МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра ВМ-2

ОТЧЕТ

по индивидуальному заданию №3
по дисциплине «Статический анализ»
Вариант №13

Студент гр. 8382	____________________	Мирончик П.Д.
Преподаватель	____________________	Малов С.В.

Санкт-Петербург
2020

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вар. 13 (83822020)

Результаты статистического эксперимента приведенны в таблице 1. Требуется оценить характер (случайной) зависимости переменной Y от переменной X.

1. Построить графически результаты эксперимента. Сформулировать линейную регрессионную модель переменной Y по переменной X. Построить МНК оценки параметров сдвига β_0 и масштаба β_1. Построить полученную линию регрессии. Оценить визуально соответствие полученных данных и построенной оценки.
2. Построить и интерпретировать несмещенную оценку дисперсии. На базе ошибок построить гистограмму с шагом h. Проверить гипотезу нормальности ошибок на уровне α по χ^2. Оценить расстояние полученной оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову. Визуально оценить данный факт.
3. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров β_0 и β_1 уровня доверия $1-\alpha$. Построить доверительный эллипс уровня доверия $1-\alpha$ для (β_0, β_1) (вычислить его полуоси).
4. Сформулировать гипотезу независимости переменной Y от переменной X. Провести проверку значимости.
5. Сформулировать модель, включающую дополнительный член с X^2. Построить МНК оценки параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ в данной модели. Изобразить графически полученную регрессионную зависимость.
6. Построить несмещенную оценку дисперсии. Провести исследование нормальности ошибок как в п.3.
7. В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ уровня $1-\alpha$. Написать уравнение доверительного эллипсоида уровня доверия $1-\alpha$.
8. Сформулировать гипотезу линейной регрессионной зависимости переменной Y от переменной X и проверить ее значимость на уровне α.
9. Интерпретировать полученные результаты. Написать отчет.

Таблица 1 $\alpha_1 = 0.01$; $h = 1.50$.

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Y	8.07	10.94	10.22	8.81	7.28	14.70	9.04	9.37	11.02	5.40	12.19	11.16	9.15	9.61	11.57	8.43	13.15
X	2	5	0	6	3	3	2	4	6	6	0	3	3	1	2	4	4
No	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Y	9.70	15.20	8.27	8.78	10.92	9.37	10.01	10.65	14.03	7.33	13.59	4.79	11.43	8.77	10.70	10.05	6.31
X	5	0	4	3	6	6	5	5	6	6	1	6	5	4	2	5	2
No	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
Y	5.79	13.04	10.91	14.07	15.33	9.61	9.28	14.22	8.45	8.55	7.35	11.75	11.32	10.74	8.01	7.37	
X	2	3	3	1	5	3	3	0	0	5	2	5	1	3	3	3	

