Метод Фурье для однородных уравнений на отрезке $[0,\ l]$

1. Разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

Опр. 1.1. Задача определения пары $\{\lambda,\ \mathbf{X}(x)\}$, где $\mathbf{X}(x) \not\equiv 0$

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, & x \in (0,\ l); \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

называется **задачей Штурма–Лиувилля**.
При этом те значения λ, при которых (1.1) имеет нетривиальное решение $\mathbf{X}(x)$, называются **собственными значениями задачи** (1.1), а сама функция $\mathbf{X}(x)$ – **собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля** (1.1).

Теорема 1.1 (В.А. Стеклов).

Усл. $\{\mathbf{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.*

Утв. $\forall f(x) \in C^2[a,b]$, *удовлетворяющей краевым условиям,* $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ *абсолютно и равномерно на* $[a,b]$, *а для* c_k *верно представление*

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\mathbf{X}_k(x)dx}{\int\limits_a^b \mathbf{X}_k^2(x)dx} \tag{1.2}$$

Доказательство. Равномерную сходимость к функции $f(x)$ мы обосновывать не будем, но выведем формулу для вычисления c_k.
В силу общих свойств рядов Фурье, их (как сходящиеся равномерно на любом отрезке, где нет точек разрыва $f(x)$) можно интегрировать почленно. Поэтому, в силу ортогональности системы $\{\mathbf{X}_k\}$ в $L_2[0,\ l]$:

$$(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n)_{L_2[0,l]} \equiv \int\limits_0^l \mathbf{X}_k(x)\mathbf{X}_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k \neq n; \\ \|\mathbf{X}_n\|^2, & \text{при} \quad k = n. \end{cases} \tag{1.3}$$

Преположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x)$ действительно сходится на $[0,\ l]$ к функции $f(x)$, то есть верно равенство:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x), \qquad x \in [0,\ l].$$

Домножим это равенство на $\mathbf{X}_n$ в смысле скалярного произведения в $L_2[0,\ l]$, то есть

- домножим его на $\mathbf{X}_n$ и
- проинтегрируем по $[0,\ l]$.

В силу (1.3), получим

$$(f,\ \mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n) = c_n\,(\mathbf{X}_n,\ \mathbf{X}_n) = c_n\|\mathbf{X}_n\|^2.$$

Отсюда сразу получается доказываемая формула

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2}.$$

□

В силу данной теоремы, нам достаточно один раз вычислить $\|\mathbf{X}_k\|^2$ для каждой задачи Штурма-Лиувилля, чтобы знать вид коэффициентов разложения c_k.

2. № 643

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $\qquad U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \tag{2.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}''(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = -\frac{\mathbf{T}''(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{2.3}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{2.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}''(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.5}$$

Задача (2.3)–(2.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0; \tag{2.6}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0; \tag{2.7}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0; \tag{2.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (2.3), (2.4). Стало быть, рассматривать задачу (2.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}''_n(t) + \lambda_n a^2 \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{2.12}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.1).

Будем искать решение задачи (2.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{2.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(x), \tag{2.14}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n}\mathbf{X}_n(x). \tag{2.15}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{X}_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \mathbf{X}_n(x), \tag{2.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n, β_n. Для этого домножим (2.16) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi,\,\mathbf{X}_m) = \alpha_m\int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(\frac{2\pi m x}{l}\right)\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi,\,\mathbf{X}_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{2.17}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi,\mathbf{X}_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{2.18}$$

То есть α_n, β_n вычисляются в точности по формуле (1.2)[1].
Таким образом, для коэффициентов A_n, B_n из представления (2.13) решения $u(x,t)$, сопоставляя (2.14) – (2.16), получим:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx; \tag{2.19}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{2.20}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.13) найденные коэффициенты A_n, B_n из (2.19), (2.20).

3. № 649^m

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $\quad U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \tag{3.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}''(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

[1] Можно было воспользоваться формулой (1.2) сразу. Для этого нам пришлось бы вычислить $\|\mathbf{X}_n\|^2$, то есть тот же самый интеграл $\int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right)dx$.

