Защита информации

Павел Юдаев

МГТУ им. Баумана, Кафедра ИУ-9

Москва, 2014

Раздел 13 - Асимметричные криптосистемы

Общий вид

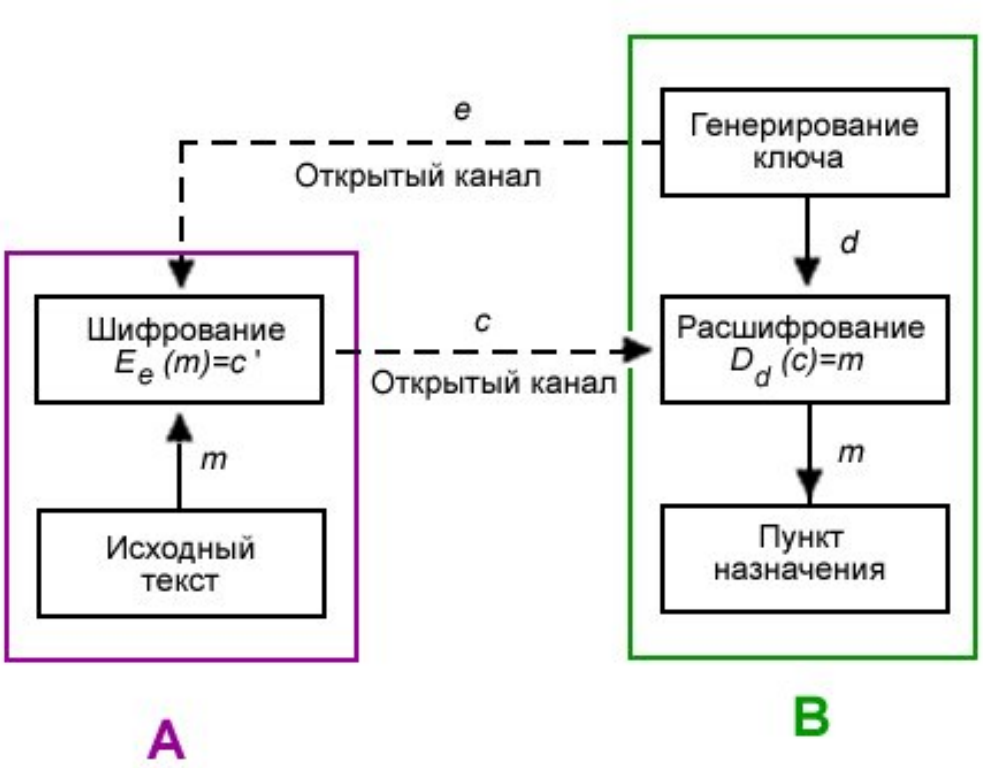
Перестановка RSA

Атаки на RSA

PKCS 1

Шифр Эль-Гамаль

Общий вид криптосистемы с открытым ключом.



Замеч.: в таком виде уязвима к атаке Man-in-the-Middle, если зл-к встраивается в канал на этапе передачи открытого ключа, и открытый ключ нельзя проверить в обход зл-ка. (Hash, ЭЦП.)

Т.е. есть проблема - управление откр. ключами. (public key management)

Опр.

Асимм. к/с - это тройка алгоритмов G, E, D:

$G(\cdot)$ - рандомизированный генератор пары ключей (открытый ключ, закрытый ключ - public key, secret key). Принимает *seed* - начальное значение.

