Цифровая обработка сигналов

Лекция №1

Санкт-Петербург

2021

Литература

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / А. Б. Сергиенко. –. – СПб. : Питер, 2002. – 768 с.
2. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А. И. Солонина [и др.]. – СПб. : БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.
3. Р. В. Хемминг Цифровые фильтры: Москва, «Советское радио», 1980. – 224 с.

Классификация сигналов

Периодические и непериодические сигналы

Детерминированные и случайные сигналы

Сигналы с конечной (ограниченной) и бесконечной (неограниченной) энергией

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Классификация сигналов

Аналоговые сигналы:.

$$s(t)$$

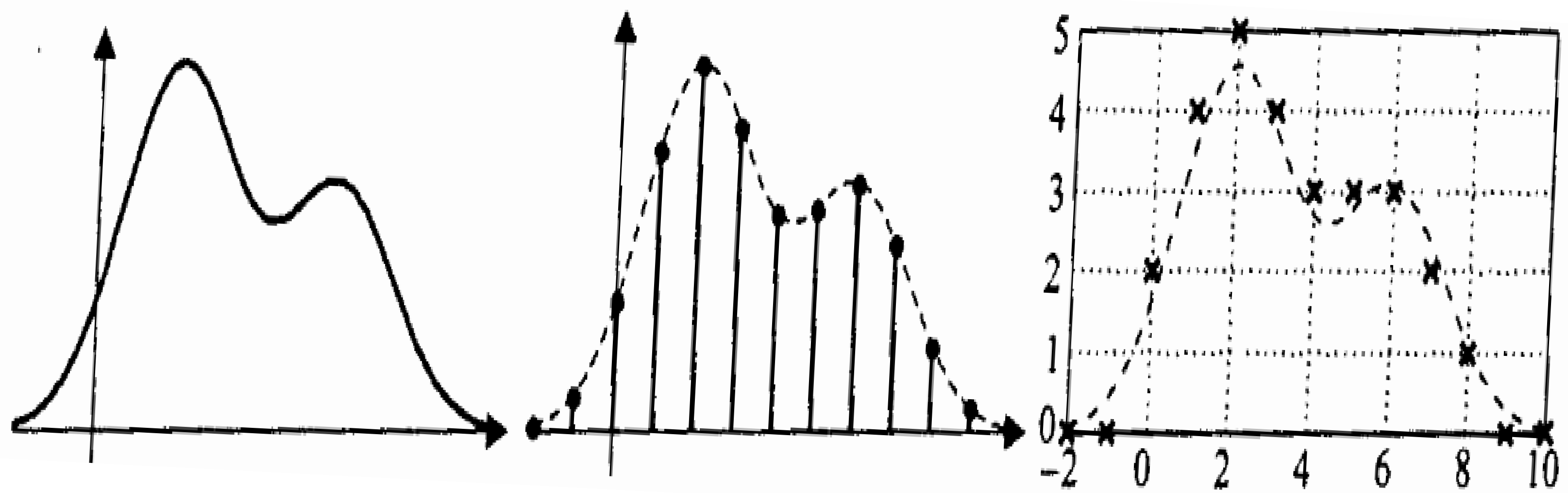
Дискретные сигналы:

$$s(nT)\ ,\quad s(n)$$

Дискретное время, дискретное нормированное время

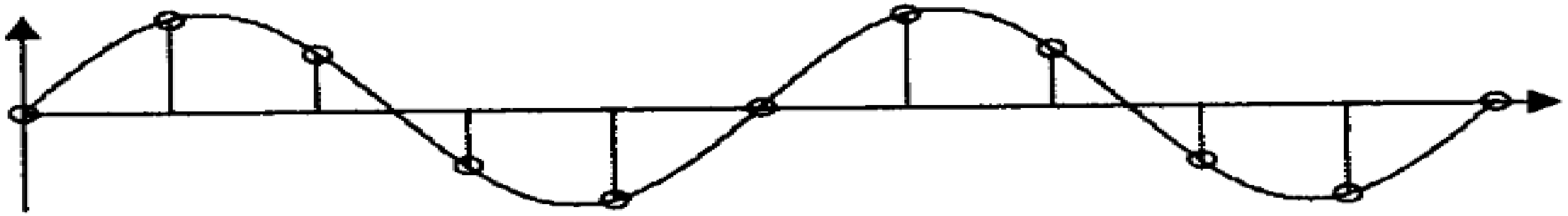
Цифровые сигналы:

Квантование

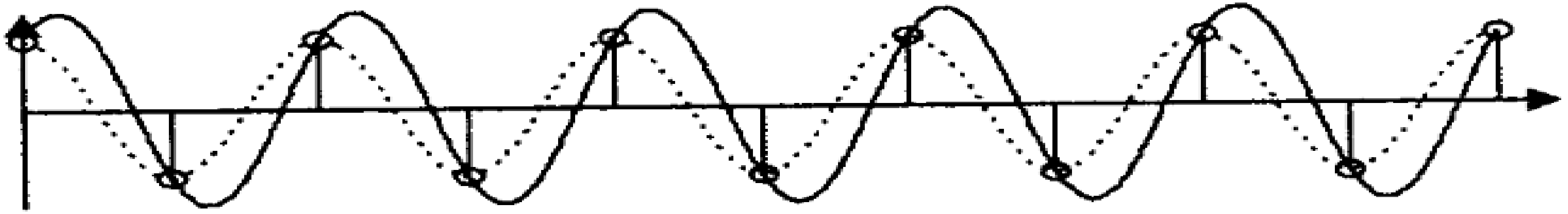


Частота Найквиста

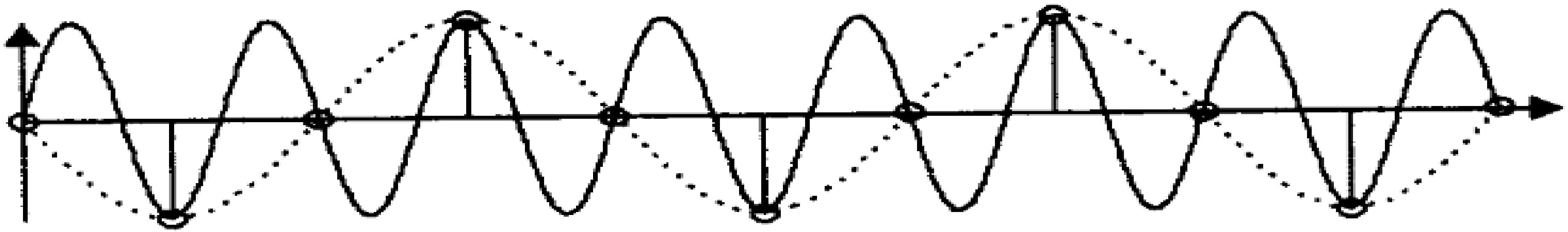
$$f_N = \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2T}; \quad \omega_N = \frac{\omega_d}{2} = \frac{\pi}{T}$$



а



б



в

Энергия и мощность сигнала

Энергия:

$$E = \int_0^T s^2(t)dt$$

Мгновенная мощность:

$$p(t) = s^2(t)$$

Средняя мощность:

$$P_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Единичный цифровой импульс:

$$\delta_d(k)=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases},\ k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Является дискретным аналогом дельта-функции (функции Дирака).

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0.\end{cases},\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Дискретный единичный скачок:

$$\sigma_d(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}, \; k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Является дискретным аналогом функции единичного скачка (функция Хэвисайда)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5 \text{ или неопредлена}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Дискретная экспоненциальная функция:

$$s(k)=\begin{cases}0, & k<0,\\ a^k, & k\ge 0.\end{cases}, \quad k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$$

Дискретная затухающая синусоида:

$$s(k)=a^k\cos(k\omega+\varphi)$$

Характеристики дискретного сигнала (последовательности отсчетов)

Среднее значение

Мощность – сумма квадратов значений отсчетов

Средняя мощность

Автокорреляционная функция (АКФ):

$$R_s(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} s(n)s(n+m), 0 \le m \le (N-1)$$

Автоковариационная функция:

$$r_s(m) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} [s(n)-\mu_s][s(n+m)-\mu_s], 0 \le m \le (N-1)$$

Случайные дискретные сигналы

Часто используемые характеристики эргодического случайного дискретного сигнала:

Математическое ожидание (среднее значение) μ_s

Дисперсия σ_s^2

АКФ $r_s(m)$

Автоковариационная функция $r_s(m)$

Случайные дискретные сигналы

Белый шум

Равномерный белый шум – последовательность случайных чисел, распределенных по равномерному закону на отрезке [0,1] (μ_s =0.5, σ_s^2 =1/12).

Автоковариационная функция этого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

Нормальный белый шум – последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону с μ_s =0 и σ_s^2 =1 .

АКФ такого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

Дискретные фильтры - введение

Входной детерминированный дискретный сигнал:

$$x(n),\ n = 0, 1, 2, ..., N-1$$

Последовательность чисел y_n - выходной сигнал формируется по правилу:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{M} d_k y_{n-k},\ n = 1, 2, ..., N \qquad (1.1)$$

Формула (1) представляет собой одну из возможных форм записи дискретного фильтра.

Сумма вида $\sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$ называется линейной сверткой.

Дискретные фильтры - введение

Свертка $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$ двух последовательностей

x_n и c_n , $n = 0,1,2,\ldots,N-1$

$$y_0 = c_0 x_0$$

$$y_1 = c_0 x_1 + c_1 x_0$$

$$y_2 = c_0 x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \ldots + c_{n-1} x_1 + c_n x_0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{2N-3} = c_{N-1} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1}$$

$$y_{2N-2} = c_{N-1} x_{N-1}$$

$$c_{N-1} \quad c_{N-2} \quad \cdot \quad \cdot \quad c_2 \quad c_1 \quad c_0 \rightarrow$$

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}$$

Дискретные фильтры - введение

В качестве примера **нерекурсивного** фильтра можно привести известную формулу сглаживания:

$$y_n = \frac{1}{5}(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2}),\ n = 2,3,\dots,N-3 \qquad (1.2)$$

В качестве примера **рекурсивного** фильтра можно привести известную формулу трапеций для численного интегрирования:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) + y_n,\ n = 0,1,2,\dots,N-2 \qquad (1.3)$$

Дискретные фильтры – введение
Усиление шума при фильтрации

Пусть входной сигнал задан формулой:

$$x_n = x_n + u_n,\ n = 0,1,2,...,N-1$$

Здесь $u_n,\ n = 0,1,2,...,N-1$ - шум, некоррелированные случайные значения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_u^2.

Зададим нерекурсивный фильтр

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}),\ n = 1,2,...,N-1$$

Дисперсия результата определяется формулой:

$$D(y_n) = E\left\{\left[\sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}\right]^2\right\} = \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \qquad (1.4)$$

Собственные функции линейных операторов

Собственные числа и собственные векторы в линейной алгебре:

$$Ax = \lambda x$$

$\sin(x)$ и $\cos(x)$ - собственные функции операции сдвига:

$$A\sin(x+h) + B\cos(x+h) = \tilde{A}\sin(x) + \tilde{B}\cos(x)$$

$$\tilde{A} = A\cos h - B\sin h;\ \tilde{B} = A\sin h + B\cos h$$

Формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

Собственные функции линейных операторов

Пусть $$y(t) = e^{it}$$

Тогда $$y(t+h) = e^{i(t+h)} = e^{ih} y(t)$$

Пусть теперь $x_n = e^{i\omega n}$

Для нерекурсивного фильтра получим следующее выражение:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i\omega k} = \lambda(\omega) e^{i\omega n} = \lambda(\omega) x_n$$

Аналогичный результат имеет место и для рекурсивного фильтра

Собственные функции линейных операторов

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^{M} d_k y_{n-k} \qquad (1.5)$$

Пусть $x_n = Ae^{i\omega n}$ и $y_n = Be^{i\omega n}$. Подставляем в (1.5):

$$Be^{i\omega n} = A\sum_{k=0}^{N} c_k e^{i\omega(n-k)} + B\sum_{k=1}^{M} d_k e^{i\omega(n-k)} \qquad (1.6)$$

В результате $H(\omega) = \dfrac{B}{A} = \dfrac{\sum_{k=0}^{N} c_k e^{-i\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} d_k e^{-i\omega k}}$

$$y_n = H(\omega) x_n \qquad (1.7)$$

Собственные функции линейных операторов

Функция $e^{i\omega t}$ является собственной функцией и для операций дифференцирования, интегрирования и вычисления разностей:

$$\frac{d}{dt}e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\int e^{i\omega t}dt = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\Delta e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+1)} - e^{i\omega t} = (e^{i\omega} - 1)e^{i\omega t} = \lambda(\omega)e^{i\omega t}$$

Степенные функции от t указанным свойством не обладают.

Цифровая обработка сигналов

Лекция №2

Санкт-Петербург

2021

Частотный анализ полиномиальных приближений

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt$

Приближение (в смысле МНК) **прямой линией** по пяти точкам:

$$F(A,B) = \sum_{k=-2}^{k} (s_k - y_k)^2 = \sum_{k=-2}^{k} (s_k - A - Bk)^2 \Rightarrow \min \quad (2.1)$$

Система нормальных уравнений

$$\begin{cases} 5A + 0B = \sum_{k=-2}^{k=2} s_k \\ 0A + 10B = \sum_{k=-2}^{k=2} k s_k \end{cases} \quad (2.2)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В итоге получаем:

$$y_0 = A = \frac{1}{5}\sum_{k=-2}^{k=2} s_k = \frac{1}{5}(s_{-2} + s_{-1} + s_0 + s_1 + s_2) \quad (2.3)$$

В общем случае:

$$y_n = \frac{1}{5}\sum_{k=n-2}^{k=n+2} s_k = \frac{1}{5}(s_{n-2} + s_{n-1} + s_n + s_{n+1} + s_{n+2}) \quad (2.4)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$y_n = \frac{1}{5}(e^{-2i\omega} + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega})e^{i\omega n} = H(\omega)e^{i\omega n} \quad (2.5)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{5}(e^{-2i\omega} + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega}) \quad (2.6)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

$$H(\omega) = 0.2\left[1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)\right] \qquad (2.7)$$

Поскольку передаточная функция в форме (2.6) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{i\omega}$, ее можно представить как сумму этой прогрессии:

$$H(\omega) = \frac{e^{i\frac{5\omega}{2}} - e^{-i\frac{5\omega}{2}}}{5\left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{5\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.8)$$

$H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π. Обычно рассматривается интервал (- π,π) для ω или (-0.5,0.5) для f.

$$H(\omega) = H(2\pi f) = \tilde{H}(f) \qquad (2.9)$$

$\tilde{H}(f) = 1$, для $f = 0$; $\tilde{H}(f) = 0$, для $f = 0.2$ и $f = 0.4$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В общем случае при приближении по 2m+1 точкам

$$H(\omega)=\frac{1}{2m+1}\left[1+2\cos(\omega)+2\cos(2\omega)+\ldots+2\cos(m\omega)\right] \quad (2.10)$$

или

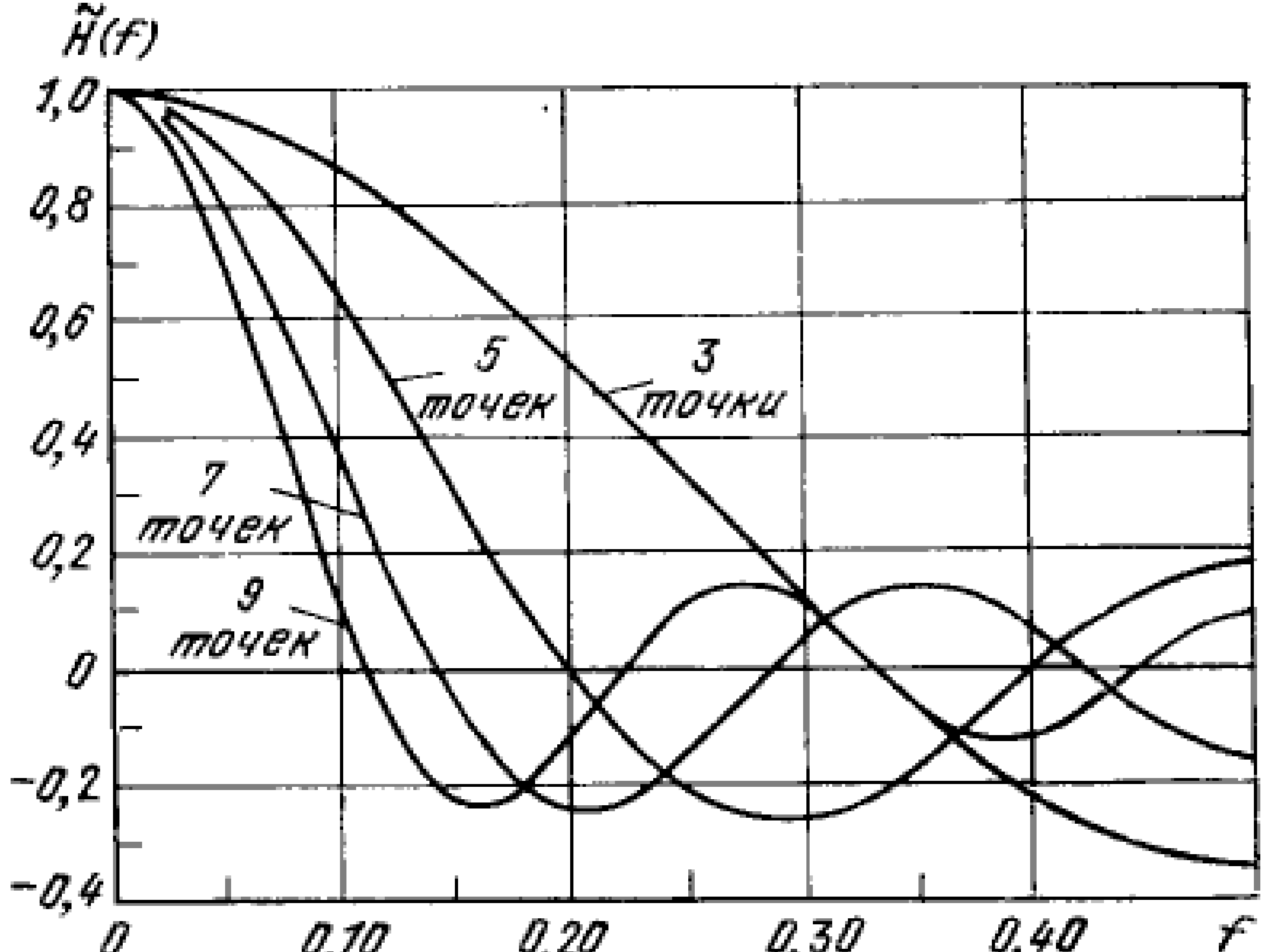
$$H(\omega)=\frac{\sin\left(\dfrac{(2m+1)\omega}{2}\right)}{(2m+1)\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \quad (2.11)$$

Во всех случаях $H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π. Кроме того,

если $s(t)=\sum_{m=1}^{M} c_m e^{i\omega_m t}$, то $y(t)=\sum_{m=1}^{M} c_m H(\omega_m) e^{i\omega_m t}$ (2.12)

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **прямой линией** по 3,5,7 и 9 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом второй степени**:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2$$

При сглаживании по пяти точкам:

$$y_n = \frac{1}{35}\left(-3s_{n-2} + 12s_{n-1} + 17s_n + 12s_{n+1} - 3s_{n+2}\right) \quad (2.13)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{35}\left[17 + 24\cos(\omega) - 6\cos(2\omega)\right] \quad (2.14)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом второй степени**:
по семи, девяти и одиннадцати точкам:

$$y_n = \frac{1}{21}(-2s_{n-3} + 3s_{n-2} + 6s_{n-1} + 7s_n + 6s_{n+1} + 3s_{n+2} - 2s_{n+3}) \quad (2.15)$$

$$y_n = \frac{1}{231}(-21\,s_{n-4} + 14\,s_{n-3} + 39\,s_{n-2} + 54\,s_{n-1} + 59\,s_n + 54\,s_{n+1} +$$

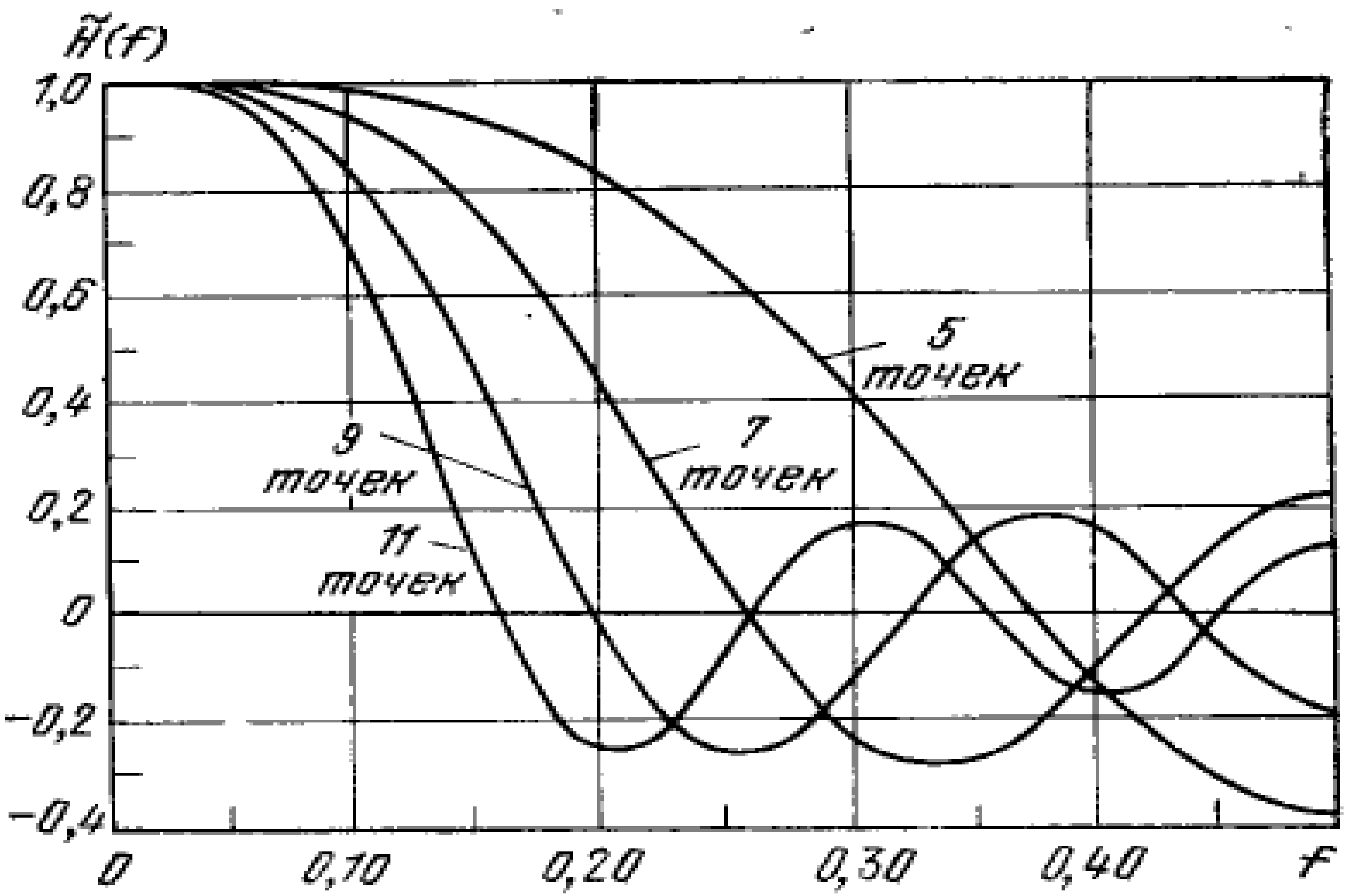
$$+ 39\,s_{n+2} + 14\,s_{n+3} - 21\,s_{n+4}) \quad (2.16)$$

$$y_n = \frac{1}{429}(-36s_{n-5} + 9s_{n-4} + 44s_{n-3} + 69s_{n-2} + 84s_{n-1} + 89s_n +$$

$$+ 84s_{n+1} + 69s_{n+2} + 44s_{n+3} + 9s_{n+4} - 36s_{n+5}) \quad (2.17)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **полиномом второй степени** по 5,7,9 и 11 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом четвертой степени**:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$$

