→чрезмерное количество лагов → снижение мощности критерия

-k-мало→ искажение результатов теста

ADF – tests: обобщение

Для тестирования AR(p) на единичный корень оценивают коэффициенты уравнения

$$\Delta y_t = \pi y_{t-1} - c_2 \Delta y_{t-1} - \dots - c_p \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t.$$

$$H_0: \pi = 0$$

$$H_1: \pi < 0$$

$$\hat{t}_{набл.} = \frac{\hat{\pi}}{S(\hat{\pi})} \sim \text{ADF}$$

Тестирование высоких порядков интеграции



Тест KPSS

Тест Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS)

(Квятковского-Филлипса-Шмидта-Шина)

H_0 : стационарность (тренд-стационарность)

H_1 : наличие ед. корня

Critical values

10% : 0.119

5% : 0.146

1% : 0.216

Основная идея: ВР разлагается на сумму детерминированного тренда + стохастический тренд (случайное блуждание)+ стац.остаточный член.

$$y_t = \{\mu + \beta t\} + x_t + u_t, \quad x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(\sigma^2)$$

$$H_0 : \sigma_\varepsilon^2 = 0, \quad H_1 : \sigma_\varepsilon^2 > 0$$

$$KPSS = \sum_{t=1}^T \frac{S_t^2}{T^2 \hat{\lambda}^2}, \quad \hat{S}_t = \sum_{i=1}^t e_i - \text{частичные суммы}$$

$$\hat{\lambda}^2 = \sum_{i=-m}^m \left(1 - \frac{|i|}{m+1}\right) \gamma_i - \text{оценка долгосрочной дисперсии}, \quad m \approx 4\left(\frac{T}{100}\right)^{1/4}$$



Тесты DF и KPSS

Тест KPSS H_0 : стационарность (тренд-стационарность)

```
. kpss r1, auto notrend
```

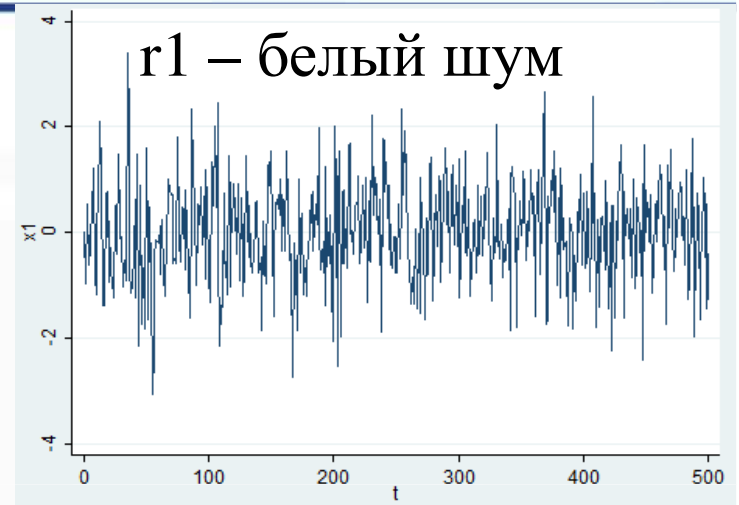
KPSS test for r1

Automatic bandwidth selection (maxlag) = 1
Autocovariances weighted by Bartlett kernel

Critical values for H_0 : r1 is level stationary

10%: 0.347 5% : 0.463 2.5%: 0.574 1% : 0.739

Lag order	Test statistic
1	.0702



Тест DF

H_0 : наличие единичного корня

```
. dfuller r1
```

Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 199

	Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller		
		1% Critical value	5% Critical value	10% Critical value
z(t)	-14.976	-3.477	-2.883	-2.573

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000



Тест Филлипса-Перрона (Phillips–Perron test, PP-test)

Идея теста: модифицируется не уравнение, а тестовая статистика.

$$y_t = \{\alpha + \beta t\} + \rho y_{t-1} + \mathbf{u}_t.$$

$$H_0: \rho = 0$$

←
Ошибки могут быть автокоррелированы и гетероскедастичны

$$Z = T(\hat{\rho} - 1) - \hat{\lambda} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{t=2}^T y_{t-1}^2 \right)^{-1},$$

