8382, Мирончик Павел

№1

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$, $c = const$, $x \in [a, b]$ — волновое ур-е на отрезке

$u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = \psi$

$u|_{x=a} = u|_{x=b} = 0$

всё вместе — начально-краевая задача

Разделение переменных и метод Фурье:

Найдём с.ф. V_k и с.ч. λ_k для оператора $-c^2 u_{xx}$ и представляем решение как

$$u(x,t) = \sum_k \cancel{\ldots} = \sum V_k(x) W_k(t)$$

Тогда задача приводится к виду

$$\sum V_k (\lambda_k W_k + W_k'') = f$$

$$\sum V_k(x) W_k(0) = \varphi(x)$$

$$\sum V_k(x) W_k'(0) = \psi(x)$$

Раскладываем f, φ, ψ в ряд Фурье, получаем семейство обыкновенных диффуров с начальными условиями на W_k и решаем

№2

$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)$ — оператор Штурма-Лиувилля

D – оператор краевых условий:

$$Du = \begin{pmatrix} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) \\ \alpha_2 u'(l) + \beta_2 u(l) \end{pmatrix}$$

$\exists$ $f(x)$ непр. на $[0, l]$,

задача $\begin{cases} Lu = f \\ Du = 0 \end{cases}$ — регулярна

ур-е Штурма-Лиувилля

=> $\exists$ единственное решение

$$u(x) = \int_0^l f(s)\, g(x, s)\, ds$$

где $g(x, s)$ – ф-я Грина

№3

Постановка задачи.

Рассмотрим мн-во M допустимых ф-й $x(t)$ таких, что

$$x(t) \in C^1[t_0, T] \quad , \quad x(t_0) = x_0, \ x(T) = x_T$$

Требуется найти $x^*(t)$, доставляющую экстремум функционалу

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))\,dt$$

Уравнение Эйлера

[выводится из простейшей задачи]

~~Первая вариация~~

Обозначим

$x^*(t)$ – кривая, на которой достигается экстремум

$x(t) = x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)$ вариация кривой

$x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t)$

допустимая кривая

числовой параметр

$$I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x^*(t) + \alpha\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\delta x'(t))\,dt = \varphi(\alpha)$$

1 вариация:

$$\delta I = \frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \ldots \text{длинная цепочка преобразований} =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left(f_x(t, x^*(t), x^{*\prime}(t)) - \frac{d}{dt} f_{x'}(t, x^*(t), x^{*\prime}(t)) \right) \delta x(t)\,dt$$

из основной леммы вариационного исчисления

$$f_x - (f_{x'})' = 0 \quad \text{– уравнение Эйлера.}$$

можно записать как

$$f_x - f_{x't} - f_{x'x}\,x' - f_{x'x'}\,x'' = 0$$

если $x^*(t)$ дважды дифференцируема

№4

$$I = \int_0^{\pi} [(u')^2 + 4u^2 - u\cos^2(2x)]\,dx$$

$f = (u')^2 + 4u^2 - u\cos^2(2x)$

$f_u = 8u - \cos^2(2x)$

$f_{u'} = 2u' \longrightarrow \frac{d f_{u'}}{dx} = 2u''$

$\Longrightarrow$ получили

$8u - \cos^2(2x) - 2u'' = 0$ – ур-е Эйлера-Лагранжа

далее решаем как обычную диффуру