При сглаживании по семи точкам:

$$y_n = \frac{1}{231}(5s_{n-3} - 30s_{n-2} + 75s_{n-1} + 131s_n + \quad (2.18)$$

$$+ 75s_{n+1} - 30s_{n+2} + 5s_{n+3})$$

$$H(\omega) = \frac{1}{231}\left[131 + 150\cos(\omega) - 60\cos(2\omega) + 10\cos(3\omega)\right] \quad (2.19)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание **полиномом четвертой степени**:

При сглаживании по 9-ти, 11-ти и 13-ти точкам:

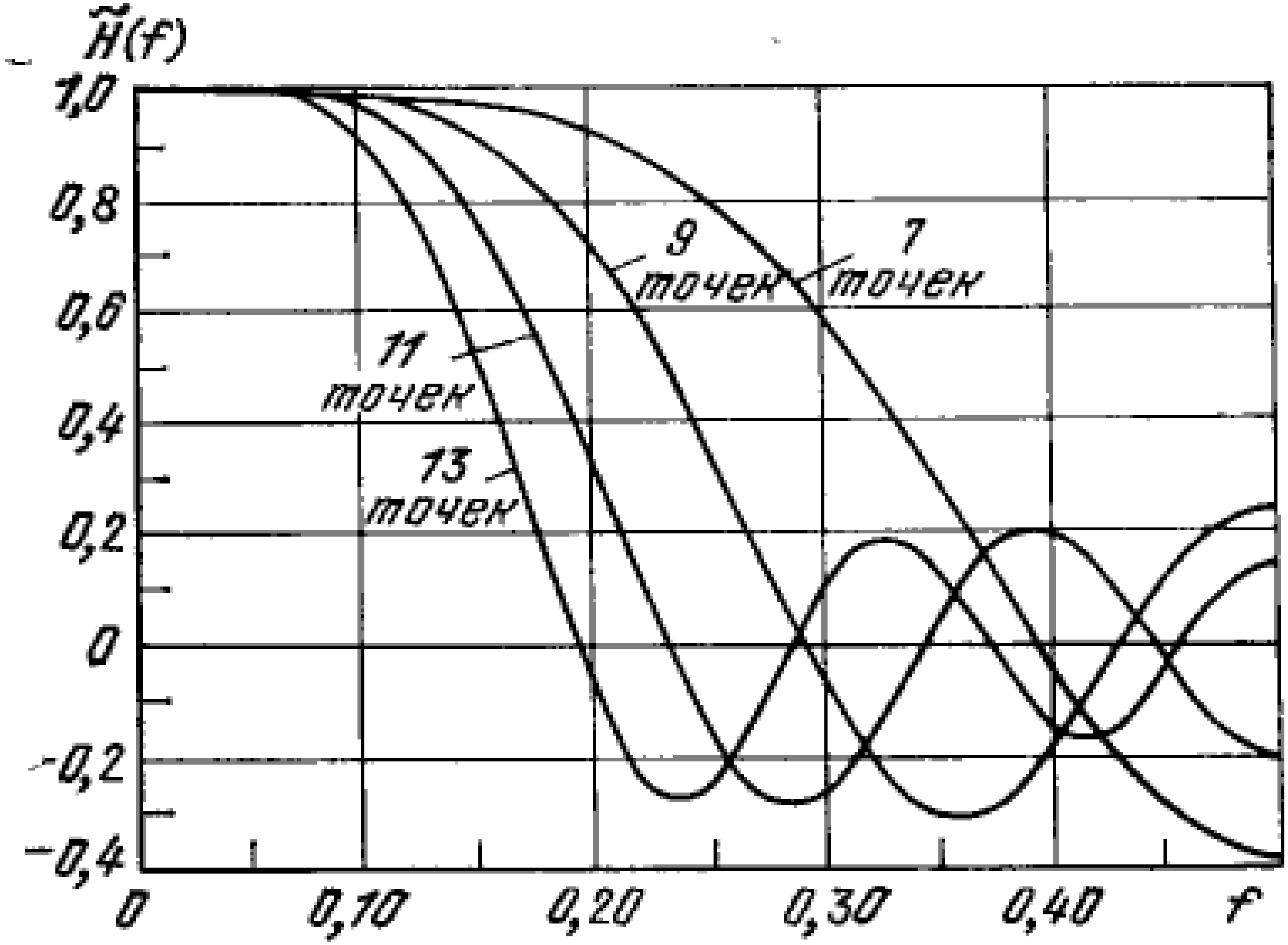
$$y_n = \frac{1}{429}(15s_{n-4} - 55s_{n-3} + 30s_{n-2} + 135s_{n-1} + 179s_n + 135s_{n+1} + 30s_{n+2} - \\ - 55s_{n+3} + 15s_{n+4}) \qquad (2.20)$$

$$y_n = \frac{1}{429}(18s_{n-5} - 45s_{n-4} - 10s_{n-3} + 60s_{n-2} + 120s_{n-1} + 143s_n + 120s_{n+1} + 60s_{n+2} - \\ - 10s_{n+3} - 45s_{n+4} + 18s_{n+5}) \qquad (2.21)$$

$$y_n = \frac{1}{2431}(110s_{n-6} - 198s_{n-5} - 135s_{n-4} + 110s_{n-3} + 390s_{n-2} + 600s_{n-1} + 677s_n + \\ + 600s_{n+1} + 390s_{n+2} + 110s_{n+3} - 135s_{n+4} - 198s_{n+5} + 110s_{n+6}) \qquad (2.22)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **полиномом 4-й степени** по 7,9,11 и 13 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание с помощью **формул Спенсера** для 15-ти 21-ой точек:

$$y_n = \frac{1}{320}(-3s_{n-7} - 6s_{n-6} - 5s_{n-5} + 3s_{n-4} + 21s_{n-3} + 46s_{n-2} +$$

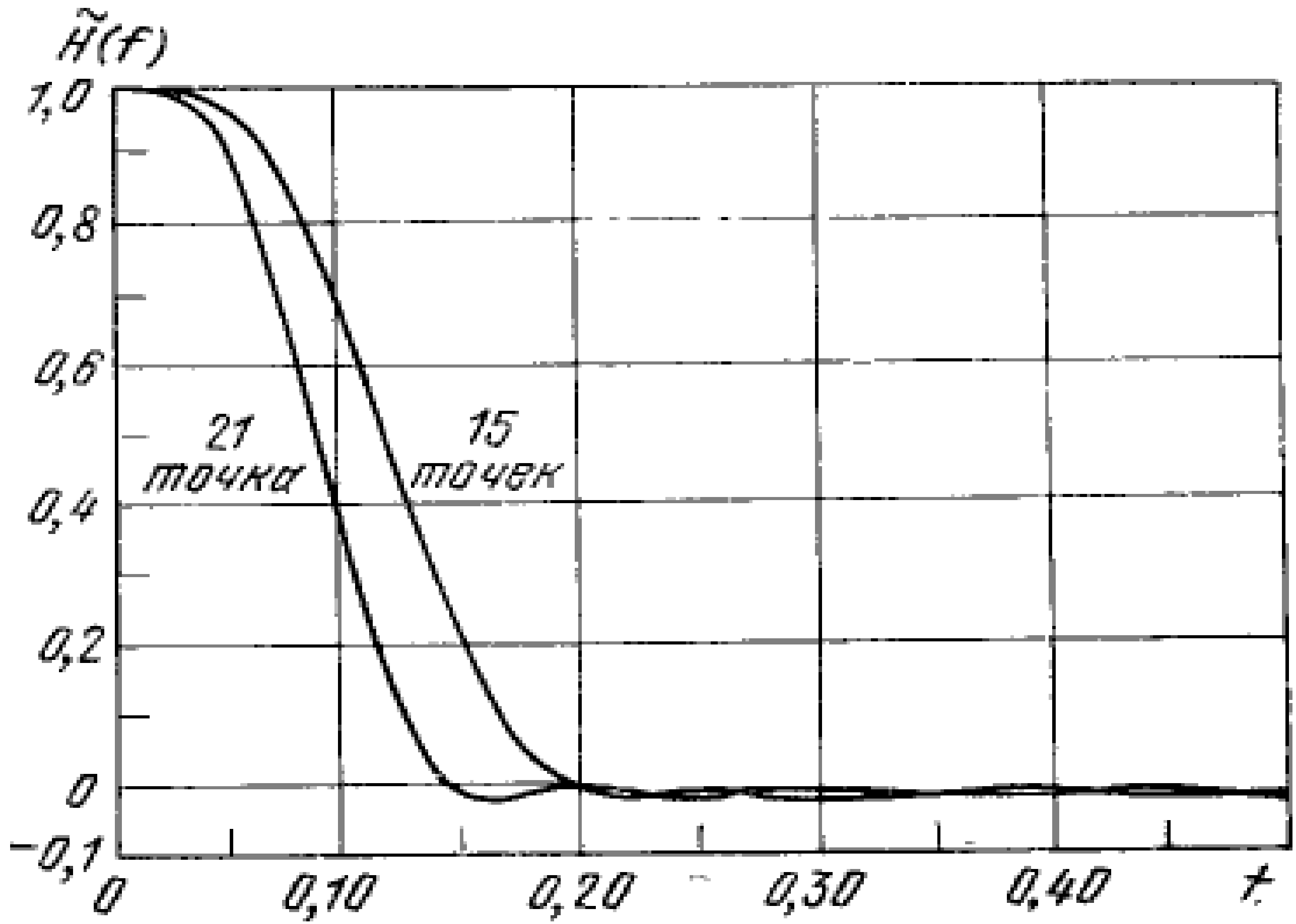
$$+ 67s_{n-1} + 74s_n + 67s_{n+1} + 46s_{n+2}....) \qquad (2.23)$$

$$y_n = \frac{1}{350}(-s_{n-10} - 3s_{n-9} - 5s_{n-8} - 5s_{n-7} - 2s_{n-6} + 6s_{n-5} + 18s_{n-4} + 33s_{n-3} +$$

$$+ 47s_{n-2} + 57s_{n-1} + 60s_n + 57s_{n+1}...) \qquad (2.24)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

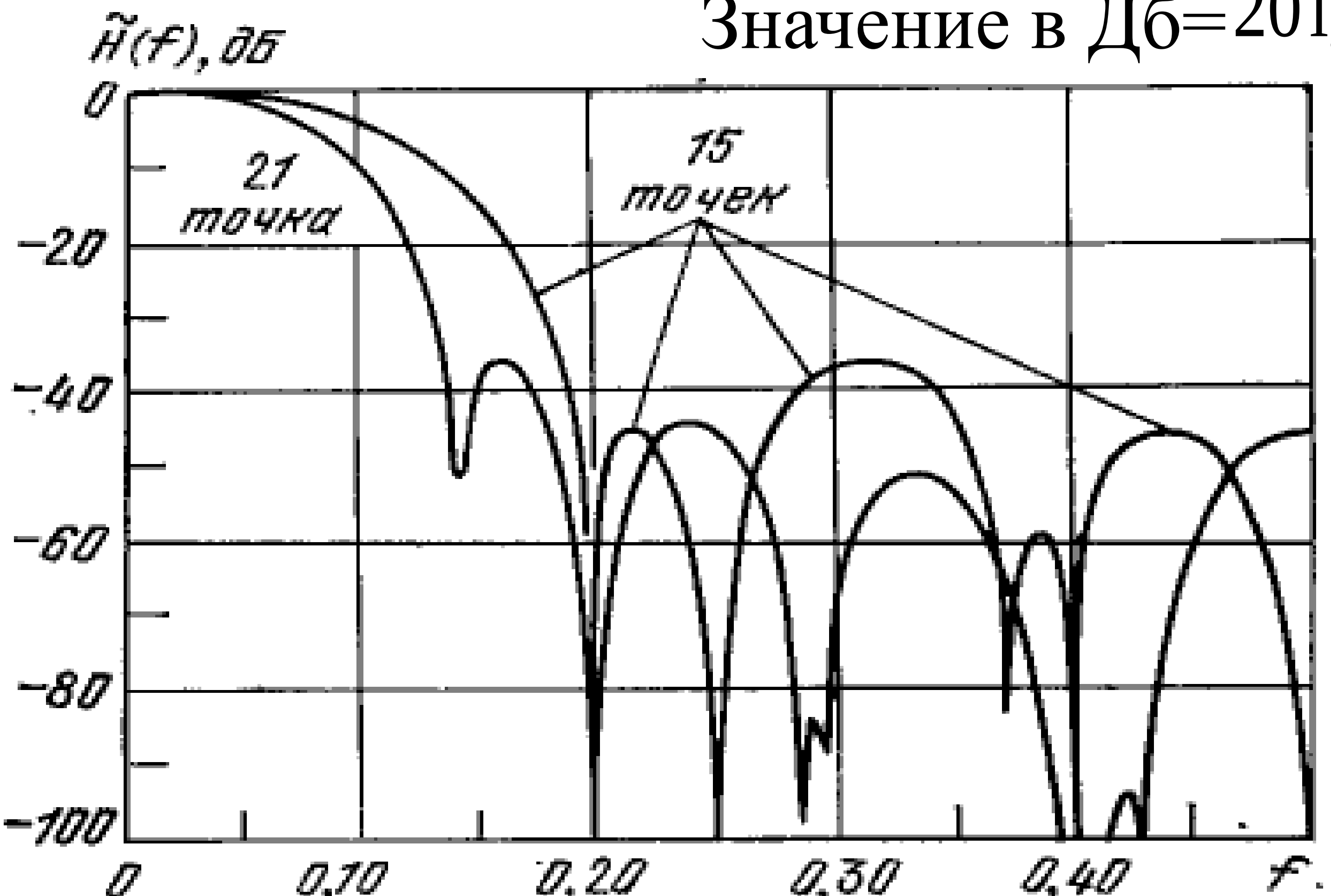
График передаточной функции при сглаживании **по формулам Спенсера** для 13-ти и 21-ой точек:



Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании **по формулам Спенсера** для 13-ти и 21-ой точек **в логарифмической шкале** (Дб).

$$\text{Значение в Дб} = 20\lg\left(\frac{|y_n|}{|s_n|}\right)$$



Численное интегрирование

Формула трапеций: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}),\ y_0 = 0.$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$.

В результате:
$$H(\omega) = \frac{(e^{i\omega}+1)}{2(e^{i\omega}-1)} = \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.25)$$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:
$$\gamma = \frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = 1 - \frac{\omega^2}{12} + \frac{\omega^4}{720} + \dots \qquad (2.26)$$

Численное интегрирование

Формула Симпсона:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}(s_{n-1} + 4s_n + s_{n+1}),\ y_0 = 0. \qquad (2.27)$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{\textit{Вычисленное}}{\textit{Точное}} = \frac{2+\cos(\omega)}{3} \cdot \frac{\omega}{\sin\omega} = 1 + \frac{\omega^4}{180} + \ldots \qquad (2.28)$$

Численное интегрирование

Формула прямоугольников:

$$y_{n+1} = y_n + s_{n+\frac{1}{2}},\ y_0 = 0. \qquad (2.29)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

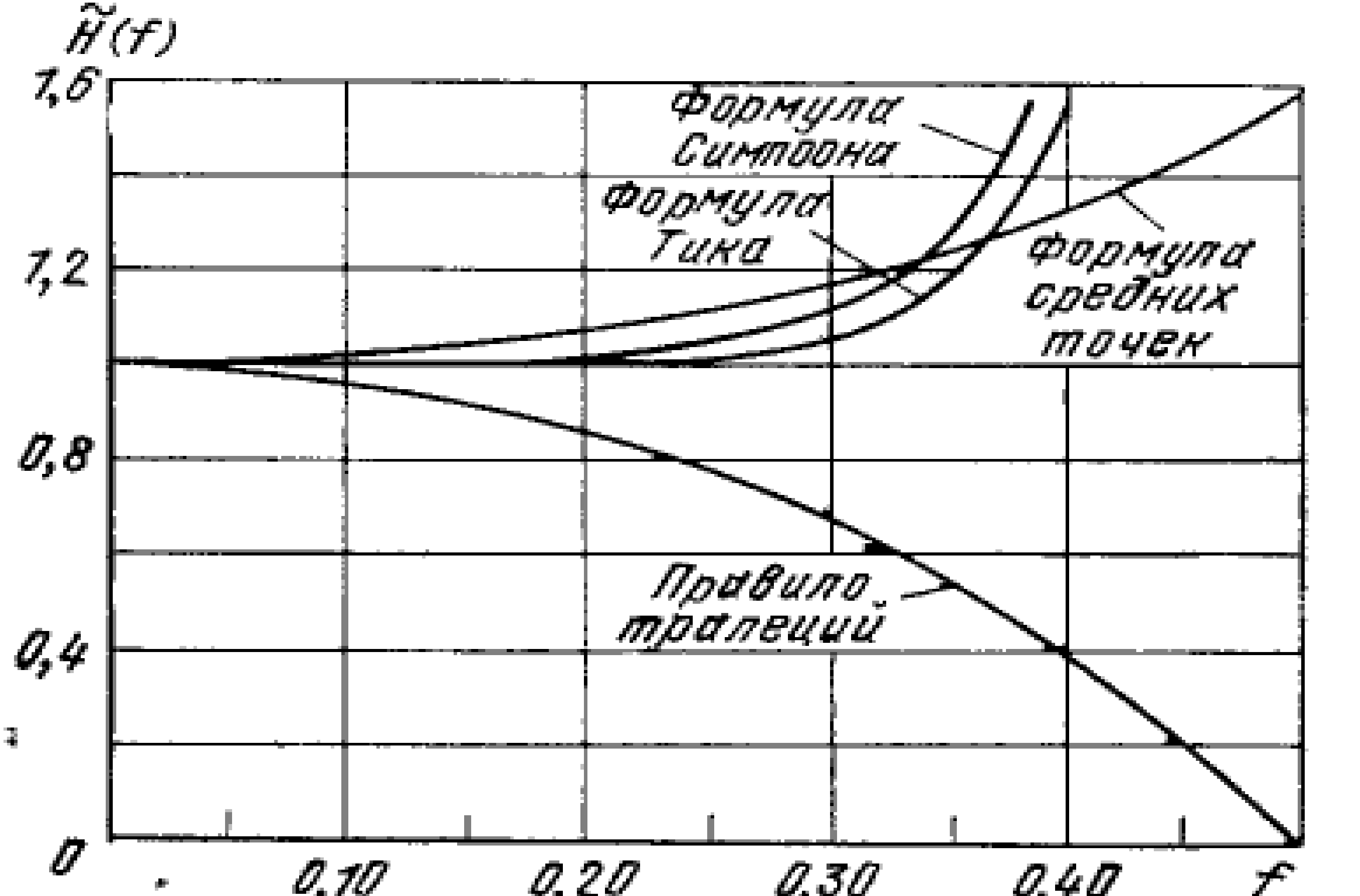
Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{Вычисленное}{Точное} = \frac{\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)} \qquad (2.30)$$

Численное интегрирование

График изменения значения γ для формул численного интегрирования:



Цифровая обработка сигналов

Лекция №3

Санкт-Петербург
2021

Разностный оператор

$$y_n = \Delta s_n = s_{n+1} - s_n \qquad (3.1)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$\Delta s_n = \Delta(e^{iwn}) = e^{i\omega(n+1)} - e^{i\omega n} = \left(e^{i\omega} - 1\right)e^{i\omega n}$$

$$e^{i\omega} - 1 = e^{i\frac{\omega}{2}}\left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}\right) = e^{i\frac{\omega}{2}}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

$$e^{i\omega} - 1 = ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] \qquad (*)$$

$$\Delta(e^{iwn}) = e^{i\omega(n+1)} - e^{i\omega n} = ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]e^{i\omega n} \qquad (3.2)$$

Разностный оператор

$$\Delta^2(s_n) = \Delta(\Delta s_n) = s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} \qquad (3.3)$$

$$s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = \left(e^{i\omega(n+1)} - 2e^{i\omega n} + e^{i\omega(n-1)}\right) =$$

$$= e^{-i\omega}\left(e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} + 1\right)e^{i\omega n} = e^{-i\omega}\left(e^{i\omega} - 1\right)^2 e^{i\omega n}$$

$$e^{-i\omega}\left(e^{i\omega} - 1\right)^2 = e^{-i\omega}\left(ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\right)^2$$

$$\Delta^2(e^{iwn}) = e^{-i\omega}\left(i^2 e^{i\frac{2\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^2\right)e^{i\omega n} \qquad (3.4)$$