$E(\cdot, \cdot)$ - рандомизир. алгоритм шифрования. $c = E(pk, m)$

$D(\cdot, \cdot)$ - детерм. алгоритм расшифрования. $m = D(sk, c)$

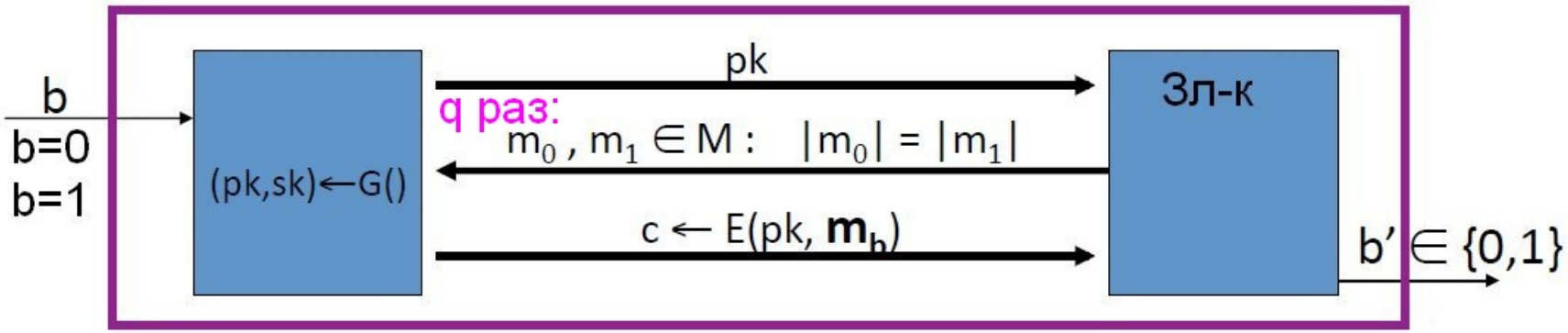
Для пары (pk, sk), созданной $G()$, верно $D(sk, E(pk, m)) = m$

Односторонняя функция (one-way function, OWF).

Односторонняя функция с секретом.

Существование односторонних функций до сих пор не доказано.
Существует несколько функций, для которых не известно эффективного алгоритма вычисления обратной функции. (Но для большинства - не доказано, что их нет!)
На них основываются методы асимметричной криптографии.

Стойкость против подслушивания



Зл-к возвращает значение b', пытается угадать значение b.

Опр.

$S = (G, E, D)$ *семантически стойкая к атаке с выбранным открытым текстом* (semantic security), если для $\forall A \in \mathrm{PP}$

$$Adv_{CPA}(A, S) := \left|P(b' = 1|b = 0) - P(b' = 1|b = 1)\right| < \varepsilon(n)$$

Сравнение с симм. к/с.

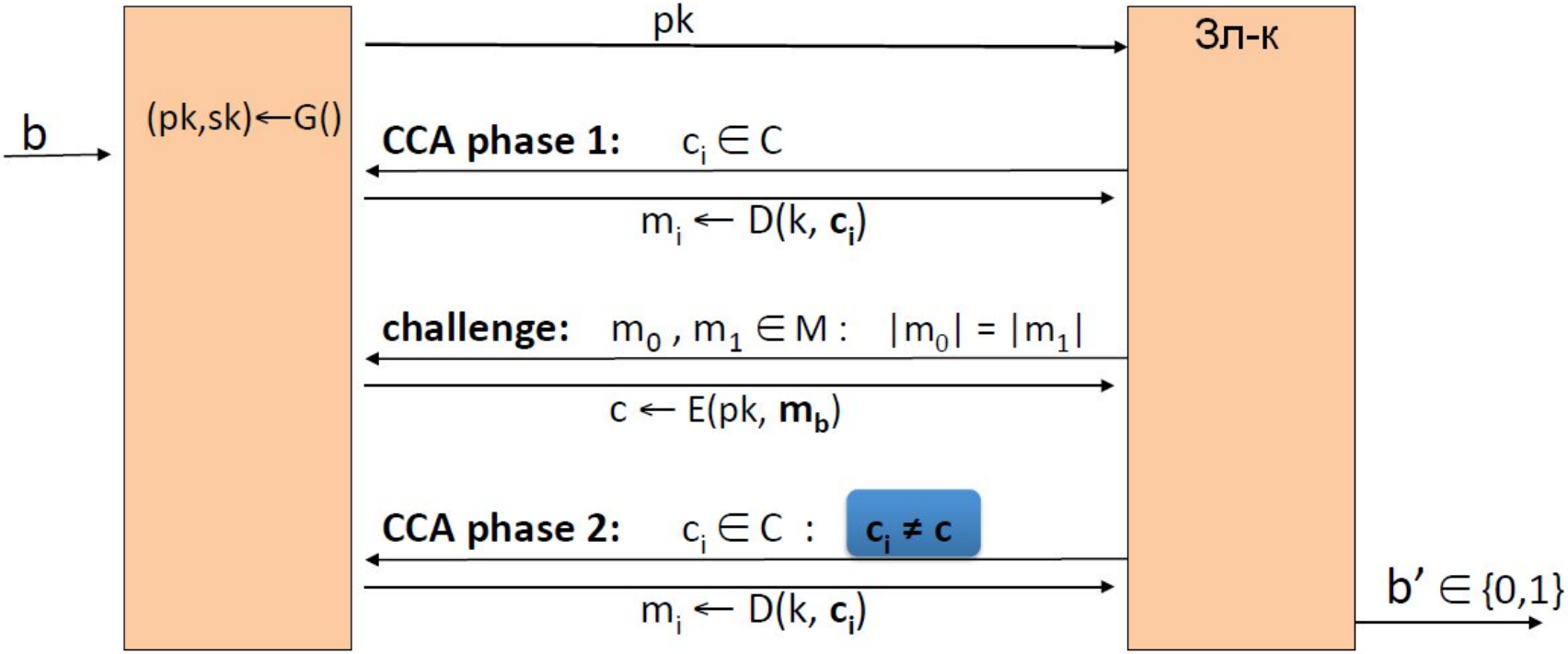
В симм. к/с зл-к не знал ключ и не мог сам строить ш/т по открытому тексту.

