Тема 7.

Понятие о векторной авторегрессии

Системы одновременных уравнений: основные понятия

-Эндогенные и экзогенные переменные

<u>Пример 7.1.</u> Макроэкономическая кейнсианская модель

$$\begin{cases} C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t, \\ Y_t = C_t + I_t. \end{cases} \qquad \textbf{(7.1)}$$

$\mathbf{C_t}$ – агрегированное потребление,
$\mathbf{Y_t}$ – национальный доход,
$\mathbf{I_t}$ – инвестиции в период времени t.

-Структурные уравнения:

-тождества

-поведенческие уравнения

Системы одновременных уравнений: основные понятия

1. ***Система независимых уравнений***

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

2. ***Система рекурсивных уравнений***

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}\underline{\overline{y_1}} + b_{32}\underline{y_2} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\ \ldots \\ y_n = b_{n1}\underline{y_1} + b_{n2}\underline{y_2} + \ldots. + b_{n,n-1}\underline{y_{n-1}} + \\ \qquad + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

Системы одновременных уравнений: основные понятия

3. ***Система взаимосвязных уравнений***
(***система совместных, одновременных уравнений***)

$$\begin{cases} \underline{y_1} = b_{12}\underline{y_2} + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ \underline{y_2} = b_{21}\underline{y_1} + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots \\ y_n = b_{n1}\underline{y_1} + b_{n2}\underline{y_2} + \ldots + b_{n,n-1}y_{n-1} + \\ \qquad + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases}$$

4. ***Приведенная форма модели***

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1m}x_m, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2m}x_m, \\ \ldots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \ldots + \delta_{nm}x_m. \end{cases}$$

$\mathbf{y_i}$ –эндогенные переменные; $\mathbf{x_i}$ – экзогенные переменные

Системы одновременных уравнений: основные понятия

Пример. Макроэкономическая кейнсианская модель

$$\begin{cases} C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t, \\ Y_t = C_t + I_t. \end{cases}$$

C_t – агрегированное потребление,
Y_t – национальный доход,
I_t – инвестиции в период времени t.

$$\begin{cases} C_t = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_2} + \dfrac{\beta_2}{1-\beta_2} I_t + \dfrac{1}{1-\beta_2}\varepsilon_t, \\ Y_t = \dfrac{\beta_1}{1-\beta_2} + \dfrac{1}{1-\beta_2} I_t + \dfrac{1}{1-\beta_2}\varepsilon_t. \end{cases} \qquad \textbf{(7.2)}$$

Методы оценивания СУ

- косвенный метод наименьших квадратов,

- инструментальные переменные.

Проблема идентификации

- При переходе от приведенной формы модели к структурной появляется проблема идентификации.

Идентификация – это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

- С позиции идентифицируемости структурные модели можно разделить на 3 вида:

Структурные модели

идентифицируемые (точно идентифицируемые)

сверхидентифицируемые

неидентифицируемые

Справка из линейной алгебры.

Если система имеет ровно одно решение, то говорят об ***однозначной идентифицируемости*** модели.

Если система не имеет решений, то говорят о ***неидентифицируемости***.

Если система имеет более одного решения (например, количество уравнений больше количества неизвестных), то говорят о ***сверхидентифицируемости***.

Модель идентифицируема, если все ее структурные коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т.е. число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели.

Модель неидентифицируема, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы.

Модель сверхидентифицируема, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента.

Как определить идентифицируемость модели?

Проверка идентифицируемости модели

Структурная модель представляет собой систему совместных уравнений, каждое из которых необходимо проверить на идентификацию.

модель	условие
1.Идентифицируема	Если каждое уравнение идентифицируемо
2.Неидентифицируема	Если хотя бы одно из уравнений неидентифицируемо
3.Сверх-идентифицируема	Если хотя бы одно из уравнений сверхидентифицируемо

Условие идентифицируемости уравнения:

Необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

H – число эндогенных переменных в j-ом уравнении системы;
D – число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

уравнение	условие
1.Идентифицируемо	D + 1 = H
2.Неидентифицируемо	D + 1 < H
3.Сверхидентифицируемо	D + 1 > H

Пример 1 идентифицируемости системы:

H – число эндогенных переменных в j-ом уравнении системы;

D – число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

1 уравнение - ***точно идентифицируемо***:

Эндогенные переменные - y_1, y_2, y_3 **H = 3** → **D + 1 = H**

Экзогенные переменные - x_3, x_4 **D = 2** **2 + 1 = 3**

2,3 уравнение – ***идентифицируемы*** (проверить сам-но)

Система - идентифицируема

1.Идентифицируемо	**D + 1 = H**
2.Неидентифицируемо	**D + 1 < H**
3.Сверхидентифицируемо	**D + 1 > H**

Пример 2 сверхидентифицируемости системы:

Н – число эндогенных переменных в j-ом уравнении системы;

D – число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

2 уравнение - ***сверхидентифицируемо***:

Эндогенные переменные - y_1, y_2 **H = 2** → **D + 1 > H**

Экзогенные переменные - x_1, x_4 **D = 2** **2 + 1 > 2**

1,3 уравнение – ………………….. (проверить сам-но)

Система – сверхидентифицируема

1.Идентифицируемо	**D + 1 = H**
2.Неидентифицируемо	**D + 1 < H**
3.Сверхидентифицируемо	**D + 1 > H**

Пример 3 неидентифицируемости системы:

H – число эндогенных переменных в j-ом уравнении системы;

D – число экзогенных переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение.

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4. \end{cases}$$

3 уравнение - ***неидентифицируемо***:

Эндогенные переменные - y_1, y_2, y_3 **H = 3** → **D + 1 < H**

Экзогенные переменные - x_3 **D = 1** **1 + 1 < 3**

1,2 уравнение – …………………. (проверить сам-но)

Система – неидентифицируема

1.Идентифицируемо	**D + 1 = H**
2.Неидентифицируемо	**D + 1 < H**
3.Сверхидентифицируемо	**D + 1 > H**

Методы оценивания систем одновременных уравнений:

- косвенный метод наименьших квадратов,
- инструментальные переменные,
- двухшаговый метод наименьших квадратов.

Косвенный МНК

Косвенный МНК используется в случае точно идентифицируемой структурной модели.