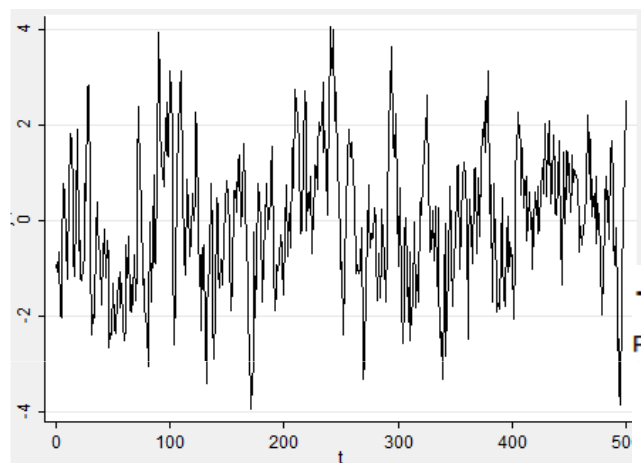
$\hat{\lambda}^2$ – оценка долгосрочной дисперсии ошибок

Асимптотическое распределение статистики совпадает с распределением в критерии Дики-Фуллера.

Phillips, P. C. B.; Perron, P. (1988). "Testing for a Unit Root in Time Series Regression". Biometrika 75 (2): 335–346.

Phillips–Perron test : AR(2)

AR(2)



. pperron ar2, regress

Phillips-Perron test for unit root

Number of obs = 499
Newey-west lags = 5

	Test Statistic	1% Critical value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical value	10% Critical value
Z(rho)	-594.046	-20.499	-14.000	-11.200
Z(t)	-20.427	-3.440	-2.870	-2.570

Mackinnon approximate p-value for Z(t) = 0.0000

	ar2	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
ar2						
L1.		.1656843	.0443532	3.74	0.000	.0785414 .2528272
_cons		-.0151897	.0545555	-0.28	0.781	-.1223774 .0919981

! PP-тест имеет более высокую мощность



Процедура Доладо: TSP или DSP

Проблема: определение принадлежности временного ряда к TSP и DSP модели. Включать тренды в модель или нет?

Доладо (Дженкинсон-Сосвилла-Ривьеро) (1990):

Dolado J.J., Jenkinson T. and Sosvilla-Rivero S. Cointegration and Unit Roots // Journal of Economic Survey. 1990. Vol. 4. P. 249–73.

многовариантная процедура проверки гипотезы единичного корня с использованием критерия Дики–Фуллера, последовательно перебирающую различные комбинации оцениваемой модели.

DF-уравнение:

$$\Delta y_t = \alpha + (\rho - 1) y_{t-1} + \beta t + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. Оценивается модель *с константой и трендом*. Выполняем DF-test. Если H_0 отвергается (ряд стационарный), то процедура останавливается.
2. Если H_0 не отвергается (ряд нестационарный), то проверяем значимость тренда. Если тренд значим, то y_t - нестационарный.
3. Если тренд незначим, то выполняем DF-test *с константой и без тренда*. Если H_0 отвергается (ряд стационарный), то процедура останавливается.
4. Если H_0 не отвергается (ряд нестационарный), то проверяем значимость константы. Если константа значима, то y_t - нестационарный.
5. Если константа незначима, то выполняем DF-test *без константы и тренда*. Если H_0 отвергается (ряд стационарный), то процедура останавливается, иначе ряд y – нестационарный.