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = -\frac{\mathbf{T}''(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{3.3}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \tag{3.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}''(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{3.5}$$

Задача (3.3)–(3.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (3.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{3.6}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{3.7}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{3.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (3.3), (3.4). Стало быть, рассматривать задачу (3.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}''_n(t) + \lambda_n a^2\mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{3.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right), \qquad t > 0, \tag{3.12}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (3.1).

Будем искать решение задачи (3.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right). \tag{3.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\mathbf{X}_n(x), \tag{3.14}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}'_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n}\mathbf{X}_n(x). \tag{3.15}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\mathbf{X}_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\mathbf{X}_n(x), \tag{3.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n, β_n. Для этого домножим (3.16) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{3.17}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{3.18}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n, B_n из представления (3.13) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx; \tag{3.19}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{3.20}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.13) найденные коэффициенты A_n, B_n из (3.19), (4.4).

4. № 645

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Данная задача – частный случай рассмотренной в №649^m. Поэтому мы можем сразу воспользоваться формулами (3.13), (3.19), (4.4) для получения ответа. Найдём по (3.19) коэффициенты A_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \\ &= \frac{2}{l}\left[-\frac{2l}{(2n-1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi}\int_0^l \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)dx\right] = \\ &= \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right] = \frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для того, чтобы найти B_n, заметим, что заданная функция $\psi(x)$ уже разложена в ряд по функциям $\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$:

$$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \tag{4.3}$$

Следовательно, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = \beta_4 = \ldots = 0$, откуда, т.к. $B_n = \beta_n\frac{2l}{\pi(2n-1)a}$,

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \qquad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \qquad B_3 = B_4 = \ldots = 0. \tag{4.4}$$

Подставим найденные A_n и B_n в
$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)$.
Получим ответ:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right) + \\ + \frac{2l}{a\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{3a\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right). \end{aligned}$$

5. № 649

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{5.1}$$

<u>**Шаг 1.**</u> **Будем искать решение уравнения** $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ **с краевыми условиями** $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ **в виде** $\qquad U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \tag{5.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}''(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = -\frac{\mathbf{T}''(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{5.3}$$
$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \tag{5.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}''(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.5}$$

Задача (5.3)–(5.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{5.6}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{5.7}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{5.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$\mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(x) = \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем
$$\mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}\,x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$ следует, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = 0$), и второе краевое условие $\mathbf{X}'(l) = 0$ выполняется автоматически, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю и соответствующую ему собственную функцию:
$$\lambda_0 = 0, \qquad \mathbf{X}_0(x) = 1. \tag{5.11}$$
Заметим, что эта пара (собственное число–собственная функция) может быть записана в том же виде, что и λ_n в (5.9) и $\mathbf{X}_n$ и (5.10) при $n = 0$:
$\lambda_0 = \frac{\pi^2 0^2}{l^2} = 0, \qquad \mathbf{X}_0 = \cos\left(\frac{\pi 0 x}{l}\right) = 1.$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

задачи (5.3), (5.4). Стало быть, рассматривать задачу (5.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}''_n(t) + \lambda_n a^2 \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.12}$$

При $n = 0$ это уравнение вырождается в

$$\mathbf{T}''_0(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Его решение:
$$\mathbf{T}_0 = A_0 + B_0 t, \tag{5.13}$$
где $A_0,\ B_0$ – произвольные постоянные.
При $n > 0$ решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{5.14}$$

где $A_n,\ B_n$ – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (5.1).

Будем искать решение задачи (5.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{5.15}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(x), \tag{5.16}$$
$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}'_n(0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n \mathbf{X}_n(x). \tag{5.17}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд Фурье по косинусам:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad \psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{5.18}$$

где коэффициенты α_n, β_n имеют вид:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad \beta_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.$$

(Конечно, эти формулы для вычисления α_n, β_n мы могли получить тем же способом, что и формулы (3.17), (3.18), но мы воспользовались знанием стадартных формул для ряда Фурье).