Этапы:

1. Преобразовать систему одновременных уравнений из структурной формы к приведенной;
2. Оценить неизвестные коэффициенты уравнений приведенной системы с помощью МНК;
3. Разрешить систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов структурных уравнений.

Инструментальные переменные

«Кандидаты» в инструментальные переменные – это экзогенные переменные модели.

Для них выполняются два необходимых условия:
- экзогенные переменные коррелированы с эндогенными,
- экзогенные переменные заданы вне модели и поэтому некоррелированы со случайными членами,

Двухшаговый метод наименьших квадратов (2МНК)

- 2МНК используют для сверхидентифицируемых систем.

- <u>**Этапы метода**</u>:

1. оценивание коэффициентов в приведенных уравнениях модели
2. расчет прогнозных значений эндогенных переменных и использование полученных прогнозных значений в качестве инструментов для структурных уравнений модели.

пример

Векторная авторегрессия

- Кристофер Симс (Sims, 1980) ***векторные авторегрессии*** (vector autoregressive model - VAR).
- VAR - обобщение одномерной авторегрессии на многомерный случай

VAR(1)

<u>Пример 7.2.</u> X_t – темп роста денежной массы, Y_t – дефлятор ВВП.

$$\begin{aligned} x_t &= \alpha_1 + \beta_{11} x_{t-1} + \beta_{12} y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ y_t &= \alpha_2 + \beta_{21} x_{t-1} + \beta_{22} y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \end{aligned} \qquad \textbf{(7.3)}$$

$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \mathrm{WN}$$

Запишем VAR(1) в матричной форме

Векторная авторегрессия VAR(1)

VAR(1) X_t – темп роста денежной массы, Y_t – дефлятор ВВП.

$$\mathrm{x}_t = \alpha_1 + \beta_{11}\mathrm{x}_{t-1} + \beta_{12}\mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$\mathrm{y}_t = \alpha_2 + \beta_{21}\mathrm{x}_{t-1} + \beta_{22}\mathrm{y}_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \mathrm{WN}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}_t \\ \mathrm{y}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_{t-1} \\ \mathrm{y}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

в ***матричном виде***:

$$Y_t = \alpha + B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, Y_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}, \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

Понятие БШ и стационарность процесса в многомерном случае

Опр. 7.1. k-мерный процесс $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \ldots, \varepsilon_{kt})'$ наз. **белым шумом** $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \Sigma)$

если

$$E\varepsilon_t = 0,$$

$$E\varepsilon_t \varepsilon_t' = \Sigma,$$

$$E\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}' = 0, \quad \forall s \neq 0.$$

Если ε_t имеет нормальное распределение, то говорят о гауссовском БШ.

Понятие БШ и стационарность процесса в многомерном случае

Опр. 7.2. k-мерный процесс $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{kt})'$ является **стационарным (2-го порядка),** если его математическое ожидание и ковариационные функции конечны и не зависят от времени.

$$Ey_t = \mu,$$
$$E(y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)' = \Gamma_s, \quad \forall t, s.$$

Замечание. Стационарность каждой компоненты вектора недостаточна для его стационарности.

Понятие векторной авторегрессии VAR(p)

Опр. 7.3. Векторной авторегрессией порядка p VAR(p) наз. модель

$$Y_t = \alpha + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + \ldots B_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad \textbf{(7.4)}$$

$Y_t = (y_{1t}, \ldots y_{kt})' -$ стац. вектор из k переменных

α – вектор констант размерности (kx1)

B_j – матрицы коэффициентов размерности (kxk)

Вектор ошибок размерности (kx1): $\varepsilon_t \sim WN(0, \Sigma)$

Замечание. Во всех уравнениях правые части одинаковые

VAR(1) через лаговый многочлен

VAR(1) X_t – темп роста денежной массы, Y_t – дефлятор ВВП.

$$x_t = \alpha_1 + \beta_{11}x_{t-1} + \beta_{12}y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_t = \alpha_2 + \beta_{21}x_{t-1} + \beta_{22}y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \mathrm{WN}$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

Через ***лаговый многочлен:***

$$A(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} L = I - B_1 L = \begin{pmatrix} 1-\beta_{11}L & -\beta_{12}L \\ -\beta_{21}L & 1-\beta_{22}L \end{pmatrix},$$

$$A(L)У_t = \alpha + \varepsilon_t \rightarrow У_t = A^{-1}(L)[\alpha + \varepsilon_t].$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1-\beta_{22}L & \beta_{12}L \\ \beta_{21}L & 1-\beta_{11}L \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix} \right]$$

Условие стационарности: Условие обратимости A(L). Корни уравнения det A(z)=0 лежат вне единичной окружности

Пример 7.3. VAR(1)

$$x_t = 0.6 + 0.7x_{t-1} + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_t = 0.4 + 0.2x_{t-1} + 0.7y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \mathrm{WN}$$

1. Стационарна ли система?
2. В случае стационарности найти математическое ожидание

Через ***лаговый многочлен:***

$$A(L)У_t = \alpha + \varepsilon_t,$$

$$A(L) = I - B_1L = \begin{pmatrix} 1-\beta_{11}L & -\beta_{12}L \\ -\beta_{21}L & 1-\beta_{22}L \end{pmatrix} =$$

Пример 7.4. VAR(2) - самостоятельно

$$x_t = 0.1 + 0.4x_{t-1} + 0.2y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_t = -0.2 + 0.3x_{t-1} + 0.4y_{t-1} + 0.3x_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$
$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim WN$$

1. Записать VAR(2) в матричной форме.
2. Стационарна ли VAR(2) ?
3. В случае стационарности найти математическое ожидание VAR(2)

Условие стационарности VAR-моделей

$$Y_t = \alpha + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + \ldots + B_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$Y_t - B_1 Y_{t-1} - B_2 Y_{t-2} - \ldots - B_p Y_{t-p} = \alpha + \varepsilon_t$$

$$(I_k - B_1 L - B_2 L^2 - \ldots - B_p L^p) Y_t = \alpha + \varepsilon_t$$

$$\boxed{A(L) Y_t = \alpha + \varepsilon_t,} \quad A(L) = I_k - B_1 L - B_2 L^2 - \ldots - B_p L^p.$$

$$\det A(z) = \det(I_k - z B_1 - z^2 B_2 - \ldots - z^p B_p) = 0$$

Все k корней уравнения $\det A(z) = 0$ лежат за пределами единичного круга на комплексной плоскости.

