МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1

по дисциплине «Цифровая обработка сигналов»

Тема: Дискретные сигналы

Студентка гр. 7381	____________________	Алясова А.Н.
Студент гр. 7381	____________________	Кортев Ю.В.
Преподаватель	____________________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург

2020

Цель работы.

Изучить математическое описание дискретных сигналов и овладеть программными средствами их моделирования.

Основные теоретические положения.

В теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) принято разделять операции дискретизации по времени и квантования по уровню. Полагая операцию квантования отсутствующей, изучают дискретные сигналы и линейные дискретные системы (ЛДС), а затем, отдельно, – эффекты нелинейной операции квантования.

Дискретным называют сигнал, дискретный по времени и непрерывный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел бесконечной разрядности $x(nT)$ или $x(n)$, называемой коротко последовательностью. Значения $nT, n \in \mathbb{Z}_+$, называют дискретным временем, где T – период дискретизации, а n – дискретным нормированным временем.

В теории ЦОС термины «дискретный сигнал» и «последовательность» употребляют в тождественном смысле.

Цифровым называют сигнал, дискретный по времени и квантованный по состоянию (уровню), который описывается последовательностью чисел конечной разрядности – квантованной последовательностью $\tilde{x}(nT)$ или $\tilde{x}(n)$. При компьютерном моделировании под дискретным сигналом условно понимают последовательность чисел максимально возможной разрядности, а под цифровым – последовательность чисел заданной разрядности.

Постановка задачи.

С помощью программных средств провести моделирование и анализ дискретных последовательностей. Результаты подкрепить соответствующими графиками и выводами.

Порядок выполнения работы.

1. Смоделировать единичный цифровой импульс $\delta_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0;(N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0;N-1]$. Пояснить взаимосвязь между дискретным и дискретным нормированным временем и различие между цифровым единичным импульсом и функцией Дирака.
2. Смоделировать дискретный единичный скачок $\sigma_d(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0;(N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0;N-1]$. Пояснить соответствие между дискретным единичным скачком и функцией Хэвисайда, а также чему равна частота дискретизации дискретного единичного скачка.
3. Смоделировать дискретную экспоненциальную функцию $s_1(k)$ с выводом графиков на интервале дискретного времени $nT \in [0;(N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0;N-1]$. Пояснить соответствие между дискретной и аналоговой экспонентами.
4. Смоделировать дискретный комплексный гармонический сигнал $s_2(k) = C\exp(j\widehat{\omega}_0 k)$ с выводом графиков вещественной и мнимой частей на интервале времени $n \in [0;N-1]$. Записать данный сигнал в виде комбинации двух вещественных последовательностей.
5. Вывести графики последовательностей $\delta_d(k)$, $\sigma_d(k)$ и $s_1(k)$, задержанных на m отсчетов, на интервале времени $n \in [0;N-1]$. Записать формулы задержанных последовательностей.
6. Смоделировать дискретный прямоугольный импульс $s_3(k)$:

$$s_3(k) = \begin{cases} U, & n_0 \le n \le n_0 + n_{imp} + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

на основе дискретного единичного скачка с выводом графика на интервале времени $n \in [0; N-1]$. Пояснить как выполняется моделирование импульса.

7. Смоделировать линейную комбинацию дискретных гармонических сигналов $s_4(k)$:

$$s_4(k) = a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + a_3 x_3(k),$$

   где

$$x_i(k) = B_i \sin(\widehat{\omega} i k)$$

   с выводом графиков последовательностей $x_i(k)$ и $s_4(k)$ на интервале времени $n \in [0; 5N-1]$. Вычислить среднее значение, энергию и среднюю мощность последовательности $s_4(k)$. Пояснить, какие операции при моделировании линейной комбинации сигналов и как определяют указанные характеристики.

8. Смоделировать дискретную затухающую синусоиду $s_5(k) = |a|^k \cos(\widehat{\omega}_0 k)$ и вывести график на интервале времени $n \in [0; N-1]$. Пояснить операции при моделировании данного сигнала.

9. Вывести график пяти периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов амплитуды U и длительности n_{imp} с периодом, вдвое большим длительности импульса. Пояснить операции при моделировании периодической последовательности.

10. Сделать выводы.

Ход работы.

В ходе работы были выполнены следующие действия:

1) Смоделируем единичный цифровой импульс $\delta_d(k)$:

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

Графики единичного цифрового импульса на интервале дискретного времени $nT \in [0; (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0; N-1]$ представлены на рис. 1 соответственно.

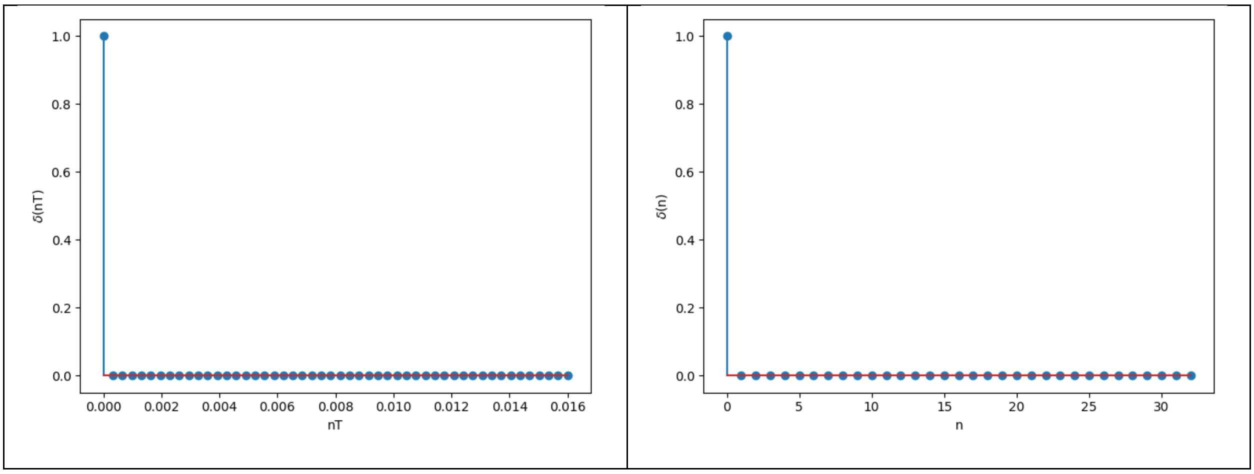

Рисунок 1 – Графики цифрового единичного импульса $\delta_d(nT)$ и $\delta_d(n)$

Взаимосвязь между дискретным и дискретным нормированным временем состоит в том, что дискретное нормированное время n – это дискретное время nT с периодом дискретизации $T = 1$.

