Уравнение теплопроводности на прямой и полупрямой

№ 582, 586, 588, 574, 581, 583, 585, 587, 584.

1. Формула Пуассона

В n-мерном Евклидовом пространстве $E_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ рассмотрим задачу Коши для простейшего случая уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,\, t), & x \in E_n, \quad t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in E_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Опр. 1.1. Её решение задаётся **формулой Пуассона**:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{E_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{E_n} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau, \tag{1.2}$$

где $|x-\xi|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2$.
В частном случае, когда $n = 1$, формула Пуассона принимает вид:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau. \tag{1.3}$$

2. № 582

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода (условие теплоизолированного конца):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (2.2), то:

1) из первого равенства (2.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (2.2) следует, что

$$v(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\,+\infty),\ \ t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (2.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi_1(\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

Тогда

$$v_x(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2t}\right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \left(-\frac{2(x+\xi)}{4a^2t}\right) \cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right] \cdot \varphi_1(\xi)d\xi,$$

откуда для $v_x(0,\,t)$ получаем:

$$v_x(0,\,t) = \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \underbrace{\left(\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi)d\xi = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2v_{xx} = 0$ и $v(x,\,0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x,\,t)$ **вспомогательной задачи** (2.2) **является также решением задачи** (2.1) **на полупрямой**[1]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

3. № 586

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f(x,\,t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = f_1(x,\,t), & x \in (-\infty,\,+\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\,0) = 0, & x \in (-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{3.2}$$

[1] То, что другого решения у задачи (2.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

где функция $f_1(x,\,t)$ построена по функции $f(x,\,t)$ её **<u>чётным продолжением</u>** на всю числовую ось:

$$f_1(x,\,t) = \begin{cases} f(x,\,t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x,\,t), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\;+\infty)$. Так как v – решение (3.2), то:

1) из первого равенства (3.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x\,t) \equiv f(x,\,t), \qquad x \in (0,\;+\infty), \;\; t > 0;$$

2) из второго равенства (3.2) следует, что

$$v(x,\,0) = 0, \qquad x \in (0,\;+\infty), \;\; t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (3.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau. \tag{3.4}$$

Тогда

$$v_x(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + (x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau,$$

откуда для $v_x(0,\,t)$ получаем:

$$v_x(0,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{\overbrace{-\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} + \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}^{=0}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\,t)$ и $v(x,\,0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x,\,t)$ **вспомогательной задачи** (3.2) **является также решением задачи** (3.1) **на полупрямой**[2]:

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau.$$

[2]То, что другого решения у задачи (3.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

4. № 588

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 586, сделаем **замену**:

$$w(x,\, t) = u(x,\, t) \cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \tag{4.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\, t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x,\, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x,\, t) \equiv f(x,\, t) \cdot e^{ht}, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 586. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi,\, \tau)}_{f(\xi,\,\tau)\cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\, t) = w(x,\, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

5. № 574^M

Показать, что функция

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi, \tag{5.1}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

<u>Шаг 1.</u> Формальное дифференцирование (5.1)
Найдём формально (то есть не задумываясь над правомощностью этих действий) производные от функции $u(x,\, t)$, входящие в уравнение (5.1).

$$u_t = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\, t^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi;$$

далее, так как

$$\frac{d}{dx}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = -\frac{2(x-\xi)}{4a^2t}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \left(-\frac{1}{2a^2t}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

то для u_{xx} получаем выражение

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2a^2t}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi.$$

Шаг 2. Подстановка формальных производных в уравнение теплопроводности
Подставив найденные формальные производные u_t и u_{xx} в уравнение $u_t - a^2u_{xx} = 0$, видим, что окрашенные одинаково слагаемые друг друга сокращают, и уравнение превращается в верное тождество:

$$u_t - a^2u_{xx} = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi -$$
$$- a^2\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2a^2t}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi \equiv 0.$$

Шаг 3. Формальная подстановка решения в начальное условие
Функция $u(x,\,t)$, заданная формулой (5.1), не определена при $t = 0$. Однако, её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, то есть считать её равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \to 0+0$:

$$u(x,\,0) = \lim_{t\to0+0}u(x,\,t) = \lim_{t\to0+0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi = \left[\begin{array}{ll}\xi = x+2a\eta\sqrt{t}, & \Rightarrow\\ d\xi = 2a\sqrt{t}\,d\eta & \end{array}\right] =$$
$$= \lim_{t\to0+0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\cdot\varphi(x+2a\eta\sqrt{t})d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}\cdot\lim_{t\to0+0}\varphi(x+2a\eta\sqrt{t})\,d\eta =$$
$$= \varphi(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta = \varphi(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \Big[\text{как интеграл Эйлера – Пуассона}\Big] = \varphi(x)$$

Таким образом, мы убедились, что формула (5.1) действительно задаёт решение задачи (5.2), если все формальные действия Шагов 1 и 3 являются правомощными.