Оценивание VAR

$$Y_t = \alpha + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + \ldots + B_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

-Все k уравнений оцениваются по отдельности МНК

-Оценки состоятельны, асимптотически нормальны и асимптотически эффективны

-Если случайная компонента БШ и нормально распределена, то оценки МНК совпадают с ММП.

- Включение детерминированного тренда и фиктивных переменных (сезонных например) не ухудшает асимптотических св-в оценок.

Подкорытова

Проверка адекватности VAR

$$Y_t = \alpha + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + \ldots + B_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

-Значимость уравнения в целом и отдельных коэффициентов

- Стационарность

-Гомоскедастичность

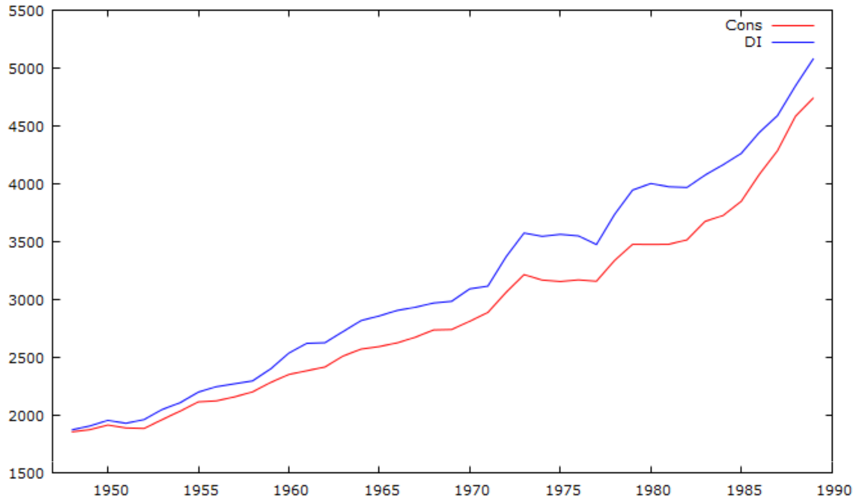
-Отсутствие автокорреляции в остатках

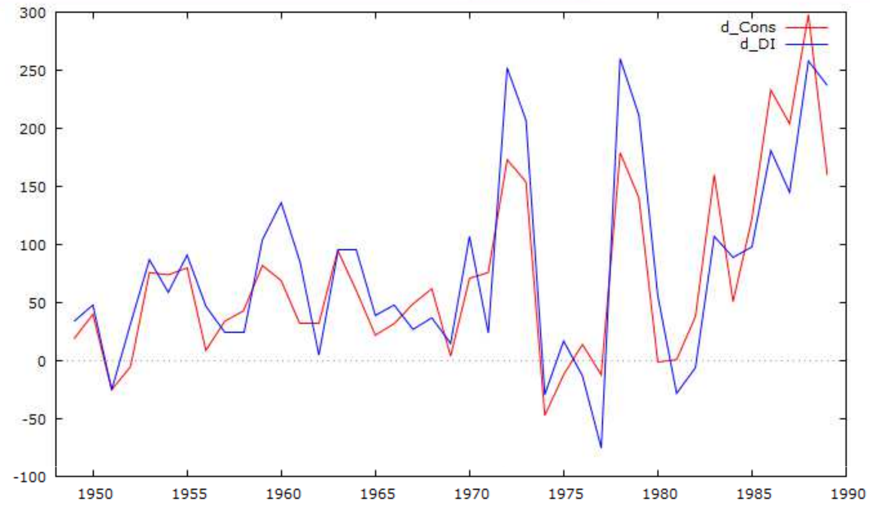
-Нормальность остатков

Использование многомерных вариантов тестов

Подкорытова

Векторная авторегрессия: пример





DATA6-3: United Kingdom Annual data.

Cons = Per capita consumption expenditure in British pounds (Range 1858 - 4744)

DI = Per capita personal disposable income in British pounds (Range 1875 - 5084)

Source: Economic Trends, Annual Supplement 1991 Edition.
A publication of the Government Statistical Service, London, UK.

Ряды I(1), некоинтегрированны

Векторная авторегрессия: пример

DATA6-3: United Kingdom Annual data.

Cons = Per capita consumption expenditure in British pounds (Range 1858 - 4744)

DI = Per capita personal disposable income in British pounds (Range 1875 - 5084)

Уравнение 1: d_Cons

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	Р-значение	
const	44,2458	13,0352	3,394	0,0017	***
d_Cons_1	1,22703	0,259146	4,735	3,19e-05	***
d_DI_1	-0,756293	0,238622	-3,169	0,0031	***

Среднее зав. перемен	71,67500	Ст. откл. зав. перемен	75,96537
Сумма кв. остатков	131787,0	Ст. ошибка модели	59,68091
R-квадрат	0,414433	Испр. R-квадрат	0,382781
F(2, 37)	13,09330	Р-значение (F)	0,000050
Параметр rho	-0,143959	Стат. Дарбина-Вотсона	2,258569

Уравнение 2: d_DI

	Коэффициент	Ст. ошибка	t-статистика	Р-значение	
const	42,9852	15,2266	2,823	0,0076	***
d_Cons_1	1,14754	0,302711	3,791	0,0005	***
d_DI_1	-0,562790	0,278737	-2,019	0,0508	*