Различием между цифровым единичным импульсом и функцией Дирака является то, что у единичного импульса амплитуда равна единице, а у функции Дирака – бесконечности. Из-за этого функция Дирака на практике не реализуема. Кроме того, функция Дирака бесконечно узкая и при этом имеет площадь, равную единице.

$$\delta(k) = \begin{cases} \infty, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

2) Смоделируем дискретный единичный скачок $\sigma_d(k)$:

$$\sigma_d(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Графики дискретного единичного скачка на интервале дискретного времени $nT \in [0; (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0; N-1]$ представлены на рис.2 соответственно.

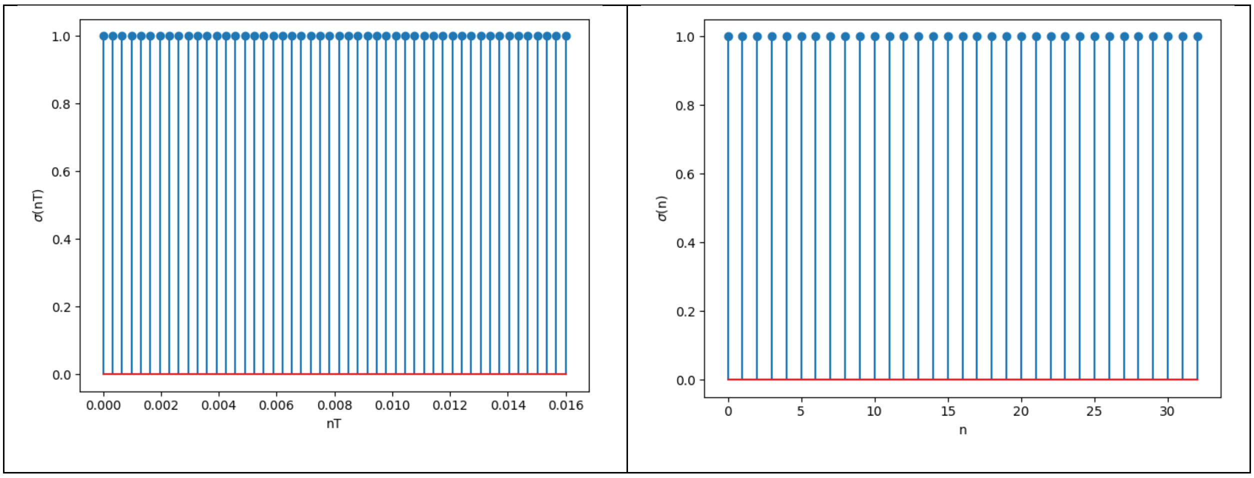

Рисунок 2 – Графики цифрового единичного скачка

Соответствие между цифровым и аналоговым единичными скачками заключается в том, что цифровой единичный скачок получается путем дискретизации аналогового единичного скачка.

Реальный аналоговый сигнал можно приближенно представить некоторой суммой единичных скачков, возникающих в последовательные моменты времени. Устремив к нулю длительность интервала времени между единичными скачками, в пределе будет получаться точная огибающая реального исходного сигнала.

Частота дискретизации дискретного единичного скачка равна:

$$f_д \geq 2f_в$$

где $f_в$ – верхняя граница частоты спектра аналогового сигнала.

3) Смоделируем дискретную экспоненциальную функцию $s_1(k)$:

$$s_1(k,T) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

Графики дискретной экспоненциальной функции на интервале дискретного времени $nT \in [0; (N-1)T]$ и дискретного нормированного времени $n \in [0; N-1]$ представлены на рис 3, 4 соответственно.

