Вычисление нормы заданной многоугольником

1– ср – Вычисление нормы заданной выпуклым, центрально симметричным многоугольником в R^2

Условие задания: четыре точки с положительными координатами

$$A(x_a, y_a, z_a),\ B(x_b, y_b, z_b),\ C(x_c, y_c, z_c),\ D(x_d, y_d, z_d)$$

надо отражать точки относительно координатных осей – получатся все точки вида

$$A(\pm x_a, \pm y_a, \pm z_a),\ B(\pm x_b, \pm y_b, \pm z_b),\ C(\pm x_c, \pm y_c, \pm z_c),\ D(\pm x_d, \pm y_d, \pm z_d)$$

далее надо построить W – выпуклую оболочку этих точек (некоторые точи окажутся лишними) после этого можно определить норму

$$||x||_W = \min\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W\}$$

геометрически этот означает перемещение точки по лучу, соединяющую ее с началом координат, до тех пор пока точка не попадет на границу многоугольника

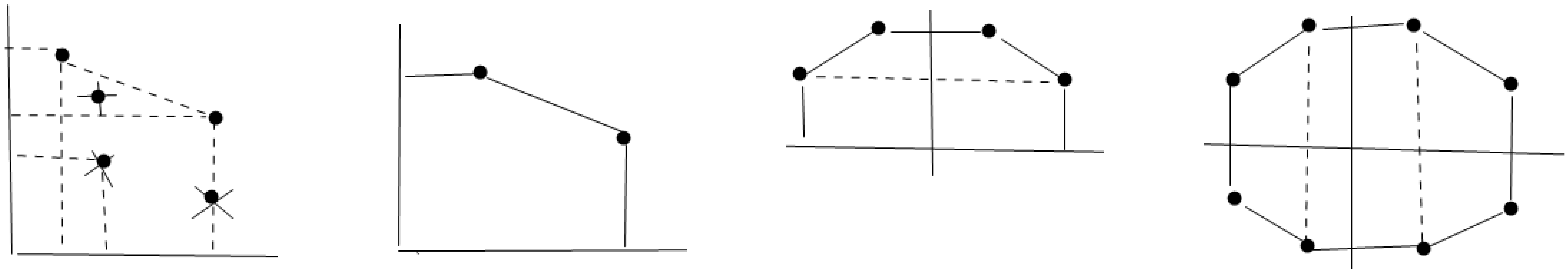
до того как перейти к описанию алгоритма этой нормы, опишем простой способ построения W

начать построение нужно с устранения лишних точек (точек заведомо не принадлежащих границе W)

1) если точки A и B из списка расположены так, что B попадает в замкнутый прямоугольник с диагональю $(0,0)$, A, то точка B лишняя – она не принадлежит границе множества

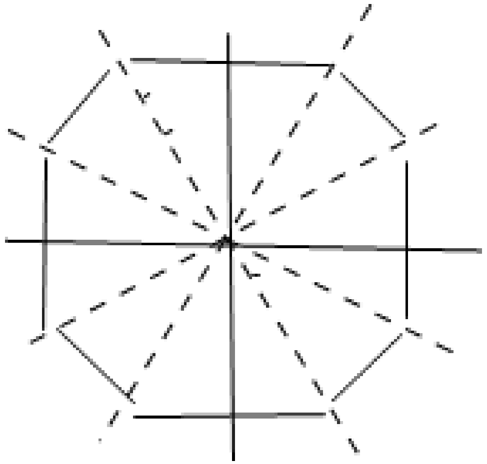
2) если точки $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ и $C(x_c, y_c)$ из списка расположены так, что $x_a < x_c < x_b$ и точка C находится ниже отрезка AB, то точка C лишняя

После такой операции все точки, полученные отражениями будут находится на границе W, и останется только соединить их в естественном порядке



Подготовка описания алгоритма вычисления нормы

Разобьем всю плоскость на углы с вершиной в начале координат и сторонами проходящими через пару соседних вершин многоугольника W



Рассмотрим базис в плоскости, образованный векторами, начинающимися в нуле O и заканчивающимися в двух соседних вершинах многоугольника A, B

