Численное моделирование неидеального теплового контакта системы тел

Выполнил: студент группы ФН2-12М Клабуков П. А.

Руководитель ВКР:
Доцент к.ф.м.н. Крайко А. А.

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

20 мая 2025 г.

Постановка задачи

1. Целью данной работы является численное решение задачи аэроупругих колебаний лопаточного венца газовой турбины авиационного двигателя с учётом влияния набегающего потока.
2. Актуальность: востребованность численных алгоритмов для решения подобных задач, которые часто встречаются на практике. В частности, для моедлирования колебаний лопаток в лопаточном венце.

Задачи

1. Рассмотреть математическую модель задачи колебаний лопаток в лопаточном венце.
2. Составить численный алгоритм на основе метода Рунге-Кутты.
3. Провести ряд расчётов с помощью созданной программы.

Флаттер

Эффект флаттера

Аэроупругие колебания - это колебания, которые возникают из-за взаимодействия конструкции с потоком газа, имеют положительную обратную связь между колебаниями и аэродинамическими силами. Эффект флаттера – это частный случай аэроупругих колебаний, который возникает, когда аэродинамические силы начинают подпитывать колебания конструкции, что может привести к разрушению конструкции.

При набегающем потоке лопатка начинает колебаться, эти колебания создают возмущения в потоке, а сами возмущения создают аэродинамические силы, которые могут увеличивать амплитуду колебания лопаток до критических значений. Такое явление можно отследить при отрицательном коэффициенте демпфирования $D < 0$.

Простейший случай

Запишем уравнение колебания лопатки в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + D\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

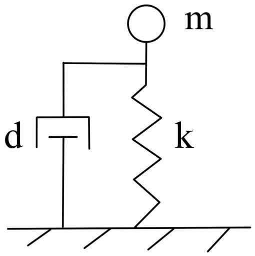


Рис. 1 математическая модель лопатки.

Случай взаимодействия двух лопаток

Запишем систему уравнений, описывающих колебания пары лопаток в следующем виде:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x}{dt^2} + D_1 \dfrac{dx}{dt} + k_1 x - F_{12} = 0, \\ m_2 \dfrac{d^2x}{dt^2} + D_2 \dfrac{dx}{dt} + k_2 x + F_{12} = 0, \\ F_{12} = -k12(x1 - x2) + D_{12}(x1 - x2) = 0, \\ F_{21} = -F12, \end{cases}$$

где F_{12} и F_{21} – силы, с которыми лопатки взаимодействуют друг на друга, а k_{12} и D_{12} – коэффициенты жёсткости и демпфирования связывающие две лопатки между собой.

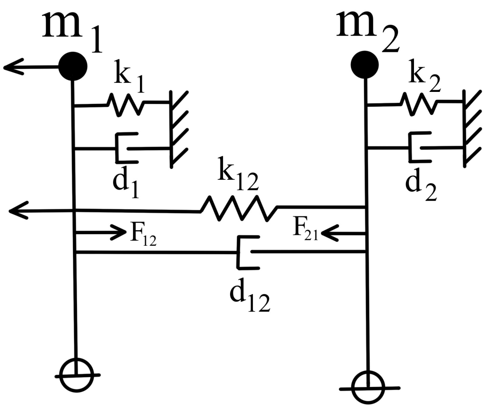


Рис. 2 математическая модель двух связанных лопаток.

Метод Рунге-Кутты 4-ого порядка

Для решения уравнения в качестве численного метода был выбран метод Рунге-Кутты 4-ого порядка:

Понижение степени уравнения

Пусть $x = x_1$, а $\frac{dx}{dt} = x_2$, тогда имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{D}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \end{cases}$$

$f(t, y)$ – правая часть, тогда:

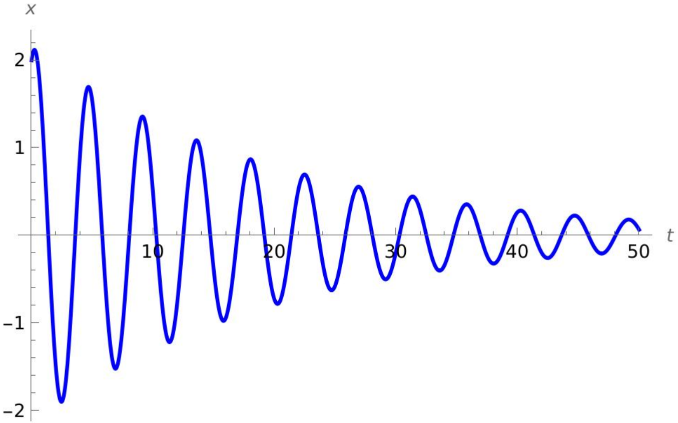
$$k_1 = f(t, y), k_2 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k1), k_3 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k2),$$