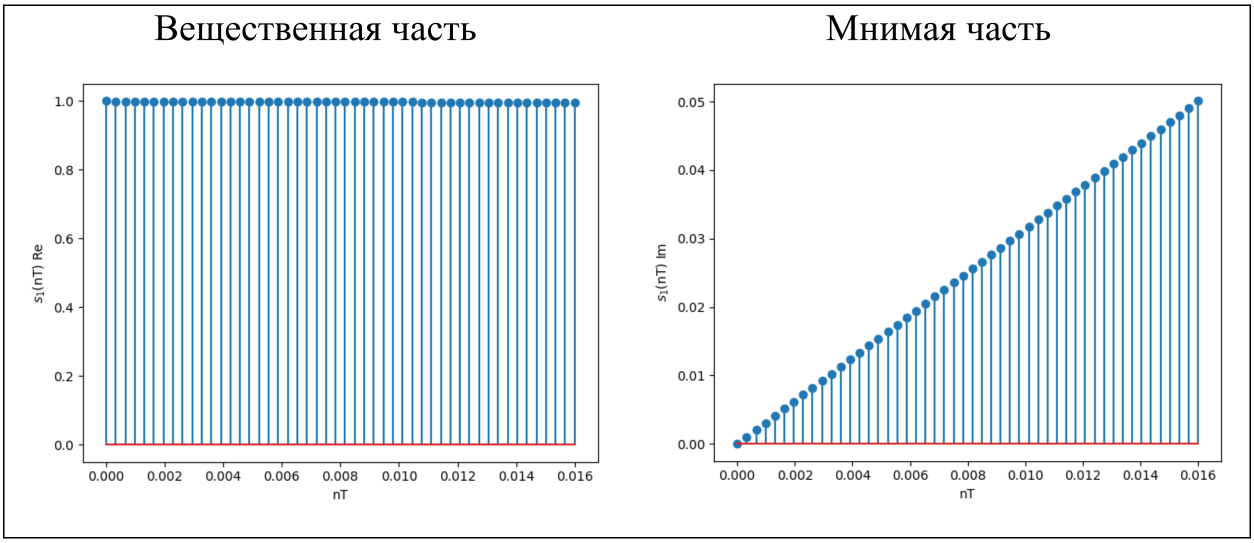

Рисунок 3 – Экспоненциальная функция на интервале дискретного времени

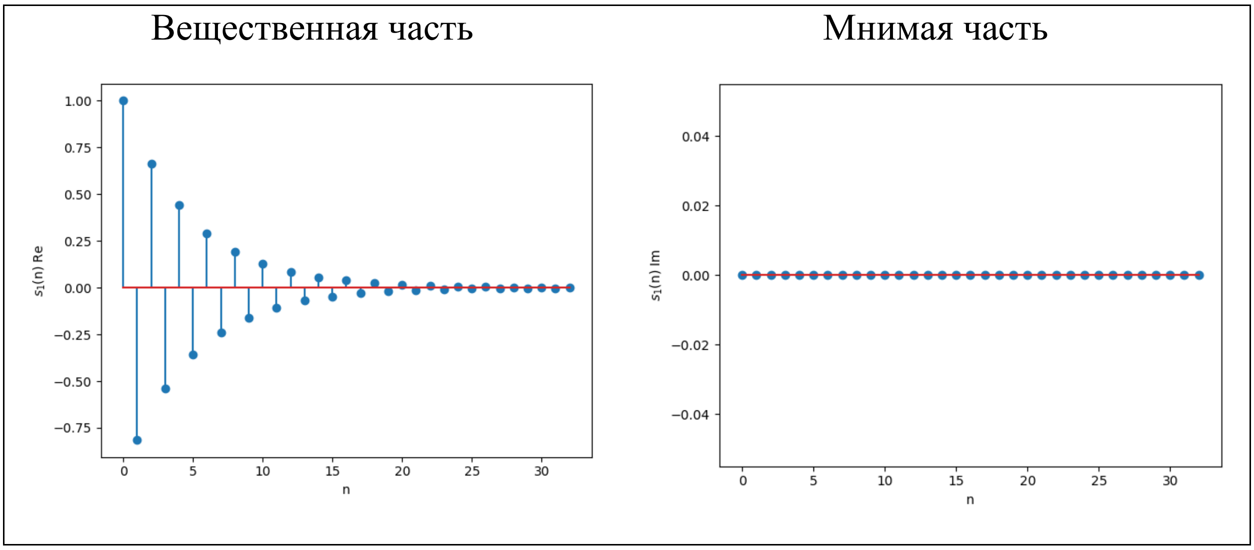

Рисунок 4 – Экспоненциальная функция на интервале дискретного нормированного времени

Соответствие между дискретной и аналоговой экспонентами:

Точки дискретной экспоненты находятся в местах, где для аналоговой экспоненты a^k, k – целые.

Дискретная экспонента (экспоненциальная последовательность) образуется в результате дискретизации экспоненты.

4) Смоделируем дискретный комплексный гармонический сигнал:

$$s_2(k) = C\exp(j\widehat{\omega}_0\, k)$$

Графики дискретного комплексного гармонического сигнала вещественной и мнимой частей на интервале времени $n \in [0; N-1]$ представлены на рис.5 соответственно.

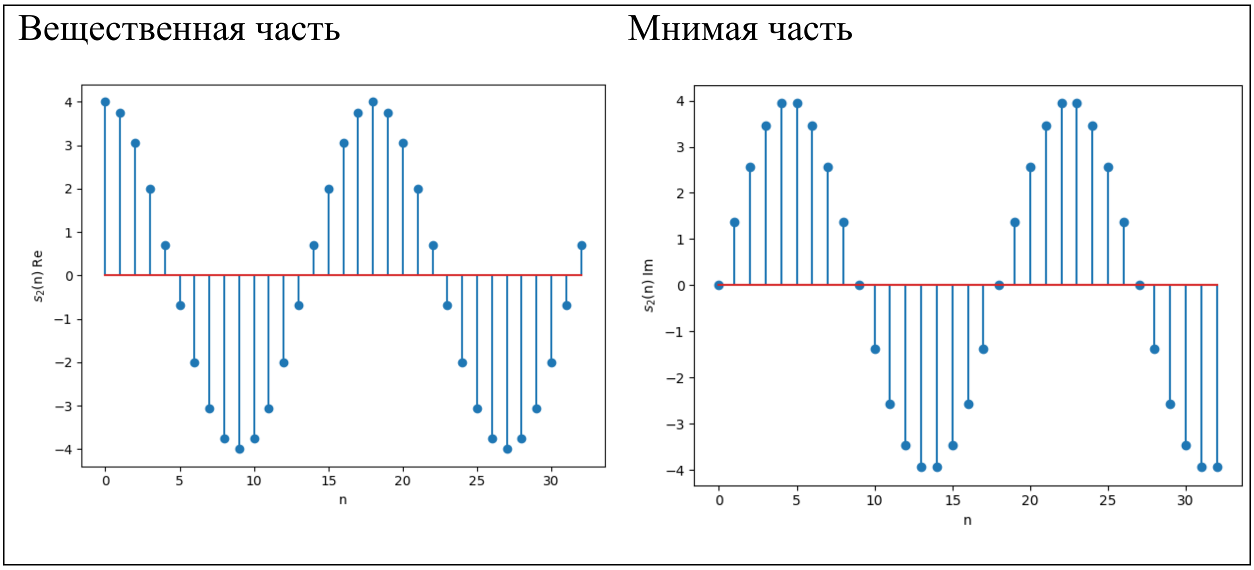

Рисунок 5 – Графики дискретного комплексного гармонического сигнала вещественной и мнимой частей

Данный сигнал можно записать в виде комбинации двух вещественных последовательностей:

$$Re\big(x(k)\big) = C\cos(wTk)$$

$$Im\big(x(k)\big) = \ C\sin(wTk)$$

5) Выведем графики последовательностей $\delta_d(k)$, $\sigma_d(k)$ и $s_1(k)$, задержанных на m отсчетов, на интервале времени $n \in [0; N-1]$. Графики представлены на рис. 6, 7, 8.