Получать разложение вектора по этому базису удобно, используя биортогональный базис $OA',\ OB'$

$$(OA, OA') = 1,\ (OA, OB') = 0,\ (OB, OA') = 0,\ (OB, OB') = 1,$$

решить эту задачу легко

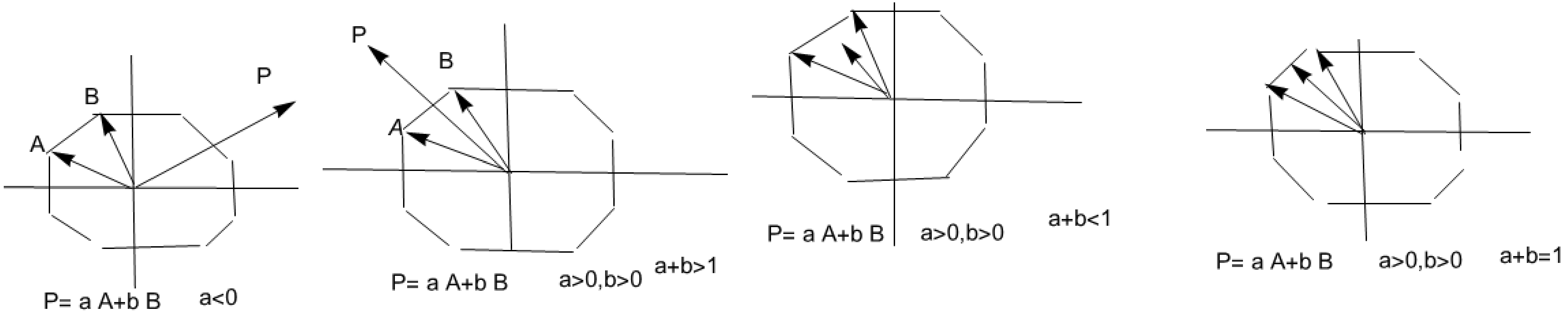
$$A(x_a, y_a),\ B(x_b, y_b)\ \to\ A_1(-y_b, x_b),\ A' = \frac{1}{(OA, OA_1)}\,A_1$$

для определения коэффициентов разложения $OP = p_a OA + p_b OB$ нужно вычислить два скалярных произведения

$$p_a = (OP, OA'),\ p_b = (OP, OB')$$

Свойства коэффициентов разложения

1) точка P лежит в угле образованном лучами OA OB тогда и только тогда, когда $p_a \geq 0$ $p_b \geq 0$



2) если $p_a \geq 0$, $p_b \geq 0$ и $p_a + p_b = 1$, то точка P принадлежит отрезку AB

3) если $p_a \geq 0$, $p_b \geq 0$ и $p_a + p_b < 1$, то точка P лежит в угле под отрезком отрезку AB

4) если $p_a \geq 0$, $p_b \geq 0$ и $p_a + p_b > 1$, то точка P лежит в угле над отрезком отрезку AB

Алгоритм вычисления нормы

1) по многоугольнику формируем разбиение плоскости на углы

2) в каждом угле строим фиксируем базис, порожденный многоугольником и биортогональный базис

3) перебираем углы и поводим разложение рассматриваемого вектора по базису
$OP = p_a OA + p_b OB$