Процедура Доладо: пример 1

DF-уравнение:
$$\Delta y_t = \alpha + (\rho - 1) y_{t-1} + \beta t + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Этап 1-2

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 99

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-0.571	-4.042	-3.451	-3.151

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.9804

D.Y1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
Y1	-.0210462	.036833	-0.57	0.569	-.0941591 .0520666
_trend	-.0007995	.0090237	-0.09	0.930	-.0187115 .0171125
_cons	-.2531047	.2294226	-1.10	0.273	-.7085049 .2022955

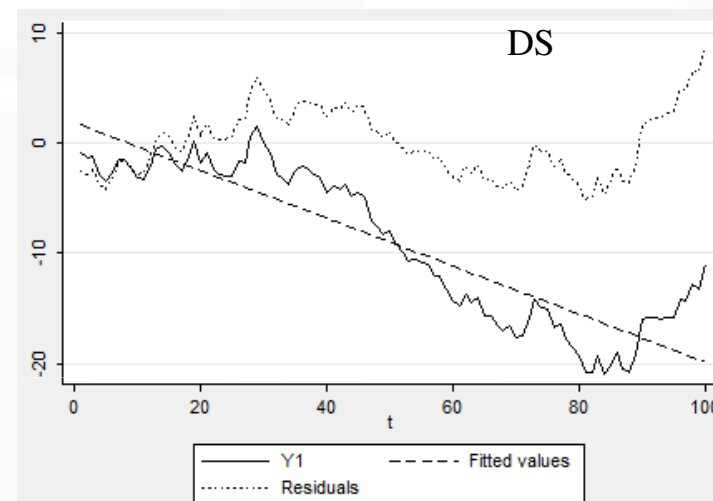
Этап 3-4

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 99

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-1.183	-3.511	-2.891	-2.580

Mackinnon approximate p-value for z(t) = 0.6807

D.Y1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
Y1	-.0180801	.0152792	-1.18	0.240	-.0484051 .0122449
_cons	-.2661244	.1752787	-1.52	0.132	-.6140041 .0817553



Этап 5

Dickey-Fuller test for unit root Number of obs = 99

Test Statistic	Interpolated Dickey-Fuller	1% Critical Value	5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	0.032	-2.600	-1.950	-1.610

D.Y1	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
Y1	.0002969	.0093868	0.03	0.975	-.0183309 .0189247



Процедура Доладо: пример 2

DF-уравнение:
$$\Delta y_t = \alpha + (\rho - 1) y_{t-1} + \beta t + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Этап 1-2

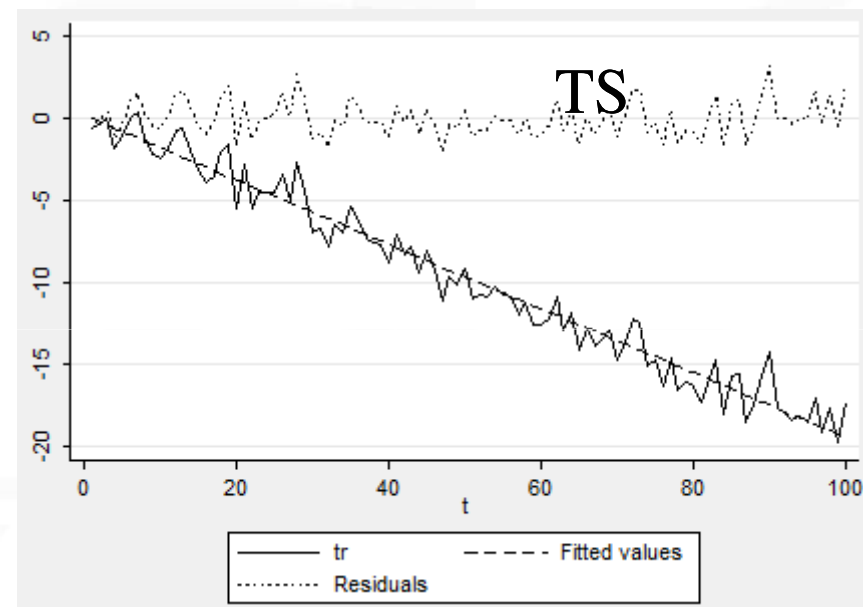
Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 99

Test statistic	1% Critical Value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical Value	10% Critical Value
z(t)	-9.039	-4.042	-3.451

MacKinnon approximate p-value for z(t) = 0.0000

D.tr	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]
tr	-.9386519	.1038457	-9.04	0.000	-1.144784 - .7325199
_trend	-.1840256	.0208036	-8.85	0.000	-.2253204 - .1427309
_cons	-.0095596	.2178441	-0.04	0.965	-.4419768 .4228576



