Фоканова Уля Владимировна, 3 к. 3 гр.

|  |
| --- |
| **Задача.  «Open-shop»** |

**Условие**

Имеется N работ и M приборов. Требуется составить такой маршрут обслуживания каждой работы на каждом приборе, чтобы время обслуживания последней работы было минимально. В любой момент времени каждая работа должна обслуживаться не более чем одним прибором и каждый прибор должен обслуживать не более одной работы. При этом никакой прибор не может простаивать, если некоторая работа готова к выполнению на нем.

**Решение**

Задача симметрична относительно понятий “работа” --- “машина” , поэтому в дальнейшем считаем, что число машин не превосходит числа работ.

Алгоритм решения состоит в полном переборе с отсечениями.

Изначально генерируются все возможные порядки загрузки работ на машины. Каждая такая перестановка соответствует вершине в дереве перебора. Несложно подсчитать число таких перестановок: оно равно числу M-размещений без повторений из N-множества . Далее алгоритм строит расписание однозначно до некоторого момента, когда возможно ветвление (то есть существует более одного варианта распределения свободных работ по простаивающим машинам.)

Будем считать, что время изменяется скачкообразно от нуля до максимального времени выполнения: каждое новое значение принимается в момент, когда на очередной машине завершается выполнение очередной работы. Назовём фронтом работ в текущий момент времени вектор, каждая координата которого соответствует номеру работы, исполняемой на данной машине. Тогда каждой вершине дерева соответствует некоторый уникальный фронт работ. (Корнем дерева перебора будем считать нулевой вектор, то есть пустой фронт работ.)

Отсечения проводим, исходя из следующих оценок:

1. Искомое время выполнения не меньше максимального суммарного времени выполнения каждой из работ. Поэтому, если достигнуто равенство, очевидно, найдено оптимальное решение и перебор прекращается.
2. Искомое время выполнения не превосходит суммы текущего времени и максимального остаточного суммарного времени выполнения каждой из работ. При нарушении этого условия дальнейший перебор представляется неперспективным и данную ветвь дерева перебора следует отсечь.
3. Можно также проводить отсечения по рекорду. Для этого можно попытаться построить рекорд жадным алгоритмом или воспользоваться одной из известных оценок для различных классов примеров входных данных в задаче Open Shop. (Такие оценки вместе с ограничениями, накладываемыми на входные данные, приведены, в частности, в диссертации Севастьянова С.В., Российская Академия Наук, Сибирское отделение, Институт математики, 2000 г.)

(Однако в тестирующей системе Insight Runner задача проходит и без этих оценок.)

**Приложение**

Приведём оценки. (Доказательства можно найти в вышеупомянутой работе.)

**Теорема 1**. Для задачи Open Shop с M машинами и N работами существует жадный алгоритм, который с трудоёмкостью O() для любого входа задачи строит расписание S с оценкой длины:

**Следствие 1.** Если для целого выполняется: , то:

**Следствие 2.** Если , то:

**Следствие 3.** Если , то:

**Следствие 4.** Если , то:

Очевидно, что последовательая проверка снизу вверх этих условий даст оценку длины расписания.

В заключение упомянем, что для широкого класса задач верно: (и об этом тоже пишет Севастьянов в своей диссертации), поэтому в жизни часто имеет смысл сперва выяснить, а вдруг входные данные задачи удовлетворяют условиям, накладываемым на этот класс. Тогда жадный алгоритм построит точное расписание за . Задача же нахождения длины оптимального расписания сводится к задаче подсчёта .