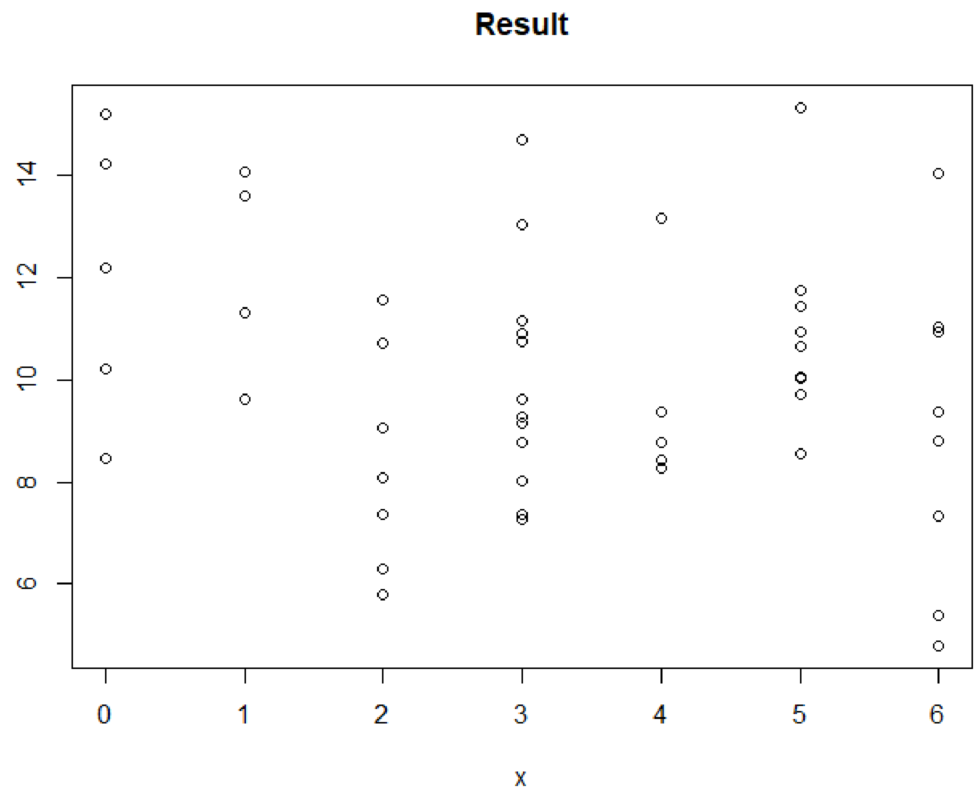
ХОД РЕШЕНИЯ

1

Построить графически результаты эксперимента. Сформулировать линейную регрессионную модель переменной Y по переменной X. Построить МНК оценки параметров сдвига β_0 и масштаба β_1. Построить полученную линию регрессии. Оценить визуально соответствие полученных данных и построенной оценки.

Графическое представление:

```
x <- c(2, 5, 0, 6, 3, 3, 2, 4, 6, 6, 0, 3, 3, 1, 2, 4, 4, 5, 0, 4, 3,
6, 6, 5, 5, 6, 6, 1, 6, 5, 4, 2, 5, 2, 2, 3, 3, 1, 5, 3, 3, 0, 0, 5,
2, 5, 1, 3, 3, 3)
y <- c(8.07, 10.94, 10.22, 8.81, 7.28, 14.70, 9.04, 9.37, 11.02, 5.40,
12.19, 11.16, 9.15, 9.61, 11.57, 8.43, 13.15, 9.70, 15.20, 8.27, 8.78,
10.92, 9.37, 10.01, 10.65, 14.03, 7.33, 13.59, 4.79, 11.43, 8.77,
10.70, 10.05, 6.31, 5.79, 13.04, 10.91, 14.07, 15.33, 9.61, 9.28,
14.22, 8.45, 8.55, 7.35, 11.75, 11.32, 10.74, 8.01, 7.37)
plot(x,y,main="Result")
```