В асимм. к/с зл-к знает открытый ключ и может созд. любое кол-во ш/т для любых исходных текстов, даже если ключ “одноразовый”.

Поэтому для асимм. к/с не различаем случаи с одноразовым ключом и многоразовым ключом.
Из стойкости для одноразовый. ключа $\Rightarrow$ стойкость для многораз. ключа.

Асимм. шифрование обязано быть рандомизированным.

Стойкость против активных атак



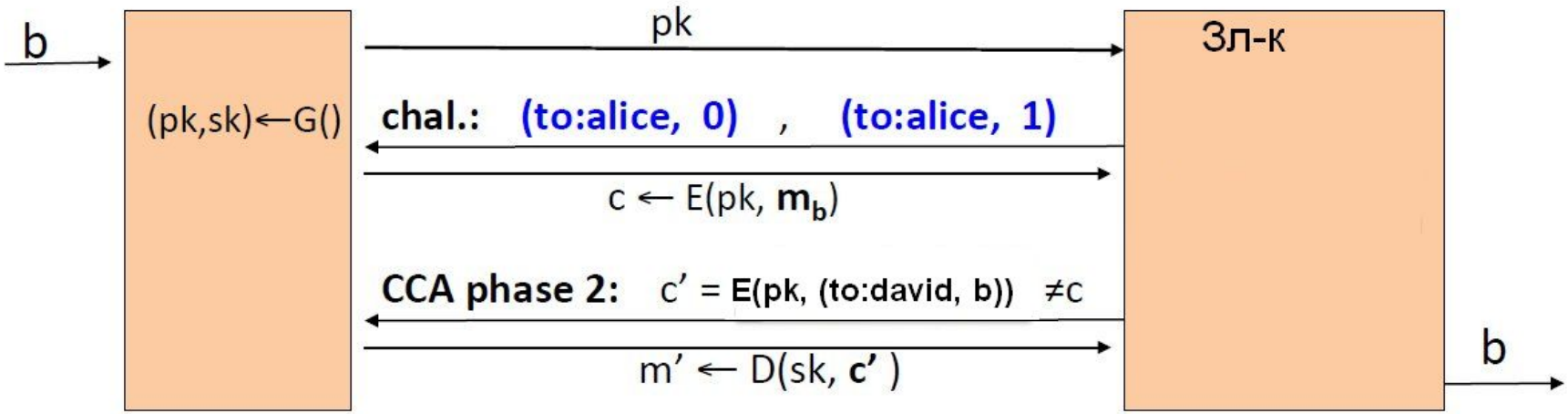
Опр.

$S = (G, E, D)$ семантически стойкая к атаке с выбранным шифротекстом, если $\forall A \in \mathrm{PP}$

$$Adv_{CCA}(A, S) = \left|P(b' = 1|b = 0) - P(b' = 1|b = 1)\right| < \varepsilon(n)$$

Пример

Пусть мы можем воздействовать на шифротекст: контролируемо подменять часть сообщения. Тогда не будет стойк. к атаке с выбр. шифротекстом: зл-к узнает, чему равно b.



Активные атаки: сравнение с симм. к/с.

Симм. к/с:
стойкий шифр - заверенное шифрование
(стойкость к атаке с выбранным открытым текстом и целостность ш/т).
Т.е. зл-к не может создавать новые шифротексты, которые будут приняты.

