МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Методы оптимизации»
Тема: Решение прямой и двойственной задач

Студент гр. 8382	____________________	Мирончик П.Д.
Преподаватель	____________________	Мальцева Н.В.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы

- Постановка задачи линейного программирования и её решение с помощью стандартной программы.
- Исследование прямой и двойственной задачи.

Краткие общие сведения

Если исходная задача линейного программирования представлена в виде:

найти минимум функции $f = (c, x)$ на множестве

$$X = \{x \in R^n : Ax \geq B, x \geq 0\}, \qquad (3.1)$$

то двойственная задача линейного программирования может быть сформулирована следующим образом:

найти максимум функции (B, λ) на множестве

$\lambda = \{\lambda \in R^m : A^T \lambda \leq c, \lambda \geq 0\}$ где A^T - матрица, транспонированная к A . Двойственная к двойственной задаче есть исходная задача.

Известно, что если существует решение исходной задачи, то существует решение и двойственной задачи, причем значения экстремумов совпадают. При этом координаты экстремальной точки для двойственной задачи являются коэффициентами чувствительности результата в исходной задаче по коэффициентам вектора B.

Рассмотрим видоизмененную исходную задачу:

Найти $\min(c, x)$ на множестве $\{x : x \geq 0, Ax \geq B + \varepsilon e_i\}$, где $\varepsilon > 0$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix} i$$

Если исходная задача имеет единственное решение , то при малых $\varepsilon > 0$ и видоизмененная задача имеет решение ; причем если α_{ε}^{i} -значение минимума , то существует

$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\alpha_{\varepsilon}^{i} - \alpha_{0}^{i}\right) \Big/ \varepsilon \overset{Df}{=} \beta_{i}$ Оказывается, что β есть i -я координата оптимальной точки для двойственной задачи.

Для проведения лабораторной работы составлена программа, обеспечивающая решение задачи линейного программирования при задании с терминала исходных значений параметров.

Задание

Вариант 3

На рынок доставляется картофель из трех колхозов по цене соответственно 12, 10 и 8 тыс. рублей за 1 тонну. На погрузку картофеля в колхозах соответственно затрачивается 1, 6 и 5 минут. Потребности рынка составляют не менее 12 т, на погрузку которого можно затратить не более 60 минут. Из каких колхозов и в каком количестве надо доставлять картофель, чтобы его стоимость была минимальной при условии того, что колхозы могут выделить для продажи соответственно 10, 8 и 6 тонн картофеля.

Ход работы

1. По заданной содержательной постановке задачи поставить задачу формально.

Построим математическую модель:

$$f(x) = 12x_1 + 10x_2 + 8x_3 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ -x_1 - 6x_2 - 5x_3 \geq -60 \\ -x_1 \geq -10 \\ -x_2 \geq -8 \\ -x_3 \geq -6 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

Здесь x_i - количество тонн продукта, закупаемых из i-х колхозов.

2. Решить поставленную задачу с помощью готовой программы.

Введя в программу значения из п.1 получим результат:

$$x_1 = 1.2, x_2 = 4.8, x_3 = 6$$

$$f = 110.4$$

3. Поставить двойственную задачу с помощью готовой программы.

Двойственная к исходной задача имеет вид

$$w(y) = 12y_1 - 60y_2 - 10y_3 - 8y_4 - 6y_5 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 \leq 12 \\ y_1 - 6y_2 - y_4 \leq 10 \\ y_1 - 5y_2 - y_5 \leq 8 \\ y_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

4. Решить двойственную задачу с помощью той же программы.

Подставив в программу данные получим следующий результат:

$$y_1 = 12.4, y_2 = 0.4, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 2.4$$

$$w = 110.4$$

Решения прямой и двойственной задачи сошлись.

5. Определить коэффициенты чувствительности исходной задачи по координатам правой части ограничений (вектора B). Для этого :

а) увеличить i-ю координату вектора ограничений правой части на $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) решить задачу с новым вектором $B = B + \varepsilon e_i$, ответ -$\phi_i(\varepsilon)$;

в) вычислить $\tilde{x}_i = \left(\phi_i(\varepsilon) - \phi_i(0)\right)/\varepsilon$

г) сравнить полученное число с i-й координатой оптимальной точки двойственной задачи.

Формула коэффициента чувствительности:

$$æ_i = \frac{\phi_i(\varepsilon) - \phi_i(0)}{\varepsilon}$$

PS: было принято решение использовать $\varepsilon = 10^{-2}$, т.к. точность программы не позволяет получить верные значения при меньших ε.

1. $b_1 = 12.01; f_1 = 110.524$

$$\varkappa_1 = \frac{110.524 - 110.4}{0.01} = 12.4$$

2. $b_2 = -59.99; f_2 = 110.404$

$$\varkappa_2 = \frac{110.404 - 110.4}{0.01} = 0.4$$

3. $b_3 = -9.99; f_3 = 110.400$

$$\varkappa_3 = \frac{110.400 - 110.4}{0.01} = 0$$

4. $b_4 = -7.99; f_4 = 110.400$

$$\varkappa_4 = \frac{110.400 - 110.4}{0.01} = 0$$

5. $b_5 = -5.99; f_5 = 110.424$

$$\varkappa_5 = \frac{110.424 - 110.4}{0.01} = 2.4$$

Запишем полученные результаты:

$x = \begin{pmatrix} 12.4 \\ 0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 2.4 \end{pmatrix}$ - решение двойственной задачи.

6. Повторить процедуру, описанную в п.5, но варьировать на этот раз коэффициенты целевой функции – компоненты вектора C и сопоставить результаты с координатами вектора-решения исходной задачи .

1. $c_1 = 12.01; f_1 = 110.412$

$$\varkappa_1 = \frac{110.412 - 110.4}{0.01} = 1.2$$

2. $c_2 = 10.01; f_2 = 110.448$

$$\varkappa_2 = \frac{110.448 - 110.4}{0.01} = 4.8$$

3. $c_3 = 12.01; f_3 = 110.46$

$$\varkappa_3 = \frac{110.46 - 110.4}{0.01} = 6$$

Запишем полученные результаты:

$x = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 4.8 \\ 6 \end{pmatrix}$ - решение прямой задачи.

Вывод.

При выполнении данной лабораторной работы были исследованы прямой и обратный методы решения задачи. Опытным путем была доказана теорема двойственности, которая гласит, что, если прямая задача регулярна и $x^* -$ ее решение, а $\lambda -$ множители Лагранжа, то λ - решение двойственной задачи вида $\max w(\lambda)$ и справедливо $f(x) = w(\lambda)$.