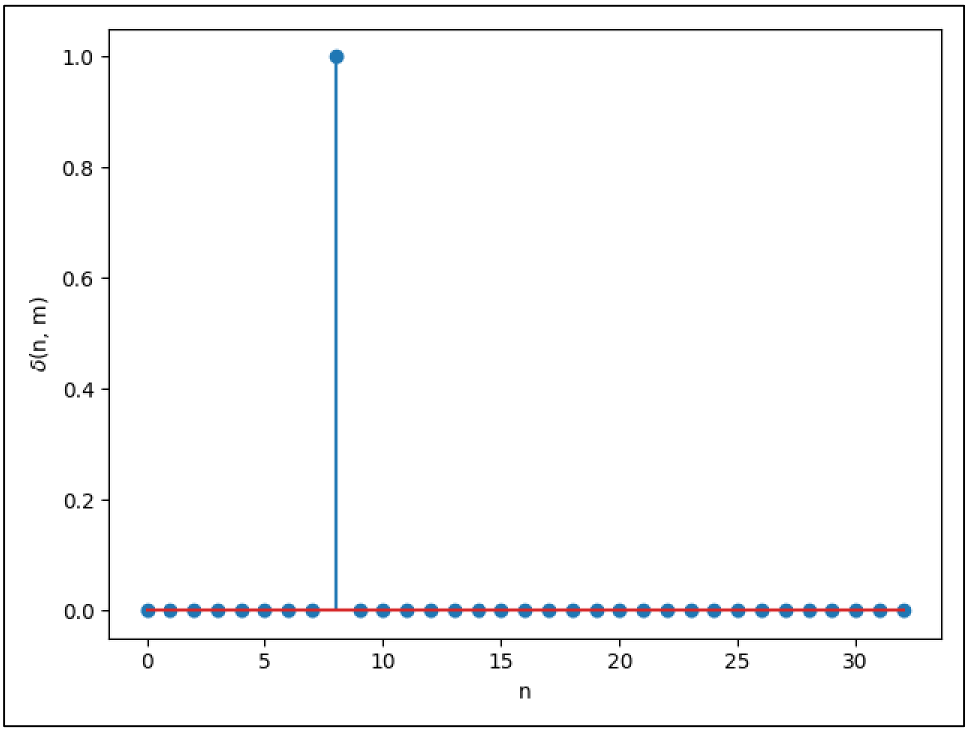

Рисунок 6 – График последовательности $\delta_d(n, m)$

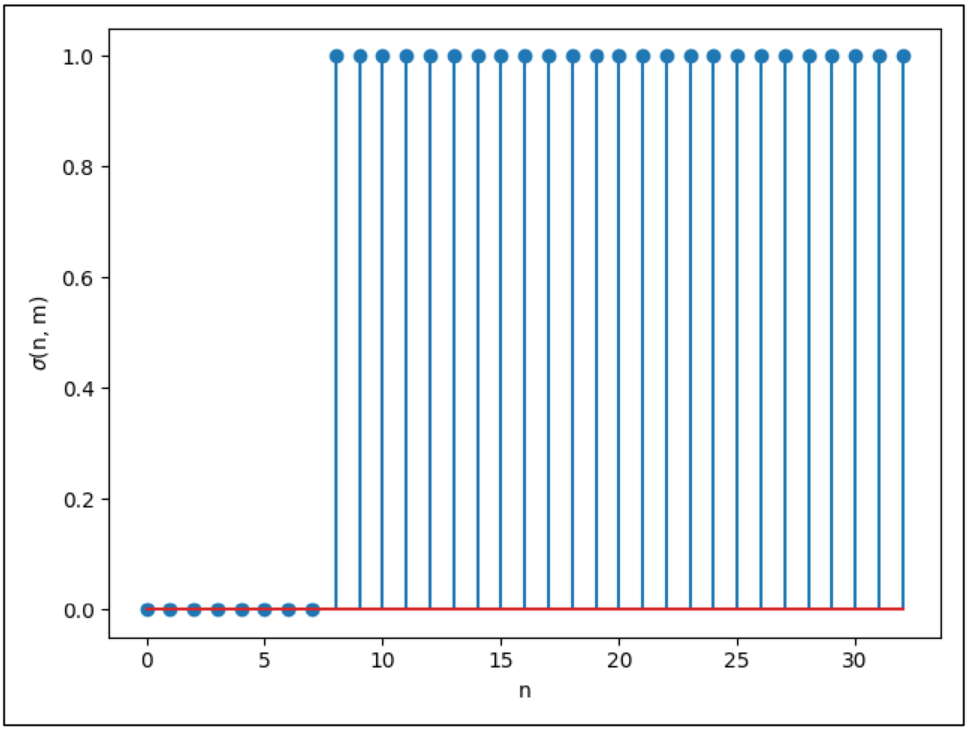

Рисунок 7 - График последовательности $\sigma_d(n, m)$ отсчетов

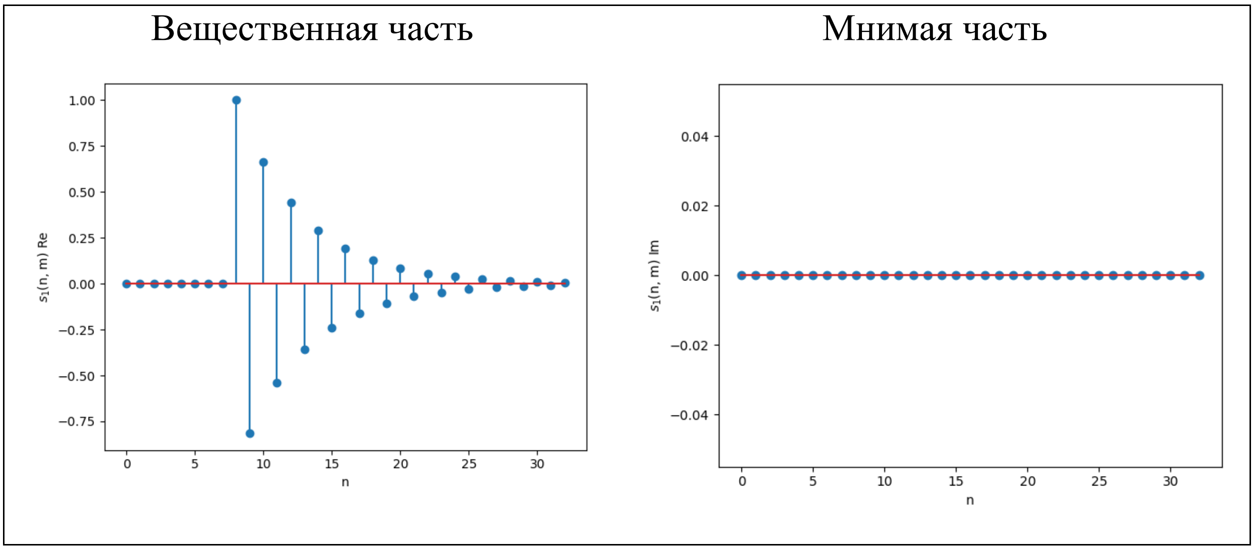

Рисунок 8 - График последовательности $s_1(n, m)$

Формулу единичного импульса, задержанного на m отсчётов можно записать следующим образом:

$$\delta_d(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

Формулу единичного скачка, задержанного на m отсчётов можно записать следующим образом:

$$\sigma_d(k-m) = \begin{cases} 1, & k \geq m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

Формулу дискретной экспоненциальной функции, задержанной на m отсчётов можно записать следующим образом:

$$s_1(k-m) = \begin{cases} a^{k-m}, & k \geq m \\ 0, & k < m \end{cases}$$

6) Смоделируем дискретный прямоугольный импульс $s_3(k)$ на основе дискретного единичного скачка:

$$s_3(k) = \begin{cases} U, & n_0 \leq n \leq n_0 + n_{imp} + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

График дискретного прямоугольного импульса $s_3(k)$ на основе дискретного единичного скачка на интервале времени $n \in [0; N-1]$ представлен на рис.9.