Асимм. к/с:
Зл-к может создавать новые ш/т, которые будут приняты.
Поэтому непосредственно требуем стойкость к атаке с выбранным ш/т.

Перестановка с секретом

Опр.

Три алгоритма $(G(), F(\cdot,\cdot), F'(\cdot,\cdot))$ определяют *перестановку с секретом*, если

$G()$ выдает пары pk, sk - открытый ключ, закрытый ключ.

$F(pk, \cdot) : X \to X$.

$F'(sk, y)$ - функция $F^{-1}(pk, \cdot)$:
если $y = F(pk, x)$, то $F'(sk, y) = x$.

Опр.

Если ф-ция $F(pk, \cdot) : X \to X$ - односторонняя ф-ция при неизв. sk,
то $(G(), F(\cdot,\cdot), F'(\cdot,\cdot))$ определяет *стойкую перестановку с секретом* (secure trapdoor permutation).

Раздел 13 - Асимметричные криптосистемы

Общий вид

Перестановка RSA

Атаки на RSA

PKCS 1

Шифр Эль-Гамаль

Перестановка RSA - “RSA из учебника”.
1977, Rivest, Shamir, Adleman.
Основана на выч-но трудной задаче: разл. на мн-ли.

Генерация ключей

1) Выбир. любые p, q - большие простые числа, например, 128-битовые. Держим их в секрете.
2) $N := pq$
3) $\varphi(N) = \varphi(p)\varphi(q) = (p-1)(q-1)$ - невозм. быстро вычислить, не зная p, q
4) Выбир. $\forall e > 1 : \text{НОД}(e, \varphi(N)) = 1$. Число e - “небольшое” и с малым числом единичных битов (это ускоряет вычисления - можно польз. сдвигами). Например, $e = 0x100001$ или $e = 2^{16} + 1$ - простые числа.
5) $d = e^{-1} mod(\varphi(N))$ с пом. *ExtGCD*.

Число N наз. "модулем"

Число e - открытая экспонента, d - закрытая экспонента

Пара (N, e) - откр. ключ (public key), (N, d) - закрытый ключ (private key).

Числа p, q больше не нужны, но они секретные.

Шифрование

Сообщение - на части, часть $\leftrightarrow$ число m, $0 < m < N$.
$c := m^e \ mod \ N$

Расшифрование

$c^d = m^{ed} \ mod \ N = m^{k\varphi(n)+1} \ mod \ N =^{(*)} m \ mod \ N$ (т. Эйлера)

(*): с вероятностью порядка
$1 - 2/min(p, q) \approx 1 - 2^{-len(min(p,q))}$, число m не кратно p или q.

Если m не вз. простое с N? Вер-ть этого $\approx 2^{-len(min(p,q))}$ - никогда не случится. Это будет замечено, можно попросить изменить m и переслать.

Пример

$p = 11,\ q = 17,\ N = 187.$ e не должно иметь общих дел-й с $10 * 16 = 160.$ Пусть $e = 9.$

Тогда $d = 9^{-1}\ mod\ 160 = 89\ (ExtGCD)$

Пусть $m = 688232.$ $m_1 = 68,\ m_2 = 82,\ m_3 = 32.$

Зашифрование: $c_1 = 68^9\ mod\ 187 = 17.$

Расшифрование: $17^{89}\ mod\ 187 = 68 = m_1.$

Уязвимость перестановки RSA:

- не обесп. семантическую стойкость шифрования к атаке с выбранным открытым текстом (детерминированное шифр-е);

Является ли перестановка RSA, $m \to m^e \ mod \ N$, односторонней функцией?

Пусть d не изв.; известно $c = x^e$;
требуется найти $x = c^{1/e}$ в $\mathbb{Z}_N$, вычислив корень степени e.

Лучший известный сейчас алгоритм вычисл. корней степени e в $\mathbb{Z}_N$: два шага,
1) разложить N на множители (сложно, субэкспоненциальный алгоритм), $N = pq$
2) вычисл. корни степ. e по модулю простых p и q (полин. алгоритм).