Разностный оператор

$$\Delta^3(s_n)=\Delta(\Delta^2 s_n)=(s_{n+2}-2s_{n+1}+s_n)-(s_{n+1}-2s_n+s_{n-1})=$$

$$=e^{-i\omega}\left(e^{i\omega}-1\right)^3 e^{i\omega n}$$

$$\Delta^3(e^{iwn})=e^{-i\omega}\left(i^3 e^{i\frac{3\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^3\right)e^{i\omega n}$$

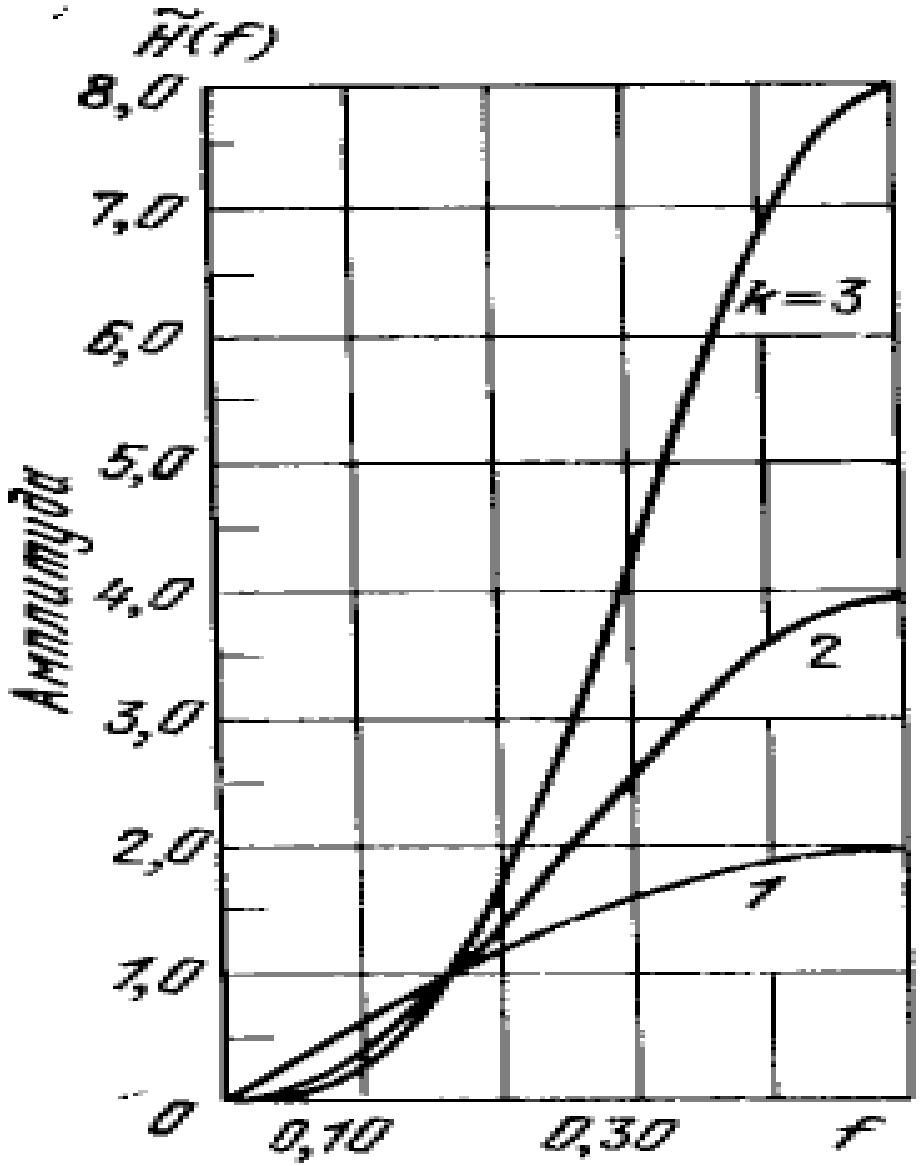
$$\Delta^k(s_n)=\Delta(\Delta^{k-1}s_n)$$

$$\Delta^k(e^{iwn})=\psi(\omega)i^k e^{i\frac{k\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^k e^{i\omega n}$$

$$H_k(\omega)=\psi(\omega)i^k e^{i\frac{k\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^k \qquad (3.5)$$

Разностный оператор Δ^k

График изменения передаточной функции:



Численное дифференцирование

Аппроксимация производной разностью первого порядка:

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$s_n' = \frac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2h} \qquad (3.6)$$

$$h = T = 1$$

$$H(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = i\sin(\omega) \qquad (3.7)$$

Точное значение производной от $e^{i\omega t}$ равно $i\omega e^{i\omega t}$

Отношение значений:

$$\frac{Вычисленное}{Точное} = \frac{\sin(\omega)}{\omega} \qquad (3.8)$$

Восстановление пропущенных данных

Интерполяция с помощью полинома третьего порядка:

$$\Delta^4(s_{n-2}) = s_{n-2} - 4s_{n-1} + 6s_n - 4s_{n+1} + s_{n+2} = 0 \qquad (3.9)$$

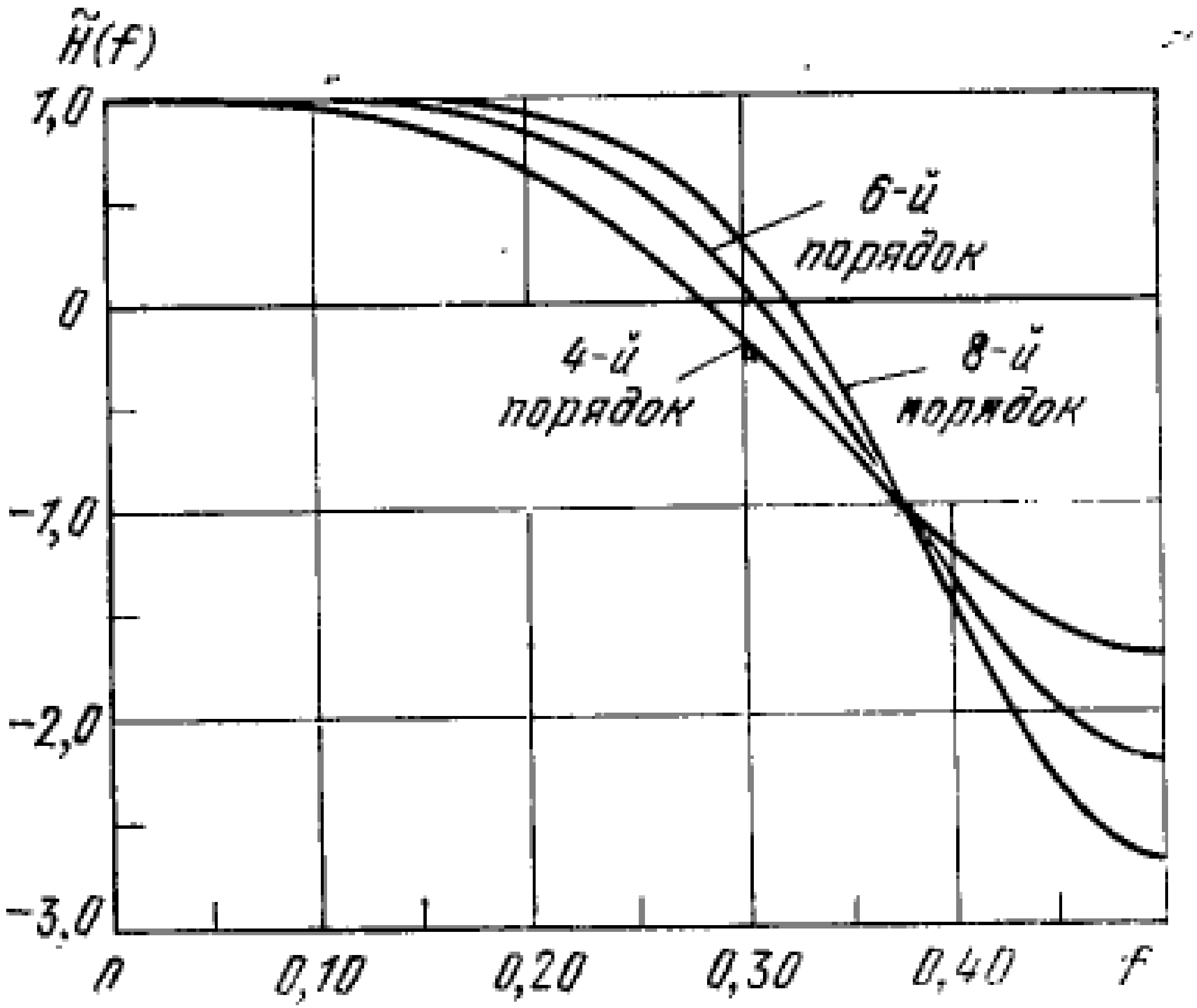
$$\tilde{s}_n = \frac{1}{6}(-s_{n-2} + 4s_{n-1} + 4s_{n+1} - s_{n+2}) \qquad (3.10)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(4\cos(\omega) - \cos(2\omega)) \qquad (3.11)$$

Восстановление пропущенных данных

График передаточной функции при использовании полиномов 4-го,6-го и 8-го порядков:



Пример расчета симметричного нерекурсивного фильтра

$$y_n = as_{n-2} + bs_{n-1} + cs_n + bs_{n+1} + as_{n+2}$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = 2a\cos(2\omega) + 2b\cos(\omega) + c$$

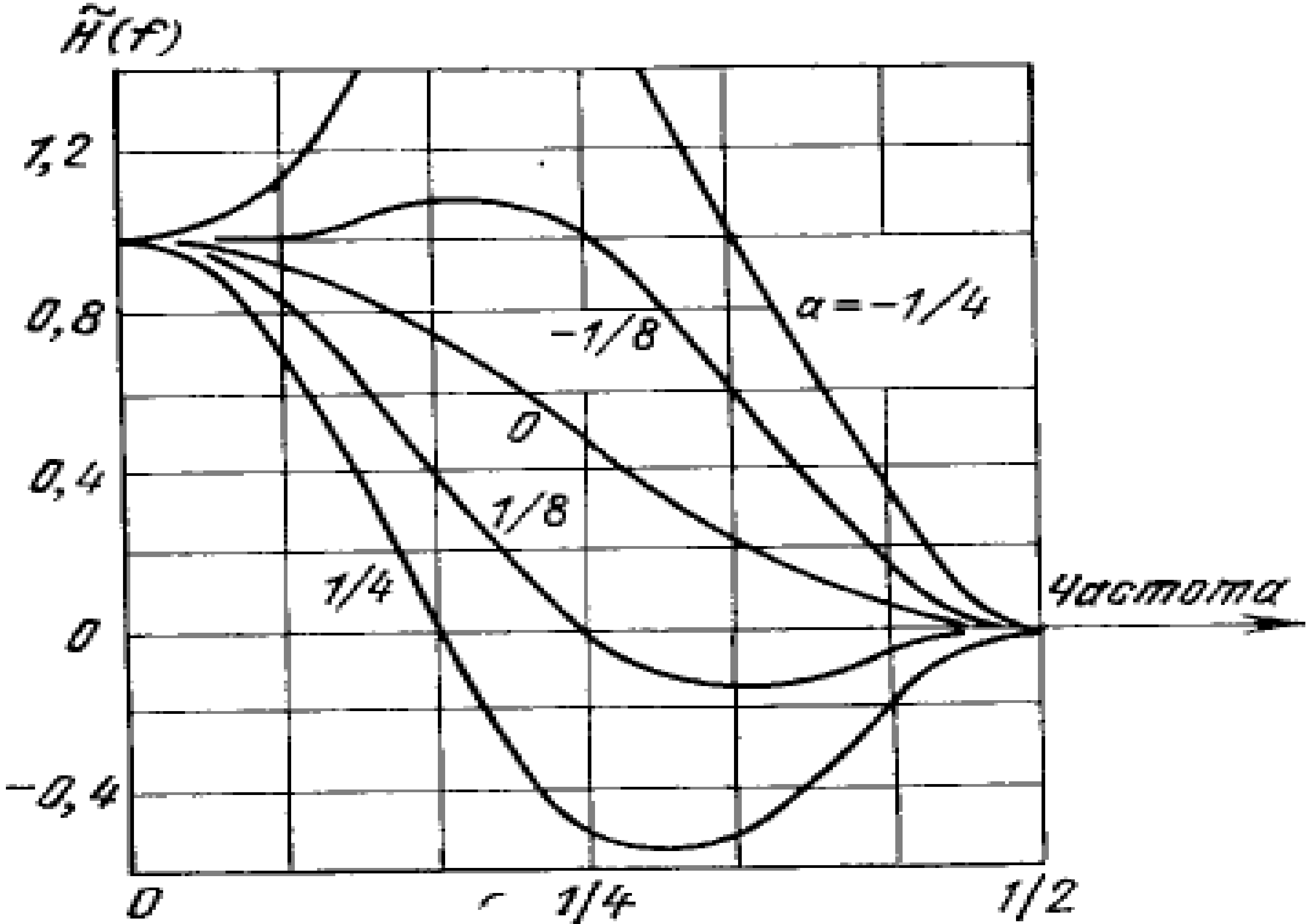
Условия: $$H(0) = 1;\quad H(\pi) = 0.$$

Результат: $$b = \frac{1}{4};\quad c = \frac{1}{2} - 2a.$$

$$H(\omega) = 4a\left[-1 + \cos(\omega)\left(\cos(\omega) + \frac{1}{8a}\right) + \frac{1}{8a}\right]$$

Пример расчета симметричного нерекурсивного фильтра

Передаточная функция фильтра в зависимости от значения параметра a:



Пример работы фильтра

Зададим передаточную функцию в виде:

$$\tilde{H}(f) = 2A\cos(2\pi f) + B$$

Потребуем выполнения условий:

$$\tilde{H}\left(\frac{1}{8}\right) = 1;$$

$$\tilde{H}\left(\frac{3}{8}\right) = 0.$$

В результате получим:

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

Пример работы фильтра

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

n	$s_n = \cos(\pi n/4)$	$y_n = \tilde{H} s_n$	$\tilde{s}_n = \cos(3\pi n/4)$	$\tilde{y}_n = \tilde{H} s_n$	$s_n + \tilde{s}_n$	$y_n + \tilde{y}_n = \tilde{H}(s_n + \tilde{s}_n)$
1	2	3	4	5	6	7
0	1.0	-	1.0	-	2.0	-
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	-2.0	-1.0
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	1.0	-	1.0	-	2.0	-

Ортогональность функций

Ортогональность функций:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g_1(t) g_2(t) dt = 0$$

Система $g_k(t)\ k = 1, 2, ..., N$ ортогональных на отрезке $[\alpha, \beta]$ функций

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \lambda_n^2, m = n \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

Система тригонометрических функций

$$1,\ \cos(t),\ \cos(2t),\ \cos(3t),\ \ldots$$

$$\sin(t),\ \sin(2t),\ \sin(3t),\ \ldots$$

ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases}$$

Ряд Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \qquad (3.12)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt, k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.13)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(kt) dt, k = 1, 2, \ldots \qquad (3.14)$$

Ряд Фурье

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt, k = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \qquad (3.15)$$

Неравенство Бесселя:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt, k > \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \qquad (3.16)$$

Для конечного N ряд Фурье является аппроксимацией функции в смысле МНК.

Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t) = t \quad , \quad -\pi \le t \le \pi \tag{3.17}$$

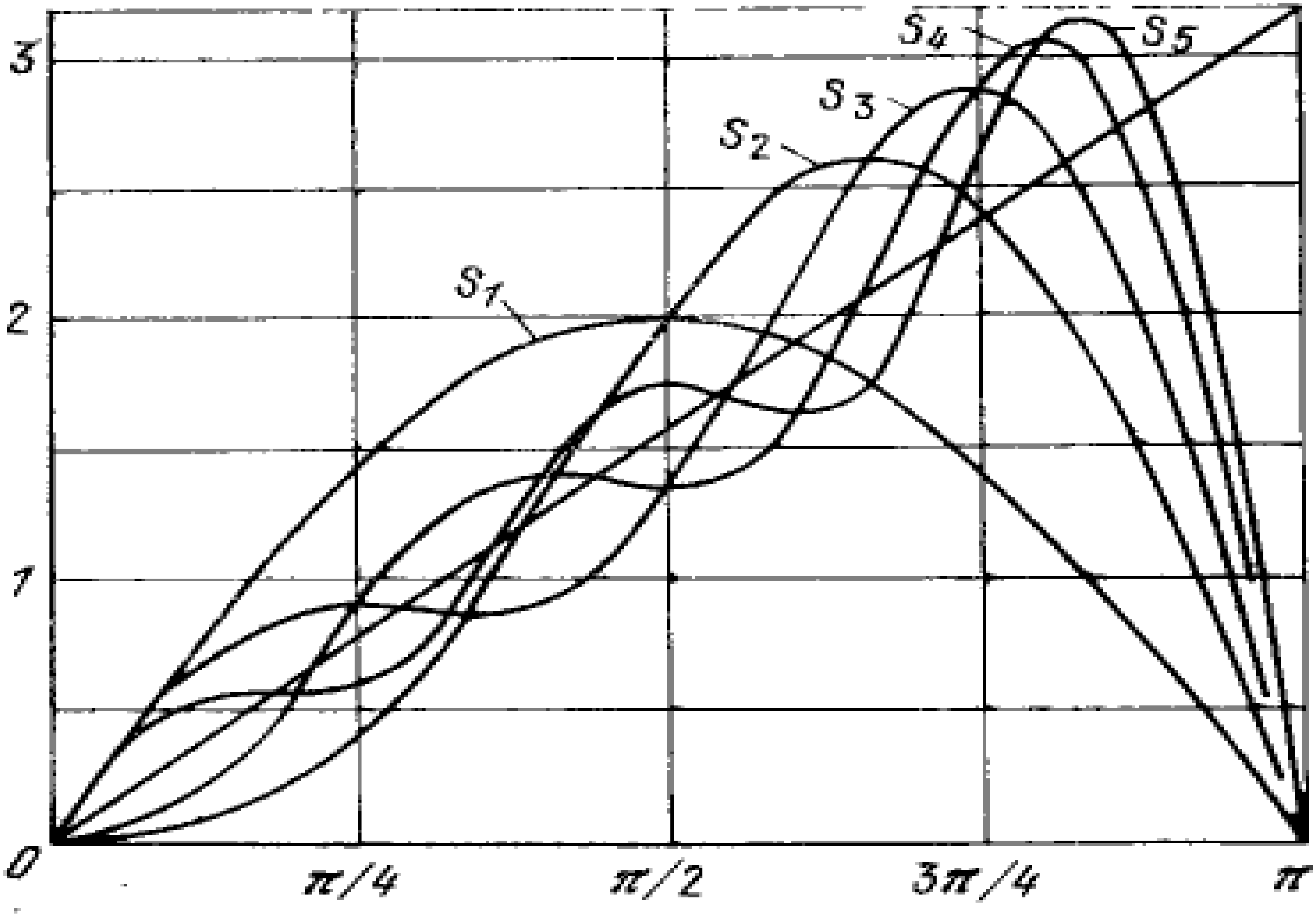
$$a_k = 0 \tag{3.18}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)dt, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, k = 1, 2, ... \tag{3.19}$$

$$t = 2\left[\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + ...\right] \tag{3.20}$$

Частичные суммы ряда Фурье



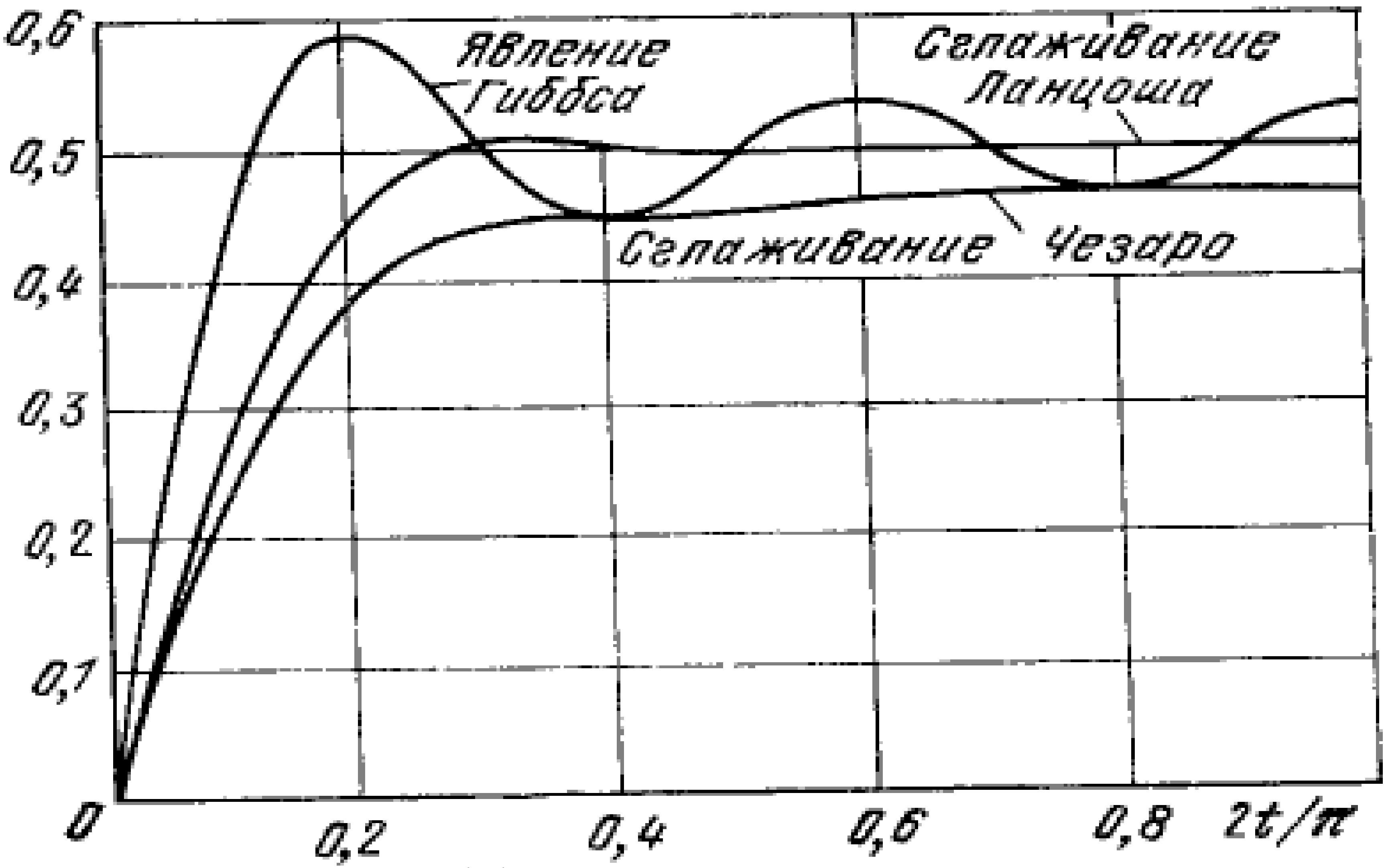
Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, 0<t<\pi\\ -\dfrac{1}{2}, -\pi<t<0\end{cases} \tag{3.21}$$

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} \tag{3.22}$$

$$S_N=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} \tag{3.23}$$

Частичная сумма ряда Фурье для пяти первых слагаемых



Явление Гиббса и сглаживание Ланцоша.