Различение TS и DS процессов с учетом структурных сдвигов

- Процедура Перрона (1989, 1997)
- Тест Эндрюса-Зивота (1992)

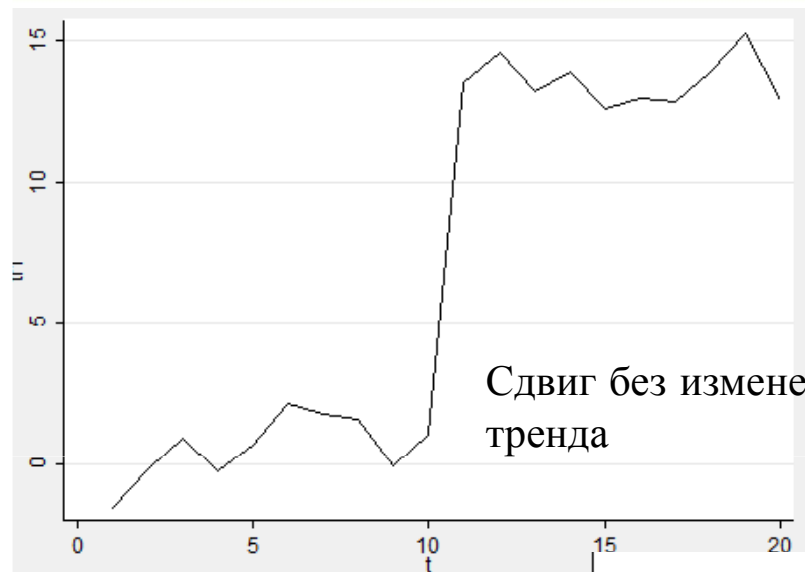
Литература:

- Краснопеева Н. А., Назруллаева Е. Ю. Моделирование влияния инвестиций в основной капитал на материальные затраты в отраслях промышленности США в 1958–2005 гг. // Экономический журнал ВШЭ [2014] Т. 18 № 1. С. 102–132 <http://ej.hse.ru/2014-18-1/119907605.html>
- Канторович Г.Г. Лекция №10 (Эк журнал ВШЭ)
- Brooks C. (2014) с.365-269
- Zivot E., Andrews D.W.K. (1992) Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unitroot Hypothesis. Journal of Business & Economic Statistics. American Statistical Association, vol. 10, no 3, pp. 251–270.
- Perron P. (1989) The Great Crash, the Oil Price Shock, and the Unit Root Hypothesis. Econometrica, vol. 57, no 6, pp. 1361–1401.