МНК оценка параметров сдвига β_0 и масштаба β_1

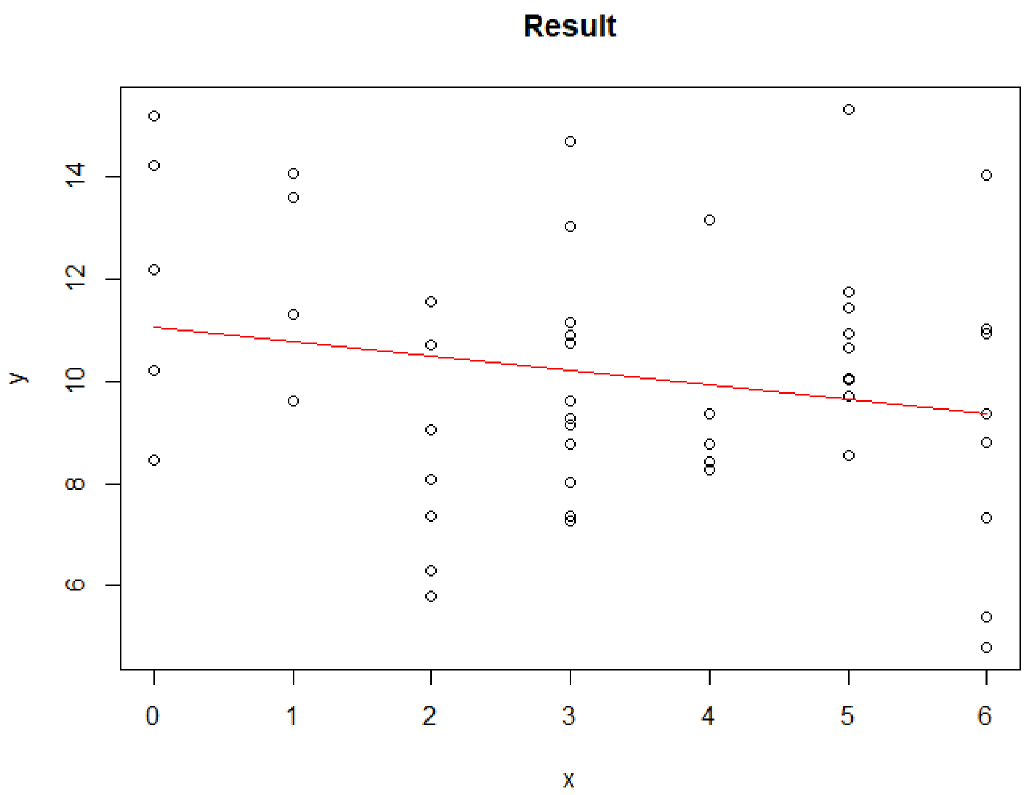
```
XM = matrix(c(array(1,dim=50),x),nrow=2,ncol=50,byrow=TRUE)
S = XM %*% t(XM)
YM = as.matrix(y)
S1 = solve(S)
# МНК оценка
bht = S1 %*% XM %*% YM;
print(bht)
```

Результат: $\beta_0 = 11.0500639$, $\beta_1 = -0.2796599$

Линейная регрессионная модель: $y = 11.0500639 - 0.2796599 * x + \varepsilon$.

Постройка полученной регрессии:

```
xx<-c(0,1,2,3,4,5,6)
yy<-bht[1]+bht[2]*xx
points(xx,yy,"l",col="red")
```



Линия регрессии имеет отрицательный угол наклона, что совпадает с коэффициентом наклона, найденным по МНК.

2

Построить и интерпретировать несмещенную оценку дисперсии. На базе ошибок построить гистограмму с шагом h. Проверить гипотезу нормальности ошибок на уровне α по χ2. Оценить расстояние полученной оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову.

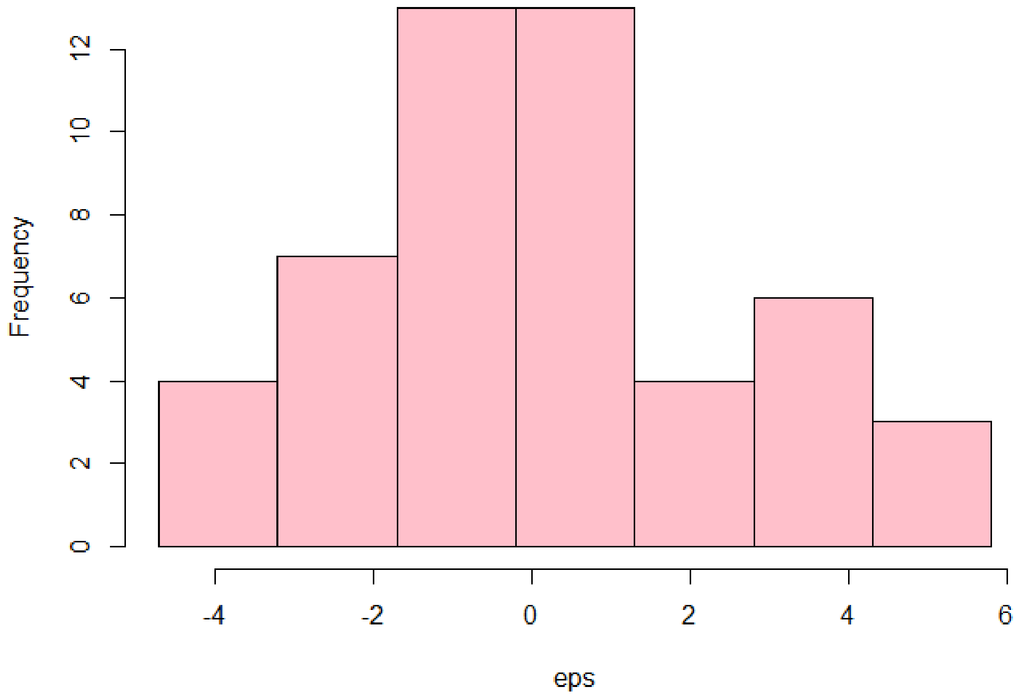
Построение несмещенной оценки дисперсии:

```
eps<-(YM-t(XM)%*%bht)
n = length(y)
r = dim(XM)[1]
SSE = sum(eps^2)
sht = SSE/(n-r)
print(sht)
```