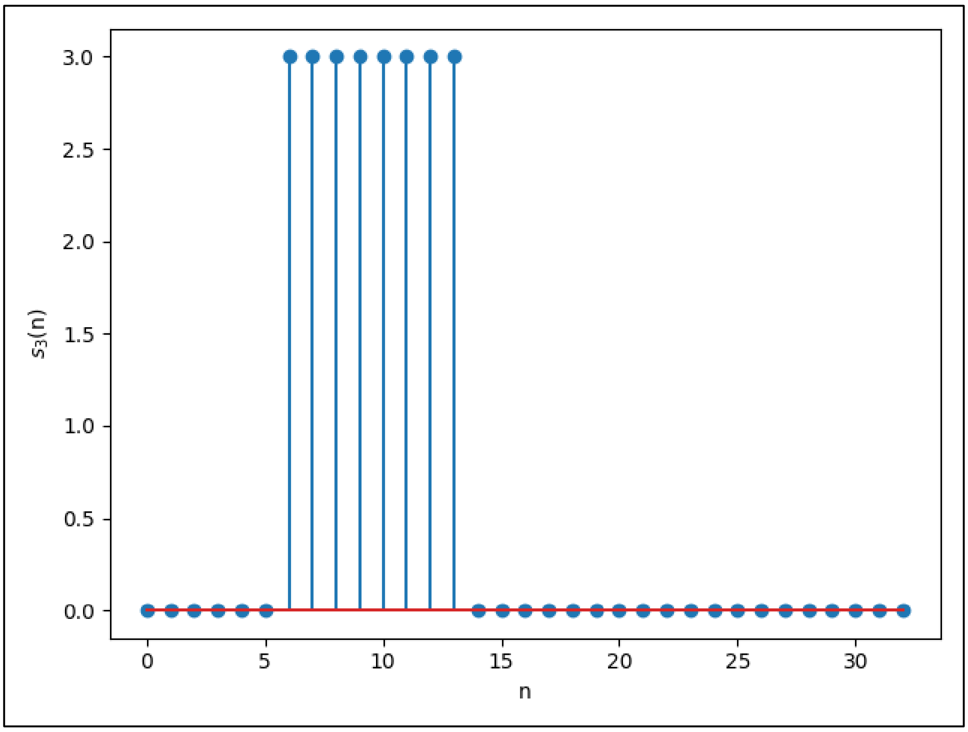

Рисунок 9 - График дискретного прямоугольного импульса $s_3(k)$ на основе дискретного единичного скачка

Моделирование прямоугольного импульса происходит следующим образом:

1. Генерируется массив из нулей с количеством элементов соответствующем интервалу времени.

2. Каждому элементу, удовлетворяющему условию, присваивается U.

7) Смоделируем линейную комбинацию дискретных гармонических сигналов $s_4(k)$:

$$s_4(k) = a_1x_1(k) + a_2x_2(k) + a_3x_3(k),$$

где

$$x_i(k) = B_i \sin(\widehat{\omega} ik)$$

Графики последовательностей $s_4(k)$ и $x_i(k)$ на интервале времени $n \in [0; 5N - 1]$ представлены на рис. 10, 11, 12, 13.