Коррекция частичных сумм ряда Фурье

Сглаживание Ланцоша: $\bar{S}_N = \frac{N}{2\pi}\int_{t-\frac{\pi}{N}}^{t+\frac{\pi}{N}} S_N(x)dx$ (3.24)

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left\{\sigma(N,k)[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)]\right\} \qquad (3.25)$$

$$\sigma(N,k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)}{\left(\frac{\pi k}{N}\right)} \qquad (3.26)$$

Сглаживание Чезаре (Фейера):

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{N-k}{N}[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)]\right\} \qquad (3.27)$$

Комплексный ряд Фурье

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)] \qquad (3.28)$$

$$\cos(kt)=\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2};\sin(kt)=\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} \qquad (3.29)$$

....

$$g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikt} \qquad (3.30)$$

$$c_k=\begin{cases}\dfrac{a_k-ib_k}{2}, k>0\\[2ex] \dfrac{a_0}{2}, k=0\\[2ex] \dfrac{a_k+ib_k}{2}, k<0\end{cases} \qquad (3.31)$$

Комплексный ряд Фурье

Пусть, как и прежде

$\omega = 2\pi f$ - круговая частота, а f -циклическая

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} \qquad (3.32)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \qquad (3.33)$$

$$g(\omega) = g(2\pi f) = \tilde{g}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikf} \qquad (3.34)$$

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(f) e^{-2\pi ikf} df \qquad (3.35)$$

Комплексный ряд Фурье

Следует обратить внимание, что выражение (3.32) для комплексного ряда Фурье:

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega}$$

согласуется с использовавшемся ранее выражением для передаточной функции нерекурсивного фильтра:

$$H(\omega) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{-ik\omega} = \sum_{k=-K}^{K} c_{-k} e^{ik\omega}$$

Фазовая форма ряда Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(kt + \varphi_k), \qquad (3.36)$$

Для четных функций $\varphi_k = 0$ или π

Для нечетных функций $\varphi_k = \pm \frac{\pi}{2}$

Некоторые свойства ряда Фурье

Пусть

$$g_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{и} \quad g_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$$

Тогда:

$$Ag_1(t) + Bg_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(Ac_k + Bd_k \right) e^{ikt} \tag{3.37}$$

$$g_1(t) g_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_{k-n} \right] e^{ikt} \tag{3.38}$$

$$\tilde{g}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} g_1(s) g_2(t-s) ds = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ikt} \tag{3.39}$$

Преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (3.40)$$

или

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad (3.41)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (3.42)$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \qquad (3.43)$$

Свойства преобразования Фурье

$g(t)$ - вещественная функция $\Rightarrow G(\omega)$ - сопряженно -симметричная относительно $\omega = 0$

$g(t)$ - четная $\Rightarrow G(\omega)$ - вещественная и четная

$g(t)$ - нечетная $\Rightarrow G(\omega)$ - чисто мнимая, нечетная

Модуль спектральной функции $G(\omega)$ называют амплитудным спектром $g(t)$.

Аргумент спектральной функции $G(\omega)$ называют фазовым спектром $g(t)$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = ag_1(t) + bg_2(t) \Rightarrow G(\omega) = aG_1(\omega) + bG_2(\omega)$$

$$g(t) = f(t-\tau) \Rightarrow G(\omega) = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

$$g(t) = f(at) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow G(\omega) = i\omega F(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = \int f(t)dt \Rightarrow G(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega}, \text{ если } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \Rightarrow G(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$g(t) = f_1(t) f_2(t) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\varphi) F_2(\omega - \varphi) d\varphi$$

$$g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-i\varphi_0} F(\omega + \omega_0)$$

Цифровая обработка сигналов

Лекция №4

Санкт-Петербург

2021

Дискретные сигналы

Дискретный сигнал:

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{N-1} \quad , \qquad (4.1)$$

как правило, получается при дискретизации аналогового (определенного во все моменты времени) сигнала $s(t)$.

Будем считать, что отсчеты x_k, $k = 0,1,\ldots,N-1$ дискретного сигнала получены в результате равномерной дискретизации сигнала $s(t)$ с шагом дискретизации, равным единице:

$$x_k = s(t_k),\ k = 0,1,\ldots,N-1;\ t_k - t_{k-1} = T,\ k = 1,2,\ldots,N-1;\ T = 1$$

Если на самом деле $t_k - t_{k-1} = \Delta t,\ k = 1,2,\ldots,N-1;$ и $\Delta t \neq 1$

то вводим в рассмотрение $\tilde{t}_k = \dfrac{(t_k - t_0)}{\Delta t}, k = 0,1,\ldots,N-1$

В результате получим: $\tilde{t}_k = k;\ s(\tilde{t}_k) = s(k\Delta t),\ k = 0,1,\ldots,N-1$

Спектр дискретного сигнала

Представим дискретный сигнал в виде функции от времени:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t-k). \qquad (4.2)$$

Тогда, пользуясь свойствами преобразования Фурье, спектр дискретного сигнала можно представить в виде периодической функции с периодом, равным 2π:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k}, \qquad (4.3)$$

Спектр дискретного сигнала

С другой стороны, представим дискретный сигнал в виде:

$$s_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-kT) \qquad (4.4)$$

Вынесем $s(t)$ за знак суммы:

$$s_d(t) = s(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \qquad (4.5)$$

Сумма в (4.5) может быть представлена комплексным рядом Фурье:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$$

где:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad ; \quad c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)e^{-i\omega_k t}dt = \frac{1}{T}$$

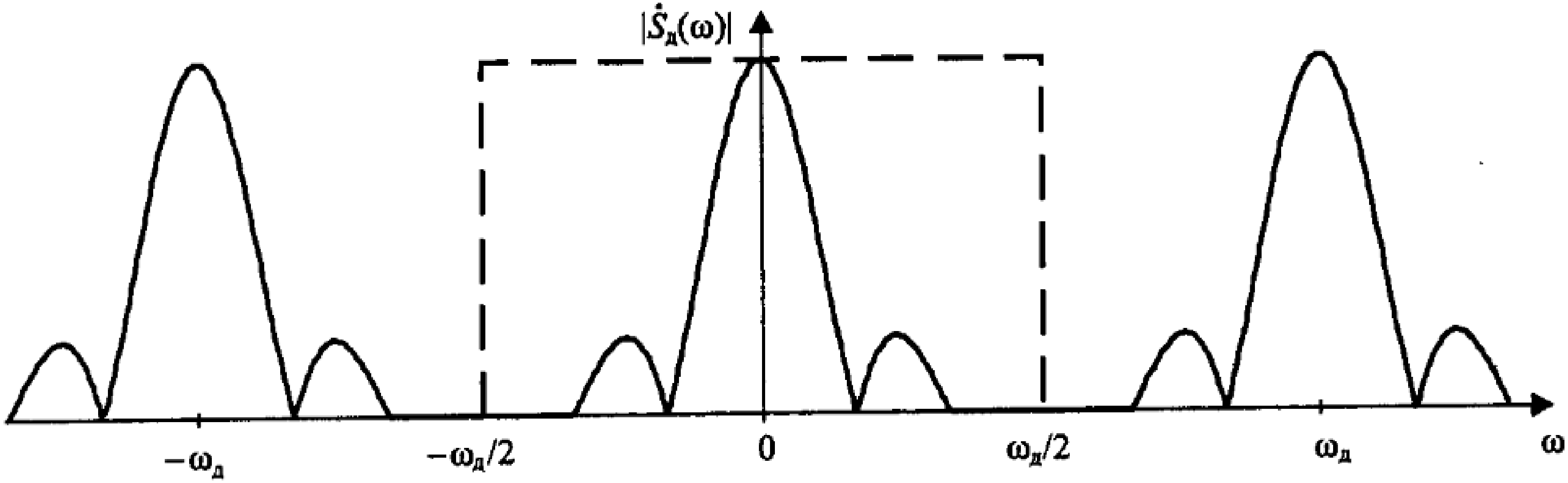
Спектр дискретного сигнала

Таким образом дискретный сигнал может быть записан в виде:

$$s_d(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t)e^{i\omega_k t} \quad , \qquad (4.6)$$

а его спектр:

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \qquad (4.7)$$



Расстояние между копиями равно $2\pi / T$

Теорема Котельникова

Теорема. Сигнал $s(t)$, не содержащий гармоник с частотами, превышающими некоторого значения $\widehat{\omega} = 2\pi \widehat{f}$, может быть представлен без потери информации своими дискретными отсчетами $s(kT)$, взятыми с интервалом T, удовлетворяющим условию:

$$T \le \frac{1}{2\widehat{f}} = \frac{\pi}{\widehat{\omega}} \tag{4.8}$$

Восстановление исходного сигнала осуществляется по формуле:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)}{\left(\pi \frac{t-kT}{T}\right)} \tag{4.9}$$

Теорема Котельникова

Формула (4.9) представляет собой разложение $s(t)$ в ряд по системе функций

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)}{\left(\pi \dfrac{t-kT}{T}\right)}, \qquad (4,10)$$

называемой базисом Котельникова.

Теорема Котельникова

$$x:(0,0,4,3,2,1,0,0,0)$$

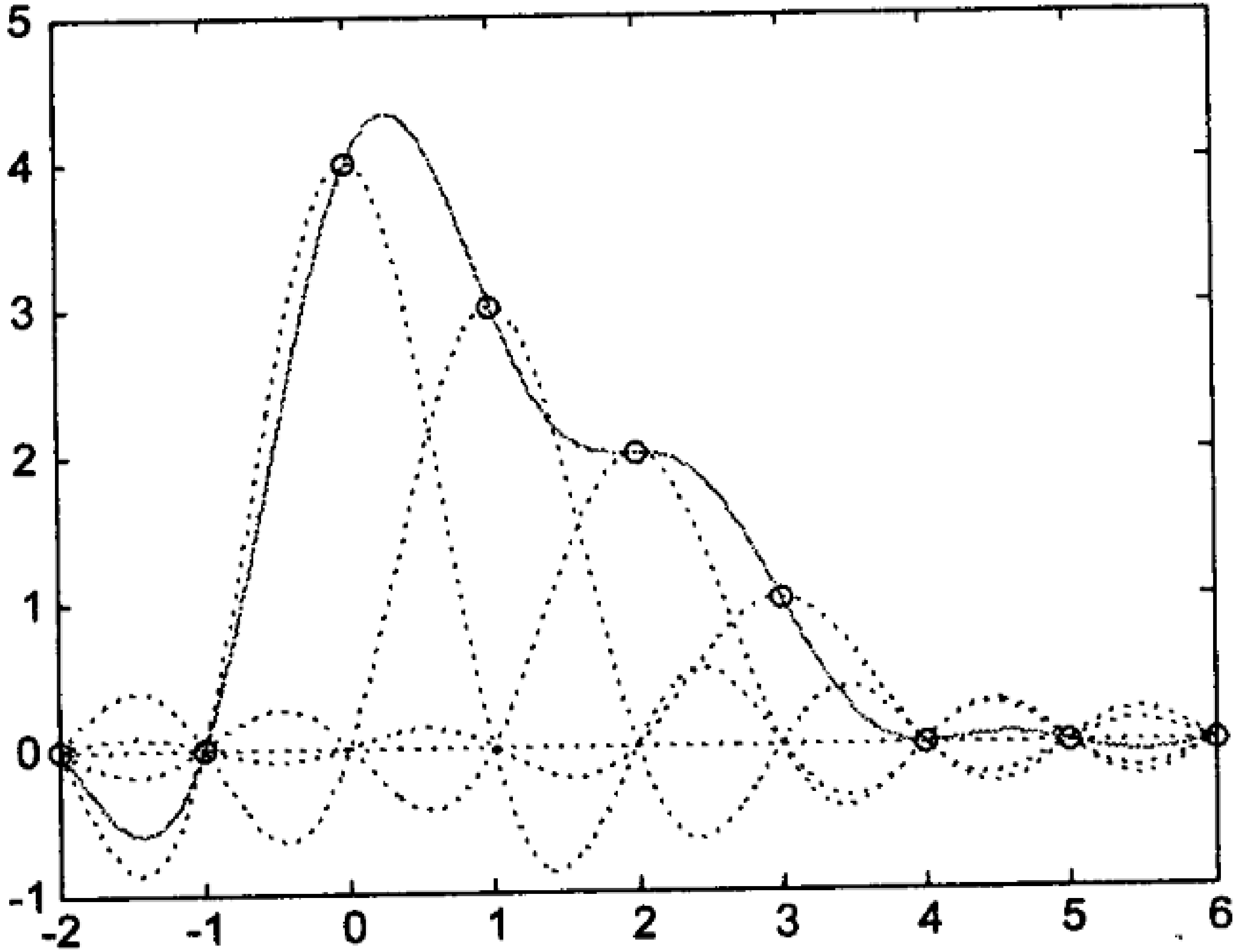


Рис. Восстановление сигнала по его дискретным отсчетам

Теорема Котельникова

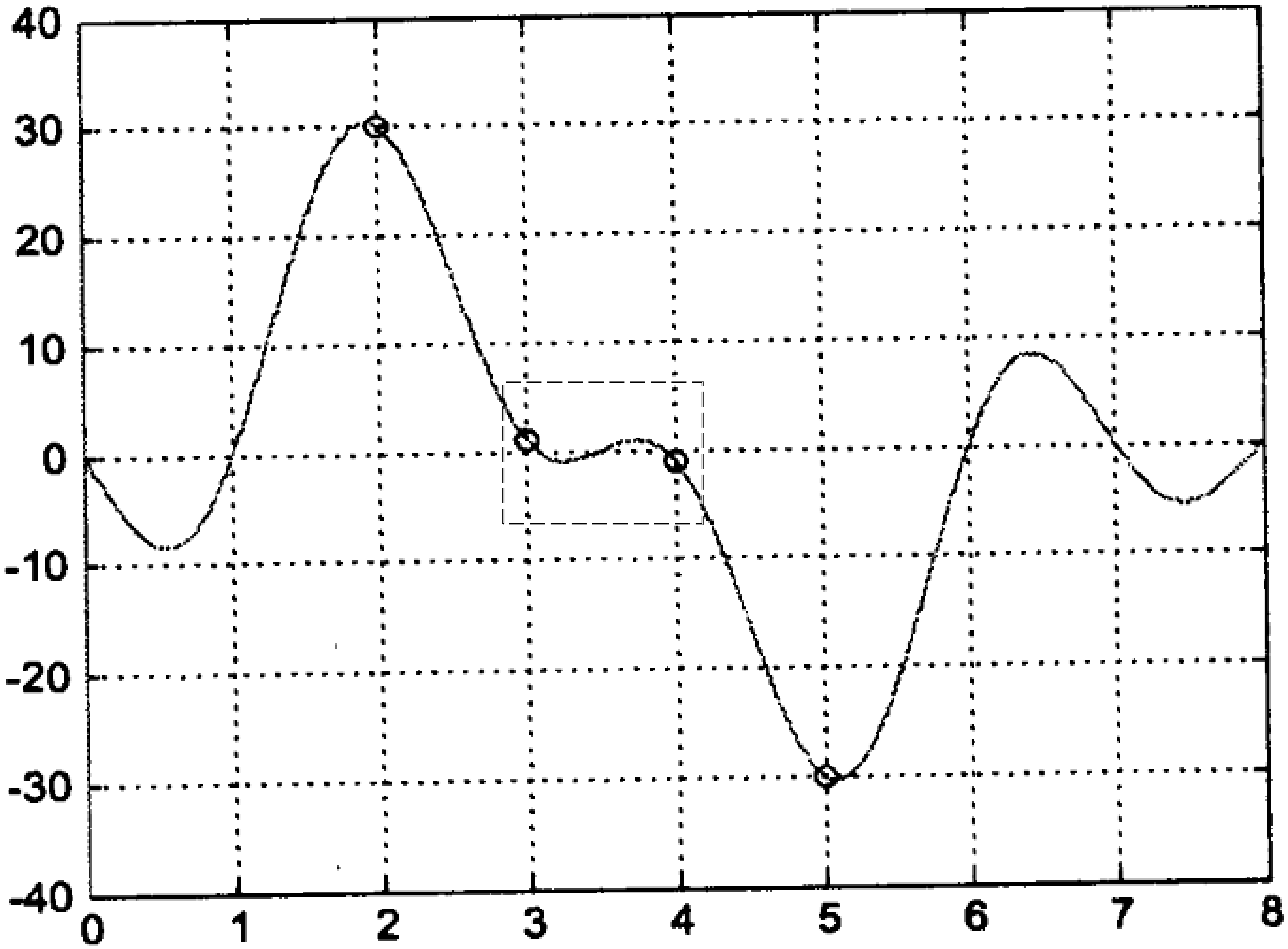


Рис. Сигнал с ограниченным спектром, содержащий фрагмент с колебанием высокой частоты

Дискретное преобразование Фурье

Пусть последовательность отсчетов $\{x_k\}$ является периодической с периодом N :

$$x_{k+N} = x_k \quad \forall k \quad .$$

Рассмотрим фрагмент последовательности из N отсчетов.

Например, $\{x_k : k = 0,1,2,...,N-1\}$. Тогда дискретная функция

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(t - kT) \qquad (4.11)$$

тоже будет периодической, с периодом NT . Здесь T - период дискретизации

Спектр $s(t)$ также должен периодическим (с периодом $\frac{2\pi}{T}$) и дискретным с расстоянием между гармониками $\frac{2\pi}{NT}$.

Один период спектра содержит N гармоник.

Дискретное преобразование Фурье

Поскольку $s(t)$ периодическая функция, ее можно разложить в ряд Фурье, коэффициенты которого вычисляются по формуле:

$$X(n) = \frac{1}{NT}\int_0^{NT} s(t)e^{-i\omega_n t}dt\ ,$$

или после преобразований:

$$X(n) = \frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi nk}{N}} \qquad (4.12)$$

Дискретное преобразование Фурье

После удаления в (4.12) множителя перед суммой, получим:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi n}{N}k}, n = 0,1,2,\dots, N-1 \qquad (4.13)$$

Выражение (4.13) называют дискретным преобразованием Фурье (ДПФ).

Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) запишется в виде:

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{i\frac{2\pi k}{N}n}, k = 0,1,2,\dots, N-1 \qquad (4.14)$$

Свойства ДПФ

Свойства ДПФ в целом аналогичны свойствам непрерывного преобразования Фурье:

Пусть $\{x(k)\}$, $\{y(k)\}$ дискретные последовательности с периодом N и

ДПФ $\{x(k)\} = \{X(n)\}$, а ДПФ $\{y(k)\} = \{Y(n)\}$

1. Линейность:

$$\text{ДПФ}\left[\alpha\{x(k)\} + \beta\{y(k)\}\right] = \alpha\{X(n)\} + \beta\{Y(n)\}$$

2. Задержка:

$$\{z(k)\} = \{x(k-1)\} \Rightarrow \{Z(n)\} = \left\{X(n)\exp\left(-i\frac{2\pi n}{N}\right)\right\}$$

Здесь $z(0) = x(-1) = x(N-1)$

3. Симметрия: $X(N-n) = X(-n) = X^*(n)$

Имеет место для вещественного сигнала.

Свойства ДПФ

4. ДПФ произведения:

$$z(k) = x(k) \cdot y(k), k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

$$Z(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y(n-k), n = 0, 1, 2, ..., N-1 \quad (4.15)$$

Свертка в выражении (4.15) является круговой сверткой и отличается от линейной свертки тем, что в круговой свертке используется периодичность $\{Y(k)\}$ в случае, когда значение k выходит за пределы диапазона 0…N-1.