Результат: 6.248361

Построение гистограммы с шагом h = 1.5 на базе ошибок

```
hist(eps, breaks=seq(min(eps), max(eps) + 1.5, by=1.5) ,col="pink")
```



Проверка гипотезы нормальности ошибок на уровне α по χ2:

H_0: $Y - X^T \beta \sim(0, \sigma^2)$

```
hh = hist(eps, breaks=seq(min(eps), max(eps) + 1.5, by=1.5),
col="pink")
nu = hh$counts;
breaks = hh$breaks;
r = length(breaks) - 1
csq0<-function(s){
  if (s>0){
    p<-pnorm(breaks[2:length(breaks)],0,s)-
pnorm(breaks[1:(length(breaks)-1)],0,s)
    return(sum((nu-n*p)^2/n/p))
  } else {
    return(Inf)
  }
}
csq.s<-nlm(csq0,p=sqrt(sht))$minimum
xa1 = qchisq(0.99, r - 2)
print(csq.s < xa1)
```

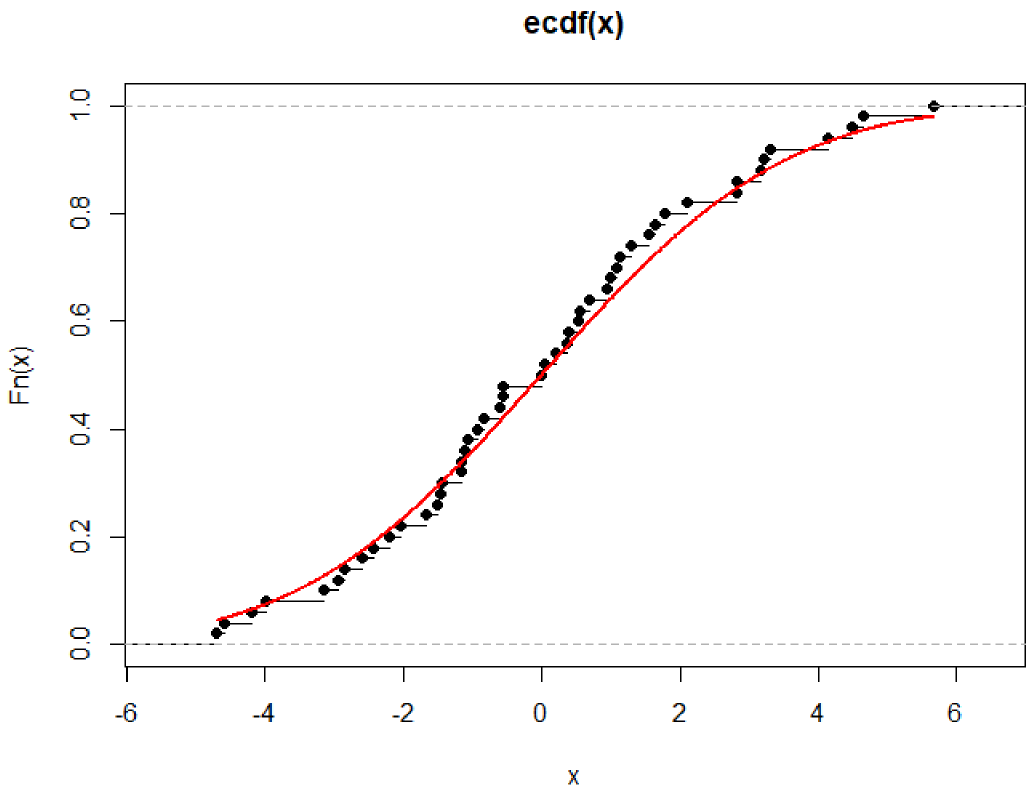
TRUE - значит, принимаем гипотезу.