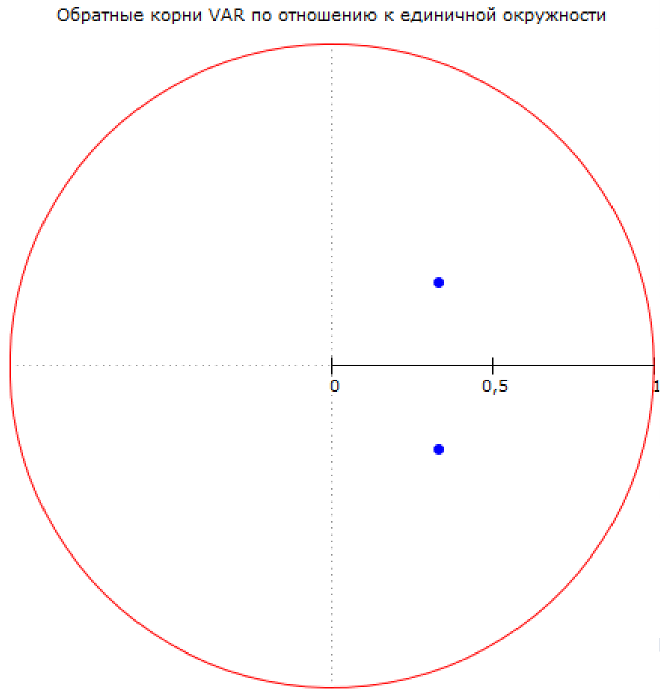
Среднее зав. перемен	79,37500	Ст. откл. зав. перемен	85,14563
Сумма кв. остатков	179821,6	Ст. ошибка модели	69,71400
R-квадрат	0,364007	Испр. R-квадрат	0,329629
F(2, 37)	10,58837	Р-значение (F)	0,000231
Параметр rho	-0,126323	Стат. Дарбина-Вотсона	2,252562

Векторная авторегрессия: пример

Анализ автокорреляции остатков

```
Уравнение 1:
Ljung-Box Q' = 9,1137 p-значение = P(Хи-квадрат(10) > 9,1137) = 0,521

Уравнение 2:
Ljung-Box Q' = 17,6649 p-значение = P(Хи-квадрат(10) > 17,6649) = 0,0609
```

Стационарность VAR



Нормальность остатков

```
Тест Дурника-Хансена (Doornik-Hansen)
 Хи-квадрат(4) = 5,10992 [0,2762]
```

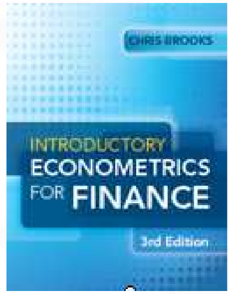

Doornik, J. A., and H. Hansen. 2008. An omnibus test for univariate and multivariate normality. Oxford Bulletin of Economics and Statistics 70: 927–939.

Подход 1. F-тест

Предположение: все параметры с запаздыванием равны 0.

$$H_0 : \beta_{1i} = 0 \quad H_1 : \beta_{1i} \neq 0$$

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{VAR})/p}{RSS_{VAR}/s} \sim F(p, s)$$



Подход 2.

1. Оценивание модели векторной авторегрессии для разных значений временного лага *p*.
2. критерий Шварца или критерий Акайке.

$$MAIC = \ln\left|\hat{\Sigma}\right| + 2k'/T$$

$$MSBIC = \ln\left|\hat{\Sigma}\right| + \frac{k'}{T}\ln(T)$$

$$MHQIC = \ln\left|\hat{\Sigma}\right| + \frac{2k'}{T}\ln(\ln(T))$$

- Information Criteria for VAR Lag Length Selection

•Schwarz's Bayesian information criterion (SBIC),
•Akaike's information criterion (AIC),
•Hannan and Quinn information criterion (HQIC).

http://www.cambridge.org/gb/academic/textbooks/introductory-econometrics/

Выбор временного лага p

gretl: выбор лагов для VAR

VAR система, максимальный порядок лага 6

Звездочка указывает на наилучшие (минимальные) значения
информационных критериев Акаике (AIC), Шварца (BIC)
и Хеннана-Куинна (HQC).

lags	loglik	p(LR)	AIC	BIC	HQC
1	-372,17669		21,610097	21,876728*	21,702138*
2	-368,17615	0,09154	21,610066	22,054451	21,763467
3	-367,23486	0,75735	21,784849	22,406989	21,999612
4	-360,54880	0,00959	21,631360	22,431253	21,907483
5	-353,41776	0,00650	21,452444	22,430091	21,789927
6	-349,38748	0,08938	21,450713*	22,606115	21,849558

Причинность по Гренджеру: определение

Granger (1969), развитие Sims (1972)

Granger causality tests – установление причинно-следственных связей на основе ***F*-критерия**

Опр. 7.4. Ряд x_t является **причиной по Гренджеру** для ряда y_t

$$\left(x_t \rightarrow y_t\right)$$

если текущие значения y_t могут быть предсказаны с лучшей точностью с использованием прошлых значений x_t, чем без них.

Пример VAR(3)

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-2} \\ y_{2t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-3} \\ y_{2t-3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$$y_{1t} = \alpha_{10} + \beta_{11} y_{1t-1} + \beta_{12} y_{2t-1} + \gamma_{11} y_{1t-2} + \gamma_{12} y_{2t-2} + \delta_{11} y_{1t-3} + \delta_{12} y_{2t-3} + u_{1t}$$
$$y_{2t} = \alpha_{20} + \beta_{21} y_{1t-1} + \beta_{22} y_{2t-1} + \gamma_{21} y_{1t-2} + \gamma_{22} y_{2t-2} + \delta_{21} y_{1t-3} + \delta_{22} y_{2t-3} + u_{2t}$$

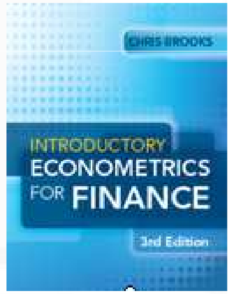


Table 7.3 Granger causality tests and implied restrictions on VAR models

	Hypothesis	Implied restriction
1	Lags of y_{1t} do not explain current y_{2t}	$\beta_{21} = 0$ and $\gamma_{21} = 0$ and $\delta_{21} = 0$
2	Lags of y_{1t} do not explain current y_{1t}	$\beta_{11} = 0$ and $\gamma_{11} = 0$ and $\delta_{11} = 0$
3	Lags of y_{2t} do not explain current y_{1t}	$\beta_{12} = 0$ and $\gamma_{12} = 0$ and $\delta_{12} = 0$
4	Lags of y_{2t} do not explain current y_{2t}	$\beta_{22} = 0$ and $\gamma_{22} = 0$ and $\delta_{22} = 0$

http://www.cambridge.org/gb/academic/textbooks/introductory-econometrics/

Причинность по Гренджеру: пример

Как связаны доход и потребление? Результаты в Gretl:

```
Уравнение 1: d_Cons

 F-тесты для нулевых ограничений:

 Все лаги для d_Cons              F(1, 37) =   22,419 [0,0000]
 Все лаги для d_DI                F(1, 37) =   10,045 [0,0031]
```

Доход является причиной по Гренджеру для потребления

```
Уравнение 2: d_DI

 F-тесты для нулевых ограничений:

 Все лаги для d_Cons              F(1, 37) =   14,371 [0,0005]
 Все лаги для d_DI                F(1, 37) =   4,0767 [0,0508]
```

Потребление является причиной по Гренджеру для дохода,

Доход и потребление – эндогенные переменные.