Другими словами, в этом случае используется равенство:

$$Y(k) = Y(k \pm N)$$

Свойства ДПФ

5. Матрица ДПФ: $X = A_{ДПФ}x$

$$A_{ДПФ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}} & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{6\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{4\pi}{N}} & e^{-i\frac{8\pi}{N}} & e^{-i\frac{12\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ 1 & e^{-i\frac{6\pi}{N}} & e^{-i\frac{12\pi}{N}} & e^{-i\frac{18\pi}{N}} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & e^{-i\frac{2\pi}{N}3(N-1)} & \dots & e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Свойства ДПФ

6. Спектр дискретного сигнала определяется формулой (4.3).

$$S(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega k}$$

Из сравнения этой формулы с формулой ДПФ

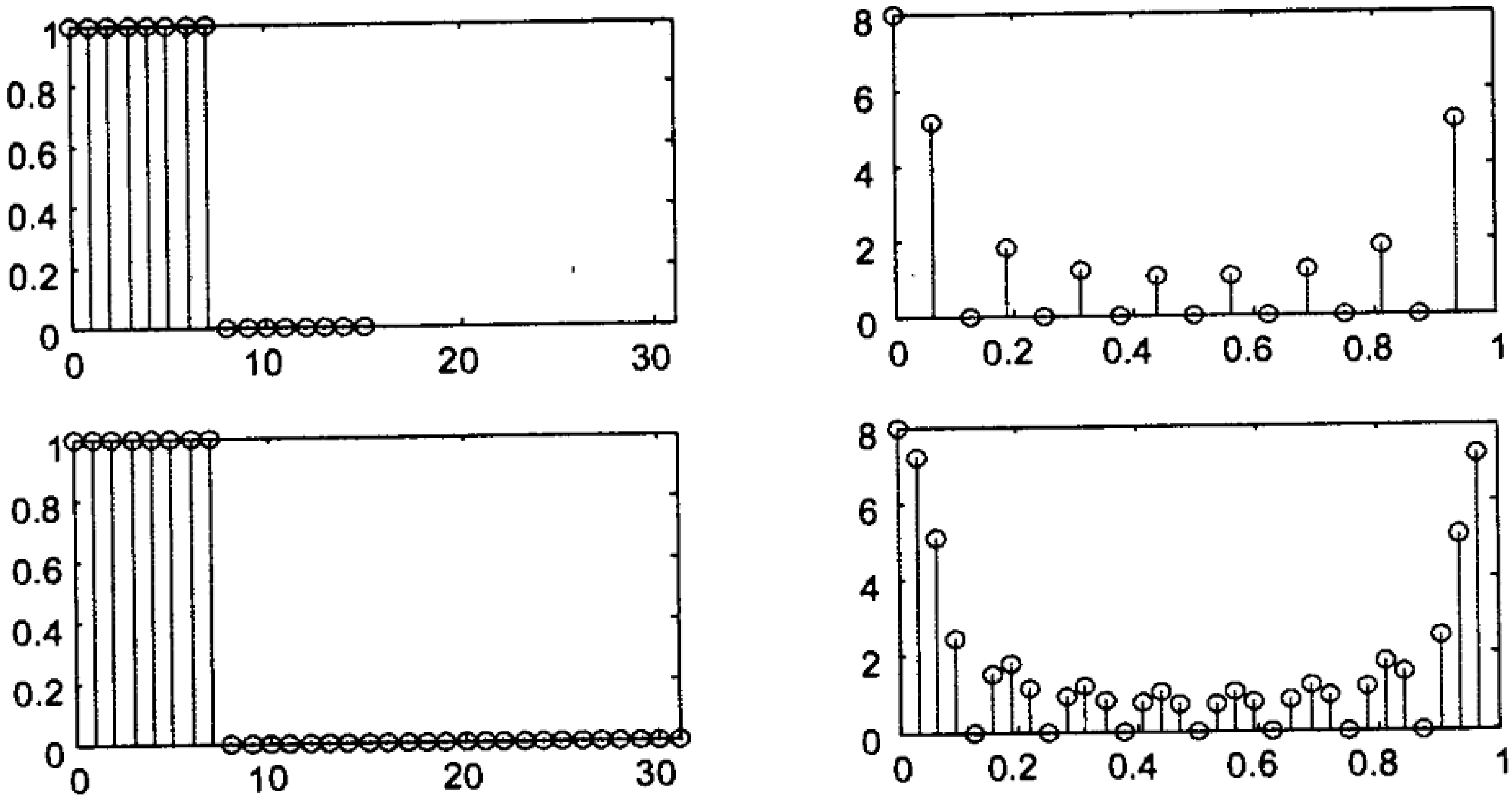
$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\frac{2\pi n}{N}k}, n=0,1,2,\dots,N-1$$

следует, что ДПФ вычисляет дискретные отсчеты спектра дискретного сигнала:

$$X(n)=S\left(\frac{2\pi n}{N}\right)=S\left(\omega_d\frac{n}{N}\right),\ T=1 \qquad (4.16)$$

Свойства ДПФ

7. Из формулы (4.16) следует, что, дополняя $\{x_k\}$ нулями (что не меняет спектра) можно увеличить «спектральную разрешающую» способность ДПФ



Быстрое преобразование Фурье

Прореживание по времени. Пусть N – четное число.

$$X(n)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}x_{2k}e^{-i\frac{2\pi n}{N}2k}+\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}x_{2k+1}e^{-i\frac{2\pi n}{N}(2k+1)}$$

Обозначим $\{y(k)\}=\{x(2k)\}$ и $\{z(k)\}=\{x(2k+1)\}$

$$X(n)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}y_k e^{-i\frac{2\pi n}{(N/2)}k}+e^{-i\frac{2\pi n}{N}}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}z_k e^{-i\frac{2\pi n}{(N/2)}k}$$

В результате:

$$X(n)=Y(n)+e^{-i\frac{2\pi n}{N}}Z(n) \qquad (4.17)$$

Быстрое преобразование Фурье

Последовательности $\{y(k)\}$ и $\{z(k)\}$ размерности $N/2$, поэтому формулу (4.17) можно использовать только при $0 \le n < N/2$. При $(N/2) \le n < N$ следует воспользоваться периодичностью ДПФ:

$$Y\left(n+\frac{N}{2}\right)=Y(n);\ Z\left(n+\frac{N}{2}\right)=Z(n)$$

В результате при $(N/2) \le n < N$ формула (4.17) примет вид:

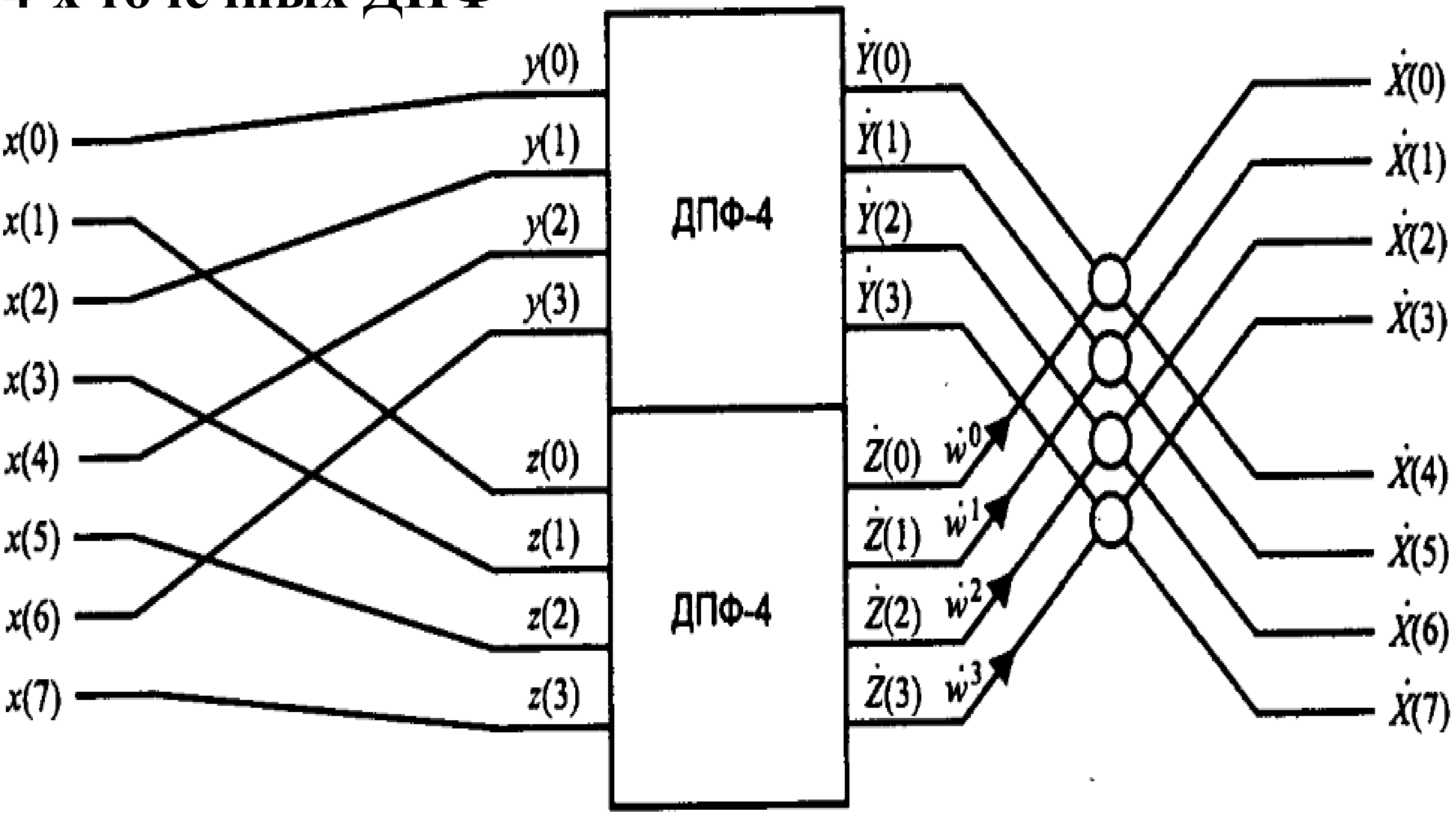
$$X(n)=Y\left(n-\frac{N}{2}\right)-e^{-i\frac{2\pi}{N}\left(n-\frac{N}{2}\right)}Z\left(n-\frac{N}{2}\right) \qquad (4.18)$$

В результате получаем $N(N+1)/2$ вместо N^2 вычислительных операций.

При $N=2^k$ можно ограничиться $N\log_2 N$ операциями.

Быстрое преобразование Фурье

Вычисление 8-точечного ДПФ с помощью 2-х 4-х точечных ДПФ

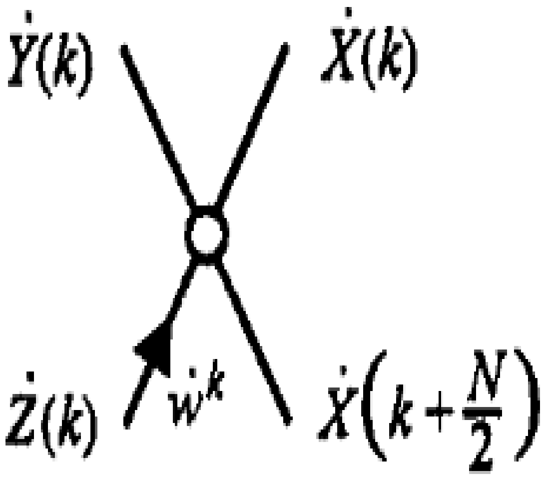


Быстрое преобразование Фурье

«Бабочка»
условное изображение

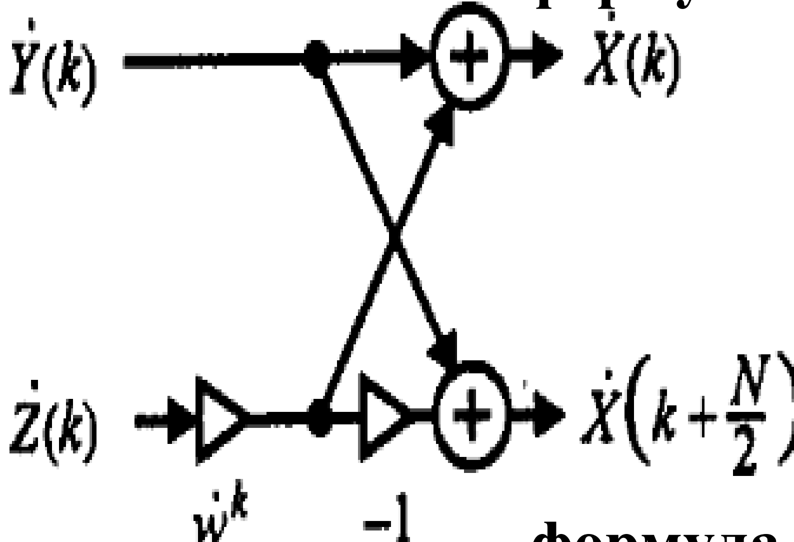
«Бабочка»
структурная схема

формула (4.17)



формула (4.18)

формула (4.17)



формула (4.18)

Разработаны также схемы БДПФ с прореживанием по частоте .

Линейная и круговая свертки

Имеем две последовательности $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$

Линейная свертка:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(k-m)$$

Круговая свертка:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2\left((k-m) \bmod N\right)$$

Линейная и круговая свертки

$x_1 : (1,2,4,8); \quad x_2 : (2,3,4,5)$

Линейная свертка:

$$y_0 = 1 \cdot 2 = 2;$$
$$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7;$$
$$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18;$$
$$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41;$$
$$y_4 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50;$$
$$y_5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52;$$
$$y_6 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Результат:

(2,7,18,41,50,52,40)

Круговая свертка:

$$y_0 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 52;$$
$$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 59;$$
$$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 58;$$
$$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41.$$

Результат:

(52,59,58,41)

Линейная и круговая свертки

$$x_1: (1,2,4,8); \quad x_2: (2,3,4,5)$$

В матричной форме

Линейная свертка

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 18 \\ 41 \\ 50 \\ 52 \\ 40 \end{pmatrix};$$

Круговая свертка

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 59 \\ 58 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Круговая свертка (добавлением нулей)

$x_1 : (1,2,4,8,0,0,0);\quad x_2 : (2,3,4,5,0,0,0)$

Круговая свертка:

$$y_0 = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$y_1 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7;$$

$$y_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 18;$$

$$y_3 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 41;$$

$$y_4 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 = 50;$$

$$y_5 = 4 \cdot 5 + 8 \cdot 4 = 52;$$

$$y_6 = 8 \cdot 5 = 40.$$

Результат:

(2,7,18,41,50,52,40)

Круговая свертка (с добавлением нулей)

$x_1: (1,2,4,8,0,0,0);\quad x_2: (2,3,4,5,0,0,0)$

Круговая свертка в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 18 \\ 41 \\ 50 \\ 52 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Цифровая обработка сигналов

Лекция №5

Санкт-Петербург

2021

Z-преобразование

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что T – шаг дискретизации равен единице.

Для анализа дискретной последовательности $\{x_k\}$ часто удобно использовать Z-преобразование, когда этой последовательности ставится в соответствие функция комплексной переменной z:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \tag{5.1}$$

Эта функция определена лишь для тех значений z, при которых ряд (5.1) сходится.

Z-преобразование примеры вычисления

Единичная импульсная функция

$$x_0(k)=\begin{cases}1, k=0\\ 0, k\neq 0\end{cases};\quad X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_0(k)z^{-k}=z^0=1 \qquad (5.2)$$

Сходится на всей комплексной плоскости.

Единичный скачок

$$x_k=\begin{cases}1, k\geq 0\\ 0, k<0\end{cases};\ X(z)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (5.3)$$

Ряд (5.3) есть геометрическая прогрессия. Ее знаменатель z^{-1}. Сходится при $|z|>1$

Z-преобразование свойства

Линейность:

$$\left\{ax_k^{(1)} + bx_k^{(1)}\right\} \Rightarrow aX^{(1)}(z) + bX^{(2)}(z)$$

Задержка:

$$y_k = x_{k-m} \Rightarrow Y(z) = X(z)z^{-m}$$

z^{-m} - оператор задержки на m тактов.

Умножение на *k*

$$y_k = kx_k \rightarrow Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Свертка:

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(1)} x_{k-n}^{(2)} \Rightarrow Y(z) = X^{(1)}(z)X^{(2)}(z)$$

Обратное Z-преобразование

Обратное Z-преобразование определяется формулой:

$$x_k = \frac{1}{i2\pi}\oint X(z) z^{k-1} dz \quad , \qquad (5.4)$$

где контурный интеграл берется по любому замкнутому контуру в области сходимости $X(z)$ и охватывающему все его полюсы.

Обратное Z-преобразование

На практике обратное преобразование часто вычисляется посредством разложения $X(z)$ на сумму простых дробей. Например,

$$X(z) = \frac{1}{0.5z^{-2} - 1.5z^{-1} + 1} = \frac{2}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

Здесь первое слагаемое соответствует Z-преобразованию единичного скачка, умноженному на 2, а второе - Z-преобразованию дискретной показательной функции 2^{-k} В результате получим:

$$x_k = \begin{cases} 2 - 2^{-k}, k \geq 0 \\ 0 \qquad\quad , k < 0 \end{cases}$$

Z-преобразование

Таблица некоторых преобразований

$\{x_k\}$	$X(z)$
$x_k = \begin{cases} a^k, k \geq 0 \\ 0\ , k < 0 \end{cases}$	$X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}\ , \lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$x_k = k$	$X(z) = \dfrac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$
$x_k = ka^k$	$X(z) = \dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$
$x_k = e^{i\omega kT}$	$X(z) = \dfrac{1}{1-e^{i\omega kT}z^{-1}}$
$x_k = \sin(\omega kT)$	$X(z) = \dfrac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$
$x_k = \cos(\omega kT)$	$X(z) = \dfrac{\left(1-\cos(\omega T)\right)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$

Дискретные фильтры (общие положения)

Дискретный фильтр представляет собой ту или иную систему обработки дискретного сигнала, обладающую свойствами:

- линейности – выходная реакция системы на линейную комбинацию входных сигналов равна такой же линейной комбинации ее реакций на каждый из этих сигналов отдельности;
- стационарности – задержка входного сигнала приводит к такой же задержке выходного сигнала без изменения его формы.

Дискретный фильтр должен обладать «памятью» т.е каждый отсчет $y(k)$ выходного сигнала определяется в результате обработки нескольких (более одного) отсчетов входного сигнала $x(k)$.

Дискретные фильтры (общие положения)

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что T – шаг дискретизации равен единице.

Обозначим выходной сигнал через $\{y_k\}$.

Дискретный фильтр может быть задан в виде:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \ldots - a_m y_{k-m} \quad (5.5)$$

Здесь если все $a_k = 0$ получим нерекурсивный фильтр. В противном случае – рекурсивный.

Ограничений на соотношение чисел m и n нет.

Дискретный фильтр (5.5.) может быть представлен также разностным уравнением:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} \quad (5.6)$$

Дискретные фильтры (общие положения)

$\{h_k\}$ - **импульсная характеристика фильтра** – выходная реакция фильтра на единичный импульс.

Так, если положить все $x_k = 0$ кроме $x_0 = 1$, то получим, что импульсная характеристика нерекурсивного фильтра

$$h_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} = c_k \qquad (5.7)$$

определяется коэффициентами фильтра c_k. Для физически реализуемой системы $h_k = 0 \ \forall k < 0$ - система может оперировать лишь с уже имеющимися отсчетами сигнала.

Таким образом, для произвольного сигнала выходной сигнал есть линейная комбинация импульсных характеристик фильтра.

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} \qquad (5.8)$$

Дискретные фильтры (общие положения)

Функция передачи

Поскольку уравнение дискретной фильтрации (5.8) представляет собой линейную свертку, согласно свойствам Z-преобразования:

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.9}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.10}$$

$H(z)$ - функция передачи (передаточная функция).

Применив Z-преобразование к разностному уравнению (5.6), получим:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}} \tag{5.11}$$

Дискретные фильтры (общие положения)

Частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)

$$H(e^{i\omega T}) = H(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-i\omega kT} \qquad (5.12)$$

Как следует из (5.12), частотная характеристика, дискретного фильтра (дискретной системы) является периодической функцией частоты с периодом $2\pi / T$.

Дискретные фильтры (общие положения)

Нули и полюсы

Разложим на множители числитель и знаменатель функции передачи в форме (5.11):

$$H(z) = k\frac{(1-z_1 z^{-1})(1-z_2 z^{-1})\ldots(1-z_n z^{-1})}{(1-p_1 z^{-1})(1-p_2 z^{-1})\ldots(1-p_m z^{-1})} \qquad (5.13)$$

Здесь: $k = b_0$ - коэффициент усиления; z_i - нули передаточной функции; p_i - полюсы передаточной функции.

Нули и полюсы могут быть, как вещественными, так и комплексно-сопряженными парами. Коэффициент усиления – всегда вещественный.

Дискретные фильтры (общие положения)

Устойчивость дискретных систем

Система является устойчивой, если при отсутствии входного сигнала $\left(x_k = 0\ \forall k\right)$ свободные колебания системы являются затухающими при любых начальных условиях:

$$x_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k = 0 \qquad (5.14)$$

Можно показать, что в этом случае полюсы передаточной функции должны удовлетворять условиям $\left|p_i\right| < 1\ \forall \mathrm{i}$.

Таким образом,

чтобы дискретная система была устойчива, полюсы ее функции передачи должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.

Весовые функции

Пусть функция $f(t)$ представлена рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{5.15}$$

Произведем усечение ряда (5.15) до $2K+1$ слагаемых:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{ikt} \tag{5.16}$$

Такое усечение равносильно почленному умножению элементов последовательности $\{c_k\}$ на элементы последовательности $\{d_k\}$, элементы которой определяются по правилу:

$$d_k = \begin{cases} 1, |k| \le K \\ 0, |k| > K \end{cases} \tag{5.17}$$

Весовые функции

Если рассматривать элементы последовательности (5.17), как коэффициенты ряда Фурье некоторой функции $g(t)$, то ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид:

$$g(t) = \sum_{k=-K}^{K} d_k e^{ikt} = e^{-iKt} + e^{-i(K-1)t} + \ldots + 1 + \ldots + e^{i(K-1)t} + e^{iKt} \quad (5.18)$$

Согласно свойствам ряда Фурье, усеченный ряд (5.16) представляет собой разложение в ряд Фурье свертки функций $f(t)$ и $g(t)$.

