МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №1
по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студент гр. 8382	____________________	Мирончик П.Д.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

ЗАДАНИЕ

{var, 13}

{A, {6, 3, 0}, B, {6, 0, 4}, H, {0, 7, 3}, AA, {8, 0, 0}, BB, {0, 6, 0}, HH, {0, 0, 4}}

Вектора (-4,8,-7) и (7,-8,-5)

ХОД РАБОТЫ

Линейное пространство. Множество X над полем K, если:
для всех $x, y \in X$: $\exists z = x + y$: $z \in X$, для всех $x \in X, k \in K$: $kx \in X$
выполняются 8 аксиом:

1) $x + y = y + x$ (*коммутативность*);
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);
3) существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ (для любого x);
4) для каждого элемента x существует противоположный элемент $x' \in X$ такой, что $x + x' = 0$;
5) $1 \cdot x = x$, где 1 – единица поля K;
6) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x$, $\lambda, \mu \in K$;
7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\lambda, \mu \in K$;
8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\lambda \in K$.

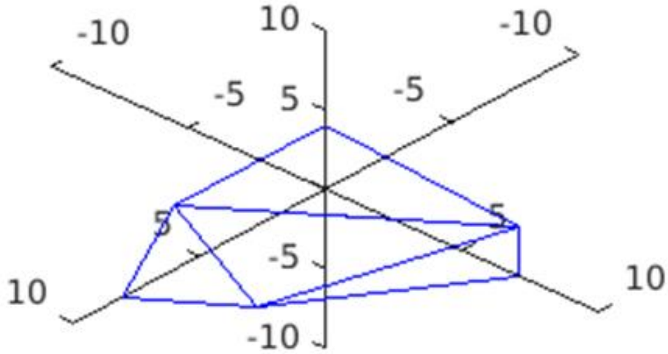
Норма в линейном пространстве X: любая функция, отображающая *X* в множество вещественных неотрицательных чисел такая, что:

1) для любого $x \in X$ и для любого $k \in K$ выполнено равенство $||kx|| = |k| \cdot ||x||$;
2) для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$;
3) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||x|| \geqslant 0$, причем равенство $||x|| = 0$ возможно только для $x = 0$.

Норма Минковского. W - выпуклое тело. Норма многогранника в линейном пространстве определяется как:

$$\|x\|_W = \min\{\lambda: \frac{x}{\lambda} \in W, \lambda > 0\}$$

Построим по имеющимся точкам выпуклый многоугольник для $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Для этого заменим BB {0, 6, 0} на {0, 7, 0}.



Расширим фигуру в остальные квадранты, отразив относительно осей:

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$:

```
{6, 3, 0}, {6, 0, 4}, {0, 7, 3}, {8, 0, 0}, {0, 7, 0}, {0, 0, 4}
```

$x \geq 0, z \geq 0$:

```
{6, 3, 0}, {6, 0, 4}, {0, 7, 3}, {8, 0, 0}, {0, 7, 0}, {0, 0,
4}, {6, -3, 0}, {0, -7, 3}, {0, -7, 0}
```

$x \geq 0$:

```
{6, 3, 0}, {6, 0, 4}, {0, 7, 3}, {8, 0, 0}, {0, 7, 0}, {0, 0,
4}, {6, -3, 0}, {0, -7, 3}, {0, -7, 0}, {6, 0, -4}, {0, 7, -3},
{0, 0, -4}, {0, -7, 3}
```

все вершины:

```
{6, 3, 0}, {6, 0, 4}, {0, 7, 3}, {8, 0, 0}, {0, 7, 0}, {0, 0,
4}, {6, -3, 0}, {0, -7, 3}, {0, -7, 0}, {6, 0, -4}, {0, 7, -3},
{0, 0, -4}, {0, -7, 3}, {-6, 3, 0}, {-6, 0, 4}, {-8, 0, 0), {-6,
-3, 0}, {-6, 0, -4}
```

Рассмотрим угол AOB в двумерном пространстве. Биортогональным базисом для этого угла будет такой базис OA', OB', что:

$$(OA, OA') = 1, (OA, OB') = 0, (OB, OB') = 1, (OB, OA') = 0$$

В трехмерном пространстве вычисление базиса для конуса OABH будет выглядеть следующим образом:

$$OA_1 = OB \times OH, OB_1 = OA \times OH, OH_1 = OA \times OB$$

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1, OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1, OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1$$

Запишем биортогональные базисы для конусов в положительном квадранте:

Рассматриваемый конус	**Биортогональный базис**
{8, 0, 0}, {6, 3, 0}, {6, 0, 4}	{0.125,-0.25, -0.1875} {0, 0.3333, 0} {0, 0, 0.25}
{0, 0, 4}, {0, 7, 3}, {6, 0, 4}	{-0.1667, -0.1071, 0.25} {0, 0.1429, 0} {0.1667, 0, 0}
{0, 7, 0}, {0, 7, 3}, {6, 3, 0}	{-0.0714, 0.1429, -0.3333} {0, 0, 0.3333} {0.1667, 0, 0}
{0, 7, 3}, {6, 3, 0}, {6, 0, 4}	{-0.0541, 0.1081, 0.0811} {0.1261, 0.0811, -0.1892} {0.0405, -0.0811, 0.1892}