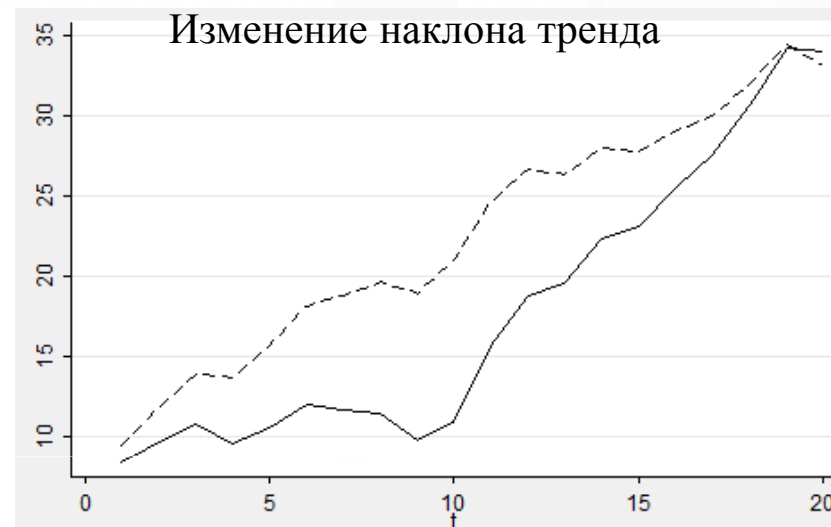


НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

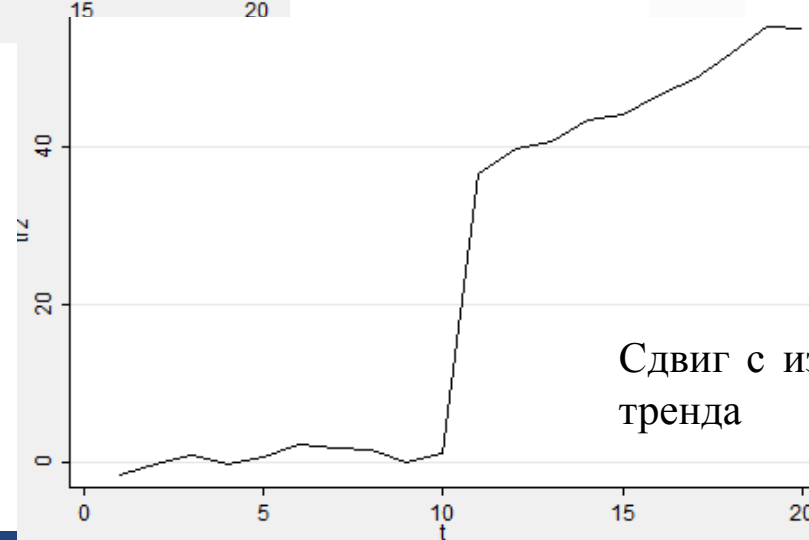
Анализ структурных сдвигов



Сдвиг без изменения наклона тренда



Изменение наклона тренда



Сдвиг с изменением наклона тренда

Различение TS и DS процессов с учетом структурных сдвигов

ADF-тест несостоятелен при структурных сдвигах: скачки могут трактоваться как нестационарность

- Процедура Перрона (1989)

T_B – момент структурного сдвига
(экзогенен), мгновенный скачок

Модель С. $H_0 : y_t = \mu + \delta_1 DVTB_t + \delta_2 DVU_t + y_{t-1} + \varepsilon_t,$

$H_1 : y_t = \mu + \beta t + \delta_2 DVU_t + \delta_3 DVT_t + \varepsilon_t,$

$$DVTB_t = \begin{cases} 1, & t = T_B + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, DVT_t = \begin{cases} 0, & t \leq T_B + 1 \\ t, & \text{иначе} \end{cases}, DVU_t = \begin{cases} 0, & t \leq T_B + 1 \\ 1, & t > T_B \end{cases}$$

Содержание процедуры:

1. Оценивание МНК y_t на детерминированные члены при $H_1 \rightarrow e_t$.

2. DF-test к остаткам e_t : $\Delta e_t = \rho e_{t-1} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta e_{t-i} + u_t.$

3. Критические значения отличаются от DF-распределения:

$$t_\alpha(\alpha, \lambda = T_B/T)$$

Различение TS и DS процессов с учетом структурных сдвигов

Тест Эндрюса-Зивота (1992) – расширение процедуры Перрона на случай
эндогенного скачка (Канторович)

$$H_0 : y_t = \mu + \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_1 : y_t = \mu + \theta(DU)_t + \beta t + \gamma_{t-1} + \delta(DT)_t \lambda + \sum_{i=1}^k c_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t, \lambda = T_B / T$$

$$DU_t = \begin{cases} 1, & t > T_B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, DT_t = \begin{cases} t - T_B, & t > T_B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Перебираются все значения *скачка* от $t=2$ до $t=T-1$ для кот. t -отношение для γ min.