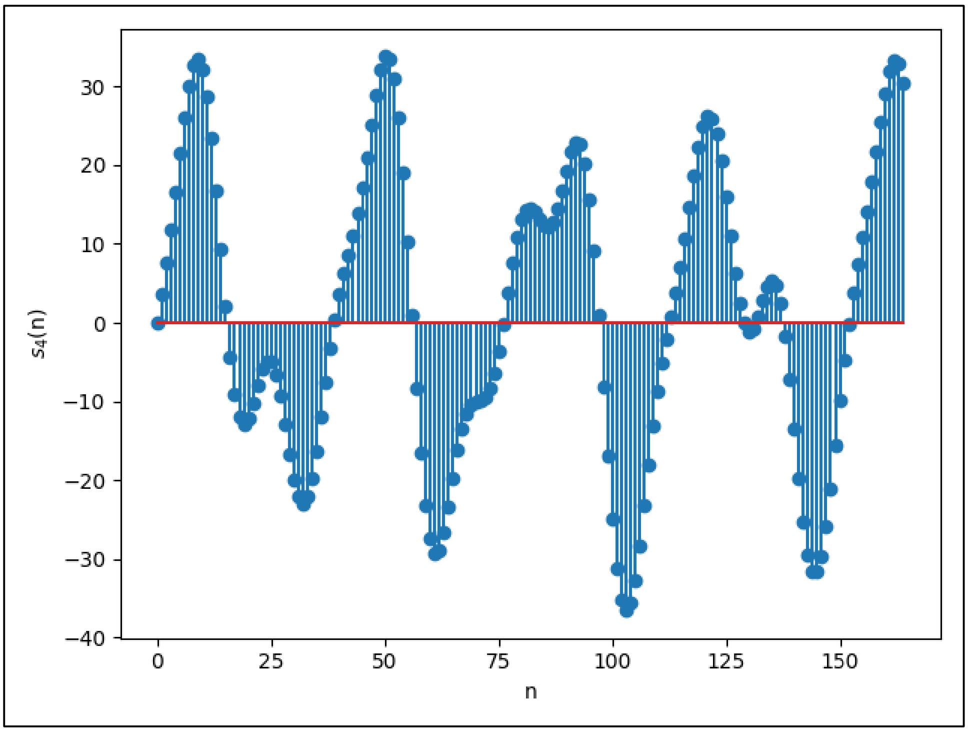

Рисунок 10 – График последовательности $s_4(k)$

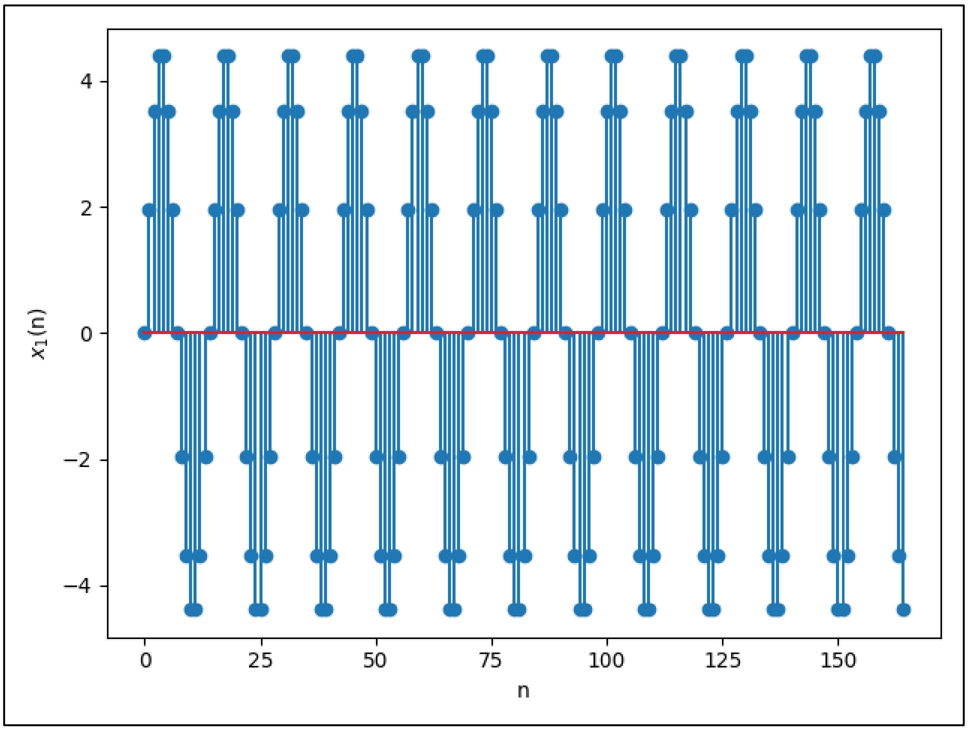

Рисунок 11 – График последовательности $x_1(k)$

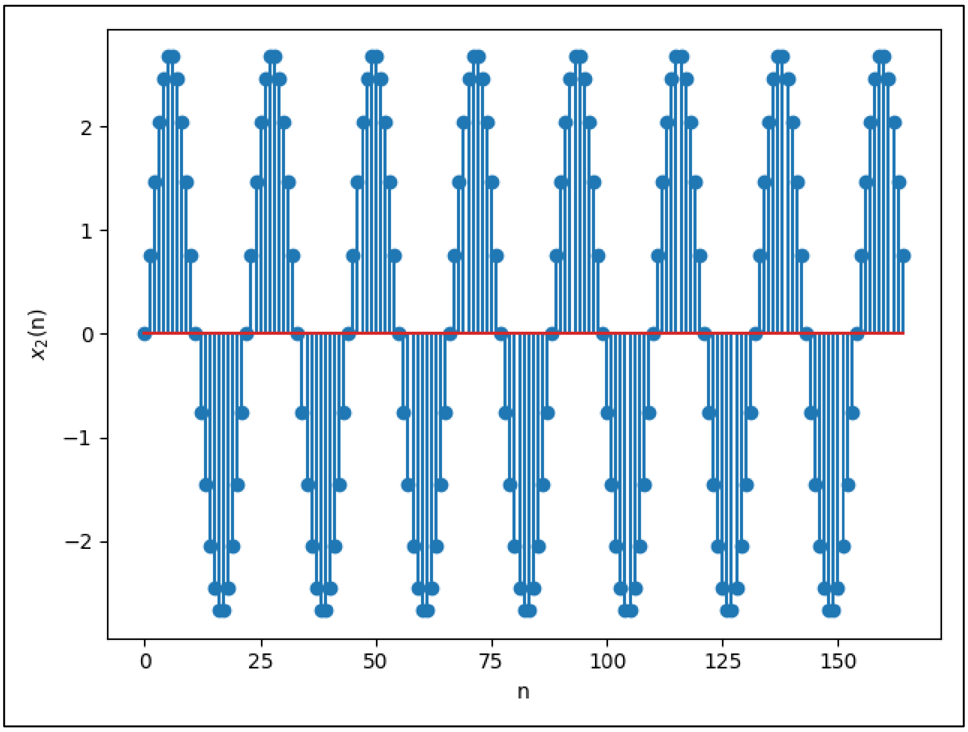

Рисунок 12 – График последовательности $x_2(k)$

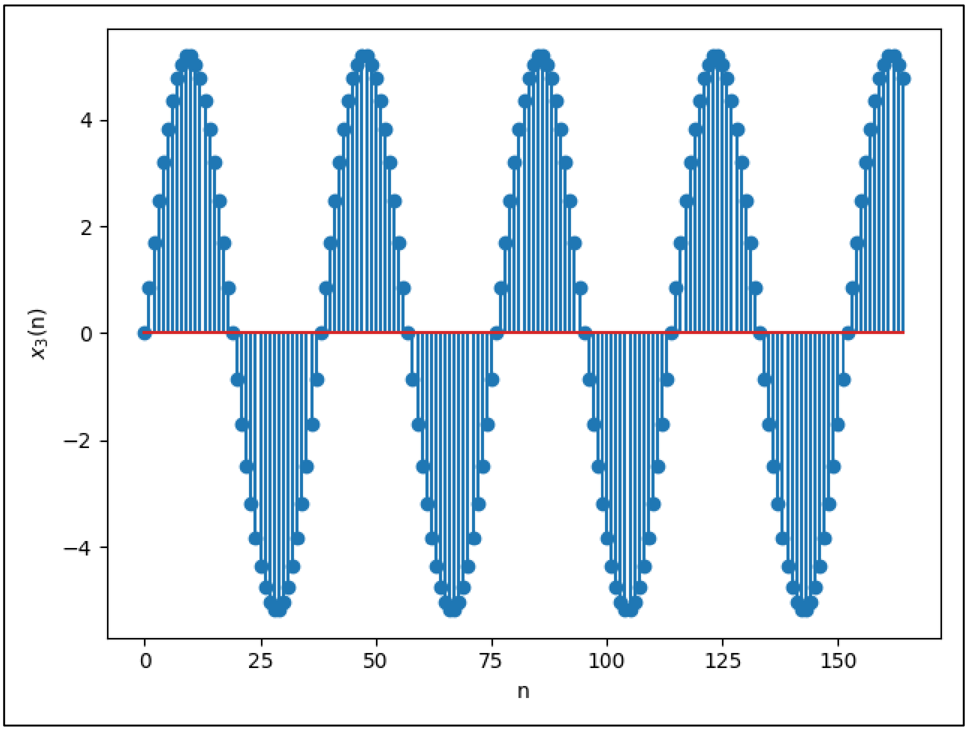

Рисунок 13 – График последовательности $x_3(k)$

Вычислим среднее значение, энергию и среднюю мощность последовательности $s_4(k)$:

Среднее значение = 1.5678183541399593,

Энергия = 57255.466663179,

Мощность = 347.0028282616909.