Интерпретация VAR моделей

-Коэффициенты VAR – не интерпретируемы

Интерпретация VAR моделей:

-Функция импульсного отклика (impulse responses - IRF)

- Разложение дисперсии (variance decompositions - VD)

Разложение Холецкого

Функция импульсного отклика.

Импульс – однократное возмущение, которое придается одному из параметров (например, для БШ).

Шок – одномоментное изменение экзогенных переменных. Обычно берется равным 1стандартному отклонению.

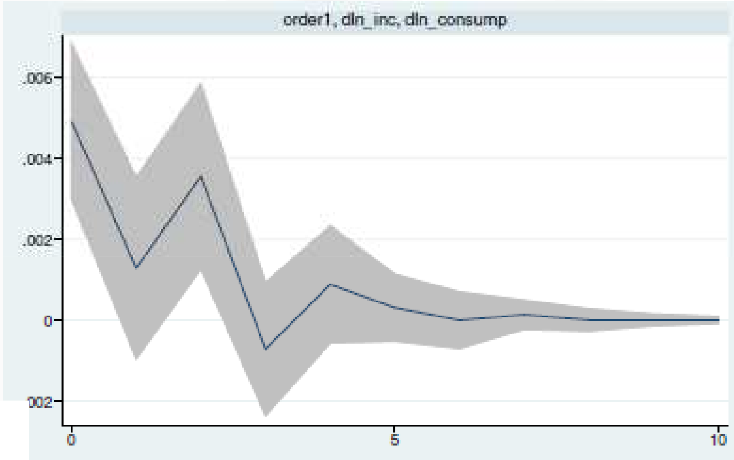
IRF – реакция зависимой переменной в ответ на шоки переменных, характеризует время возращения эндогенной переменной на равновесную траекторию.

Интерпретация VAR моделей

Функция импульсного отклика – последовательность ψ_{ij} в разложении VMA(∞) для многомерного стац. сл процесса:

$$Y_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \psi_\kappa \varepsilon_{t-\kappa} + \ldots$$

$$Y_{it} = \varepsilon_{it} + \psi_{i1} \varepsilon_{it-1} + \psi_{i2} \varepsilon_{it-2} + \ldots + \psi_{i\kappa} \varepsilon_{it-\kappa} + \ldots$$



IRF – реакция зависимой переменной в ответ на шоки переменных.

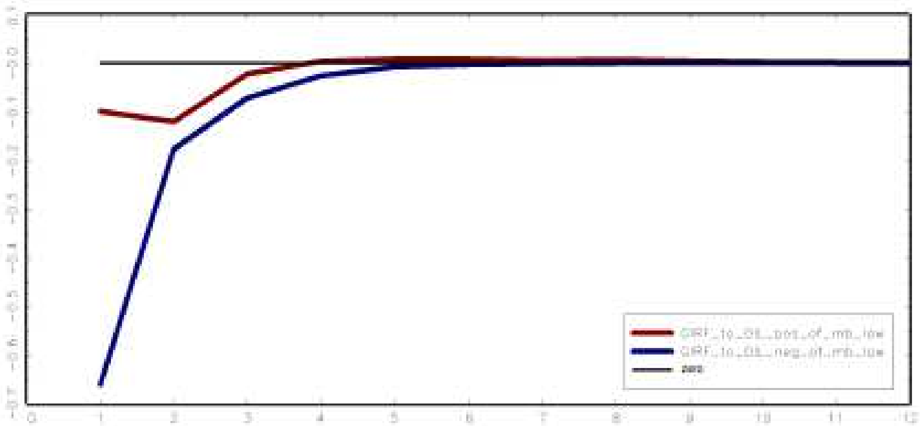


Рис. 1: Отклики денежной базы на нефтяные шоки в первом режиме (низкой стартовой инфляции). Размер шока — два стандартных отклонения, отклик на положительный шок цен на нефть — красная линия, отклик на отрицательный шок цен на нефть — синяя линия.

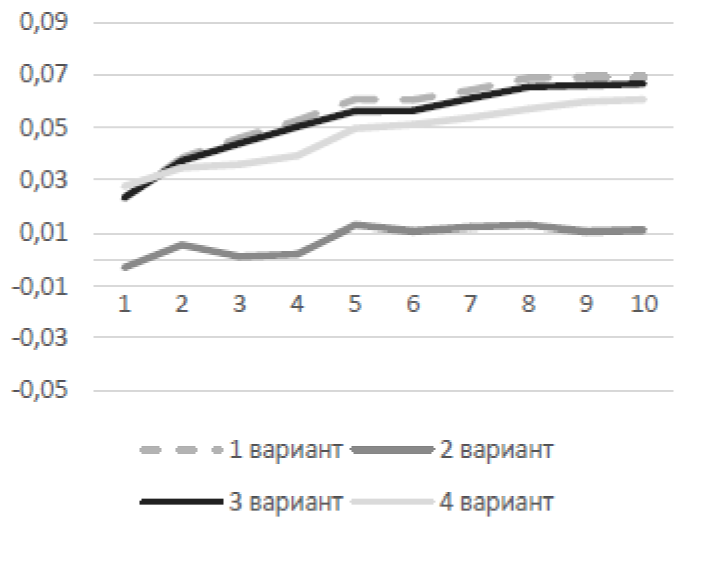
Пример Квантиль №11 http://quantile.ru/11/11-AS.pdf