Зная значения биортогональных базисов конусов можно найти коэффициенты k_1, k_2, k_3:

$$k_1 = (OP, OA'), k_2 = (OP, OB'), k_3 = (OP, OH')$$

Если все три коэффициента имеют значения больше нуля, то вектор OP лежит в рассматриваемом конусе, и его норма вычисляется как:

$$||W|| = k_1 + k_2 + k_3$$

Найдем нормы векторов (-4,8,-7) и (7, -8, -5). Т.к. фигура симметрична по осям можно опустить знаки минусов и рассмотреть вектора (4,8,7) и (7,8,5), которые имеют такие же нормы.

(4,8,7): норма $||W_1|| = 2.0357, k_1 = 0.2262, k_2, = 1.1429\ k_3 = 0.6667$

(7, 8, 5): норма $||W_2|| = 2.0586, k_1 = 0.8919, k_2 = 0.5856, k_3 = 0.5811$

Проверим неравенство треугольника:

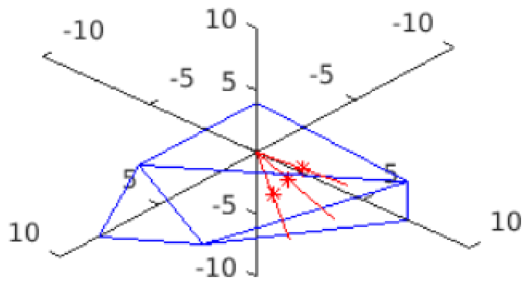
$$||W_1|| + ||W_2|| \geq ||W_1 + W_2||$$

Для этого найдем вектор $W_3 = W_1 + W_2 = (11, 16, 12)$ и найдем его норму $||W_3|| = 3.9414$:

$||W_1|| + ||W_2|| = 2.0357 + 2.0586 \geq ||W_1 + W_2|| = 3.9414,$

$k_1 = 2.1, k_1 = 0.41, k_3 = 1.42$

неравенство треугольника выполняется.



Наибольшее и наименьшее значения евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Найдем наибольшее значение евклидовой нормы. Для этого среди всех вершин найдем наибольшее значение евклидовой нормы:

$$M = \max\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}\right) = 8$$

Для поиска наименьшего значения евклидовой нормы найдем расстояние от точки $(0,0,0)$ до каждой из плоскостей и выберем наименьшее:

$$m = 3.9598$$

Эквивалентность норм определяется соотношением:

$$c_1||x||_2 \leq ||x||_W \leq c_2||x||_2$$

$$\frac{1}{M}||x||_2 \leq ||x||_{W}, \rightarrow c_1 = \frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{m}||x||_2 \geq ||x||_{W}, \rightarrow c_2 = \frac{1}{m}$$

Значит,

$$\frac{1}{M}||x||_2 \leq ||x||_W \leq \frac{1}{m}||x||_2$$

Норма линейного оператора

Оператор $A: X \rightarrow Y$, действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y, Называется линейным, если:

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2, \text{для всех } k_1, k_2 \in C, x_1, x_2 \in X$$

Норма оператора A: $l_3^2 \rightarrow l_3^2$:

$$||A|| = \sup(||Ax||_y : ||x||_X = 1)$$

Сопряженным к линейному оператору A называется оператор $A^*: (Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y \in H$.

Евклидова норма самосопряженного оператора $A = A^*$ с собственными числами λ_k определяется как:

$$||A|| = \max(\lambda_k)$$

Выберем $A = I - B, ||B||_2 < \frac{1}{2}, ||B||_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)\,, \lambda_k \neq 0$. Построим B по формуле $B = VDV^T$, где V - матрица поворота, D - диагональная матрица.

$$V_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$B = V_2^T {V_1}^T D V_1 V_2 = \begin{pmatrix} \frac{91}{300} & -\frac{4}{125} & -\frac{3}{125} \\ -\frac{4}{125} & \frac{157}{625} & \frac{24}{625} \\ -\frac{3}{125} & \frac{24}{625} & \frac{143}{625} \end{pmatrix}$$

Собственные числа B: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$, значит $||B||_2 < \frac{1}{2}$. Найдем A:

$$A = I - B = \begin{pmatrix} \frac{209}{300} & \frac{4}{125} & \frac{3}{125} \\ \frac{4}{125} & \frac{468}{625} & \frac{24}{625} \\ \frac{3}{125} & \frac{24}{625} & \frac{482}{625} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы A: $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5})$

Норма l_3^1: $||A|| = \max(\sum_{m=1}^{3} |a_{m,k}|) = \frac{4}{5}$

Норма l_3^∞: $||A|| = \max(\sum_{k=1}^{3} |a_{m,k}|) = \frac{4}{5}$

Норма l_3^2: $||A|| = \max(|\lambda| : Ax = \lambda x) = \frac{4}{5}$