

Занятие № 1. Условные распределения и условные числовые характеристики.

©Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е., к.ф.-м.н., доц. Браилов А.В.

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

1.1. Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$
$Y = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$Y = 2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Найдите: 1) условное математическое ожидание $E(Y|X + Y = 1)$; 2) $\text{Var}[E(X|Y)]$; 3) $E[\text{Var}(X|Y)]$.

1.2. Дано $\mathbb{P}(X = 30) = 0,9$, $\mathbb{P}(X = 60) = 0,1$, $E(Y|X = 30) = 3$ и $E(Y|X = 60) = 2$.
Найдите $\text{Cov}(X, Y)$ и $\text{Var}\{E(Y|X)\}$.

1.3. Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$
$Y = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{24}$
$Y = 3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Найдите распределение условного математического ожидания $Z = E(X^2 + Y^2|Y)$ и $E(Z)$.

1.4. Дано: $\mathbb{P}(X = 50) = 0,1$, $\mathbb{P}(X = 70) = 0,9$, $E(Y|X = 50) = 4$, $E(Y|X = 70) = 2$,
 $\text{Var}(Y|X = 50) = 9$ и $\text{Var}(Y|X = 70) = 5$. Найдите $E[\text{Var}(Y|X)]$ и $\text{Var}(Y)$.

1.5. Случайные величины X и Y независимы и с равной вероятностью принимают значения: 1, 2, 3, 4, 5. Найдите $E(X|X > Y)$ и $\text{Var}(X|X > Y)$.

1.6. Имеется 36 игральные кости. В первый раз бросаются все игральные кости, во второй раз – только те, на которых в первый раз выпало 6 очков. Пусть S – сумма очков при втором броске. Найдите $E(S)$ и $\text{Var}(S)$.

1.7. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Пусть S – сумма очков во всех бросках, кроме последнего ($S = 0$, если 6 очков выпало при первом броске). Найдите $E(S)$ и $\text{Var}(S)$.

1.8. Сначала бросается игральная кость, затем монета подбрасывается столько раз, сколько очков выпало на игральной кости, X – число выпавших при этом гербов. Найдите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$.

- 1.9.** Сначала подбрасывается монета. Если выпал «орел», игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет «6», если выпала «решка», игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет «5» или «6». Пусть X – число бросков игральной кости. Найдите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$.
- 1.10.** Случайная величина X распределена по геометрическому закону, n – натуральное число. Докажите, что условное распределение случайной величины $X - n$ при условии, что $X > n$ совпадает с безусловным распределением X . Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет герб, X – число бросков. Используя предыдущее задание, найдите $E(X^2 | X > 5)$.
- 1.11.** Пусть случайные величины X и Y независимы и имеют биномиальные распределения с параметрами n, p и m, p соответственно, т.е. $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $Y \sim \text{Bin}(m, p)$. Найдите распределение $Z = X + Y$ и условное математическое ожидание $E(X | X + Y)$.