8. ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА: ПОСТАНОВКА. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА.

1. https://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/11554.pdf - методичка, в которой неплохо и понятно расписана теория

2. Конспект лекций

PS: ответ на "билет" – последние 2 раздела, " Постановка простейшей задачи вариационного исчисления" и " Уравнение Эйлера". До этого я написал теорию, может поможет, но можно и не читать.

Подготовка к постановке задачи (теория)

Переменная величина y является **функцией** независимой переменной x, если каждому значению x соответствует определенное значение y.

Переменная величина называется **функционалом**, зависящим от функции $x(t)$ и обозначается $I[x(t)]$, если каждой функции $x(t)$ из заданного класса функций M соответствует определённое числовое значение I.

Совокупность M функций, на которых определён функционал, называется **классом допустимых функций** (*сокращенно КДФ в лекциях*).

Интегральным функционалом называется интеграл, под знаком которого содержится некоторая функция. Примеры:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt,$$

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))dt,$$

$$I[x(t), y(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), y(t), x'_t(t), y'_t(t))dt \text{ и др.}$$

Подынтегральная функция называется **интегрантом**.

Теорию я взял со стр. 6 [1]. На стр. 6-7 [1] также есть пример, на котором ищется значение функционала. Там же можно подробнее посмотреть про множество M.

Постановка задачи вариационного исчисления

Задачей вариационного исчисления называется задача нахождения экстремума интегрального функционала $I[x(t)]$.

Говорят, что функционал $I[x(t)]$, определенный на некотором классе M функций, достигает на кривой $x^*(t)$ глобального минимума (максимума), если:

$$I[x^*(t)] \leq I[x(t)] \; \forall \; x(t) \in M$$

или для максимума

$$[x^*(t)] \geq I[x(t)] \; \forall \; x(t) \in M$$

Подробнее см. стр. 10-11 [1]. На стр. 11-17 [1] можно найти кучу примеров решения задачи вариационного исчисления, в т.ч. «Задача Дидоны», «Задача о брахистохроне», «Задача о наименьшей площади поверхности вращения», которые он давал в лекции. Можно переписать одну из этих задач в качестве примера – чем больше написано, тем выше шансы :)

Постановка простейшей задачи вариационного исчисления

Рассмотрим множество M допустимых функций x(t), удовлетворяющих условиям:

$$\forall x(t): x(t) \in C^1[a, b]$$

$$x(t_0) = x_0, x(T) = x_T - \text{граничные условия}$$

Среди допустимых кривых $x(t)$, принадлежащих допустимому множеству M, требуется найти кривую $x^*(t)$, доставляющую экстремум функционалу:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x(t), x'(t))dt\,.$$

Подробнее см. стр. 21 [1]. Можно также глянуть стр. 8 лекций [2], но там гораздо менее подробно расписано (вообще без текста, тупо формулы).

Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера лучше вывести. Если времени прямо мало, формула вот: $f_x - (f_{x'})' = 0$*, но больше – лучше. Кстати, в лекции на стр. 8 [2] используется обозначение* u *вместо* x *(искомая функция) и x вместо t (переменная), не путайте.*

Если есть желание вникнуть, на стр. 17-18 [1] есть определения первой вариации и приращения функционала. на стр. 21-22 непосредственно вывод уравнения Эйлера с бОльшим количеством деталей.

Выше мы поставили простейшую задачу вариационного исчисления.

Обозначим $x^*(t)$ – кривую, на которой достигается экстремум функционала. Тогда допустимая кривая определяется по формуле: $x(t) = x^*(t) + \alpha\delta x(t)$, а ее производная $x'(t) = x^{*\prime}(t) + \alpha\delta x'(t)$, где $\delta y(t)$ – фиксированная вариация кривой, $\delta x'(t) = (\delta x(t))'$ – производная вариации, α – числовой параметр, при этом $\delta x(t) \in C^1[t_0, T], \delta x(t_0) = \delta x(T) = 0$. Тогда:

$$I[x^*(t) + \alpha\,\delta x(t)] = \int_{t_0}^{T} f(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*\prime}(t) + \alpha\,\delta x'(t))dt = \varphi(\alpha),$$

Первая вариация:

$$\delta I = \left.\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{T} f(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*}{}'(t) + \alpha\,\delta x'(t))\Big|_{\alpha=0} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \Big(f_x(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*}{}'(t) + \alpha\,\delta x'(t))\Big|_{\alpha=0} \delta x(t) +$$

$$+ f_{x'}(t, x^*(t) + \alpha\,\delta x(t), x^{*}{}'(t) + \alpha\,\delta x'(t))\Big|_{\alpha=0} \delta x'(t)\Big) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \Big(f_x(t, x^*(t), x^{*}{}'(t))\delta x(t) + f_{x'}(t, x^*(t), x^{*}{}'(t))\delta x'(t)\Big) dt =$$

$$= f_{x'}(t, x^*(t), x^{*}{}'(t))\delta x(t)\Big|_{t_0}^{T} +$$

$$+ \int_{t_0}^{T} \left(f_x(t, x^*(t), x^{*}{}'(t)) - \frac{d}{dt} f_{x'}(t, x^*(t), x^{*}{}'(t)) \right) \delta x(t) dt .$$

Первое слагаемое обращается в ноль. Ко второму, по основной лемме вариационного исчисления (*стр. 19 [1]*), составляем условие:

$$f_x - (f_{x'})' = 0$$

Это и есть **уравнение Эйлера**. При этом, если $x^*(t)$ – дважды дифференцируемая, его можно записать как:

$$f_x - f_{x't} - f_{x'x}x' - f_{x'x'}x'' = 0$$

На стр. 23-25 есть примеры решения уравнений – поиска экстремали функционалов.