Шаг 4. Обоснование правомощности формальных действий
Поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно по параметрам x и t сходящимися в любом замкнутом прямоугольнике $(x,\,t) \in [x_1,\,x_2]\times[t_1,\,t_2]$, $0 < t_1 < t_2$ для Шага 1, и в прямоугольнике $(x,\,t) \in [x_1,\,x_2]\times[0,\,T]$ для Шага 3, их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по параметрам и переходить к пределу по параметру t.
А равномерная сходимость этих интегралов легко показать по признаку Вейерштрасса, например, для Шага 3:

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi$$

в силу ограниченности $|\varphi(\xi)| \leqslant M$, можно мажорировать интегралом

$$\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

сходимость которого легко проверить:

$$\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \left[\begin{array}{l} \eta = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}, \\ \\ d\eta = \frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} \end{array} \right] = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta =$$

$$= \Big[\text{как интеграл Эйлера – Пуассона}\Big] = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{M}{2}.$$

Итак, все проделанные на шагах 1–3 формальные действия мы действительно имели право делать.

6. № 581

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{6.2}$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\ +\infty)$. Так как v – решение (6.2), то:

1) из первого равенства (6.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (6.2) следует, что

$$v(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (6.2) справедливо соотношение

$$v(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi_1(\xi) d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Тогда для $v(0,\,t)$ получаем:

$$v(0,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ и $v(x,\,0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x,\,t)$ **вспомогательной задачи** (6.2) **является также решением задачи** (6.1) **на полупрямой**[3]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

7. № 583

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Шаг 1. Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x,\,t) = u(x,\,t)\cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu)\cdot e^{ht}. \tag{7.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x)\cdot e^{h\cdot 0}, & x \geqslant 0; \\ w(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

Шаг 2. Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 581. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)}d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t)\cdot e^{-ht}$, получаем:
Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

[3] То, что другого решения у задачи (6.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

8. № 585

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности :

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t), & x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{8.2}$$

где функция $f_1(x,\, t)$ построена по функции $f(x,\, t)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ -f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{8.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\ +\infty)$. Так как v – решение (8.2), то:

1) из первого равенства (8.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x\, t) \equiv f(x,\, t), \qquad x \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (8.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = 0, \qquad x \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (8.2) справедливо соотношение

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau. \tag{8.4}$$

Тогда для $v(0,\, t)$ получаем:

$$v(0,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{\overbrace{e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}^{=0}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t)$ и $v(x,\, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи** (8.2) **является также решением задачи** (8.1) **на полупрямой**[4]:

Ответ:

$$u(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau.$$

[4] То, что другого решения у задачи (8.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

9. № 587

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\,t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 585, сделаем **замену**:

$$w(x,\,t) = u(x,\,t)\cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu)\cdot e^{ht}. \tag{9.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2u_{xx} + hu = f(x,\,t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x,\,t)\cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x,\,t) \equiv f(x,\,t)\cdot e^{ht}, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 585. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi,\,\tau)}_{f(\xi,\,\tau)\cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t)\cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)\cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

10. № 584

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x,\,t) = u(x,\,t)\cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu)\cdot e^{ht}. \tag{10.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x)\cdot e^{h\cdot 0}, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 582. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t)\cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Задание на самостоятельную работу:

1) **I.** *Вычислить точное значение решения задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \sin 4x, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = \sin 9t, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

в точке $x = \frac{3\pi}{4}$ *в момент времени* $t = \frac{2\pi}{3}$.

2) **II.** *Вычислить точное значение решения задачи*

а) $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = e^{-x^2}, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \cos \pi x, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

в точке $x = 0$ *в момент времени* $t = 1$.