Цифровая обработка сигналов

Лекция №1

Санкт-Петербург

2020

Литература

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / А. Б. Сергиенко. –. – СПб. : Питер, 2002. – 768 с.
2. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А. И. Солонина [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.
3. Р. В. Хемминг Цифровые фильтры: Москва, «Советское радио», 1980. – 224 с.

Классификация сигналов

Периодические и непериодические сигналы

Детерминированные и случайные сигналы

Сигналы с конечной (ограниченной) и бесконечной (неограниченной) энергией

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Классификация сигналов

Аналоговые сигналы:.

$$s(t)$$

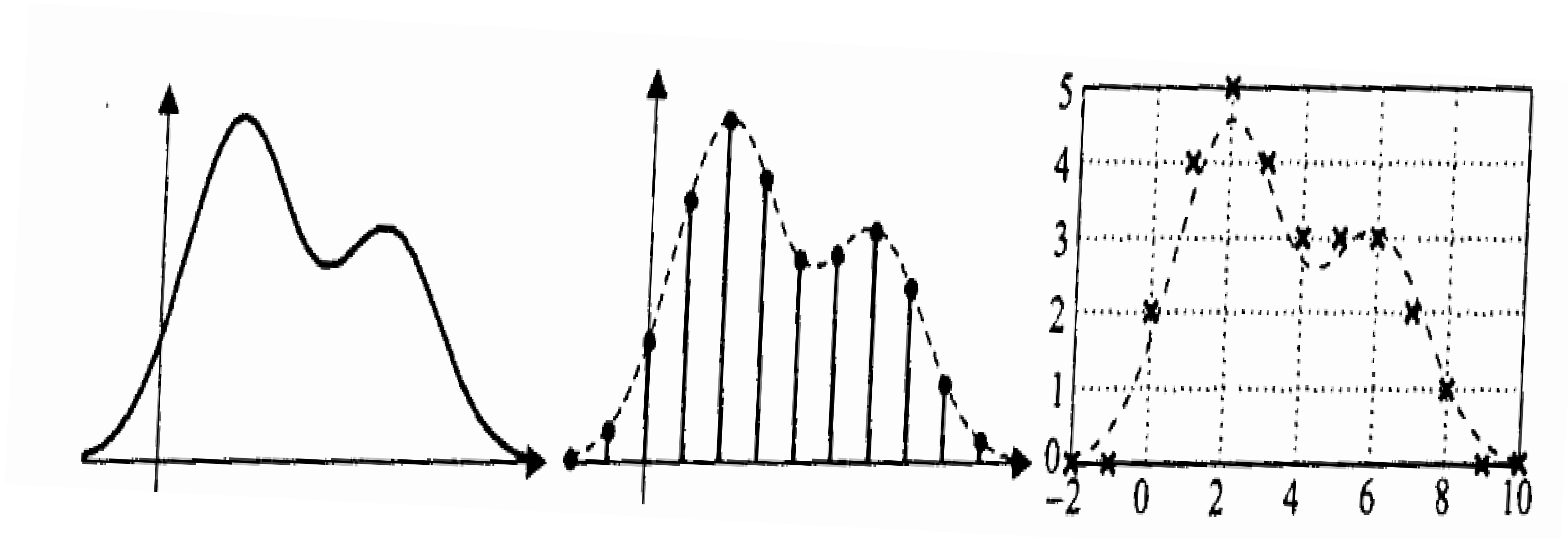
Дискретные сигналы:

$$s(nT)\ ,\quad s(n)$$

Дискретное время, дискретное нормированное время

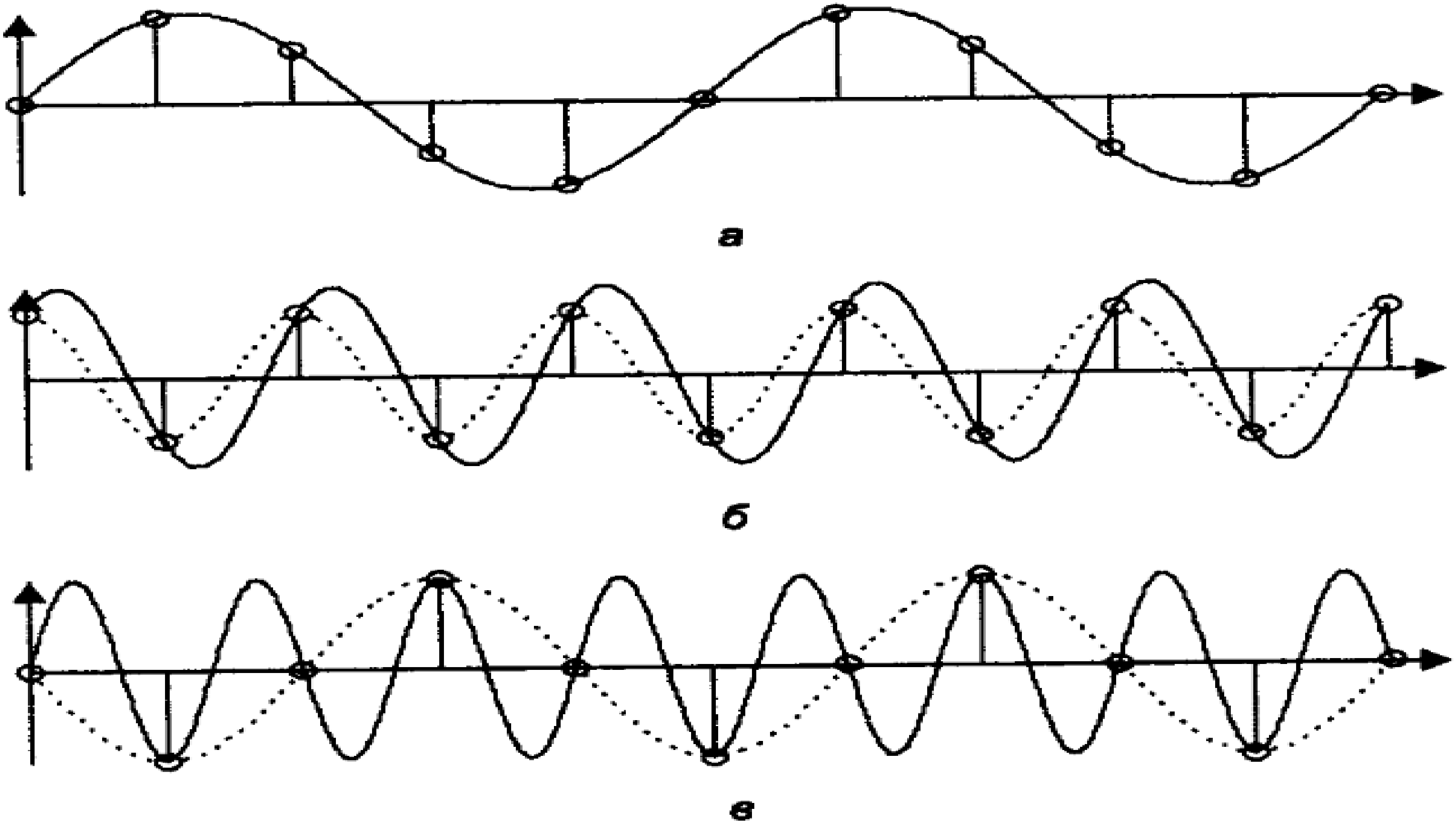
Цифровые сигналы:

Квантование



Частота Найквиста

$$f_N = \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2T}; \quad \omega_N = \frac{\omega_d}{2} = \frac{\pi}{T}$$



Энергия и мощность сигнала

Энергия:

$$E = \int_0^T s^2(t)dt$$

Мгновенная мощность:

$$p(t) = s^2(t)$$

Средняя мощность:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Единичный цифровой импульс:

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Является дискретным аналогом дельта-функции (функции Дирака).

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Дискретный единичный скачок:

$$\sigma_d(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Является дискретным аналогом функции единичного скачка (функция Хэвисайда)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5 \text{ или неопредлена}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Дискретная экспоненциальная функция:

$$s(k)=\begin{cases}0, & k<0,\\ a^k, & k\geq 0.\end{cases},\quad k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Дискретная затухающая синусоида:

$$s(k)=a^k\cos(k\omega+\varphi)$$

Характеристики дискретного сигнала (последовательности отсчетов)

Среднее значение

Мощность – сумма квадратов значений отсчетов

Средняя мощность

Автокорреляционная функция (АКФ):

$$R_s(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} s(n)s(n+m), 0 \le m \le (N-1)$$

Автоковариационная функция:

$$r_s(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} [s(n)-\mu_s][s(n+m)-\mu_s], 0 \le m \le (N-1)$$

Случайные дискретные сигналы

Часто используемые характеристики эргодического случайного дискретного сигнала:

Математическое ожидание (среднее значение) μ_s

Дисперсия σ_s^2

АКФ $r_s(m)$

Автоковариационная функция $r_s(m)$

Случайные дискретные сигналы

Белый шум

Равномерный белый шум – последовательность случайных чисел, распределенных по равномерному закону на отрезке [0,1] (μ_s =0.5, σ_s^2 =1/12).