Тест Clemente, Montanes, Reyes (1998) – на наличие двух структурных
СДВИГОВ

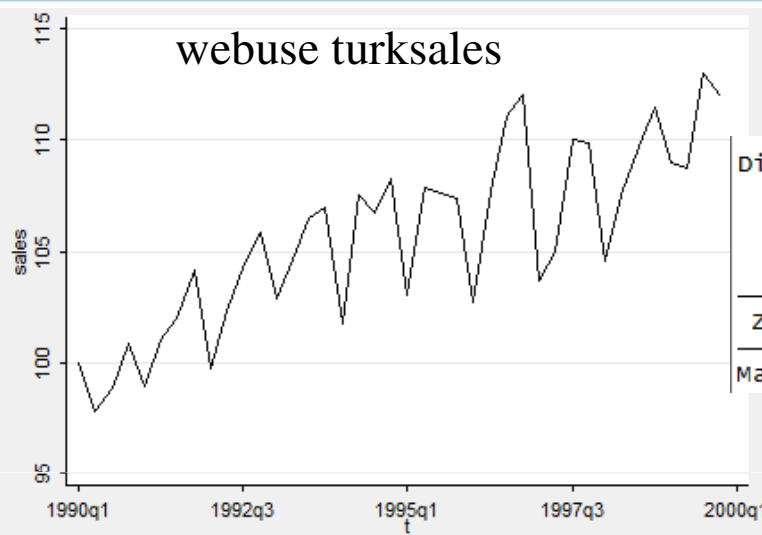
Clemente, J., Montanes, A., Reyes, M., 1998. Testing for a unit root in variables with a double change in the mean. *Economics Letters* 59, 175-182.

Zivot E., Andrews D.W.K. (1992) Further Evidence on the Great Crash, the Oil-Price Shock, and the Unitroot Hypothesis. *Journal of Business & Economic Statistics*. American Statistical Association, vol. 10, no 3, pp. 251–270.



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Тест Эндрюса-Зивота

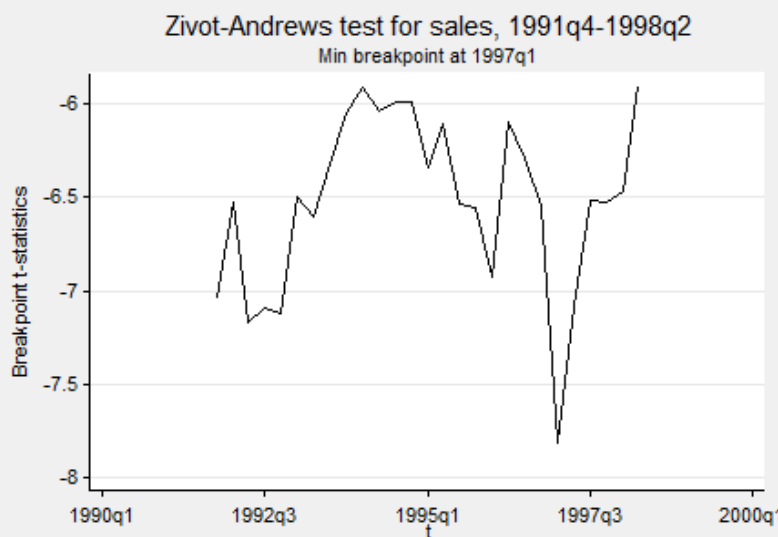


Dickey-Fuller test for unit root

Number of obs = 39

	Test Statistic	1% Critical value	Interpolated Dickey-Fuller 5% Critical value	10% Critical value
$z(t)$	-2.666	-3.655	-2.961	-2.613