$\mathrm{k}_4 = f(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}k3)$.

$$y_{n+1} = y_n + 6h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Результаты расчётов

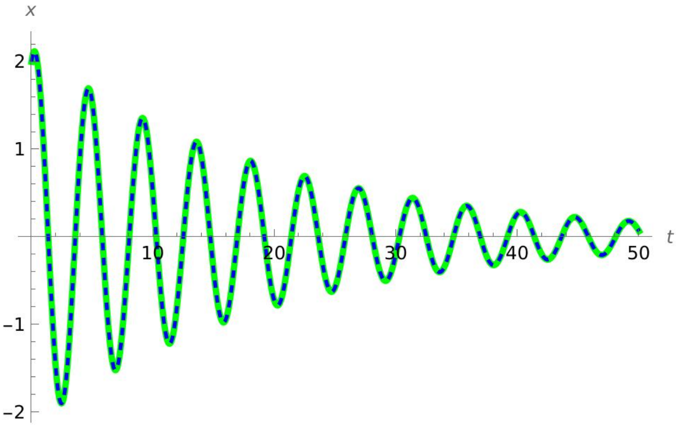
Рассмотрим решение задачи о колебании одной лопатки: далее будут приведены расчёты колебания лопатки со следующими параметрами: $x_0 = 2, v_0 = 1, k = 2, D = 0.1, m = 1$.



Аналитическое решение:

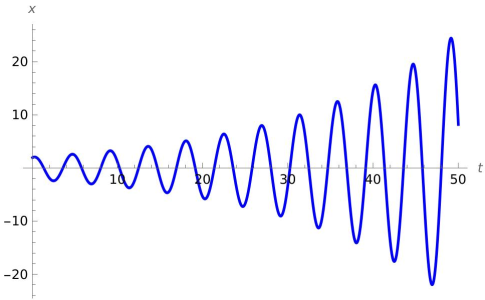
$$e^{-\frac{d t}{2 m}} \left(A \operatorname{Cosh}\left[\frac{\sqrt{d^2 - 4 k m}\, t}{2 m}\right] + \frac{(A d + 2 B m) \operatorname{Sinh}\left[\frac{\sqrt{d^2 - 4 k m}\, t}{2 m}\right]}{\sqrt{d^2 - 4 k m}} \right)$$

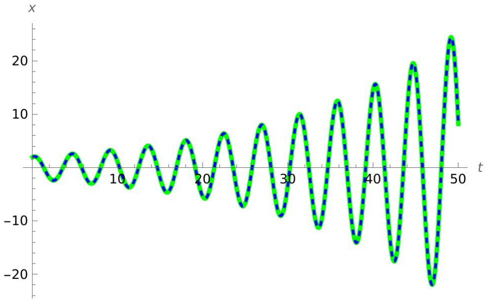
Ниже приведено сравнение с аналитическим решением:



При этом погрешность численного решения в норме C составляет: 0.000025 при $\tau = 0.1$.

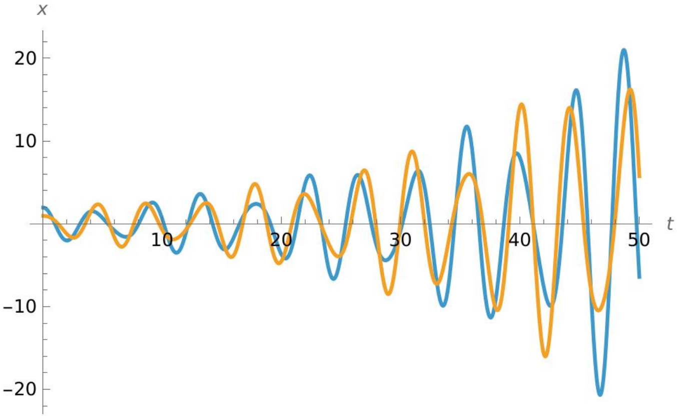
Ниже приведены аналогичные расчёты при $D = -0.1$





Колебания пары лопаток

Параметры двух лопаток взяты аналогично предыдущим расчётам с отрицательным коэффициентом демпфирования, $k_{12} = 1$, $d_{12} = 0.1$



Заключение

1. Рассмотрена математическая модель задачи колебания лопаток в венце авиа двигателя.
2. Реализована численная модель на основе метода Рунге-Кутты 4-ого порядка.
3. Решён ряд тестовых задач с известным аналитическим решением.