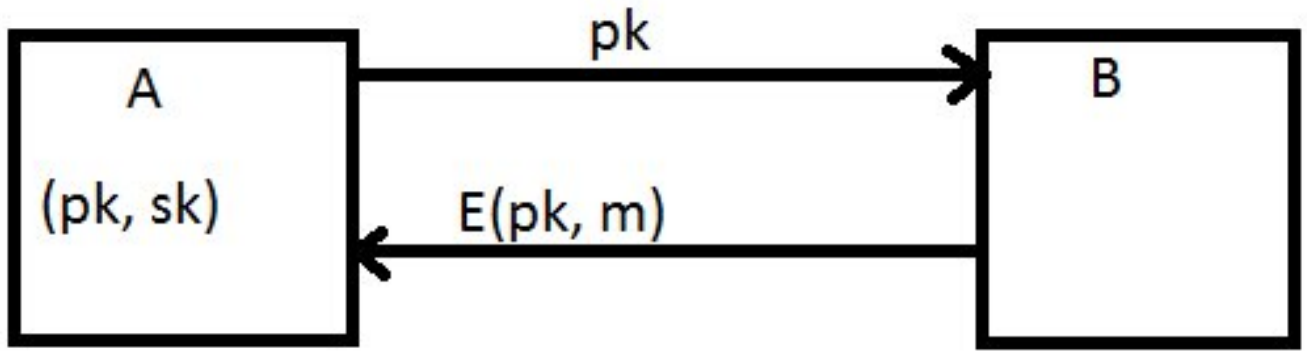
Можно ли проще? Не известно.

Субэкспоненциальная сложность взлома, поэтому асимм. к/с при той же стойкости имеет более длинный ключ и медленнее, чем симм. к/с.

Использование асимм. к/с:

1) инициализация сессии, создание общего ключа для симм. шифра

2) односторонняя коммуникация, напр. e-mail.



Раздел 13 - Асимметричные криптосистемы

Общий вид

Перестановка RSA

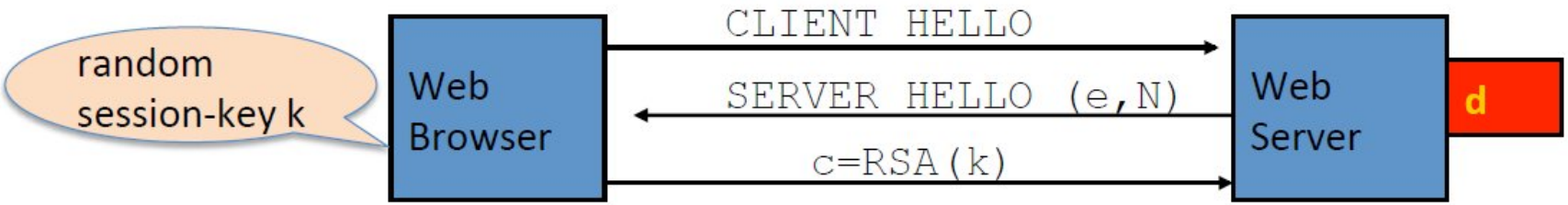
Атаки на RSA

PKCS 1

Шифр Эль-Гамаль

Атака 1 на перестановку RSA - а-ля “встреча посередине”.

Типично: асимметричное шифрование исп. для создания общего ключа для сессии, в которой будет исп. симметричное шифрование.



Длина ключа k для симм. шифра небольшая. Пусть это 64 бита. Зл-к видит $c = k^e \in \mathbb{Z}_N$.

Если k можно предст. в виде $k = k_1 \cdot k_2$, $0 < k_1, k_2 < 2^{34}$ (это произойдет с вер-ю ок. 0.35 для k длины 64 бита), то $c/(k_1)^e = (k_2)^e$.

Атака:

1) постр. таблицу: $c/1^e$, $c/2^e$, $c/3^e$, ... $c/(2^{34})^e$ - треб. время пропорц. 2^{34} и память $2^{34} \cdot 34$.

2) для $k_2 = 0, ..., 2^{34}$ попробовать найти $(k_2)^e$ в таблице - треб. 2^{34} операций поиска, т.е. время пропорц. $2^{34} \cdot log_2(2^{34})$.

Если нашли, то выдать пару (k_1, k_2); $k := k_1 \cdot k_2$. Найден ключ k, который будет исп. в симметричном шифре.
Общее время $\approx 2^{40} \ll 2^{64}$.

Атака 2 на перестановку RSA с малым d

Большое d - долго расшифровывать. Уменьшим его?

Атака Wiener'a: $d < N^{0.25} \Rightarrow$ можно найти d по (N, e).

RSA: малая публичная экспонента - быстрое шифрование. Рек. $e = 2^{16} + 1$ - простое. Шифр-е - 17 умножений по модулю.