Mackinnon approximate p-value for $z(t)$ = 0.0801



zandrews sales, graph

Zivot-Andrews unit root test for sales

Allowing for break in intercept

Lag selection via τ test: lags of $D.sales$ included = 1

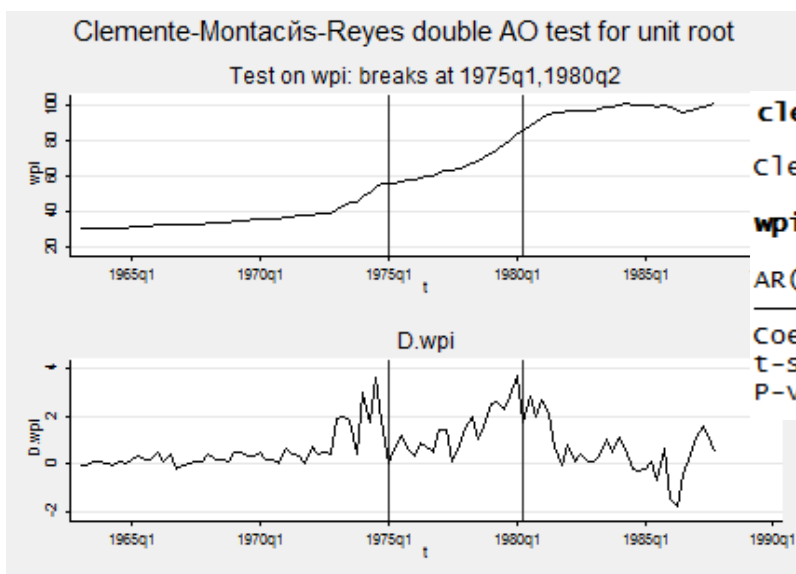
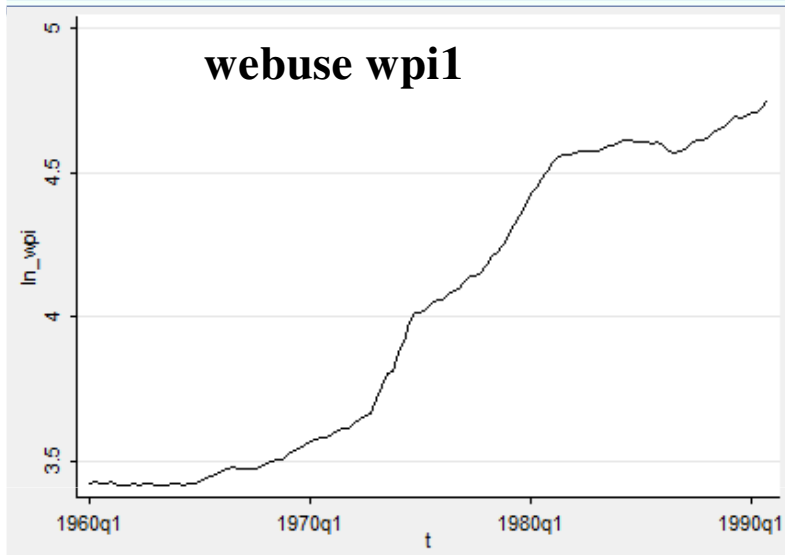
Minimum t-statistic -7.817 at 1997q1 (obs 29)

Critical values: 1%: -5.34 5%: -4.80 10%: -4.58



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Clemente, Montanes, Reyes unit root tests with two structural breaks



clemao2 wpi

Clemente-Montañés-Reyes unit-root test with double mean shifts, AO model

wpi $T = 112$ optimal breakpoints : **1975q1 , 1980q2**

AR(1)	du1	du2	(rho - 1)	const
Coefficients:	31.68595	33.75476	-0.26044	35.24262
t-statistics:	18.497	18.654	-4.278	
P-values:	0.000	0.000	-5.490 (5% crit. value)	



НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Различение TS и DS процессов с учетом структурных сдвигов



Рис. 3. Динамика производительности труда, средней заработной платы и уровня безработицы, сглаженные на сезонность⁸

Таблица 2. Тесты на единичные корни с учета одного и двух структурных сдвигов

Переменные	Тест Andrews, Zivot (1992) на один структурный сдвиг в уровнях		Тест Clemente, Montañés, Reyes (1998) на два структурных сдви- га	
	t- статистика	Даты структур- ных сдвигов	t- статистика	Даты структурных сдвигов
Численность занятых	-3,597	2003q3	-3,646	2000q3, 2005q4
Уровень безработицы	-3,371	2000q1	-3,124	1997q4, 2001q2
Реальная заработная плата	-4,036	1998q3	-3,789	2002q4, 2006q4
Оплата труда в ВВП на одного занятого	-4,334	1998q2	-3,167	2002q4, 2007q2
Производительность труда	-3,382	2004q1	-3,063	2000q2, 2005q1
ВВП	-4,029	2004q1	-3,027	2002q4, 2006q2
Критическое значение (5%)	-4,80		-5,490	

Вакуленко



3.3. Методология Бокса-Дженкинса