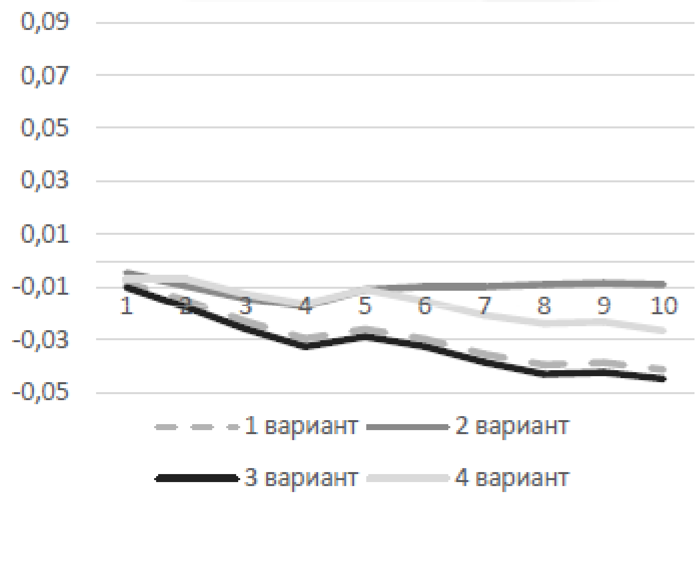
Синяков Андрей. Заявленная и фактическая политика Банка России

Интерпретация VAR моделей:

Функция импульсного отклика

Пример Вакуленко, Е.С., Гурвич, Е.Т.Моделирование механизмов российского рынка труда : препринт WP3/2014/08.





Реакция заработной платы на шоки производительности	Реакция заработной платы на шоки уровня безработицы

Теорема (разложение Вольда) для VAR(p)

Теорема (разложение Вольда).

Любой стационарный процесс можно представить в виде:

$$Y_t = \mu_t + \Phi(L)\varepsilon_t = \mu_t + \varepsilon_t + \Phi^{(1)}\varepsilon_{t-1} + \Phi^{(2)}\varepsilon_{t-2} + \ldots$$ **VMA(∞)**

$\Phi(L)$ - матричный полином от L

$\Phi(0) = I_k$ - единичная матрица

$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \Phi^{(j)} \right| < \infty$

- Случай VAR(1)

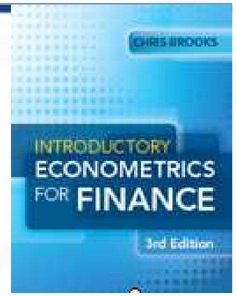
$$Y_t = B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}, Y_{t-1} = \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}, \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}.$$

$$Y_t = B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t = B_1(B_1 Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = B_1^2 Y_{t-2} + B_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t =$$
$$= B_1^2(B_1 Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + B_1\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + B_1\varepsilon_{t-1} + B_1^2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

Интерпретация VAR моделей:

Функция импульсного отклика



Пример 7.5. VAR(1)

y_{1t} –дефлятор ВВП , y_{2t} –темп роста денежной массы.

$$B_{1=}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1t\text{-}1} \\ y_{2t\text{-}1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \mathrm{WN}$$

$$Y_t = B_1 Y_{t\text{-}1} + \varepsilon_t$$

Рассчитать IRF при t=1,2 (эффект на единичный шок)

$$y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- единичный шок в y_{1t} в момент времени t=0

$$y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- единичный шок в y_{2t} в момент времени t=0

http://www.cambridge.org/gb/academic/textbooks/introductory-econometrics/

Пример 7.5. VAR(1)

y_{1t} –дефлятор ВВП , y_{2t} –темп роста денежной массы.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t} \sim \text{WN}$$

$$Y_t = B_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- единичный шок в y_{1t} в момент времени t=0

$$y_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{10} \\ \varepsilon_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- единичный шок в y_{2t} в момент времени t=0