Оценивание расстояния полученной оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову:

```
kolm.stat<-function(s){
  sres<-sort(eps)
  fdistr<-pnorm(sres,0,s)
  max(
    abs(c(0:(n-1))/n-fdistr),
    abs(c(1:n)/n-fdistr)
  )
}
```

```
ks.dist<-nlm(kolm.stat,p=sqrt(sht))$minimum
plot.ecdf(eps)
x2<-c(0:1000)*(max(eps)-min(eps))/1000+min(eps)
y2<-pnorm(x2,0,nlm(kolm.stat,p=sqrt(s2))$estimate)
points(x2,y2,"l",col="red",lwd=2)
```

Полученное расстояние 0.06051206



3

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров β0 и β1 уровня доверия 1-α. Построить доверительный эллипс уровня доверия 1-α для (β0, β1).

Построим ДИ для параметров с уровнем доверия $1 - \alpha$

```
al = 0.1
C<-matrix(c(c(1,0), c(0,1)),nrow=2, ncol=2)
BVar<-matrix(nrow=2,ncol=2)
XXt<-XM%*%t(XM)
bh<-matrix(nrow=2, ncol=2)
xal<-qt(1-al/2,df=n-2)
BVar<-t(C)%*%solve(XXt)%*%C
b0low<-bhat[1]-xal*sqrt(sht)*sqrt(BVar[1,1])
print(b0low)
b0up<-bhat[1]+xal*sqrt(sht)*sqrt(BVar[1,1])
print(b0up)
b1low<-bhat[2]-xal*sqrt(sht)*sqrt(BVar[2,2])
print(b1low)
b1up<-bhat[2]+xal*sqrt(sht)*sqrt(BVar[2,2])
print(b1up)
```

Получили

Для β_0: [9.110742; 12.98939]

Для β_1: [-0.786164; 0.2268443]

Доверительный эллипс можно вычислить как

$A\alpha = \{x, y: ((x\ y)^{\mathrm{T}} - \beta)^T * (X X^T)^{-1} *((x\ y)^{\mathrm{T}} - \beta) \leq qs^2 x\alpha\}$

Значения параметров нам известны:

$$\beta = [11.0500639;\ -0.2796599]$$

Значение $(X X^T)^{-1}$ также было вычислено ранее как S1:

$$0.08366625\ \ -0.019061751$$

$$-0.01906175\ \ 0.005707111$$

4

Сформулировать гипотезу независимости переменной Y от переменной X. Провести проверку значимости.

Гипотеза независимости переменной Y от X:

$$H0: \beta 1 = 0$$

Критерий:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \alpha < PV \\ 1, \alpha > PV \end{cases}$$

Найдем статистику F-критерия и P-значение:

```
FST <- bht[2]^2/S1[2, 2]/sht
pv.f <- pf(FST, 1, n-2, lower.tail=FALSE)
```

Получили 2.193198 и 0.1451561: α<PV, значит гипотеза принимается.

