МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №2

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студент гр. 8382	____________________	Мирончик П.Д.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

ЗАДАНИЕ

Вариант 13

f(1)=4, f(2)=7, f(6)=10, f(8)=13

g(1)=0, g(3)=3, g(5)=6, g(8)=10

ХОД РАБОТЫ

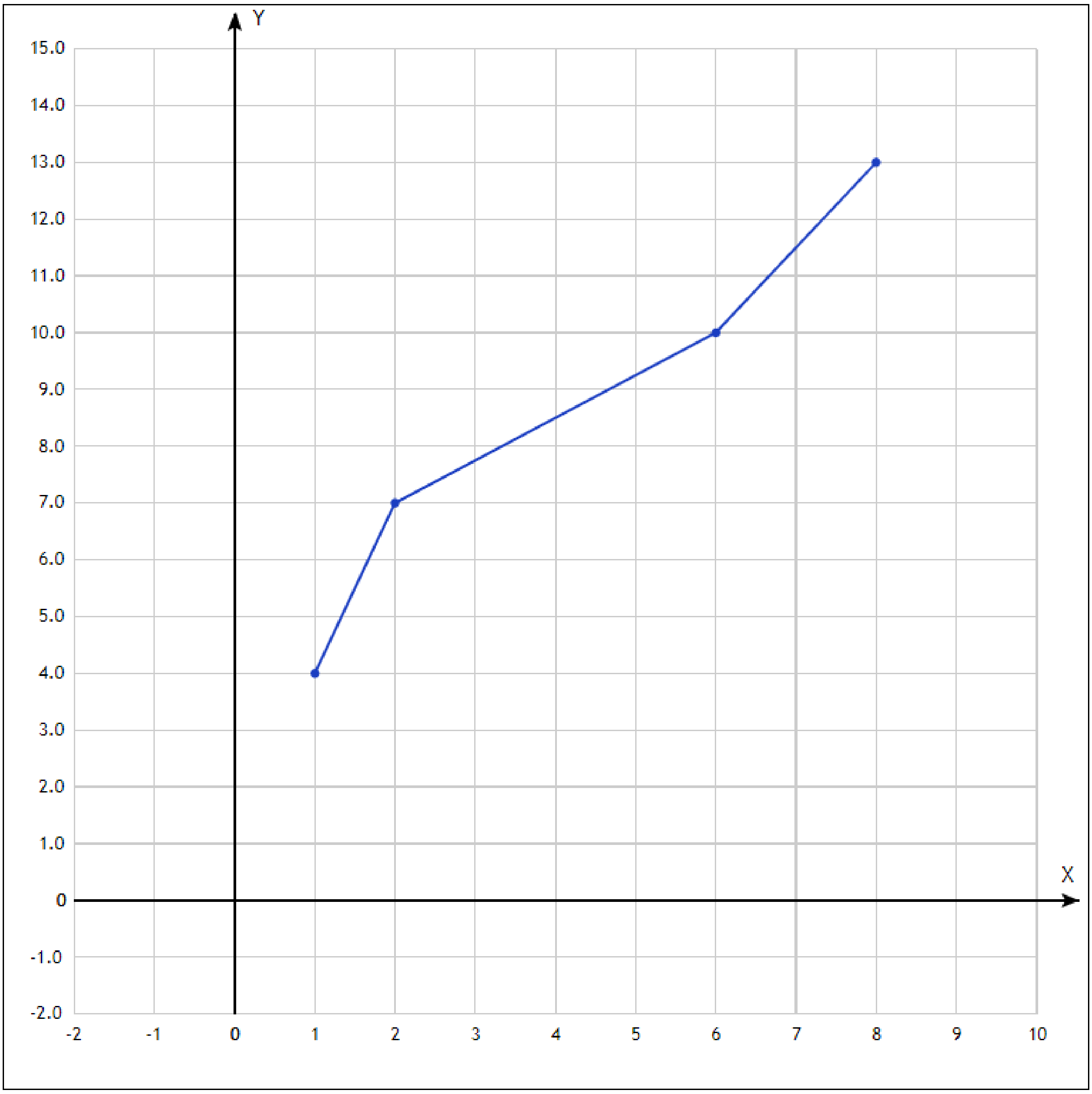
Мера на отрезке $[a, b]$, порожденная возрастающей функцией $F(x)$:

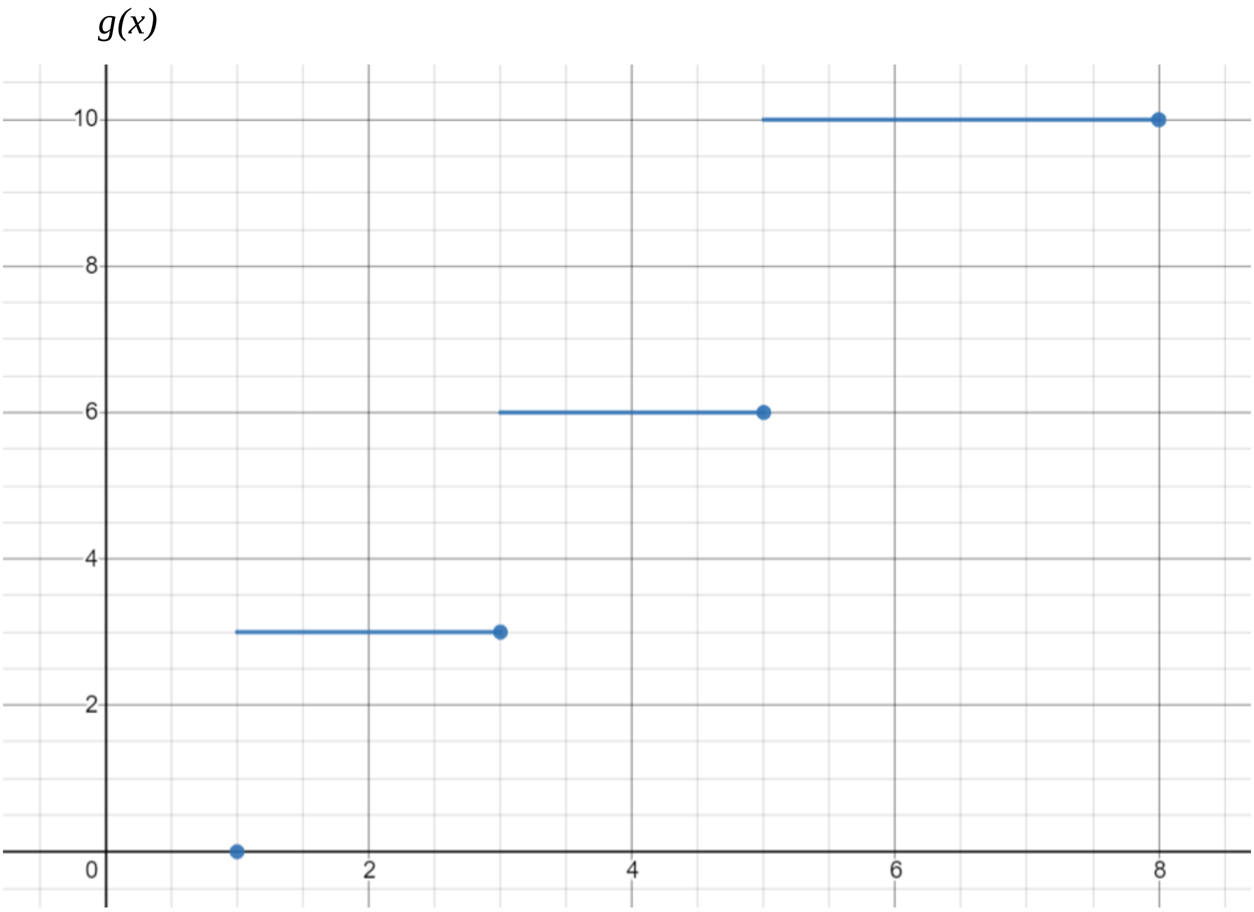
открытый интервал: $m_f\big((c, d)\big) = F(d - 0) - f(c + 0)$

$F(X) -$ непрерывна: $m_f\big((c, d)\big) = F(d) - f(c)$

Графики функций:

f(x)





1. Обозначим через m - меру Лебега, и через δ_a - дельта меру - единичную нагрузку в точке a:

$$\delta_a(E) = 1, a \in E, \delta_a(E) = 0, a \notin E$$

Подберем B_i так, чтобы для любого измеримого множества A

$$m_g(A) = \sum_i B_i \delta_{ai}(A)$$

Функция g имеет три разрыва, значит будет три коэффициента B_i:

$$B_1 = g(3) - g(1) = 3$$

$$B_2 = g(5) - g(3) = 3$$

$$B_3 = g(8) - g(5) = 4$$

2. $\int f(x) dm_g$

$$\int f(x) d\delta_a = f(a), m_g(A) = \sum_i B_i \delta_{ai}(A) \to \int f(x) dm_g = \sum_i B_i f(a_i)$$

$$\int f(x)dm_g = 3*f(1) + 3*f(3) + 4*f(5) = 12 + 3*7.75 + 4*9.25$$
$$= 72.25$$

3. Приведите аналогичное описание меры $m_f, m_f(A) = \sum_i a_i m(A \cap B_i)$

На каждом из промежутков $[1,2], [2,6], [6,8]$ функция $f(x) = kx + b$. Тогда $\forall (c,d) \subset [1,2]: m_f\big((c,d)\big) = f(d) - f(c) = k(d-c)$. Аналогично для промежутков $[2,6], [6,8]$.

$$\forall E: E = (E \cap [1,2)) \cup (E \cap [2,6)) \cup (E \cap [6,8])$$
$$a_1 = \frac{7-4}{2-1} = 3, a_2 = \frac{10-7}{6-2} = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{13-10}{8-6} = \frac{3}{2}$$

4. $\int g(x)dm_f$

$$\int g(x)dm_f = a_1 \int_1^2 g(x)dx + a_2\left(\int_2^3 g(x)dx + \int_3^5 g(x)dx + \int_5^6 g(x)dx\right)$$
$$+ a_3 \int_6^8 g(x)dx$$
$$= 3*\big(3*(2-1)\big) + \frac{3}{4}$$
$$*\big(3*(3-2) + 6*(5-3) + 10*(6-5)\big) + \frac{3}{2}*\big(10*(8-6)\big)$$
$$= 57{,}75$$

5. Подберите постоянные c_1, c_2 такие, что $\forall E: c_1 m(E) \le m_f(E) \le c_2 m(E)$

$$m_f(A) = \sum_i a_i m(A \cap B_i), a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{3}{2}$$

Если $A = \bigcup_i < a_i, b_i >$, то

$$m(A) = \sum_i (b_i - a_i)$$

Пусть

$$c_1 = \min(a_i) = \frac{3}{4}, c_2 = \max(a_i) = 3$$

Тогда $\forall E: E = \big(E \cap [1,2)\big) \cup \big(E \cap [2,6)\big) \cup (E \cap [6,8])$

$$c_1 m(E) \leq m_f(E) \leq c_2 m(E)$$

Для m_g такого соотношения нет, т.к. $m_g(E) \neq 0$ только в точках разрыва g.

6. Опишите все множества А такие, что $m_g(A) = 0$

$$m_g(A) = 0 \text{ при } A \subset (R \setminus \{1; 3; 5; 8\})$$