Способ 2. С помощью **VMA(∞)**

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^{(i)} \varepsilon_{t-i}$$

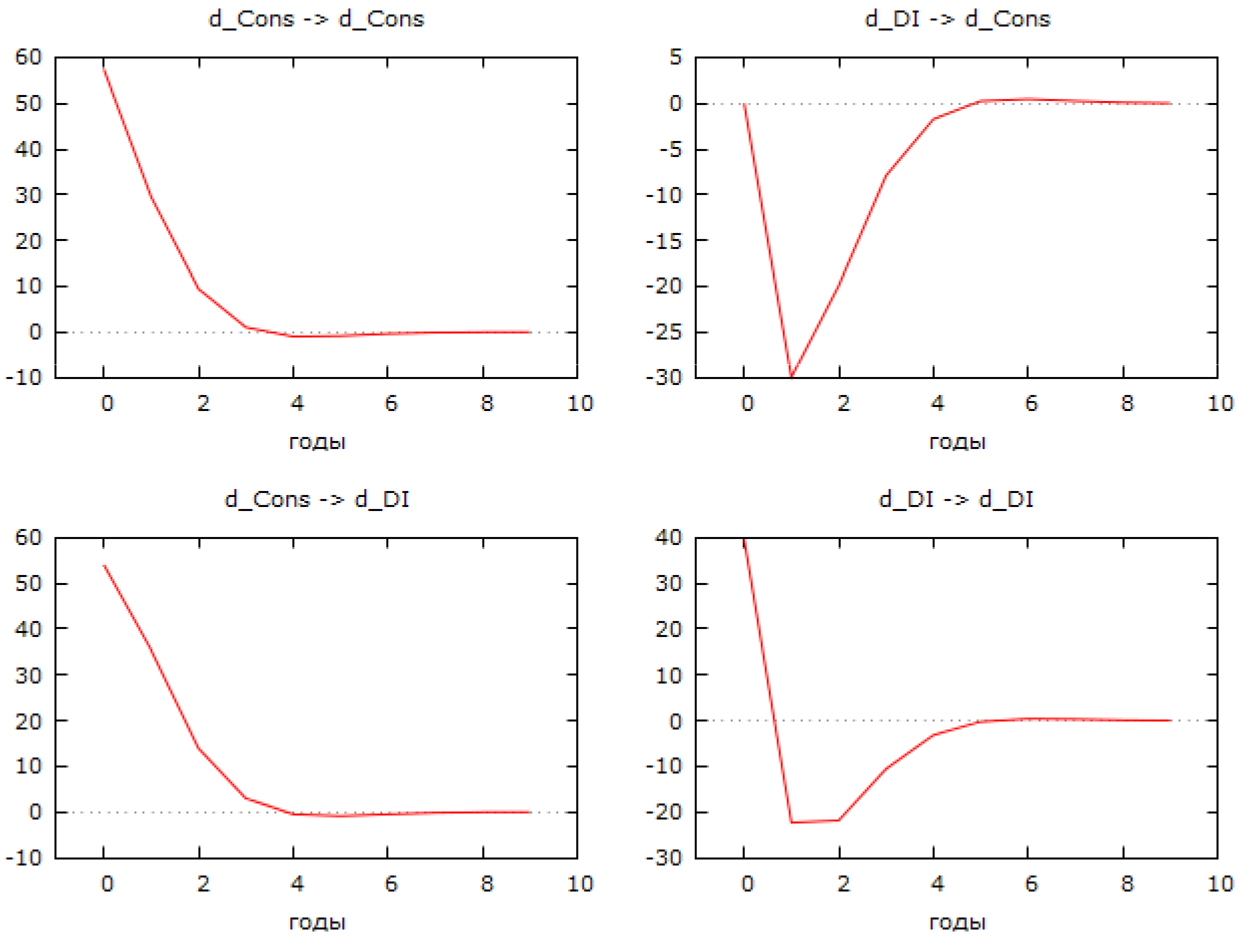
Пример 7.6. VAR(1)

```
Уравнение 1: d_Cons

             Коэффициент   Ст. ошибка   t-статистика   P-значение
  ---------------------------------------------------------------
  const        44,2458      13,0352          3,394       0,0017    ***
  d_Cons_1      1,22703      0,259146        4,735       3,19e-05  ***
  d_DI_1       -0,756293     0,238622       -3,169       0,0031    ***

Среднее зав. перемен     71,67500   Ст. откл. зав. перемен  75,96537
Сумма кв. остатков       131787,0   Ст. ошибка модели       59,68091
R-квадрат                0,414433   Испр. R-квадрат         0,382781
F(2, 37)                 13,09330   Р-значение (F)          0,000050
Параметр rho            -0,143959   Стат. Дарбина-Вотсона   2,258569

Уравнение 2: d_DI

             Коэффициент   Ст. ошибка   t-статистика   P-значение
  ---------------------------------------------------------------
  const        42,9852      15,2266          2,823       0,0076    ***
  d_Cons_1      1,14754      0,302711        3,791       0,0005    ***
  d_DI_1       -0,562790     0,278737       -2,019       0,0508    *

Среднее зав. перемен     79,37500   Ст. откл. зав. перемен  85,14563
Сумма кв. остатков       179821,6   Ст. ошибка модели       69,71400
R-квадрат                0,364007   Испр. R-квадрат         0,329629
F(2, 37)                 10,58837   Р-значение (F)          0,000231
Параметр rho            -0,126323   Стат. Дарбина-Вотсона   2,252562
```

Коэффициенты не интерпретируемы

Интерпретация VAR моделей:

Функция импульсного отклика



Интерпретация VAR моделей:

Функция импульсного отклика

Пример **.** Квантиль №11 http://quantile.ru/11/11-AS.pdf

Синяков Андрей. Заявленная и фактическая политика Банка России

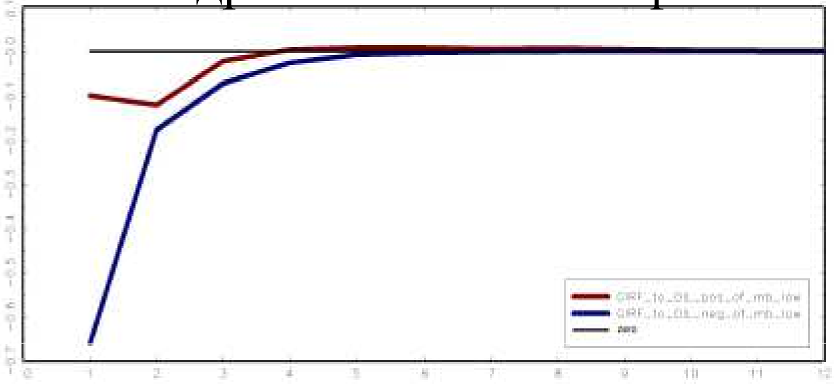


Рис. 1: Отклики денежной базы на нефтяные шоки в первом режиме (низкой стартовой инфляции). Размер шока — два стандартных отклонения, отклик на положительный шок цен на нефть — красная линия, отклик на отрицательный шок цен на нефть — синяя линия.

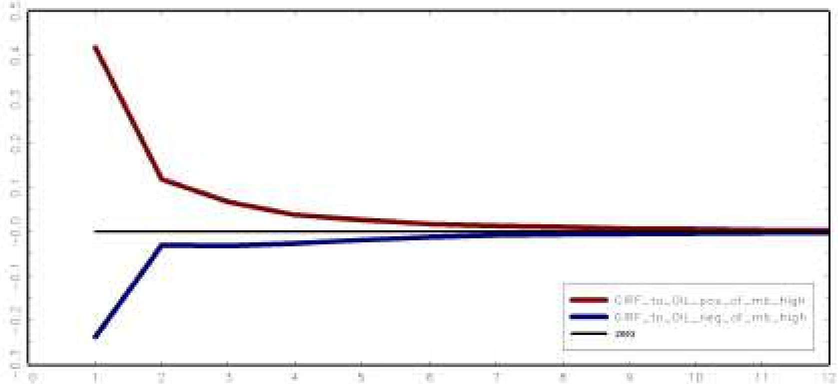


Рис. 2: Отклики денежной базы на нефтяные шоки во втором режиме (высокой стартовая инфляция). Размер шока — два стандартных отклонения, отклик на положительный шок цен на нефть — красная линия, отклик на отрицательный шок цен на нефть — синяя линия.

Интерпретация VAR моделей:

построение прогноза

VAR(p) $$y_t = B_1 y_{t-1} + B_2 y_{t-2} + \ldots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

- Построение прогноза аналогично как для AR(p)

- Прогноз на 1 шаг:

$$\hat{y}_{T+1} = E\left(y_{T+1}\big|_{I_T}\right) = B_1 y_T + B_2 y_{T-1} + \ldots + B_p y_{T-p+1}$$

$$e_{T+1} = y_{T+1} - \hat{y}_{T+1} = \varepsilon_{T+1} \to V(e_{T+1}) = \Sigma$$

$$\hat{y}_{T+2} = E\left(y_{T+2}\big|_{I_T}\right) = B_1 y_{T+1} + B_2 y_T + \ldots + B_p y_{T-p+2} =$$

$$= B_1(B_1 y_T + B_2 y_{T-1} + \ldots + B_p y_{T-p+1}) + B_2 y_T + \ldots + B_p y_{T-p+2}$$

И т.д.