5

Сформулировать модель, включающую дополнительный член с X^2. Построить МНК оценки параметров β_1, β_2, β_3 в данной модели. Изобразить графически полученную регрессионную зависимость.

Добавим в модель член с X^2:

$Y=\beta_1+ \beta_1 x+ \beta_1 x^2+eps$

Найдем МНК оценки:

```
x0 <- array(1, dim=n)
X <- t(matrix(c(x0, x, x^2), nrow=n, ncol=3))
Y <- as.matrix(y)
S <- X%*%t(X)
S1 <- solve(S)
bht <- S1%*%X%*%Y
```

Получили

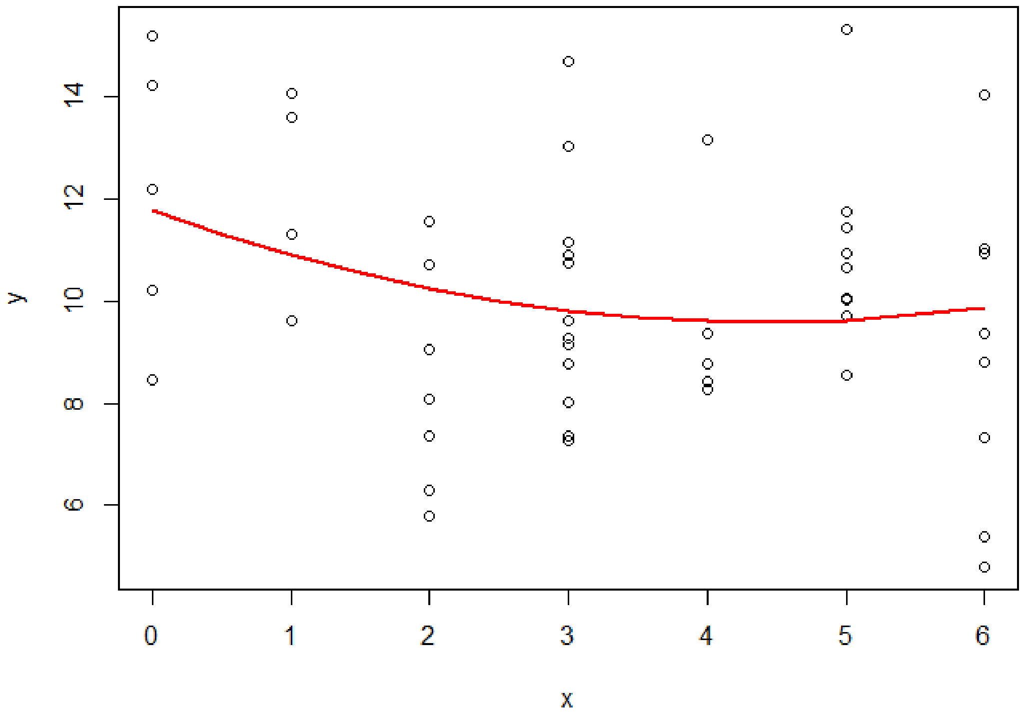
$\beta 1$ = 11.7792131

$\beta 2$ = -0.9922159

$\beta 3$ = 0.1126049

И изобразим полученную регрессионную зависимость:

```
plot(x, y)
x1 <- seq(from = min(x), to = max(x), by = (0.5))
y1 <- bht[1] + bht[2] * x1 + bht[3] * x1^2
points(x1, y1, "l", col="red", lwd=2)
```



6

Построить несмещенную оценку дисперсии. Провести исследование нормальности ошибок как в п.2.