Весовые функции

Разложение (5.18) является геометрической прогрессией. Найдя ее сумму, получим:

$$g(t) = \frac{\sin\left[\left(K + \frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, |t| < \pi \qquad (5.19)$$

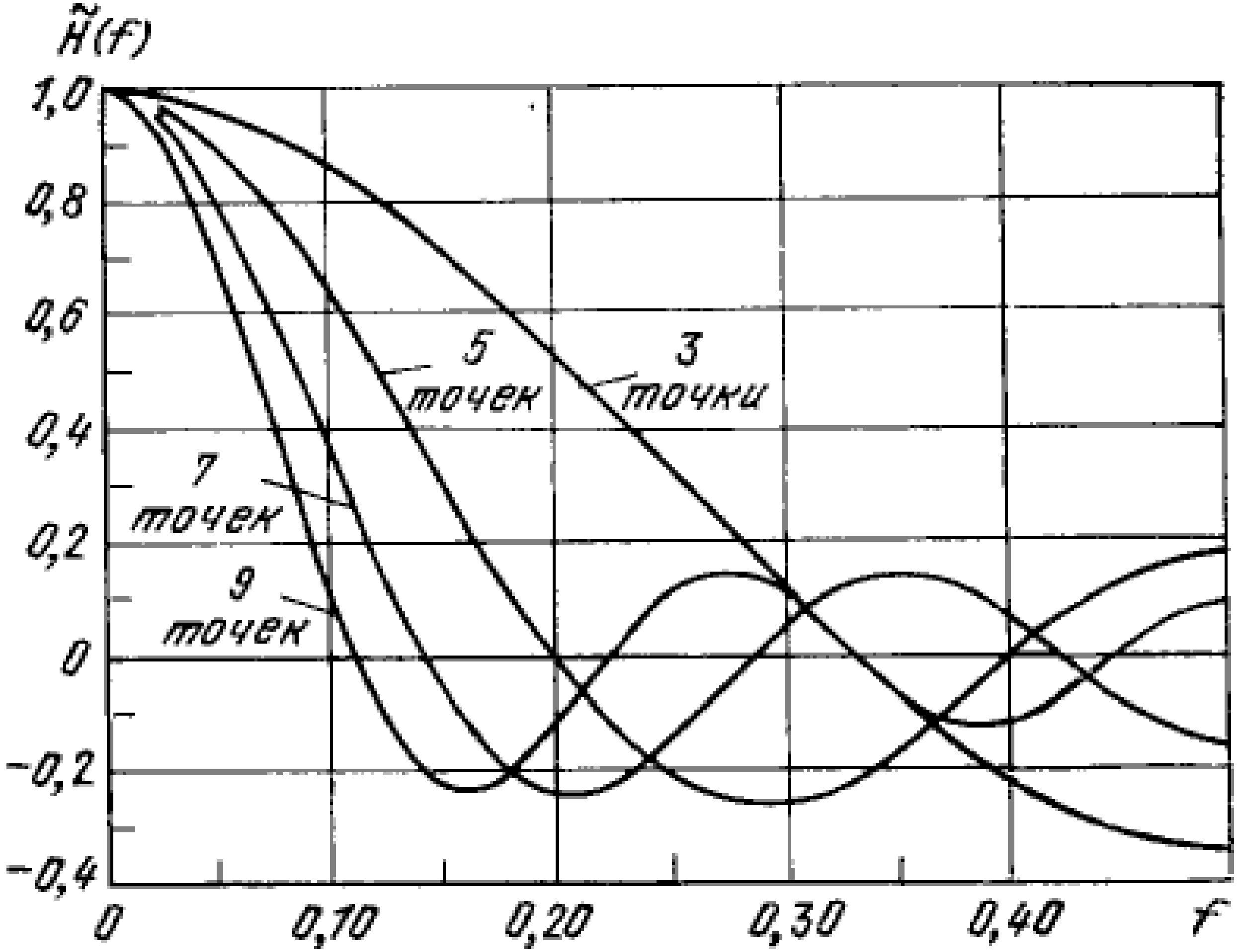
Полезно сравнить этот результат с формулой (2.11).

Функция $g(t)$ испытывает колебания с уменьшающейся амплитудой и с тем большей частотой, чем больше значение K - так называемые боковые лепестки.

Именно это порождает явление Гибса при свертывании дискретного сигнала с прямоугольным окном.

Весовые функции

Для наглядности повторим графики, приведенные в лекции №2 для $2K+1$ равному 3.5.7.и 9.



Весовые функции

Можно модифицировать окно представив функцию $g(t)$ в виде:

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-iKt} + e^{-i(K-1)t} + \ldots + 1 + \ldots e^{i(K-1)t} + \frac{1}{2}e^{iKt} \qquad (5.20)$$

или после преобразований:

$$g(t) = \frac{\sin[Kt]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{t}{2}\right), |t| < \pi \qquad (5.21)$$

при свертывании с таким модифицированным окном явление Гиббса (колебательный процесс пульсации вблизи границы окна) будет проявляться в некоторой меньшей степени, поскольку $\cos(t/2)$ будет плавно стремиться к нулю. Наблюдается уменьшение боковых лепестков.

Весовые функции

По существу модифицированное окно получается в результате умножения последовательности $\{d_k\}$, определяемой (5.17) на весовую функцию – весовые множители $\{v_k\}$, которые определяются по правилу:

$$v_k = \begin{cases} 1, |k| \le K-1 \\ 0, |k| > K \end{cases}, v_{-(K-1)} = v_{K+1} = \frac{1}{2}$$

В результате вместо последовательности $\{d_k\}$ получается последовательность $\{v_k d_k\}$.

Другой пример уже упоминавшихся весовых множителей – сигма-факторы Ланцоша (лекция №3, формула 3.26). Обоснованный выбор весовой функции позволяет скорректировать негативные свойства прямоугольного окна.

Весовые функции

Рассмотрим весовые множители вида:

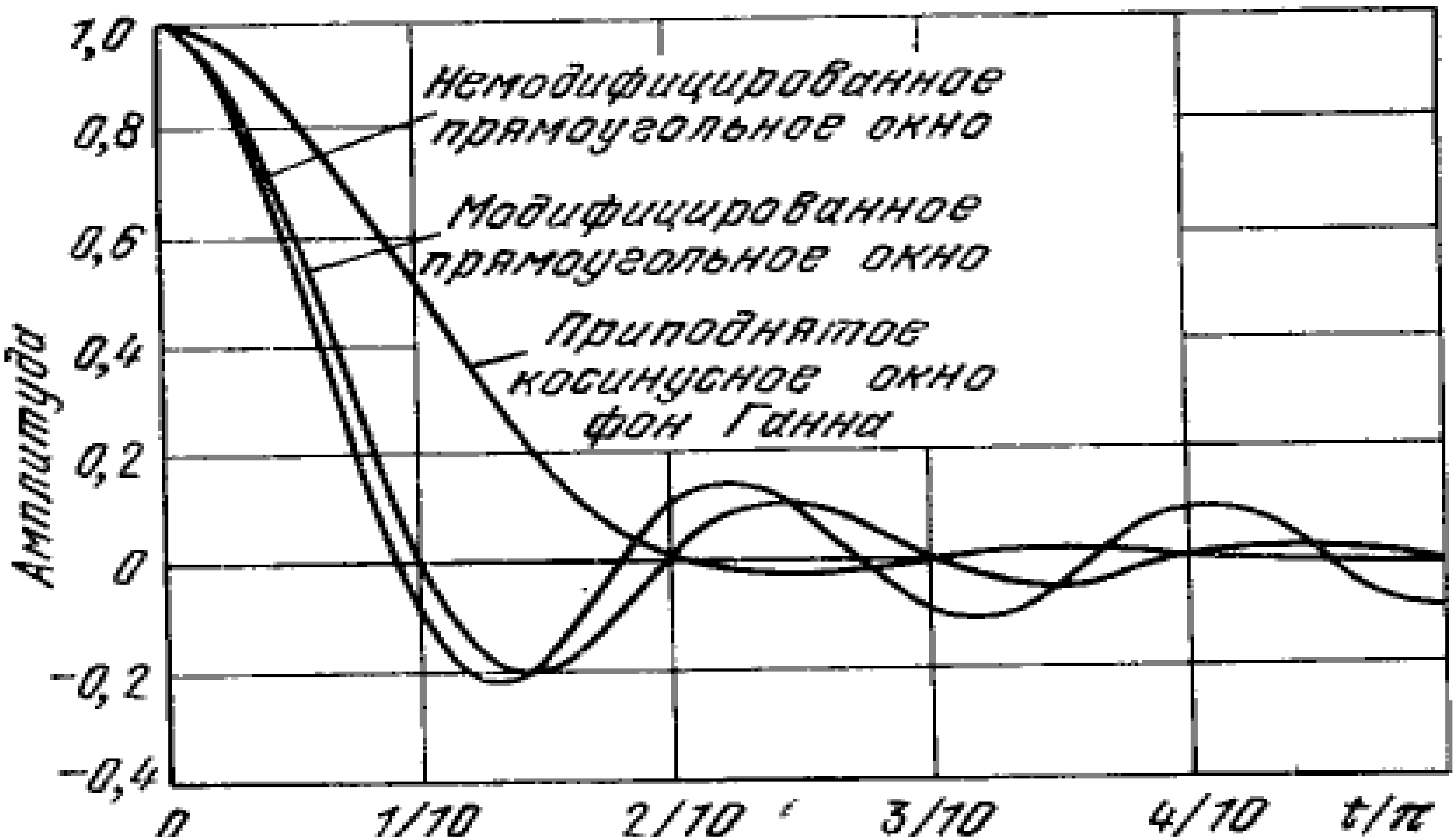
$$v_k = \begin{cases} \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{k\pi}{K}\right)}{2}, & |k| \le K \\ 0, & |k| > K \end{cases} \qquad (5.22)$$

Если рассматривать эту последовательность, как значения дифференцируемой функции, то при k=K равна нулю, и сама функция, и ее первая производная.

Весовая функция (5.22) определяет так называемое окно Ганна или приподнятое косинусное окно Ганна.

Весовые функции

Графики частотных характеристик функций окон с пятью членами (11 элементов в фильтре).



Весовые функции

Как видно из приведенных графиков, первый ноль на графике для прямоугольного окна находится ближе к началу координат, чем для модифицированного окна и окна Ганна. Для окна Ганна – напротив, дальше от начала координат, чем у других двух окон. При этом для окна Ганна подавление боковых лепестков наиболее существенное.

Весовые функции

Еще одно окно **- Окно Хемминга -** представляет собой взвешенную сумму весовых функций окна Ганна и модифицированного окна:

$$v_k = 2a\cos\frac{\pi k}{K} + b;\ 2a + b = 1 \qquad (5.23)$$

Основным аргументом такого подхода является то, что боковые лепестки модифицированного окна и окна Ганна имеют противоположные знаки.

Коэффициенты взвешенной суммы (5.23) могут быть определены из условия минимизации максимумов боковых лепестков.

Цифровая обработка сигналов

Лекция №6

Санкт-Петербург

2021

Классификация фильтров по целевому назначению

Фильтры нижних частот (ФНЧ или loss-pass filter). Пропускают частоты, меньшие ω_0 - частоты среза;

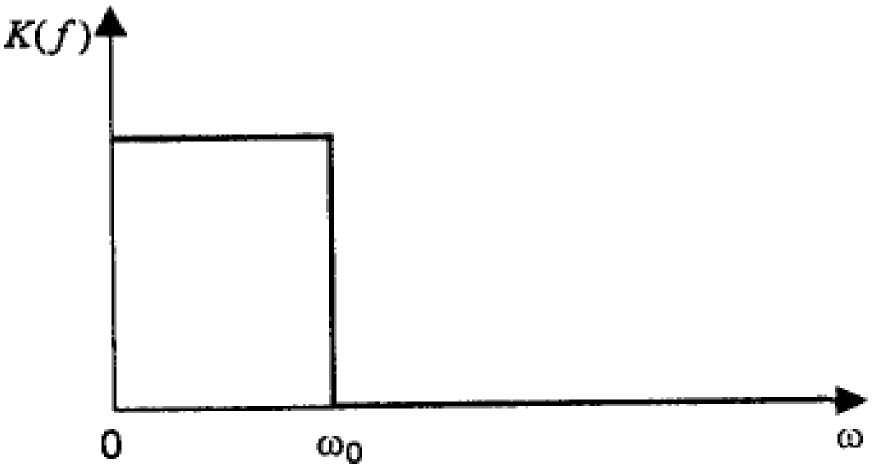
Фильтры высоких частот (ФВЧ или **high-pass filter**). Пропускают частоты, большие ω_0 - частоты среза;

Полосовые фильтры (ПФ или **band-pass filter**). Пропускают частоты в некотором диапазоне $\omega_1 \ldots \omega_2$. Характеризуются также средней частотой ω_0 и шириной полосы пропускания;

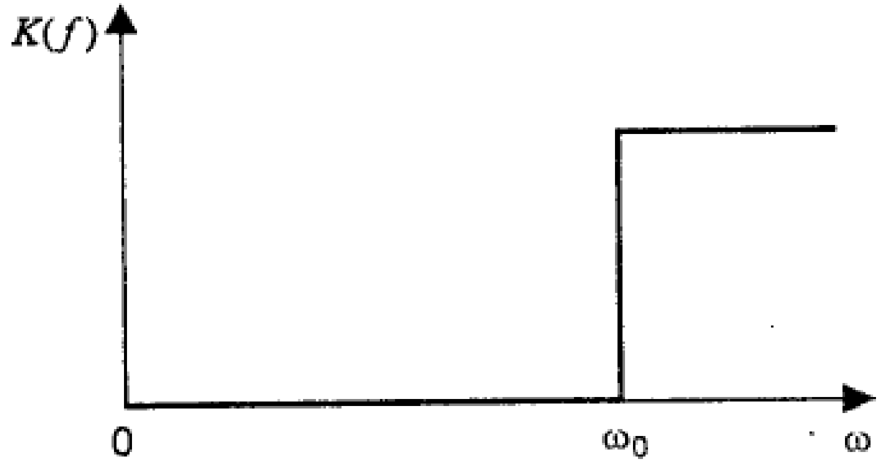
Режекторные фильтры (фильтр-пробка, заграждающий фильтр, полосно-задерживающий фильтр или **band-stop filter**), пропускающий все частоты, кроме попадающих в некоторый диапазон $\omega_1 \ldots \omega_2$. Также характеризуется средней частотой ω_0 и шириной полосы задерживания.

Классификация фильтров по результату действия

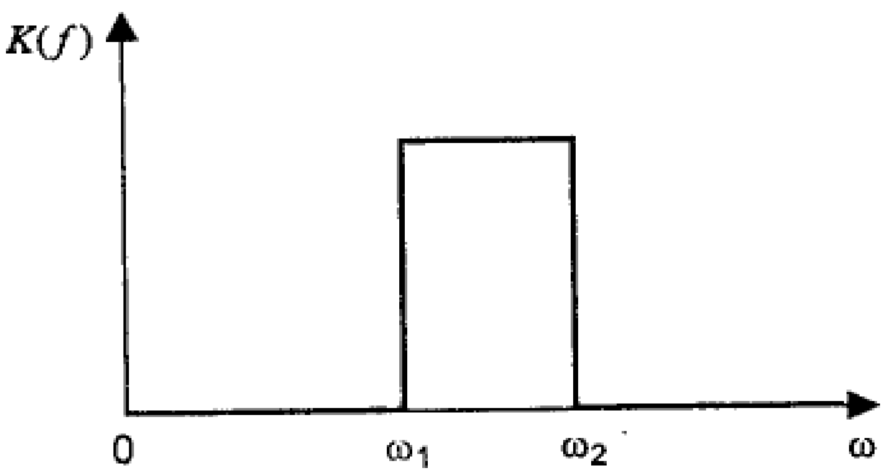
Идеальная форма ФЧХ названных фильтров



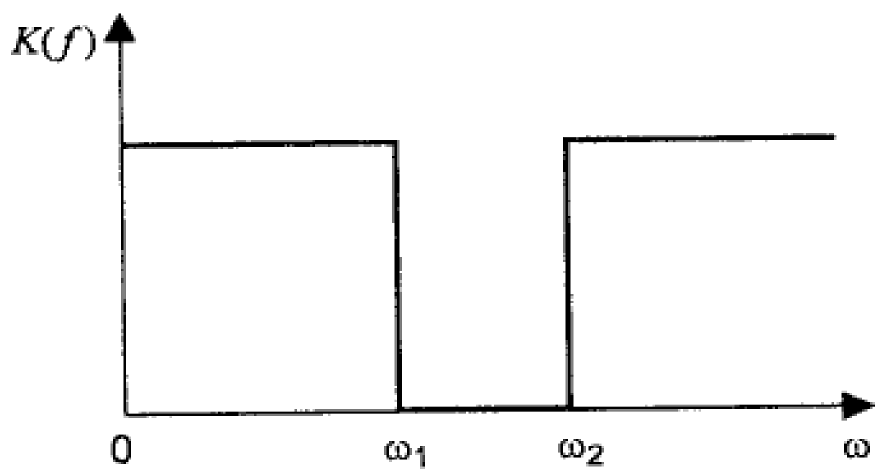
ФНЧ



ФВЧ



Полосовой фильтр



Режекторный фильтр

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Синтез дискретных фильтров заключается в выборе таких коэффициентов фильтра, при которых его характеристики удовлетворяют заданным требованиям.

Можно привести, в частности, следующие классификации методов синтеза дискретных фильтров.

По типу синтезируемого фильтра:

- синтез нерекурсивных фильтров;
- синтез рекурсивных фильтров.

По наличию аналогового прототипа:

- методы с использованием аналогового прототипа;
- методы без использования аналогового прототипа или прямые методы.

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу:

- метод билинейного *Z*-преобразования;
- метод инвариантной импульсной характеристики.

Прямые методы синтеза фильтров:

- **оптимальные методы**. Заключаются в поиске минимума заданного критерия качества численными итерационными методами;
- **субоптимальные методы**. Не обеспечивают оптимального значения критерия качества, но упрощают вычислительные процессы по сравнению с оптимальными методами. При этом, как правило, используется та или иная специфика конкретной задачи

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Оптимальные методы

Как правило, задается желаемая частотная характеристика метода – $H^*(\omega)$ или АЧХ - D(ω).

В качестве критерия используется *p*-норма *e* – ошибки, т.е. разности желаемой характеристики и соответствующей характеристики синтезируемого фильтра:

$$\left\|e\right\|_p = \int_0^{\omega_Д} w(\omega)\left|H^*(\omega) - H(\omega)\right|^p d\omega \Rightarrow \min \qquad (6.1)$$

$H(\omega)$ - частотная характеристика синтезируемого фильтра, $w(\omega)$ - весовая функция, p=2 или ∞.

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Оптимальные методы

При p=2 (решение в смысле МНК) задача (6.1) сводится к системе линейных уравнений. При единичной весовой функции коэффициенты фильтра будут равны коэффициентам разложения $H^*(\omega)$ в ряд Фурье, что приводит к возникновению эффекта Гиббса. Для снижения влияния этого эффекта применяются специальные приемы.

В общем случае оптимизация осуществляется итерационными методами.

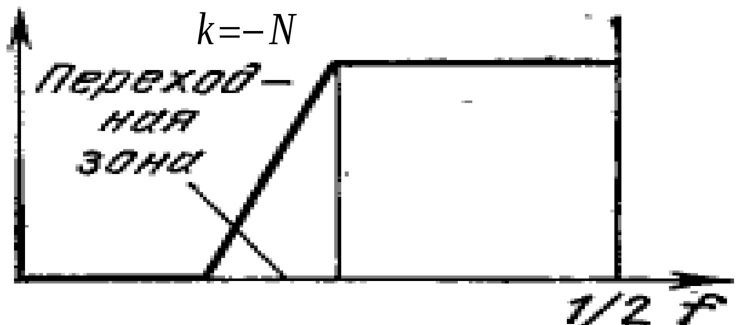
При $p=\infty$ минимизируется максимальное отклонение (минимаксная аппроксимация).

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

ФНЧ может представлен типовым сглаживающим фильтром с переходной зоной между полосами пропускания и подавления:

$$y_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k x_{n-k}, \quad (c_k = c_{-k}) \qquad (6.2)$$

Низкочастотный фильтр



Высокочастотный фильтр

При интерполировании полагаем в (6.2) $c_0 = 0$.

ФВЧ может быть получен как разность x_n - ФНЧ.

Дифференцирующий фильтр можно представить в виде аналогичном (6.2) с тем отличием, что $c_k = -c_{-k}, c_0 = 0$.

Интегрирование с помощью нерекурсивных фильтров осуществить невозможно.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Как известно, любую функцию можно представить как сумму четной и нечетной функций.

Так же и любой нерекурсивный фильтр можно представить как сумму четного (сглаживающего) и нечетного (дифференцирующего) фильтров:

$$c_k = \frac{c_k + c_{-k}}{2} + \frac{c_k - c_{-k}}{2} \qquad (6.3)$$

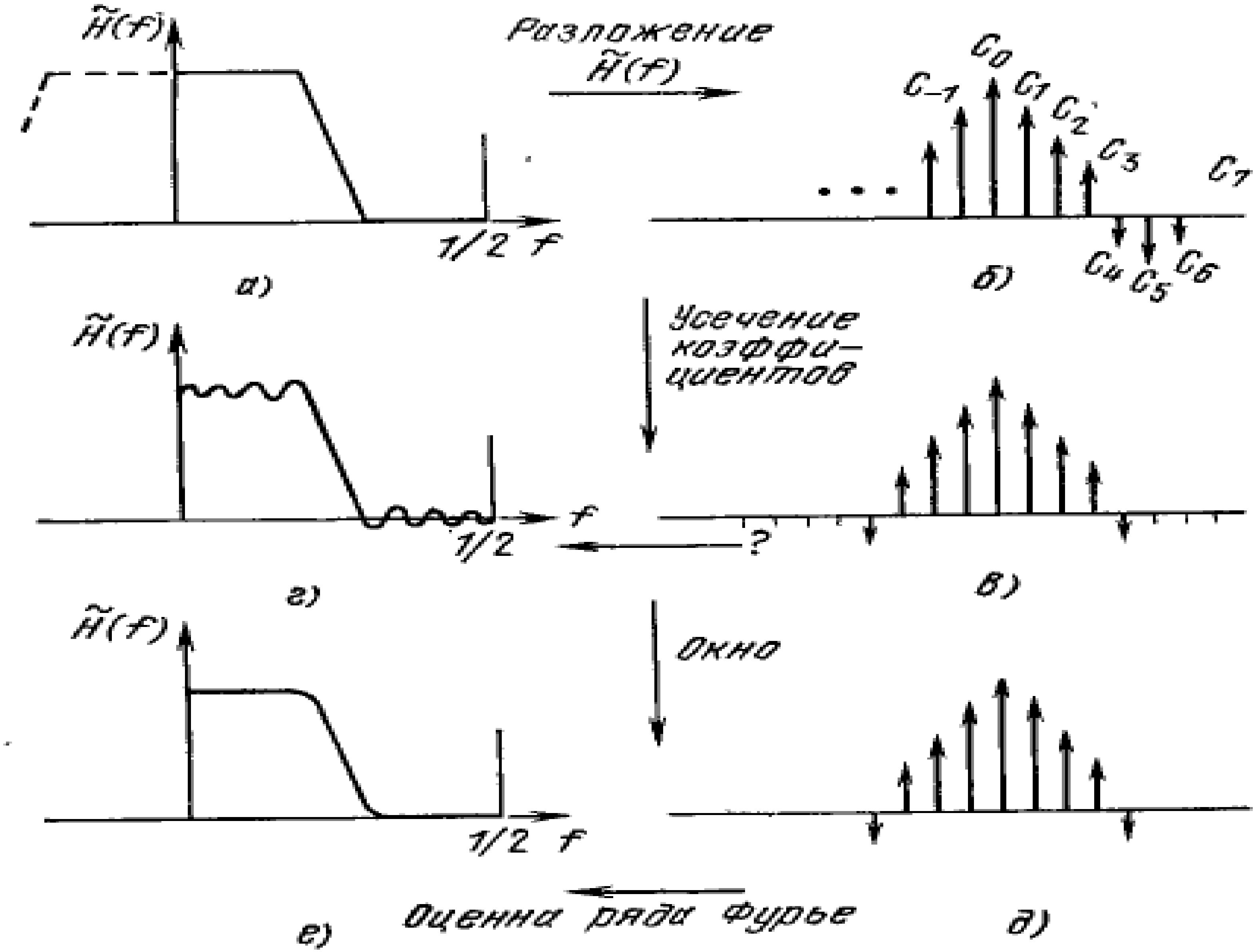
Здесь первое и второе слагаемое можно трактовать, например, как косинусные и синусные коэффициенты разложения функции в ряд Фурье.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Синтез с использованием окон (весовых функций).