Таким образом, для коэффициентов A_n, B_n из представления (5.15) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx \quad n>0, \qquad A_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)dx \quad n=0; \tag{5.19}$$

$$B_n = \frac{l\beta_n}{\pi n a} = \frac{2l}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx \quad n>0, \qquad B_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)dx \quad n=0. \tag{5.20}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (5.15) найденные коэффициенты A_n, B_n из (5.19), (5.20).

Метод Фурье для однородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями.

6. № 688

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{6.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \tag{6.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{6.3}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \tag{6.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2 \mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.5}$$

Задача (6.3)–(6.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (6.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0; \tag{6.6}$$

$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0; \tag{6.7}$$

$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0; \tag{6.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, $\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (6.3), (6.4). Стало быть, рассматривать задачу (3.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \lambda_n a^2 \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2} t} \tag{6.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (6.1).

Будем искать решение задачи (6.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2} t}. \tag{6.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(x), \tag{6.14}$$

$$\tag{6.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{X}_n(x), \tag{6.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого домножим (6.16) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{6.17}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (6.14) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{6.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (6.14) найденные коэффициенты A_n из (6.18).

7. № 687^m

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \tag{7.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}"(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{7.3}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{7.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2 \mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{7.5}$$

Задача (7.3)–(7.4) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (7.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{7.6}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{7.7}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{7.8}$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{7.10}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (7.3), (7.4). Стало быть, рассматривать задачу (7.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \lambda_n a^2 \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{7.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{7.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (7.1).

Будем искать решение задачи (7.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{7.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(x), \tag{7.14}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \text{где} \tag{7.15}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{7.16}$$

$$\tag{7.17}$$

Сопоставляя (7.14) и (7.15), (7.16) для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ получим:

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{7.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (7.13) найденные коэффициенты A_n из (7.18).

8. № 687

Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = Ax, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $\qquad U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $\mathbf{T}_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \lambda_n a^2 \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8.2}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t} \qquad t > 0, \tag{8.3}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (8.1).

Будем искать решение задачи (8.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}. \tag{8.4}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M.

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad \text{где} \tag{8.5}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{8.6}$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l Ax\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx = -A\frac{2l}{\pi n l}\left(x\cos\frac{\pi n x}{l}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}dx\right)\right) =$$

$$= -A\frac{2}{\pi n}\left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (8.4):

$$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}.$$

9. № 691

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ в виде $\qquad U(x,t) = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(x)$ следующее:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0. \tag{9.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}''(x)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(x)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$\frac{\mathbf{X}''(x)}{\mathbf{X}(x)} = \frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(x)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}"(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \tag{9.3}$$
$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \tag{9.4}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{9.5}$$

Задача (9.3)–(9.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (9.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при} \;\; \lambda > 0; \tag{9.6}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при} \;\; \lambda < 0; \tag{9.7}$$
$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при} \;\; \lambda = 0; \tag{9.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$\mathbf{X}'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\,\sin(\sqrt{\lambda}\, l) + h\cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)
$$\sqrt{\lambda}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l) = h \tag{9.9}$$
Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

  Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \quad \sqrt{\lambda_n}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.10}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.11}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(x) = 0$), и второе краевое условие $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (9.9)}, \qquad \mathbf{X}_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (9.3), (9.4). Стало быть, рассматривать задачу (9.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \lambda_n a^2\mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{9.12}$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}, \qquad t > 0, \tag{9.13}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (9.1).

Будем искать решение задачи (9.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}. \tag{9.14}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(x)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(x), \tag{9.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{X}_n(x), \tag{9.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (9.16) на $\mathbf{X}_m = \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$(\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int_0^l \left(1 + \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h}\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = l + \frac{1 - \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}}{h} = \left[\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_m}\right] = l + \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_m + h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_m + h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_m + h^2\right) + h}{\lambda_m + h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h}(\varphi, \mathbf{X}_n) = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx. \tag{9.17}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (9.14) найденные коэффициенты A_n из (9.17).

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{2\frac{\lambda_n+h^2}{l(\lambda_n+h^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx\right\}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}$.