Несмещенная оценка дисперсии:

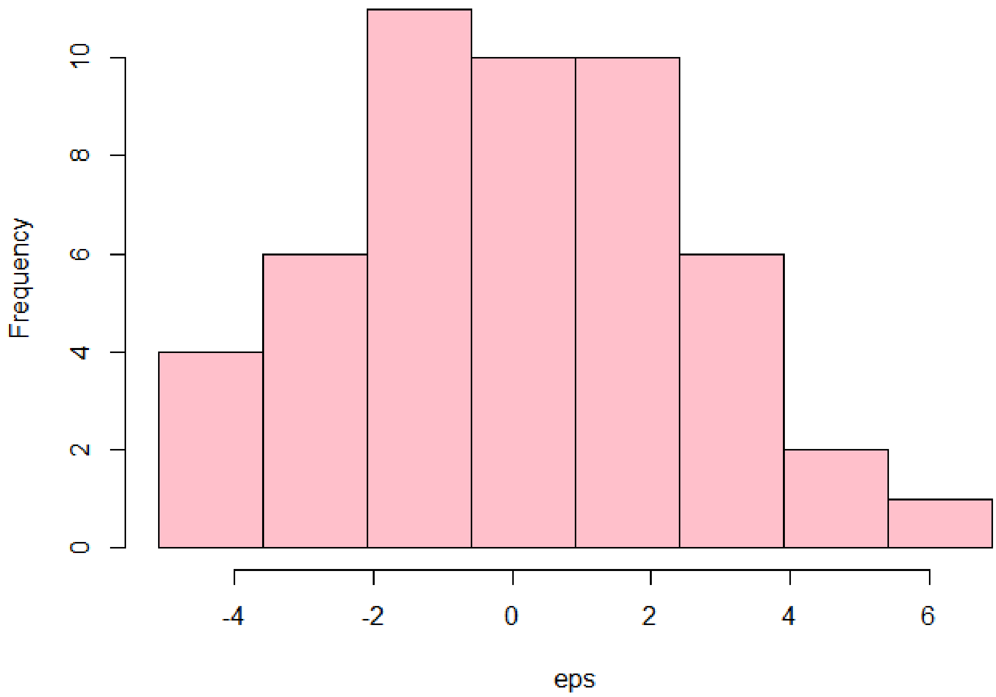
```
eps <- (YM - t(X)%*%bht)
n = length(y)
r = dim(X)[1]
```

```
SSE = sum(eps^2)
sht = SSE/(n-r)
print(sht)
```

Получили 6.219721.

Построим гистограмму на базе ошибок:

```
hh = hist(eps, breaks=seq(min(eps), max(eps) + 1.5, by=1.5),
col="pink")
```



Проверка гипотезы нормальности ошибок на уровне α по χ2:

```
nu = hh$counts;
breaks = hh$breaks;
r = length(breaks) - 1
csq0<-function(s){
  if (s>0){
    p<-pnorm(breaks[2:length(breaks)],0,s)-
pnorm(breaks[1:(length(breaks)-1)],0,s)
    return(sum((nu-n*p)^2/n/p))
  } else {
    return(Inf)
  }
}
csq.s<-nlm(csq0,p=sqrt(sht))$minimum
xa1 = qchisq(0.99, r - 3)
print(csq.s < xa1)
```