1. Выбираем $\tilde{H}(f)$ - желаемую частотную функцию фильтра (симметричную).
2. Находим коэффициенты косинусного разложения $\tilde{H}(f)$ в ряд Фурье .
3. Формируем усеченный ряд Фурье для $\tilde{H}(f)$, оставляя в нем только $2N+1$ слагаемых, расположенных симметрично относительно слагаемого с нулевым номером, что порождает явление Гиббса.
4. Используя окно Ланцоша, умножаем коэффициенты усеченного ряда Фурье на сигма-факторы.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров



Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Рассмотрим конкретный пример.

Выберем идеальную передаточную функцию:

$$\tilde{H}(f)=\begin{cases}1, & 0<|f|<0.2\\ 0, & 0.2|f|<0.5\end{cases}$$

Коэффициенты ряда Фурье: $b_k = 0$,

$$a_k = 4\int_0^{0.5}\tilde{H}(f)\cos 2\pi kf df = 4\int_0^{0.2}\cos 2\pi kf df = \frac{2\sin(0.4\pi k)}{\pi k}$$

Соответствующий ряд Фурье для идеальной передаточной функции:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_1^{\infty}\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

После усечения ряда до 5-ти (N=4) слагаемых получаем:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

и явление Гиббса.

Сигма-факторы для случая N=4: $\sigma(5,k)=\dfrac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}$

В результате получаем модифицированную передаточную функцию в виде:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}\cdot\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

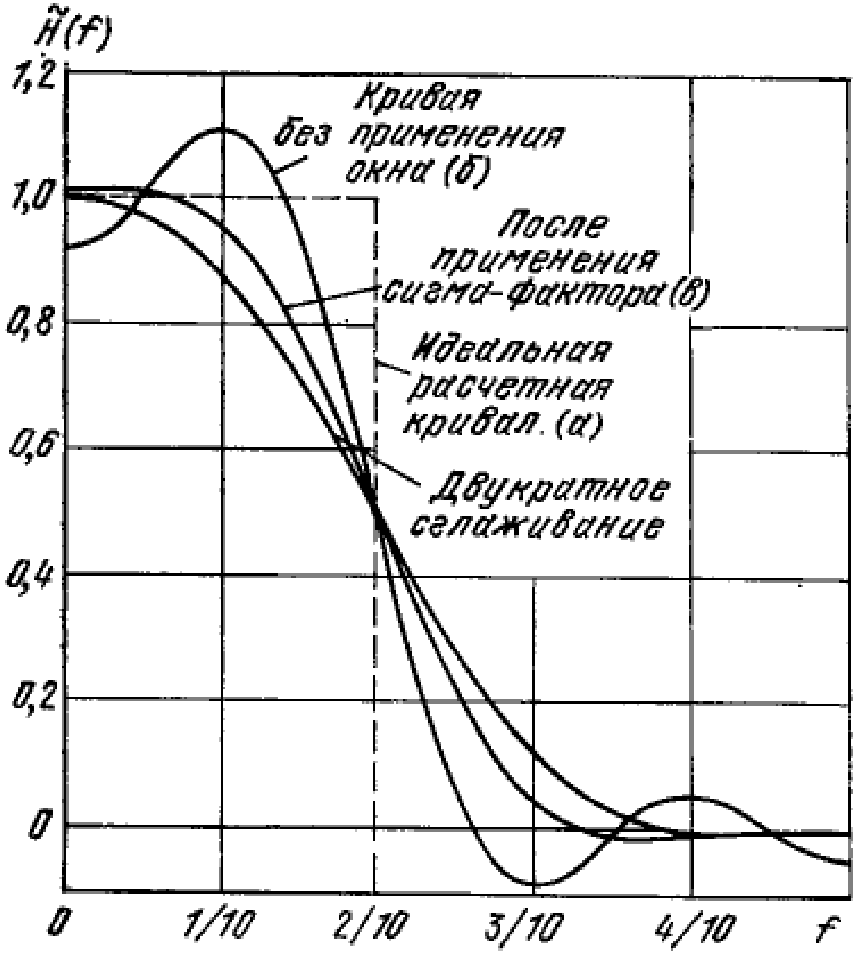
или

$$H(\omega)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}\cdot\frac{\sin 0.2k\omega}{\pi k}\cos k\omega \qquad (6.4)$$

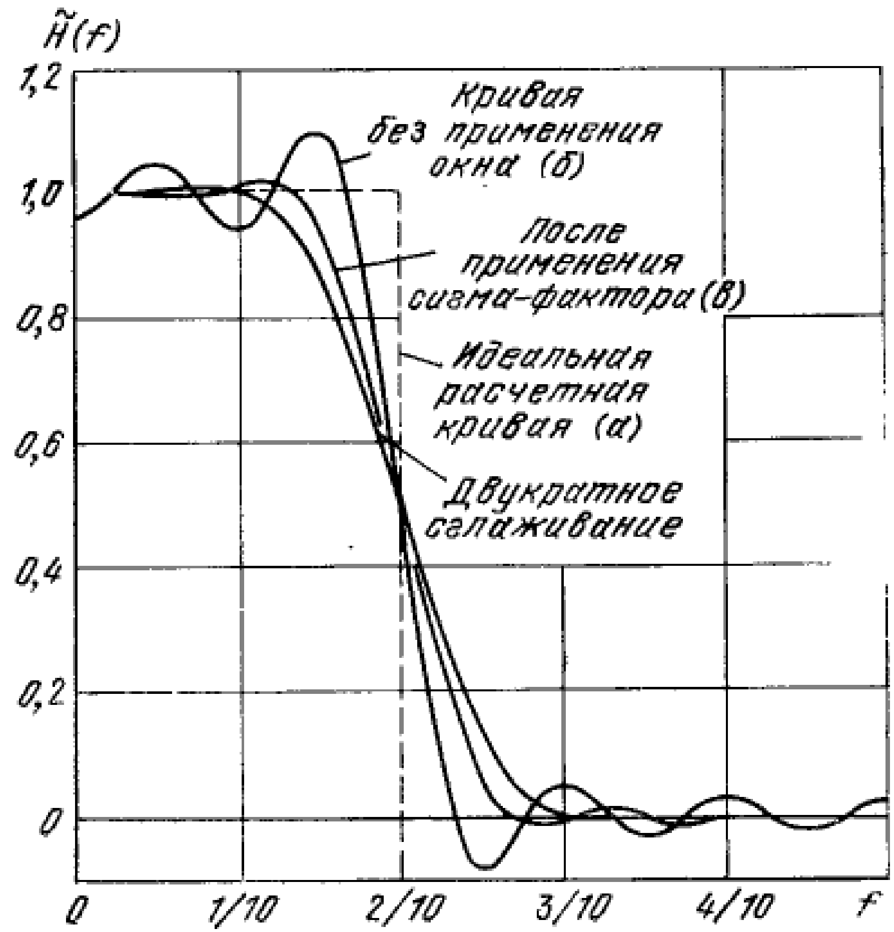
Коэффициенты (кроме c_0 -постоянного члена) дискретного симметричного фильтра (6.2) будут в два раза меньше чем в косинусном разложении.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Визуализация результата использования окна Ланцоша



N=4



N=9

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Для снижения уровня боковых лепестков могут быть использованы и другие весовые функции.

Тип окна	Уровень боковых лепестков, дБ
Прямоугольное	−21,0
Треугольное	−26,5
Бартлетта	−26,5
Ханна	−44,0
Хэмминга	−53,6
Блэкмена	−75,3
Кайзера при $\beta = 4$	−45,2
Кайзера при $\beta = 9$	−90,5
Чебышева при $\beta = 40$ дБ	−51,0
Чебышева при $\beta = 60$ дБ	−71,6
Чебышева при $\beta = 80$ дБ	−92,4

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Основной целью операции взвешивания является уменьшение уровня боковых лепестков частотной характеристики.

Вместе с тем увеличивается ширина полосы пропускания.

Поэтому выбор весовой функции должен учитывать это обстоятельство.

Еще одним важным обстоятельством при взвешивании является задача получения модифицированной частотной характеристики, которая была непрерывной вместе со своими производными (хотя бы первой) в полосе пропускания.

В последнем случае скорость убывания АЧХ частотной характеристики возрастает, что должно способствовать снижению влияния отрицательных эффектов вызываемых усечением рядов.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Фильтр с косинусоидальным сглаживанием.

Главной целью этого подхода является получение синтезируемой АЧХ не имеющей разрывов.

АЧХ фильтра представляет собой в аналоговом случае свертку АЧХ идеального прямоугольного окна с весовой функцией в виде половины периода косинуса:

$$W(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{2\alpha\omega_0}\cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2\alpha\omega_0}\right), & |\omega|\le\alpha\omega_0\\ 0 & ,|\omega|>\alpha\omega_0\end{cases}. \qquad (6.5)$$

α - параметр сглаживания. Он равен половине ширины переходной зоны, нормированной к частоте среза ω_0 .

В результате такой свертки АЧХ фильтра и ее первая производная будут непрерывны, а импульсная характеристика фильтра будет убывать пропорционально t^3 .

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Синтезируем дискретный фильтр с косинусоидальным сглаживанием. Пусть частота среза равна одной восьмой частоты дискретизации:

$$\omega_0 = \omega_Д / 8$$

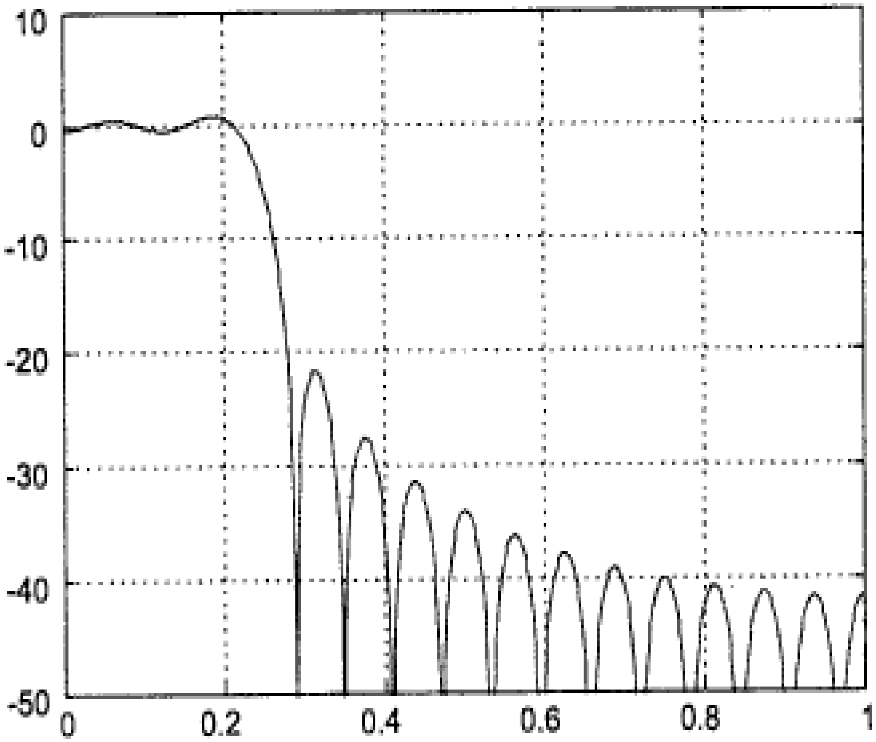
Узлы сетки:

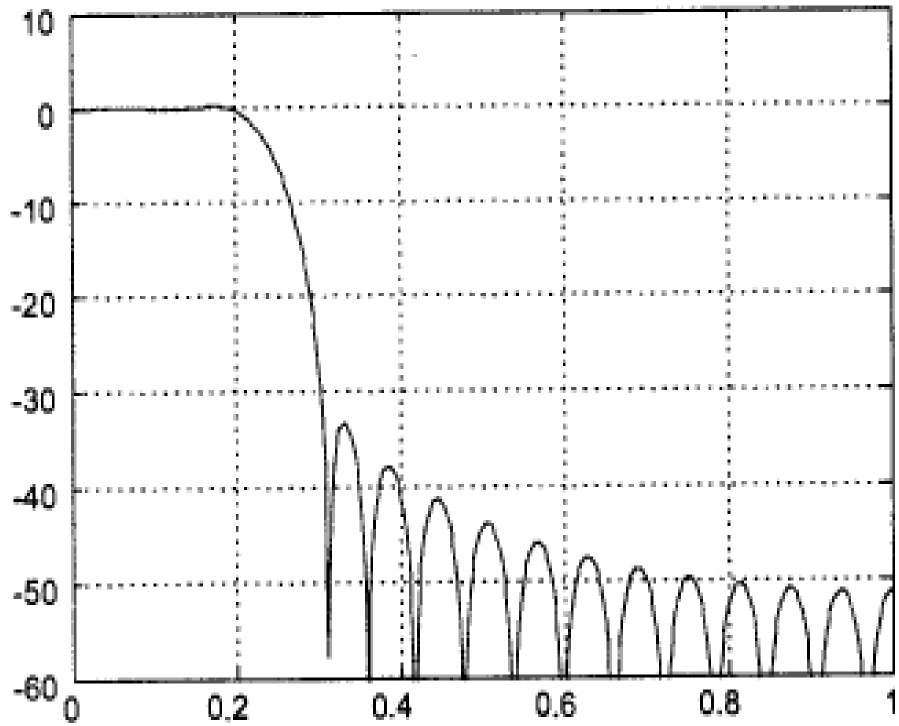
$$t_k = kT = \frac{2\pi}{\omega_Д} k = \frac{\pi k}{4\omega_0}$$

Импульсная характеристика фильтра запишется в виде:

$$h(k) = \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi k}{4}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha k}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\frac{\pi k}{4}} \qquad (6.6)$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров





АЧХ: прямоугольного окна

Дискретного фильтра с косинусоидальным сглаживанием при $\alpha = 0.25$ и k от -16 до 16.

Наблюдается ослабление боковых лепестков при очень незначительном расширении полосы пропускания.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Как известно, $\cos(n\theta)$ можно представить как полином степени *n* относительно $\cos(\theta)$. Ход рассуждений здесь следующий: $e^{in\theta} = \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right] = \left(e^{i\theta}\right)^n = \left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^n$

$\cos(n\theta)$ равен вещественной части $\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right]^n$.

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} C(n,2k)\left[\cos(\theta)\right]^{n-2k}\left[i\sin(\theta)\right]^{2k}$$

Здесь суммирование прекращается как только *n*-2*k* станет меньше нуля. $\left[\sin(\theta)\right]^{2k} = \left[\sin^2(\theta)\right]^k = \left[1-\cos^2(\theta)\right]^k$

Отсюда следует, что выражение для передаточной функции

$$\tilde{H}(f) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(2\pi k f) \qquad (6.7)$$

может быть представлено как полином по степеням $\cos(2\pi f)$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k\left[\cos(2\pi f)\right]^k$$

Сделаем замену переменной: $t=\cos(2\pi f)$

$0\le f<0.5 \Rightarrow 1\ge t=\cos(2\pi f)>-1$

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k t^k \qquad (6.8)$$

Передаточная функция теперь представлена в виде разложения по степеням $t=\cos(2\pi f)$. Переход к степеням t приводит к нелинейному растяжению и реверсированию оси частот (абсцисс).

Дальнейший ход рассуждений следующий:

1.Зададим функцию:

$$g(t)=(1+t)^p(1-t)^q\ ; \qquad (6.9)$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

2.Найдем неопределенный интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$;

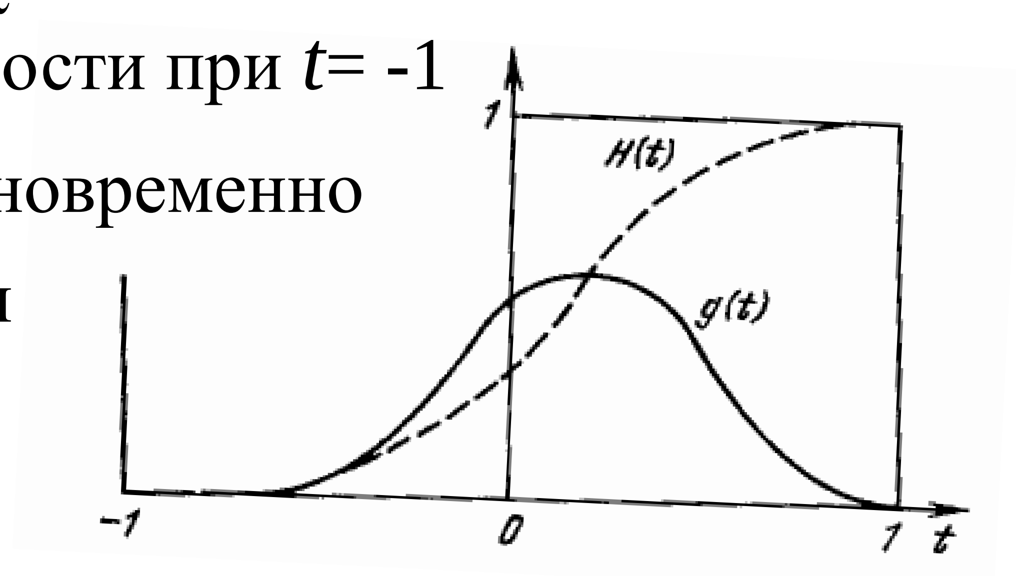
3.Константу C^* определим из условия: $G(-1) + C^* = 0$;

4.Вычислим значение $\lambda = G(1) + C^*$;

5.Определим функцию:

$$H(t) = \frac{1}{\lambda}\left(G(t) + C^*\right)$$

$H(t)$ имеет корень p+1 кратности при t= -1 и равна единице при t=1 одновременно с q производными, равными нулю.



Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

6. Функцию $H(t)$ считаем передаточной функцией синтезируемого фильтра, преобразованной в полином (6.8) по степеням t :

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k t^k$$

Производим обратную замену переменной и записываем эту функцию в виде:

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k\left[\cos(2\pi f)\right]^k \tag{6.9}$$

7. Завершая синтез фильтра, преобразовываем (6.9) к стандартному виду передаточной функции:

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} c_k \cos(2\pi k f) \tag{6.10}$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Преобразование (6.9) в (6.10) может осуществляться по следующей рекуррентной схеме.

Пусть дан степенной ряд вида: $\sum_{k=0}^{N} b_k \left[\cos\theta\right]^k$

Запишем его в цепной форме

$$b_0 + \left\{\cos\theta(b_1 + \cos\theta)(\ldots + \cos\theta\left[b_{N-2} + \cos\theta(b_{N-1} + b_N\cos\theta)\right]\right\}$$

Сначала берем последние два слагаемых $b_{N-1} + b_N\cos\theta$. Они уже представлены в форме ряда Фурье.

Умножаем эту сумму на $\cos\theta$ и прибавляем к этому произведению b_{N-2}. Результат преобразовываем к форме в виде ряда Фурье используя формулу:

$$\cos\theta\cos n\theta = 0.5\left(\cos\left[(n+1)\theta\right] + \cos\left[(n-1)\theta\right]\right)$$

Продолжая этот процесс, получим в конечном итоге эквивалентный исходному ряду ряд Фурье, коэффициенты которого c_k будут коэффициентами искомого дискретного фильтра

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Рассмотрим пример расчета гладкого фильтра.

Требуется рассчитать ФНЧ, пропускающий частоты в первой трети интервала Найквиста (от 0 до $\pi/3$) и подавляет частоты в верхней трети. $\cos(\pi/3)=0.5$ поэтому выбираем *p*=3 и *q*=1 так, чтобы (p-q)/(p+q)=0.5.

Далее действуем по рассмотренной схеме.

1. $g(t)=(1+t)^3(1-t)=1+2t-2t^3-t^4$
2. $\int g(t)dt=\int(1+2t-2t^3-t^4)dt=(t+t^2-0.5t^4-0.2t^5)+C=G(t)+C$
3. $G(-1)+C^*=0\Rightarrow C^*=0.3$
4. $\lambda=G(1)+C*=1.6$
5. $H(t)=(3+10t+10t^2-5t^4-2t^5)/16$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

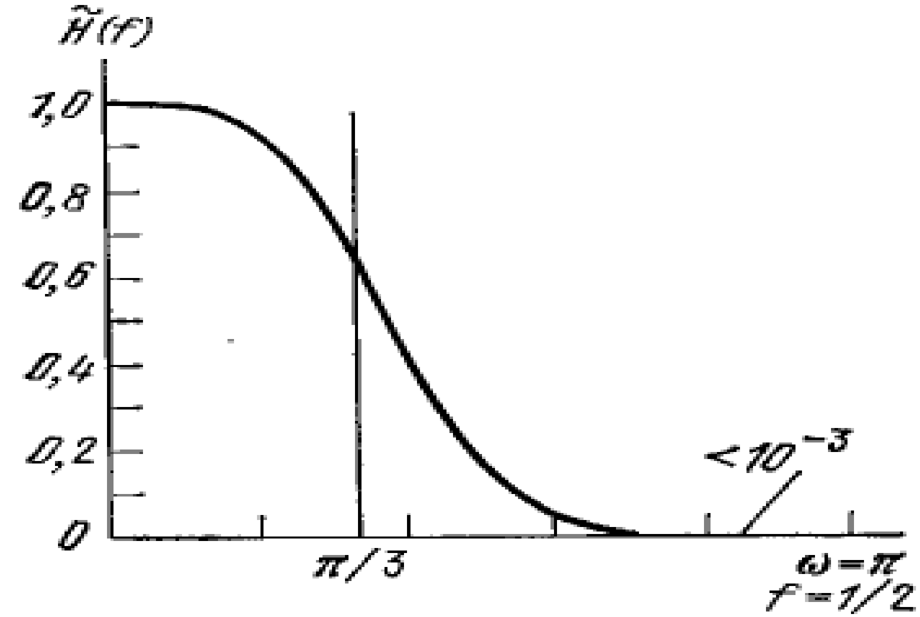
6. $$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k\left[\cos(2\pi f)\right]^k=$$

$$=\frac{3}{16}+\frac{10}{16}\cos(2\pi f)+\frac{10}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^2-\frac{5}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^4-\frac{2}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^5 \qquad (6.11)$$

7. Преобразование (6.11) к стандартному виду позволяет получить следующие коэффициенты дискретного фильтра

$$\frac{1}{16}\left[-1,-5,-5,20,70,98,70,20,-5,-5,-1\right]$$

и монотонный фильтр, график передаточной функции которого изображен на рисунке.