Операции при моделировании линейной комбинации сигналов:

1. Вычисление дискретного нормированного времени
2. Вычисление матрицы дискретных гармоник
3. Линейная комбинация дискретных гармоник

Определение характеристик:

- Среднее значение:

$$M = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$$

- Энергия:

$$E = \sum x^2$$

- Мощность:

$$P = \frac{\sum x^2}{N}$$

8) Смоделируем дискретную затухающую синусоиду:

$$s_5(k) = |a|^k \cos(\widehat{\omega}_0 k)$$

График дискретной затухающей синусоиды на интервале времени $n \in [0; N-1]$ представлен на рис. 14.

Операции при моделировании данного сигнала:

1. Расчёт времени на интервале n [0, N-1].
2. Расчёт дискретной затухающей синусоиды.

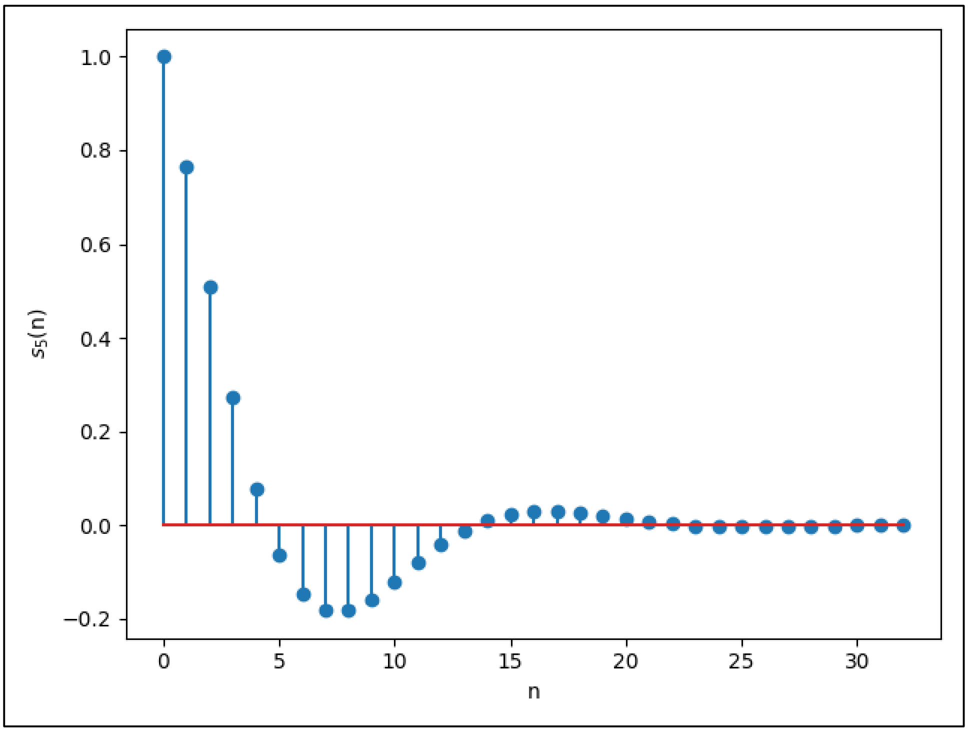

Рисунок 14 – График дискретной затухающей синусоиды $s_5(k)$ на интервале времени $n \in [0; N-1]$

9) Выведем график пяти периодов периодической последовательности $s_6(k)$ дискретных прямоугольных импульсов амплитуды U и длительности n_{imp} с периодом, вдвое большим длительности импульса. График представлен на рис. 15.

Операции при моделировании периодической последовательности:

1. Генерируем 5 прямоугольных импульсов с соответствующим смещением.
2. Складываем их.

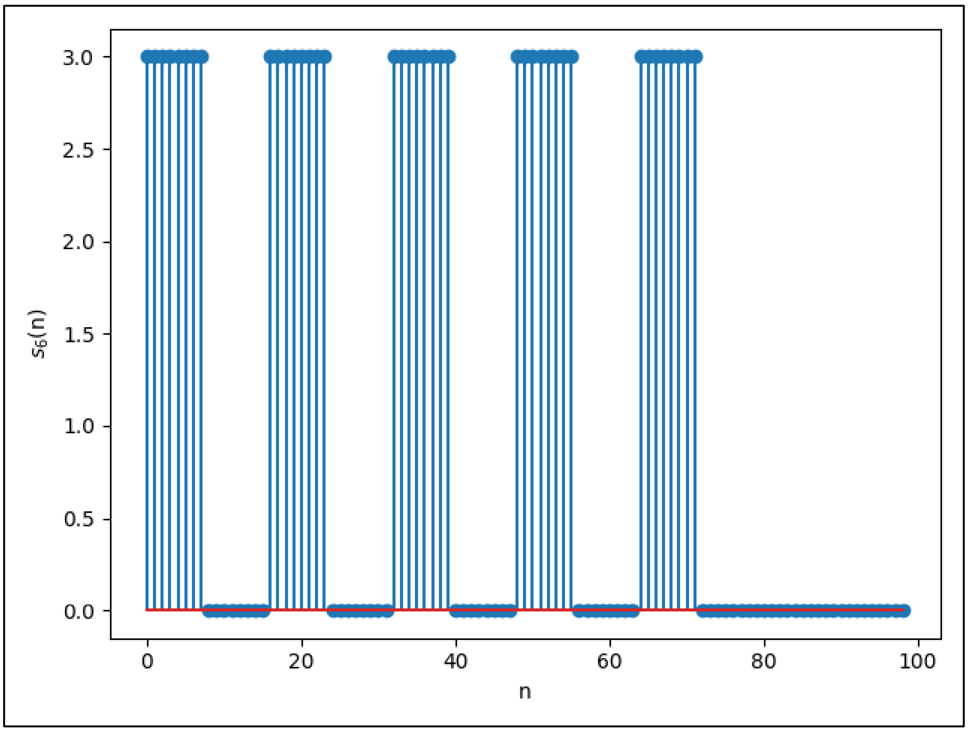

Рисунок 15 – График пяти периодов последовательности

Выводы.