Интерпретация VAR моделей:

Разложение дисперсии ошибок

VAR(1) Как дисперсия ошибок прогноза на n шагов вперед для одной переменной объясняется шоком в другой переменной?

$$y_t = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{pmatrix} = \mu_t + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi^{(i)} \varepsilon_{t-i} \qquad \textbf{VMA}(\infty)$$

Дисперсия ошибки прогноза:

$$e_{T+n} = y_{T+n} - \hat{y}_{T+n} = \left(\Phi_1^{(0)} \varepsilon_{T+n} + \Phi_1^{(1)} \varepsilon_{T+n-1} + \ldots + \Phi_1^{(n-1)} \varepsilon_{T+1}\right) +$$

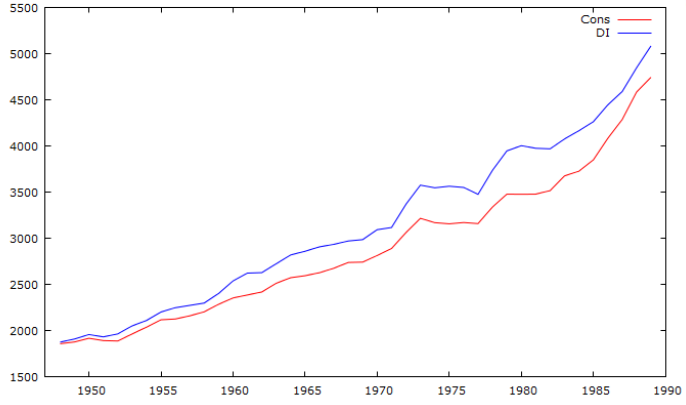
$$+ \left(\Phi_2^{(0)} \varepsilon_{T+n} + \Phi_2^{(1)} \varepsilon_{T+n-1} + \ldots + \Phi_2^{(n-1)} \varepsilon_{T+1}\right)$$

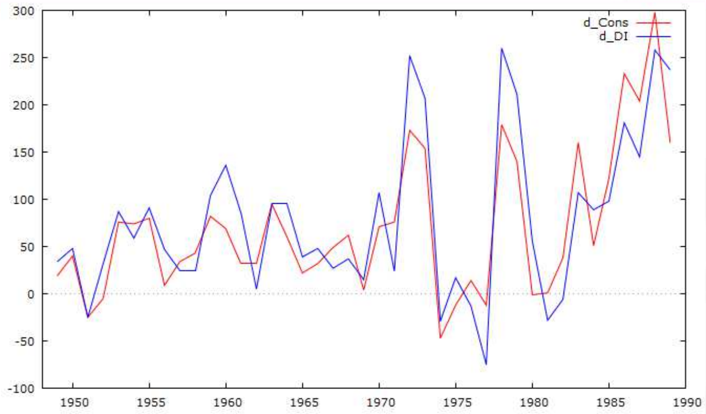
$$V(e_{T+1}) = \sigma_{y1}^2 \left(\left(\Phi_1^{(0)}\right)^2 + \left(\Phi_1^{(1)}\right)^2 + \ldots + \left(\Phi_1^{(n-1)}\right)^2\right) +$$

$$+ \sigma_{y2}^2 \left(\left(\Phi_2^{(0)}\right)^2 + \left(\Phi_2^{(1)}\right)^2 + \ldots + \left(\Phi_2^{(n-1)}\right)^2\right)$$

Декомпозиция дисперсии ошибок

Векторная авторегрессия: пример





DATA6-3: United Kingdom Annual data.

Cons = Per capita consumption expenditure in British pounds

DI = Per capita personal disposable income in British pounds

Разложение дисперсии для d_Cons

Период	Ст. ошибка	d_Cons	d_DI
1	57,3993	100,0000	0,0000
2	71,1822	82,2476	17,7524
3	74,5183	76,6546	23,3454
4	74,9446	75,8042	24,1958
5	74,9709	75,7683	24,2317
6	74,976	75,7704	24,2296
7	74,9785	75,7680	24,2320
8	74,9791	75,7670	24,2330
9	74,9792	75,7669	24,2331
10	74,9792	75,7669	24,2331

Разложение дисперсии для d_DI

Период	Ст. ошибка	d_Cons	d_DI
1	67,0488	65,0185	34,9815
2	79,0552	66,8673	33,1327
3	83,1995	63,1849	36,8151
4	83,9201	62,2309	37,7691
5	83,9802	62,1452	37,8548
6	83,9849	62,1488	37,8512
7	83,9873	62,1485	37,8515
8	83,988	62,1478	37,8522
9	83,9881	62,1476	37,8524
10	83,9882	62,1476	37,8524

Недостатки VAR моделей

При оценке VAR-модели с большим количеством переменных и лагов число оцениваемых параметров может значительно превышать число доступных наблюдений (проблема проклятия размерности).

Проблемы: *оценки коэффициен*тов либо вообще невозможно получить, либо они оказываются неточными (слишком большие стандартные ошибки) и не пригодными для дальнейшего структурного анализа и прогнозирования.

Решение проблемы: использование **байесовских** методов (BVAR), использование априорных предположений относительно коэффициентов VAR-модели, их дисперсии и ковариации, что позволяет снизить число оцениваемых параметров. Байесовский подход позволяет «сжать» пространство оцениваемых коэффициентов модели в сторону априорных представлений о характере процесса, порождающего данные.

Пестова А., Мамонов М. Оценка влияния различных шоков на динамику макроэкономических показателей в России и разработка условных прогнозов на основе BVAR-модели российской экономики // Экономическая политика. 2016. №4.
URL: https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-vliyaniya-razlichnyh-shokov-na-dinamiku-makroekonomicheskih-pokazateley-v-rossii-i-razrabotka-usloanyh-prognozov-na-osnove-bvar