для угла, которому принадлежит точка получим $p_a \geq 0$ $p_b \geq 0$

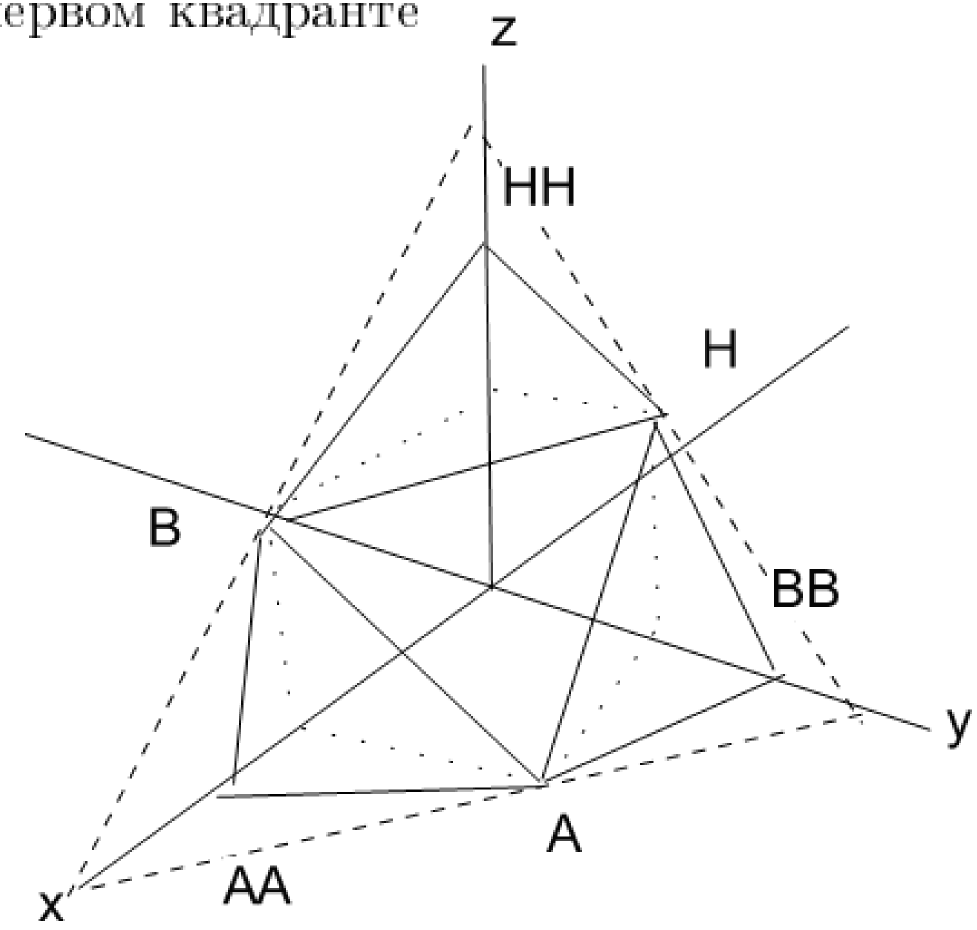
$$||P||_W = p_a + p_b$$

Замечание. Норма, порожденная многоугольником симметричным относительно осей координат, одинакова для все точек вида $(\pm A, \pm b)$
поэтому достаточно дать описание базисов углов, находящихся в положительном квадранте

1– ДЗ – Вычисление нормы заданной выпуклым, центрально симметричным многогранником в R^3

УСЛОВИЕ: даны шесть точек

$A(x_a, y_a, 0), B(x_b, 0, z_a), H(0, y_h, z_h), AA(x_{aa}, 0, 0), BB(0, y_{bb}, 0), HH(0, 0, z_{hh})$,
являющиеся вершинами выпуклой поверхности W_1 в первом квадранте



ЗАДАНИЕ: по правилу приведенному ниже, сформировать выпуклый, центрально симметричный многогранник W

подготовить систему векторов, по которой можно вычислять соответствующую норму

проверить неравенство треугольника в W-норме для пары заданных точек

ПРАВИЛО построения многогранника:

надо трижды симметрично отображать заданную поверхность относительно координатных плоскостей

1) $W_1 \to \ W_2 \ (x, y, z) \to (x, -y, z)$

2) $W_2 \to \ W_3 \ \ (x, y, z) \to (-x, y, z)$ – поверхность в полупространстве ($(x, y, z) : z > 0)$

3) $W_3 \ \to \ \ W \ \ \ (x, y, z) \ \to \ (x, y, -z)$ – замкнутая, симметричная относительно координатных плоскостей поверхность

как и в случае плоскости, симметрия фигуры такова, что

$$||(x, y, z)||_W \;=\; ||(\ |x|, |y|, |z|\ )||_W$$

поэтому достаточно научиться вычислять нормы точек с $(\ (x, y, z) : z > 0)$

правило вычисления тоже, что для плоскости (с учетом специфики размерности)

надо рассмотреть все трехгранные углы в $(\ (x, y, z) : z > 0)$

$$OABH, \quad OABAA, \quad AHBB, \quad OHBHH$$

для заданной точки найти угол, в базисе которого она имеет положительные координаты, тогда норм окажется суммой координат

Рассмотрим, для примера, угол $OABH$ и покажем как построить для базиса OA, OB, OH биортогональный

то есть надо найти вектора OA', OB', OH' такие, что

$$(OA', OA) = 1,\ (OA', OB) = 0,\ (OA', OH) = 0,$$
$$(OB', OA) = 0,\ (OB', OB) = 1,\ (OB', OH) = 0,$$
$$(OH', OA) = 0,\ (OH', OB) = 0,\ (OH', OH) = 1$$

заготовку для этого дают векторные произведения

$$OA_1 = OB \times OH,\ OB_1 = OA \times OH,\ OH_1 = OA \times OB,$$
$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)}\, OA_1, \quad OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)}\, OB_1, \quad OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)}\, OH_1$$

тогда для любого вектора OP

$$OP = k_1 OA + k_2 OB + k_3 OH, \quad k_1 = (OP, OA'), \quad k_2 = (OP, OB'), \quad k_3 = (OP, OH')$$

такую процедуру надо проводить для каждого из углов, до тех пор пока не появиться

$$k_1 \geq 0, \quad k_2 \geq 0, \quad k_3 \geq 0,$$

$$||P||_W = k_1 + k_2 + k_3$$

этой конструкции достаточно, поскольку, симметрии многогранника гарантируют, что

$$||(x, y, z)||_W = ||(\ |x|,\ |y|,\ |z|)||_W$$