Атака 3 при одинаковой публичной экспоненте $e = 3$

$\underline{e = 3}$.
$\underline{3}$ получателя: (N_1, e), $(N_2, e), (N_3, e)$. $m \to c_1, c_2, c_3$.

$N := N_1 N_2 N_3$, N_i вз. простые.
Обозн. $c = m^3 < N$.
$\Rightarrow \exists! c \in \mathbb{Z}_N : \ c = c_i \bmod N_i$

$\Rightarrow m = c^{1/3}$ - как числа, не по модулю.

Защита:
а) для атаки нужно e получателей: $c < N$. Не исп. $e = 3$.
б) рандомизация шифрования (см. напр. PKCS 1)

Атака 4 на RSA с общим модулем

(N, e_i, d_i). Пусть e_i вз. простые.

$c_1 = m^{e_1} mod\ n$

$c_2 = m^{e_2} mod\ n$

НОД$(e_1, e_2) = 1$, поэтому $ExtGCD \Rightarrow e_1', e_2' :\ e_1 e_1' + e_2 e_2' = 1$.

Очев, одно из e_1', e_2' отрицательное. Пусть это e_1'.

Тогда выч. $c_1^{-1} mod\ n$ $(ExtGCD)$.

$(c_1^{-1})^{-e_1'} * c_2^{e_2'} = m^{e_1 e_1' + e_2 e_2'} = m\ mod\ n$

Защита: не использовать общий модуль.

Атака 5: проблема малой энтропии

```
prng.seed(seed)
p = prng.generate_random_prime()
prng.add_randomness(bits)
q = prng.generate_random_prime()
N = p*q
```

Малая начальная энтропия $\Rightarrow$ одинаковые p.
Тогда НОД$(N_1, N_2) = p$.
Так факторизуется 0.4% от взятых в сети публичных ключей!

Атака 6 по побочным каналам

- время или график мощности при вычислении $c^d \bmod N$.
- ЭМИ $\Rightarrow$ ошибка при вычислении $c^d \bmod N$.

Любое из них позволит узнать d.

Раздел 13 - Асимметричные криптосистемы

Общий вид

Перестановка RSA

Атаки на RSA

PKCS 1

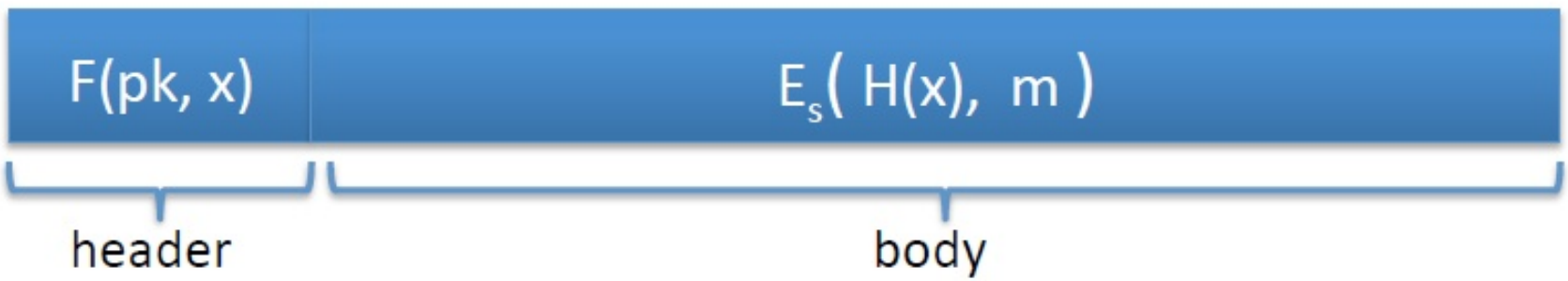
Шифр Эль-Гамаль

Первая стойкая к атакам асимм. к/с

- (G, F, F^{-1}) - односторонняя функция с секретом, $X \to Y$.
- $H : X \to K$ - криптографическаяя х/ф
- (E_s, D_s) - симметрический шифр: заверенное шифрование

Защита: $|X|^{1/2}$ достаточно велико.
$H(x)$: нужный размер результата и запутывание.