Были изучены математические описания дискретных сигналов и получены навыки использования программных средств их моделирования.

Был исследован цифровой единичный импульс δ_d на интервалах n и nT и на его примере изучена связь между дискретным и дискретным нормированным временем.

Был исследован цифровой единичный скачок σ_d на интервалах n и nT, его частота дискретизации и соответствие с аналоговым единичным скачком.

Была исследована дискретная экспонента s_1 на интервалах n и nT и её соответствие с аналоговой экспонентой.

Был исследован дискретный комплексный гармонический сигнал s_2 на интервале времени n и переписан в виде комбинации двух вещественных последовательностей.

Были исследованы задержанные последовательности на интервале времени n и записаны их формулы.

Был исследован дискретный прямоугольный импульс s_3 на интервале времени k на основе цифрового единичного скачка.

Была исследована линейная комбинация дискретных гармонических сигналов s_4 на интервале времени $n \in [0; (5N-1)]$; были вычислены её среднее значение, энергия и средняя мощность.

Была исследована дискретная затухающая синусоида на интервале времени $n \in [0; N-1]$.

Была исследована периодическая последовательность дискретных прямоугольных импульсов s_6 на интервале времени k.

Таким образом, в ходе работы были смоделированы различные дискретные сигналы и построены соответствующие графики.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

def get_var():
    variables = {'Nb': 3}

    variables['N'] = 30 + variables['Nb'] % 5
    variables['T'] = 0.0005 * (1 + variables['Nb'] % 3)
    variables['a']  =  (-1)  **  variables['Nb']  *  (0.8  +  0.005  *
variables['Nb'])
    variables['C'] = 1 + variables['Nb'] % 5
    variables['w0'] = math.pi / (6 + variables['Nb'] % 5)
    variables['m'] = 5 + variables['Nb'] % 5
    variables['U'] = variables['Nb']
    variables['n0'] = variables['Nb'] % 5 + 3
    variables['n_imp'] = variables['Nb'] % 5 + 5
    variables['B1'] = 1.5 + variables['Nb'] % 5
    variables['B2'] = 5.7 - variables['Nb'] % 5
    variables['B3'] = 2.2 + variables['Nb'] % 5
    variables['w1'] = math.pi / (4 + variables['Nb'] % 5)
    variables['w2'] = math.pi / (8 + variables['Nb'] % 5)
    variables['w3'] = math.pi / (16 + variables['Nb'] % 5)
    variables['a1'] = 1.5 - variables['Nb'] % 5
    variables['a2'] = 0.7 + variables['Nb'] % 5
    variables['a3'] = 1.4 + variables['Nb'] % 5

    variables['x1'] = lambda k: variables['B1'] * np.sin(variables['w1']
* k)
    variables['x2'] = lambda k: variables['B2'] * np.sin(variables['w2']
* k)
    variables['x3'] = lambda k: variables['B3'] * np.sin(variables['w3']
* k)

    return variables


vv = get_var()
x = np.linspace(0, (vv['N'] - 1) * vv['T'])
x_norm = np.linspace(0, vv['N'] - 1, 33)
```

```
def dirak(_x, m=0):
    y = np.zeros(_x.shape)
    y[_x == m] = 1
    return y


def exp(_x, m=0, part='real'):
    y = np.zeros(_x.shape)
    ans = np.float_power(vv['a'] + 0j, _x[_x >= m] - m)
    y[_x >= m] = ans.real if part == 'real' else ans.imag
    return y


def exp2(_x, part='real'):
    ans = vv['C'] * np.exp(1j * vv['w0'] * _x)
    return ans.real if part == 'real' else ans.imag


def hs(_x, m=0):
    return np.heaviside(_x - m, 1)


def rect(_x, m=vv['n0']):
    y = np.zeros(_x.shape)
    y[(m <= _x) & (_x <= m + vv['n_imp'] - 1)] = vv['U']
    return y


def task1():
    plt.stem(x, dirak(x, 0), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, dirak(x_norm, 0), use_line_collection=True)
    plt.show()


def task2():
    plt.stem(x, hs(x), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, hs(x), use_line_collection=True)
    plt.show()


def task3():
```

```
    plt.stem(x, exp(x, 0), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, exp(x_norm, 0), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x, exp(x, 0, 'imag'), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, exp(x_norm, 0, 'imag'), use_line_collection=True)
    plt.show()


def task4():
    plt.stem(x, exp2(x), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, exp2(x_norm), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x, exp2(x, 'imag'), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, exp2(x_norm, 'imag'), use_line_collection=True)
    plt.show()


def task5():
    plt.stem(x_norm, dirak(x_norm, vv['m']), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm, hs(x_norm, vv['m']), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm,       exp(x_norm,       vv['m'],       'real'),
use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_norm,       exp(x_norm,       vv['m'],       'imag'),
use_line_collection=True)
    plt.show()


def task6():
    plt.stem(x_norm, rect(x_norm), use_line_collection=True)
    plt.show()


def s4(_x):
    return vv['a1'] * vv['x1'](_x) + vv['a2'] * vv['x2'](_x) + vv['a3']
* vv['x3'](_x)
```

```
x_7 = np.linspace(0, 5 * vv['N'] - 1, 5 * vv['N'])


def task7():
    ans = s4(x_7)
    plt.stem(x_7, ans, use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_7, vv['x1'](x_7), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_7, vv['x2'](x_7), use_line_collection=True)
    plt.show()
    plt.stem(x_7, vv['x3'](x_7), use_line_collection=True)
    plt.show()

    print('Среднее - {}, Энергия - {}, Мощность - {}'.format(ans.mean(),
np.power(ans, 2).sum(), np.power(ans, 2).mean()))


def s5(_x):
    return (np.abs(vv['a']) ** _x) * np.cos(vv['w0'] * _x)


def task8():
    plt.stem(x_norm, s5(x_norm), use_line_collection=True)
    plt.show()


def task9():
    x_9 = np.linspace(0, 3 * vv['N'] - 1, 3 * vv['N'])
    y = np.zeros(shape=x_9.shape)

    for i in range(5):
        y += rect(x_9, 2 * vv['n_imp'] * i)

    plt.stem(x_9, y, use_line_collection=True)
    plt.show()
```