Цифровая обработка сигналов

Лекция №7

Санкт-Петербург

2021

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Рекурсивный фильтр может быть задан в виде:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^{M} a_k y_{n-k} \qquad (7.1)$$

где хотя бы один из коэффициентов a_k не равен нулю. **Основное отличие** рекурсивного от нерекурсивного фильтра заключается в наличии «обратной связи» (использование при вычислениях предыдущих выходных отсчетов), создающей у рекурсивного фильтра неограниченную память - способность давать отклик от одиночного импульса произвольно долго в будущем. Поэтому их называют фильтрами с «бесконечной импульсной характеристикой» (**БИХ-фильтры**). Нерекурсивные фильтры с «конечной импульсной характеристикой» имеют наименование **КИХ-фильтры**.

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Другим важным свойством рекурсивных фильтров является то, что переходная зона между областью пропускания и областью подавления частот у него может быть достаточно узкой.

Это объясняется видом передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_mz^{-m}}$$

При приближении знаменателя к нулю, дробно-рациональная функция может быстро изменяться - резко возрастать.

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Можно назвать следующие методы синтеза рекурсивных фильтров (частично упоминались в предыдущей лекции).

1. По аналоговому прототипу:

- метод билинейного *Z*-преобразования;
- метод инвариантной импульсной характеристики.

2. Прямые методы синтеза:

- оптимальные методы;
- субоптимальные методы.

В качестве субоптимальных методов можно назвать, например, методы реализованные в пакете Matlab:

- **метод**, основанный на решении системы уравнений Юла—Уолкера для поиска коэффициентов знаменателя функции передачи фильтра;

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

- **метод** идентификации частотной характеристики, в котором минимизируется норма разности между числителем функции передачи и произведением желаемой частотной характеристики и знаменателя функции передачи фильтра;

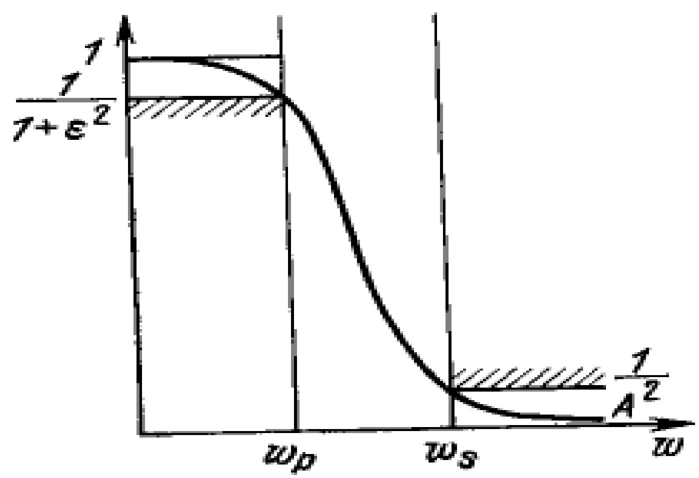
- **метод** аппроксимация заданной импульсной характеристики с помощью метода экспоненциального оценивания Прони (алгоритм был разработан Гаспаром Рише (бароном де Прони) в 1795 г. для подгонки экспоненциальной модели под экспериментальные данные при исследовании физических свойств газов);

Рекурсивные фильтры

К наиболее известным рекурсивным фильтрам могут быть отнесены

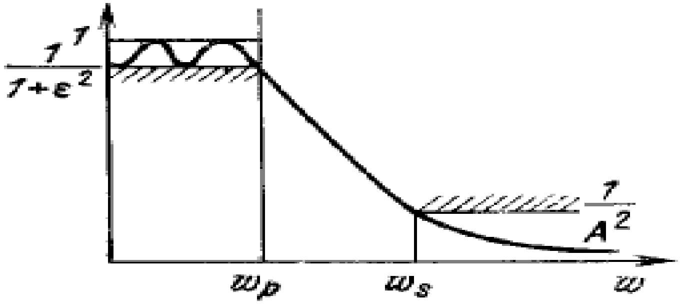
- фильтры Баттеруорта;
- фильтры Чебышева типа 1 и типа 2;
- эллиптические фильтры.

Фильтры Баттеруорта могут быть отнесены к гладким фильтрам. Частотная характеристика фильтра не имеет пульсаций, ни в полосе пропускания, ни в полосе подавления.

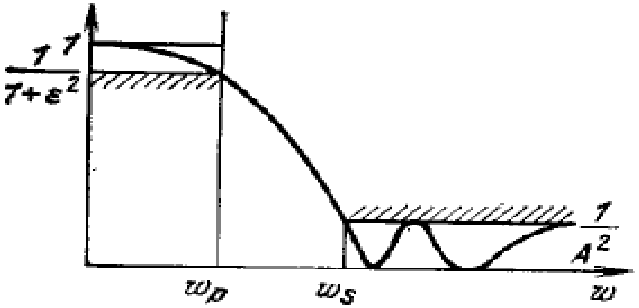


Рекурсивные фильтры

Фильтры Чебышева типа 1 допускают пульсации в полосе пропускания.



Фильтры Чебышева типа 2 допускают пульсации в полосе подавления.



Эллиптические фильтры имеют пульсации, как в полосе пропускания, так и в полосе подавления. Вместе с тем эллиптические фильтры могут иметь максимальную крутизну спада АЧХ между полосами пропускания и подавления.

Рекурсивные фильтры

Устранение фазовых сдвигов при фильтрации.

Использование фильтров Баттеруорта, как и большинства других рекурсивных фильтров, приводит в результате фильтрации к фазовому сдвигу между входным и выходным сигналом, неодинаковому, в общем случае, для разных частот. Это объясняется их несимметричностью. Если имеется возможность обрабатывать входной сигнал, как в прямом, так и в обратном порядке следования, то для устранения подобного рода фазового сдвига можно использовать следующую последовательность действий:

Сначала производится фильтрацию входного сигнала в прямом порядке следования его отсчетов.

Затем производится фильтрация полученного результата в обратном порядке следования его отсчетов.

Нужно иметь в виду, что при этом модуль передаточной функции фильтра будет возводиться в квадрат.

Рекурсивные фильтры

Переходный процесс.

Использование рекурсивных фильтров требует, кроме входных данных, задания некоторого количества начальных значений для выходных данных (начальных условий). Как правило, эти начальные значения не известны, и их часто назначают равными нулю, что приводит к переходному процессу. Чем быстрее этот процесс завершается, тем лучше (влияние начальных условий становится пренебрежимо малым).

В этой связи рекурсивные фильтры целесообразно использовать при наличии длинной записи для входного сигнала, что позволяет избавиться в какой-то момент от влияния на результат недостоверных начальных условий.

Рекурсивные фильтры

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

1. Рекурсивные фильтры сравнительно небольшого порядка (небольшой длины) могут иметь узкую переходную зону между полосой пропускания и полосой подавления. Но при этом нужно не забывать о переходном процессе, зависящем от начальных условий. Переходный процесс можно уменьшить в ряде случаев за счет специальных приемов, включая умножение на специально подобранную весовую функцию. Тем не менее фактическая ширина (время действия) этого процесса может быть найдена опытным путем в результате задания на входе единичного импульса и анализа выходного сигнала.

Рекурсивные фильтры

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

2. Если иметь в виду также фазовые сдвиги, необходимость обеспечения устойчивости фильтра, рекурсивные фильтры применяются преимущественно при очень больших входных последовательностях, а нерекурсивные – в ситуациях, когда нет проблем с машинным временем.
3. Рекурсивные фильтры также вносят значительно меньшую задержку, что делает их более предпочтительными при обработке сигналов в реальном масштабе времени. Например, в системах связи.

Рекурсивные фильтры

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

4. Рекурсивные фильтры безусловно доказывают свое преимущество лишь в обеспечении узких переходных зон.

5. Оба типа фильтров достаточно хорошо настраиваемы для различных условий и всегда можно подобрать такие особые условия, в которых каждый из них проявит себя наилучшим образом.

Эффекты квантования

Преобразование дискретных сигналов в цифровые означает переход от обработки сигналов бесконечной разрядности к обработке сигналов конечной разрядности. Эффекты, связанные с этим переходом, можно квалифицировать следующим образом:

1. Шум квантования, возникающий при аналого-цифровом преобразовании;
2. Искажение характеристик, происходящие при квантовании коэффициентов цифровых фильтров;
3. Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений;
4. Округление промежуточных результатов вычислений.

Эффекты квантования

1. Шум квантования.

Пусть гармонический сигнал $s(t)$ - гармонический сигнал, а $s_k(t)$ - результат его квантования.

В результате квантования возникает шум квантования:

$$\mu(t) = s(t) - s_k(t)$$

Значения шума квантования лежат в следующих пределах:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{\Delta}{2}$$

где Δ —разность между ближайшими возможными значениями квантованного сигнала.

Здесь предполагается равномерное квантование.

Эффекты квантования (шум квантования)

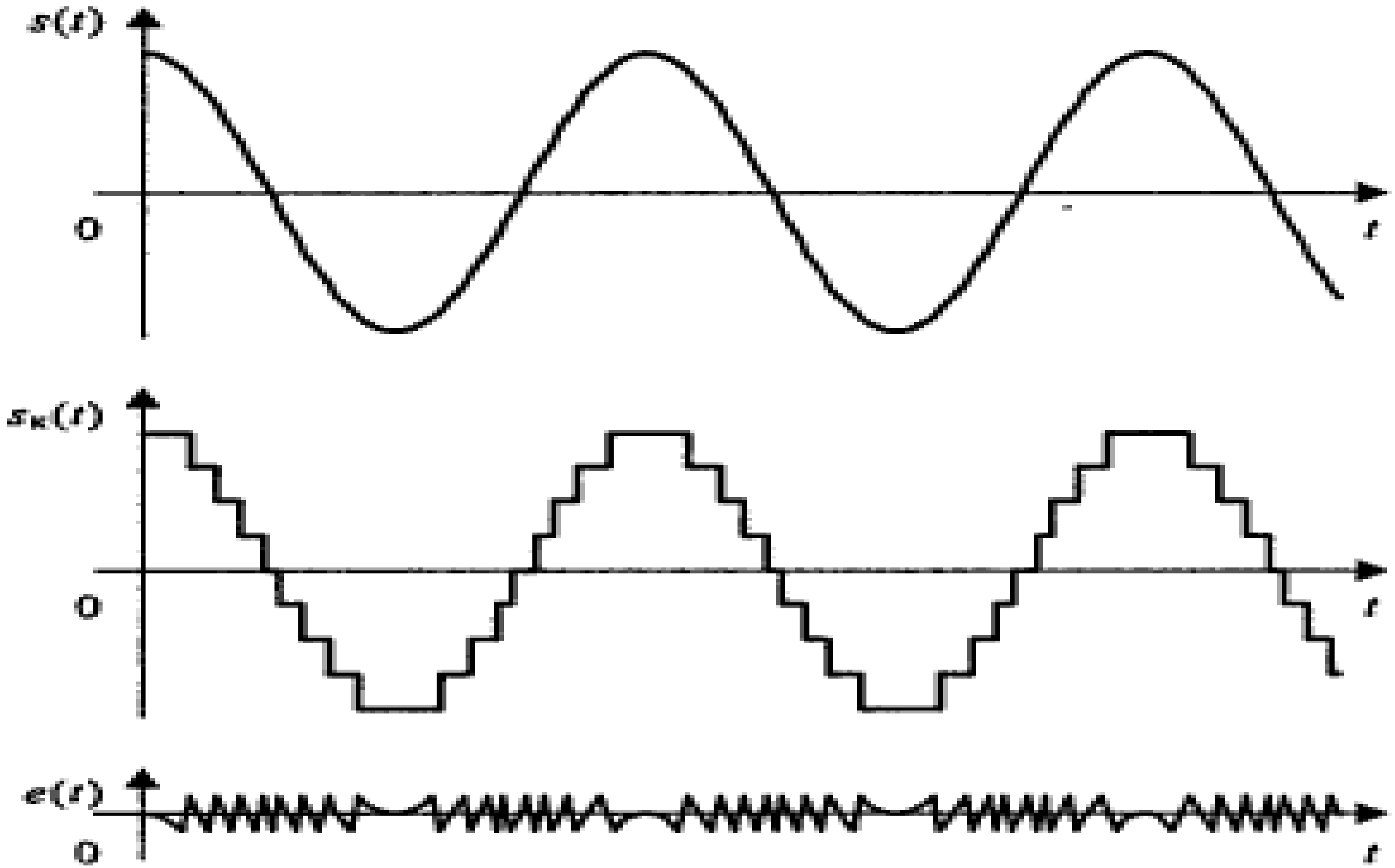
Как правило, $\mu(t)$ можно считать случайным процессом, имеющим равномерное распределение вероятности в указанных пределах. Такой случайный процесс имеет нулевое среднее значение и дисперсию $\Delta^2/12$.

Шум квантования для дискретной последовательности представляет собой последовательность чисел, образующая дискретный случайный процесс. Отсчеты этой последовательности можно считать некоррелированными друг с другом.

При квантовании производится не только округление значений уровня сигнала. На практике вместо этого может использоваться усечение, то есть округление в сторону меньшего значения. Тогда шум квантования лежит в диапазоне от 0 до Δ, среднее значение равно Δ/2, а дисперсия - $\Delta^2/12$.

Эффекты квантования (шум квантования)

Графическое отображение процесса квантования



Эффекты квантования

2.1. Квантование коэффициентов цифровых фильтров. При практической реализации фильтров возникает необходимость округления их коэффициентов. Это связано с поддерживаемыми форматами представления чисел и со стремлением повысить быстродействие. Округление коэффициентов приводит к искажению характеристики фильтра. Величина искажений зависит не только от погрешности округления, но и от исходных параметров фильтра и формы его построения.

В нерекурсивных фильтрах коэффициенты равны отсчетам импульсной характеристики и линейно связаны с комплексным коэффициентом передачи. Поэтому малые искажения коэффициентов приводят к малым искажениям частотных характеристик и проблемы, связанные с округлением коэффициентов, проявляются редко.

Эффекты квантования

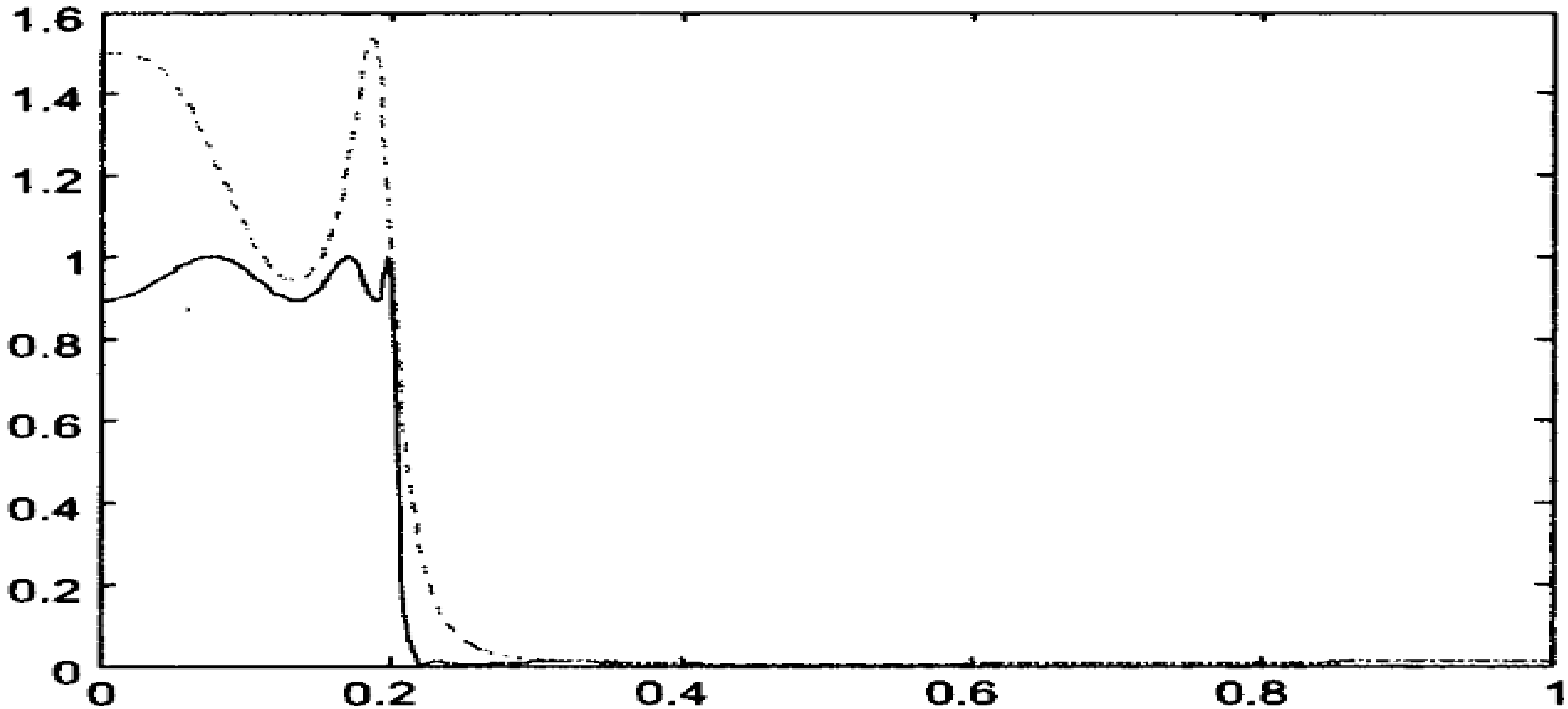
Квантование коэффициентов цифровых фильтров.

Заметные искажения частотных характеристик фильтра (**нерекурсивного**) могут иметь место, как правило, лишь в случае когда АЧХ фильтра имеет крутой спад между полосами пропускания и подавления.

У рекурсивных фильтров коэффициенты знаменателя функции передачи связаны с импульсной и частотными характеристиками нелинейно. В результате округление коэффициентов сказывается на характеристиках фильтра серьезнее. Как правило, наибольшие искажения здесь также происходят в тех случаях, когда АЧХ фильтра имеет резкие изменения в переходных зонах между полосами пропускания и подавления.

Эффекты квантования

Квантование коэффициентов цифровых фильтров.



АЧХ эллиптического фильтра **до** (сплошная линия) и **после** (пунктирная линия) квантования коэффициентов (демонстрационный пример).

Существуют различные методы устранения подобных искажений, с которыми можно ознакомиться в литературе.

Эффекты квантования

2.2. Масштабирование коэффициентов цифровых фильтров.

Необходимость масштабирования коэффициентов фильтра может возникнуть при работе с числами в формате с фиксированной запятой. В этом случае может случиться, что значения некоторых коэффициентов не могут быть представлены в заданном диапазоне.

При масштабировании цифрового фильтра все его коэффициенты делятся на одну и ту же константу, и на нее же умножается рассчитанный выходной сигнал. В качестве масштабирующего множителя удобно выбирать степень двойки. Самые маленькие по модулю коэффициенты фильтра могут при этом терять значащие цифры, что приводит к ситуации предыдущего пункта **2.1.**

Эффекты квантования

3. Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений.
Переполнение может возникать чаще всего в процессе вычислений в промежуточных результатах вычислений. Проблема достаточно актуальная в практическом отношении. Если она имеет место (выяснилось, например, в процессе тестирования) то, либо фильтр корректируется, либо осуществляется переход к формату с плавающей запятой.
4. Округление промежуточных результатов вычислений.
Помимо ошибок, накапливающихся в процессе вычислений, в результате округления промежуточных результатов вычислений могут возникать, так называемые **предельные циклы**.

Эффекты квантования

Предельные циклы.

Рассмотрим очень простой рекурсивный фильтр:

$$y_n = x_n + 0.95 y_{n-1}$$

Условие устойчивости фильтра выполнено (полюс функции передачи равен 0.95<1)

Пусть $\forall n$ значение $x_n = 0$, а $y_0 = 13$. При целочисленном формате для выходных значений получим следующий процесс:

$$y(1) = [0{,}95\, y(0)] = [0{,}95 \cdot 13] = [12{,}35] = 12,$$

$$y(2) = [0{,}95\, y(1)] = [0{,}95 \cdot 12] = [11{,}4] = 11,$$

$$y(3) = [0{,}95\, y(2)] = [0{,}95 \cdot 11] = [10{,}45] = 10,$$

$$y(4) = [0{,}95\, y(3)] = [0{,}95 \cdot 10] = [9{,}5] = 10,$$

$$y(5) = [0{,}95\, y(4)] = [0{,}95 \cdot 10] = [9{,}5] = 10,$$

...

Видно, как на значении 10 процесс «зациклился».

Эффекты квантования

Предельные циклы.

Различают два типа предельных циклов:

- «зернистые» предельные циклы. Возникают, когда значения внутреннего состояния фильтра при отсутствии входного сигнала затухают, но из-за округления не доходят до нуля;
- «переполняющие» предельные циклы. Имеют место в том случае, когда значения внутреннего состояния фильтра при отсутствии входного сигнала не затухают, а возрастают, вызывая переполнение.

Для исследования возможности возникновения предельных циклов анализируются некоторые специальные характеристики фильтров.

Заключительные замечания

1. Перед синтезированием цифрового фильтра необходимо проанализировать свойства входной последовательности, что позволит аргументированно выбрать тип фильтра. желательную АЧХ фильтра, его порядок и способ его синтеза.
2. Синтезированный фильтр необходимо проверить (посредством проведения вычислительных экспериментов) на соответствие его фактических свойств предполагавшимся теоретически, а также практическим требованиям.
3. Рассмотренные нерекурсивные и рекурсивные фильтры, способы их синтеза предполагают стационарность входной последовательности.
4. Для нестационарных последовательностей необходимо синтезирование адаптивных фильтров, к числу которых относятся, например, фильтры Калмана.