Автоковариационная функция этого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

Нормальный белый шум – последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону с μ_s =0 и σ_s^2 =1 .

АКФ такого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

Дискретные фильтры - введение

Входной детерминированный дискретный сигнал:

$$x(n),\ n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Последовательность чисел y_n - выходной сигнал формируется по правилу:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{M} d_k y_{n-k},\ n = 1, 2, ..., N \qquad (1.1)$$

Формула (1) представляет собой одну из возможных форм записи дискретного фильтра.

Сумма вида $\sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$ называется линейной сверткой.

Дискретные фильтры - введение

Свертка $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$ двух последовательностей

x_n и c_n , $n = 0,1,2,...,N-1$

$$y_0 = c_0 x_0$$

$$y_1 = c_0 x_1 + c_1 x_0$$

$$y_2 = c_0 x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \ldots + c_{n-1} x_1 + c_n x_0, \quad n = 0,1,\ldots,2N-2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{2N-3} = c_{N-1} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1}$$

$$y_{2N-2} = c_{N-1} x_{N-1}$$

$$c_{N-1} \quad c_{N-2} \quad \cdot \quad \cdot \quad c_2 \quad c_1 \quad c_0 \rightarrow$$

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}$$

Дискретные фильтры - введение

В качестве примера **нерекурсивного** фильтра можно привести известную формулу сглаживания:

$$y_n = \frac{1}{5}(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2}),\ n = 2, 3, ..., N-3 \qquad (1.2)$$

В качестве примера **рекурсивного** фильтра можно привести известную формулу трапеций для численного интегрирования:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) + y_n,\ n = 0, 1, 2, ..., N-2 \qquad (1.3)$$

Дискретные фильтры – введение
Усиление шума при фильтрации

Пусть входной сигнал задан формулой:

$$x_n = x_n + u_n,\ n = 0,1,2,\dots,N-1$$

Здесь $u_n,\ n = 0,1,2,\dots,N-1$ - шум, некоррелированные случайные значения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_u^2.

Зададим нерекурсивный фильтр

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}),\ n = 1,2,\dots,N-1$$

Дисперсия результата определяется формулой:

$$D(y_n) = E\left\{\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}\right]^2\right\} = \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \qquad (1.4)$$

Собственные функции линейных операторов

Собственные числа и собственные векторы в линейной алгебре:

$$Ax = \lambda x$$

$\sin(x)$ и $\cos(\mathrm{x})$ - собственные функции операции сдвига:

$$A\sin(x+h) + B\cos(x+h) = \tilde{A}\sin(x) + \tilde{B}\cos(x)$$

$$\tilde{A} = A\cos h - B\sin h;\ \tilde{B} = A\sin h + B\cos h$$

Формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Собственные функции линейных операторов

Пусть $$y(t) = e^{it}$$

Тогда $$y(t+h) = e^{i(t+h)} = e^{ih} y(t)$$

Пусть теперь $x_n = e^{i\omega n}$

Для нерекурсивного фильтра получим следующее выражение:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i\omega k} = \lambda(\omega) e^{i\omega n} = \lambda(\omega) x_n$$

Аналогичный результат имеет место и для рекурсивного фильтра

Собственные функции линейных операторов

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{M} d_k y_{n-k} \qquad (1.5)$$

Пусть $x_n = Ae^{i\omega n}$ и $y_n = Be^{i\omega n}$. Подставляем в (1.5):

$$Be^{i\omega n} = A\sum_{k=0}^{N} c_k e^{i\omega(n-k)} + B\sum_{k=1}^{M} d_k e^{i\omega(n-k)} \qquad (1.6)$$

В результате $H(\omega) = \frac{B}{A} = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_k e^{-i\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} d_k e^{-i\omega k}}$

$$y_n = H(\omega) x_n \qquad (1.7)$$

Собственные функции линейных операторов

Функция $e^{i\omega t}$ является собственной функцией и для операций дифференцирования, интегрирования и вычисления разностей:

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\int e^{i\omega t}dt = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\Delta e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+1)} - e^{i\omega t} = (e^{i\omega} - 1)e^{i\omega t} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

Степенные функции от t указанным свойством не обладают.