$E(pk, m)$:	$D(sk, (y, c))$:
$x \xleftarrow{R} X,\ y := F(pk, x)$	$x := F^{-1}(sk, y)$
$c := E_s(H(x), m)$	$m := D_s(H(x), c)$
(y, c)	m



Теорема 1

Если (G, F, F') - односторонняя функция с секретом,
(E_S, D_S) обесп. заверенное шифрование
$H : X \to K$ - "случайный оракул",
то асимм. к/с (G, E, D) стойкая к атаке с изв. шифротекстом (в модели со случ. оракулом).

Без док-ва.

В жизни нет "случайных оракулов", но иначе доказать не удается.

Public-Key Cryptography Standard 1 (RSA) (*)

v1.5: шифрование: $c := RSA(pk, (02||randompad||FF||m))$
Зачем *randompad*?

Расшифрование: расшифровать ш/т и проверить, что первые 2 байта равны 0x00 0x02. Если не равны, отправить ошибку “неверный протокол”.

Т.е. зл-к может проверять, что первые два байта после расшифровки равны 02.

Как м.б. исправить?
а) Не шифровать 02? - Примем все ш/т!
б) Не отвечать “неверный протокол” и обеспечить равное время работы.

“The million message attack” (Bleichenbacher) (*)
Атака с выбранным шифротекстом.

$s \xleftarrow{R} M$

послать $c' = cs^e \ mod \ n = (ms)^e \ mod \ n$

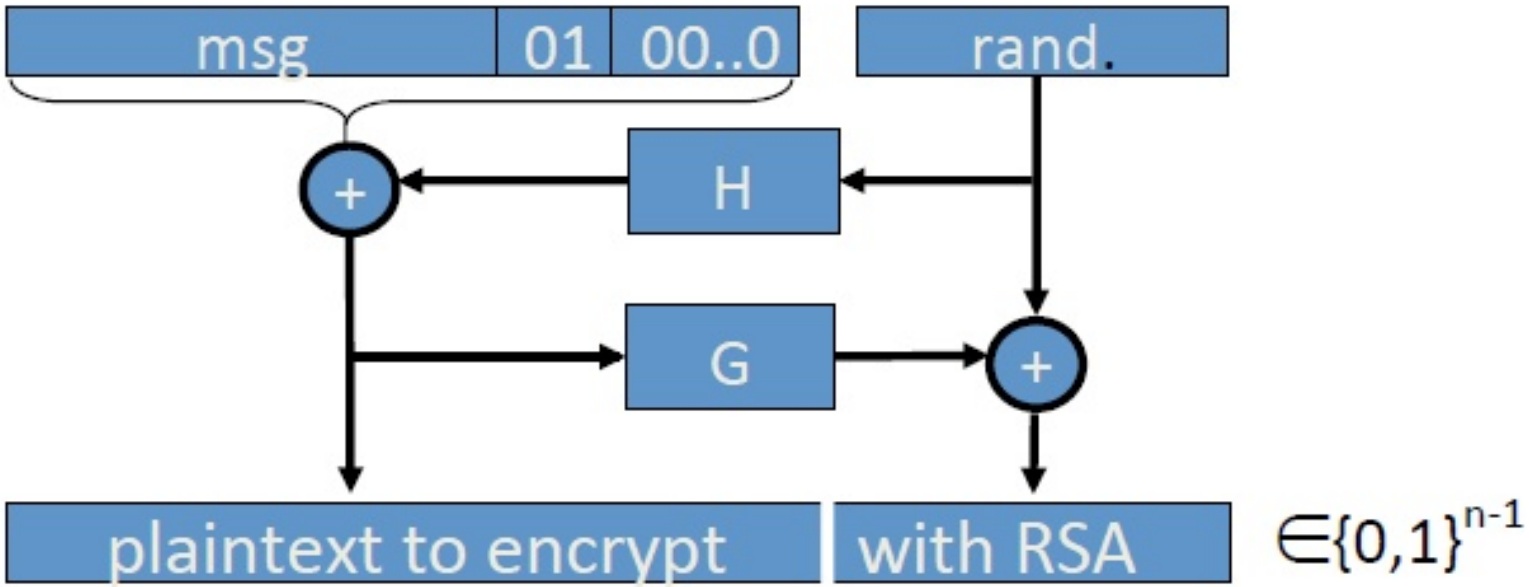
если c' не отвегнут, то $msb(ms) = 02$.

Так собираем инф-ю об m. Чтобы полностью узнать m, нужно неск. миллионов сообщений.