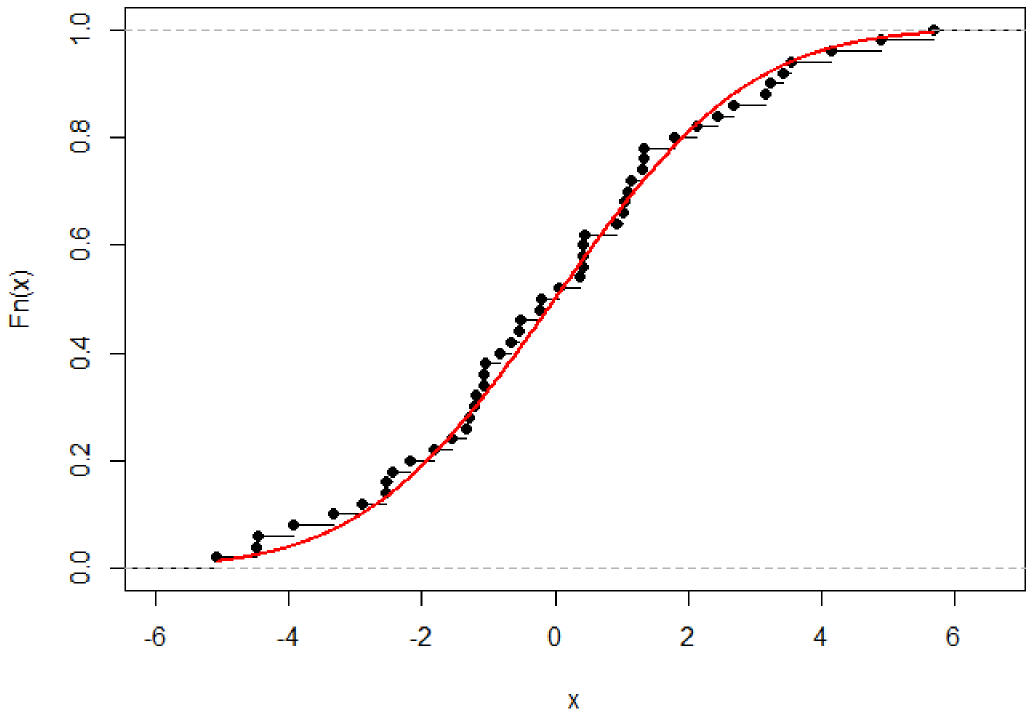
TRUE, значит гипотеза принимается.

Оценивание расстояния полученной оценки до класса нормальных распределений по Колмогорову:

```
kolm.stat<-function(s){
  sres<-sort(eps)
  fdistr<-pnorm(sres,0,s)
```

```
  max(
    abs(c(0:(n-1))/n-fdistr),
    abs(c(1:n)/n-fdistr)
  )
}
ks.dist<-nlm(kolm.stat,p=sqrt(sht))$minimum
plot.ecdf(eps)
x2<-c(0:1000)*(max(eps)-min(eps))/1000+min(eps)
y2<-pnorm(x2,0,nlm(kolm.stat,p=sqrt(s2))$estimate)
points(x2,y2,"l",col="red",lwd=2)
```

Получим расстояние 0.05779356



7

В предположении нормальности ошибок построить доверительные интервалы для параметров β1, β2, β3 уровня 1-α. Написать уравнение доверительного эллипсоида уровня доверия 1- α

Построим ДИ для параметров:

```
C<-diag(c(1,1,1))
ph<-bht
V<-diag(S1)
xa<-qt(1-al/2,n-3)
s1<-sqrt(s2)
d<-xa*s1*sqrt(V)
CI<-data.frame(lw=ph-d,up=ph+d)
```

Получили

β1: [9.1546564, 14.4037698]

β2: [-2.7957178, 0.8112861]

β3: [-0.1609643, 0.3861741]

Доверительный эллипсоид имеет формулу

$A\alpha = \{x, y: ((\, x\ y\ z\,)^{T} - \beta)^{T} * (X X^{T})^{-1} * ((\, x\ y\ z\,)^{T} - \beta) \leq 1\}$

Значения параметров, а также $(X X^{T})^{-1}$, равны

β = [11.7792131, 0.9922159, 0.1126049]

$(X X^{T})^{-1}$:

```
0.1536725   -0.08747490  0.010811299
-0.0874749  0.07256339   -0.010565267
0.0108113   -0.01056527  0.001669624
```

8

Сформулировать гипотезу линейной регрессионной зависимости переменной Y от переменной X и проверить ее значимость на уровне α.

Гипотеза независимости переменной Y от X:

$$H0: \beta 1 = 0$$

Критерий:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, \alpha < PV \\ 1, \alpha > PV \end{cases}$$

Найдем статистику F-критерия и P-значение:

```
FST <- bht[2]^2/S1[2, 2]/sht
pv.f <- pf(FST, 1, n-2, lower.tail=FALSE)
```

Получили 0.02809481 и 0.8676053: α=0.01<PV= 0.8676053, значит гипотеза принимается.