МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №3

по дисциплине «Элементы функционального анализа»

Студент гр. 8382 ____________________ Миронччик П.Д.

Преподаватель ____________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

ЗАДАНИЕ

$L \subset R^4, L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0\}$

$a_1 = 8, a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = 8$

$g -$ функционал на $L: y \in L, g(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

$K = \{y \in L: g(y) = 0\} -$ ядро функционала g

$g^{(0)} \in L, g^{(0)} \perp K, \left|\left|g^{(0)}\right|\right| = 1$

$*$ найти $g^{(0)}$

$*$ верно ли: $\left|\left|g\right|\right| = \left|\left(g, g^{(0)}\right)\right|$

$g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)} -$ ортонормированный базис в L

$*$ найти $g^{(1)}, g^{(2)} \in L$

$*$ найти $g^{(3)} \perp L$

$f \sim (f_1, f_2, f_3, f_4): f\left(g^{(0)}\right) = g\left(g^{(0)}\right), f\left(g^{(k)}\right) = 0, k = 1,2,3$

$f(y) = g(y), y \in L, \left|\left|f\right|\right| = \left|\left|g\right|\right|$

$*$ найти f_k

ХОД РАБОТЫ

Линейный функционал - линейное отображение линейного пространства в множество вещественных или комплексных чисел.

Однородная гиперплоскость - замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, причем не существует линейного пространства Z такого, что $Z \neq X$ и $Z \neq Y$ и $Y \subset Z \subset X$.

Норма функционала: $\left|\left|f\right|\right| = sup_{||x||=1}|f(x)|$.

Ядро функционала: $\ker f = \{x \in X: f(x) = 0\}$.

Базис ядра *K*. Пусть $g' = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ - линейный функционал на R^4 и ядро $K' = \{y \in R^4: g'(y) = 0\}$. Очевидно, что ядром K функционала g будет пересечение гиперплоскостей K'и L:

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Построим базис ядра K:

$\left(0, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T, (1, 0, 0, -1)^T$

Поиск ортонормированного базиса *L*. Известно, что $g^{(0)} \in L$ и $g^{(0)} \perp K$, составим СЛУ для нахождения $g^{(0)}$:

$$\begin{cases} x_2 - \dfrac{2}{3}x_3 - \dfrac{1}{3}x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

Решив СЛУ, получили вектор $g^{(0)} = (1, -33, -50, 1)^T$. Нормируем его: $g^{(0)} = (0{,}016; -0{,}55;\ -0{,}83; 0{,}016)^T$.

Заметим, что набор из базисных векторов K и вектор $g^{(0)}$ образуют базис пространства L. Запишем его:

$(0{,}016; -0{,}55;\ -0{,}83; 0{,}016)^T, \left(0, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)^T, (1, 0, 0, -1)^T$

Этот базис не является ортонормированным, поэтому применим метод ортогонализации Грамма-Шмидта и получим результат:
$(0.016;\ -0.55;\ -0.83; 0.016)^T, (0, 0.8, -0.53, -0.27)^T, (0.72, -0.15, 0.1, -0.66)^T$

Данный набор векторов является ортонормированным базисом L и является искомыми значениями $g^{(0)}, g^{(1)}$ и $g^{(2)}$.

Проверка $\boldsymbol{||g|| = |(g, g^{(0)})|}$. По свойству аддитивности разложим $g(x): x \in L$ на базисные вектора:

$$g(x) = ag\left(g^{(0)}\right) + bg\left(g^{(1)}\right) + cg\left(g^{(2)}\right)$$

Заметим, что $bg\left(g^{(1)}\right) + cg\left(g^{(2)}\right) = 0$, т.к. $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ - базисные вектора ядра K. Значит, $|g(x)|: ||x|| = 1$ будет максимальным, если составляющие b и c разложения x будут равны нулю, и $x = ag^{(0)}: ||x|| = 1$. Т.к. $\left||g^{(0)}|\right| = 1$, $sup_{||x||=1}|g(x)| = \left|g\left(g^{(0)}\right)\right| = ||g(x)||$, что и требовалось доказать.

Поиск $g^{(3)} \perp L$. Найдем далее вектор $g^{(3)} \perp L$. L - гиперплоскость, и вектор нормали к ней будет иметь коэффициенты $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T = (8, 3, -1, 8)^T$ - это и есть искомый вектор $g^{(3)}$.

Поиск коэффициентов f. Рассмотрим линейный функционал f на R^4, заданный следующими условиями:

$$f\left(g^{(0)}\right) = g\left(g^{(0)}\right), f\left(g^{(k)}\right) = 0, k = 1,2,3$$

Из условия видно, что ядром функционала f будет гиперплоскость с базисными векторами $g^{(k)}: k = 1,2,3$. Вектор $g^{(0)}$ ортогонален этому базису и значит является вектором нормали к ядру функционала.

$$f_1 = 0{,}016 * \lambda, f_2 = -0{,}55 * \lambda, f_3 = -0{,}83 * \lambda, f_4 = 0{,}016 * \lambda$$

Подберем коэффициент λ таким образом, чтобы выполнялось условие $f\left(g^{(0)}\right) = g\left(g^{(0)}\right)$:

$$\left((f_1, f_2, f_3, f_4)^T, g^{(0)}\right) = g\left(g^{(0)}\right) \rightarrow \lambda = -1{,}36$$

$$f_1 = -0{,}02, f_2 = 0{,}75, f_3 = 1{,}13, f_4 = -0{,}02$$

Итак, известно, что вектора $g^{(0)}, g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ - базис пространства L. Любой вектор пространства L можно разложить в виде суммы базисных. В тоже время известно, что функционал обладает свойством аддитивности. В результате мы получаем:

$$f\left(g^{(0)}\right) = g\left(g^{(0)}\right) \text{ по условию,}$$

$$f\left(g^{(1)}\right) = g\left(g^{(1)}\right) = 0,$$

$$f\left(g^{(2)}\right) = g\left(g^{(2)}\right) = 0$$

$$x \in L, a, b, c \in R \rightarrow f(x) = af\left(g^{(0)}\right) + bf\left(g^{(1)}\right) + cf\left(g^{(2)}\right) = g(x)$$

Т.е. $f(y) = g(y) \mid y \in L$. Отсюда логично предположить, что нормы f и g на L совпадают.