PKCS1 v2.0: OAEP (*)

Optimal Asymmetric Encryption Padding

$n := len(N)$; $r \xleftarrow{R} R$. Шифрование: $c = RSA(f(m||pad, r))$



G,H - хэш функции.

При расшифровке проверить *pad*. Отвергнуть ш/т, если не правильный.

(Пояснить рисунок.)

(*)

Теорема 2

Если RSA - односторонняя перестановка с секретом и G, H - случайные оракулы, то RSA-OAEP стойкая к атакам с выбранным шифротекстом.

Реализация расшифрования:
Так, чтобы избежать атаку по возвращаемому ответу и по времени обработки.

(Вторая стойкая к атакам асимметричная к/с)

Сравнение длин ключей симм. и асимм. при один. стойкости

(по данным NIST)

Симм. шифр	размер модуля RSA	Порядок гр. эллипт. кривой
64	512	
80	1024	160
128	3072	256
256 (AES)	15360	512

Поэтому постеп. переход к к/с на эллипт. кривых.

Раздел 13 - Асимметричные криптосистемы

Общий вид

Перестановка RSA

Атаки на RSA

PKCS 1

Шифр Эль-Гамаль

Протокол шифрования Эль-Гамаль (El Gamal)

Осн. на сложности проблемы дискр. логарифмирования: по известным p, g, y найти x: $y = g^x \bmod p$. Субэксп. сложность.

1. Генерация ключей:
   - выбир. группу G порядка q. Обычно G - циклическая подгруппа нек. группы $\mathbb{Z}_p^*$ (см. далее).
   - g - генератор G.
   - выбир. случ. x: $1 < x < q - 1$
   - выч. $y := g^x$
   - о.к. - (G, q, g, y); з.к. - x

2. Шифрование. Все операции в группе G.
   - $m \in G$.
   - выбир. случ. k, $1 < k < q - 1$. Это аналог IV, но k не передается.
   - $c_1 := g^k$
   - $c_2 := y^k m$
   - (c_1, c_2) - шифротекст, в 2 раза длиннее m.

3. Расшифрование:
   - $m := c_2 \cdot c_1^{-x}$.

4. Корректность:
   - $c_2 * c_1^{-x} = y^k m \cdot c_1^{-x} = g^{kx} m g^{-kx} = m$

Утверждение

Если в группе G дискретный логарифм - сложная задача и алгоритм шифрования не разглашает информацию об m, то шифр Эль Гамаля семантически стойкий к атаке с выбором открытого текста.

Без док-ва.

Подходит, напр., группа вычетов $\mathbb{Z}_p^*$ по модулю надежного простого числа $p = 2q + 1$ (p, q - простые) и выбор g из **подгруппы квадратичных вычетов** порядка q, так что $\left(\frac{g}{p}\right) = 1$ и ограничение множества сообщений: $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$.

Утверждение

Произвольные $\mathbb{Z}_p^*$ и g не подходят: раскрывается 1 бит инф-и об m.

Док-во

Пусть g - генератор $\mathbb{Z}_p^*$. След-но g - не кв. вычет, $\left(\frac{g}{p}\right) = -1$.

Символ Лежандра вычисляется эффективно. Вычислим $\left(\frac{c_1}{p}\right) = \left(\frac{g^k}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right)^k$ - узнаем четность k.
Публичный ключ $y = g^x$ - узнаем четность x.

$c_2 = g^{kx} m$, вычислим $l_1 = \left(\frac{c_2}{p}\right)$.
Из предыдущих, знаем $l_2 = \left(\frac{g^{kx}}{p}\right)$.
Тогда узнаем $\left(\frac{m}{p}\right) = l_1 / l_2$.
Ч.т.д.

Литература к лекции

1. Boneh, Joux, Nguyen. *Why Textbook ElGamal and RSA Encryption Are Insecure*. Параграфы 1 и 3.1. http://www.ssi.gouv.fr/archive/fr/sciences/fichiers/lcr/bojong00.pdf

2*. PKCS 1 v2.2: RSA Cryptography Standard, http://www.emc.com/collateral/white-papers/h11300-pkcs-1v2-2-rsa-cryptography-standard-wp.pdf

3*. Y. Tsiounis, M. Yung. *On the Security of ElGamal Based Encryption*, http://www-verimag.imag.fr/~plafourc/teaching/Elgamal.pdf