

Метод Фурье для неоднородных уравнений

1. № 699^m

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (1.3)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим задачу

$$\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \quad (1.5)$$

Задача (1.4)–(1.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \quad \text{при } \lambda > 0; \quad (1.6)$$

$$\mathbf{X}(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad \text{при } \lambda < 0; \quad (1.7)$$

$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad (1.8)$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x) \Rightarrow \mathbf{X}'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda} l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(x) = \frac{2}{l} \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

(множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x \Rightarrow \mathbf{X}'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda} x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow \mathbf{X}(x) = c_2$. Второе краевое условие $\mathbf{X}'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (1.4)–(1.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функция $\mathbf{X}_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad \mathbf{X}_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad \mathbf{X}_n(x) = \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.4)–(1.5).

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде

$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n \mathbf{T}_n(t)$, где функции $\mathbf{X}_n(x)$ имеют вид:

$$\mathbf{X}_0(x) \equiv \frac{1}{l}, \quad \mathbf{X}_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (1.11)$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (1.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \rightarrow 0 + 0$, $x \rightarrow l = -0$) для того, чтобы функция $u(x, t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (1.2).

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, \mathbf{T}]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \quad (1.12)$$

При этом, в силу утверждения 8.1 (лекция 8),

$$f_n(t) = (f, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (1.13)$$

Тогда уравнение 1.1 приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{X}_n(x) \mathbf{T}'_n(t) - a^2 \mathbf{X}''_n(x) \mathbf{T}_n(t)) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \mathbf{T}'_0(t) &= \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0 \\ \mathbf{X}_n(x) \mathbf{T}'_n(t) - a^2 \mathbf{X}''_n(x) \mathbf{T}_n(t) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_0(t) &= \frac{f_0(t)}{2} \cdot l && \text{для } n = 0 \\ \left(\mathbf{T}'_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} \mathbf{T}_n(t) \right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) &= f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$\mathbf{T}'_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \quad \text{для } n = 0 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{T}'_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} \mathbf{T}_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad (1.15)$$

Итак мы получили условия на функции $\mathbf{T}_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (1.1) – (1.3).

Из условий задачи (1.1) – (1.3) мы ещё не использовали только начальные условия

$u(x, 0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где} \quad (1.16)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (1.17)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n(0) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0(0) &= \frac{\varphi_0}{2} && \text{для } n = 0 \\ \mathbf{T}_n(0) &= \varphi_n && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \\ \mathbf{T}_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \quad \text{для } n = 0 \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} \mathbf{T}_n(t) = f_n(t) \\ \mathbf{T}_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, \mathbf{T}]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить решения задач (1.18), (1.19) в формулу $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{T}_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$.

2. № 699^{m2}

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (2.3)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (2.4)$$

$$(2.5)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Этот шаг полностью повторяет Шаг 1. задачи № 699^M.

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде

$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \quad (2.6)$$

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x, t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \quad (2.7)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (2.8)$$

Тогда уравнение (2.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n(x) T''_n(t) - a^2 X''_n(x) T_n(t)) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$T''_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \quad \text{для } n = 0$$

$$X_n(x) T''_n(t) - a^2 X''_n(x) T_n(t) = f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$T''_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \quad \text{для } n = 0$$

$$\left(T''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t)\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T''_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \quad \text{для } n = 0 \quad (2.9)$$

$$T''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (2.1) – (2.4).

Из условий задачи (2.1) – (2.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где} \quad (2.11)$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (2.12)$$

$$\psi(x) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где} \quad (2.13)$$

$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (2.14)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T'_n(0) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} T_0(0) &= \frac{\varphi_0}{2} & T'_0(0) &= \frac{\psi_0}{2} & \text{для } n &= 0 \\ T_n(0) &= \varphi_n & T'_n(0) &= \psi_n & \text{для } n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (2.9), (2.10) и (2.11) – (2.12), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T'''_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \\ T'_0(0) = \frac{\psi_0}{2} \end{cases} \quad \text{для } n = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} T'''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T'_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\tau f_0(\kappa) d\kappa \right) d\tau. \quad (2.17)$$

При $n \in \mathbb{N}$:

сначала решаем однородное уравнение:

$$T'''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (2.16) в виде

$$T_n(t) = c_1(t) \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2(t) \cos \frac{\pi nat}{l}, \quad \text{где } c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2'(t) \cos \frac{\pi nat}{l} = 0; \\ \frac{\pi na}{l} (c_1'(t) \cos \frac{\pi nat}{l} - c_2'(t) \sin \frac{\pi nat}{l}) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{l}{\pi na} f_n(t) \cos \frac{\pi nat}{l}, \quad c_2'(t) = -\frac{l}{\pi na} f_n(t) \sin \frac{\pi nat}{l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n$, $T_n'(0) = \psi_n$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{l}{\pi na} \psi_n + \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na\tau}{l} d\tau, \quad c_2(t) = \varphi_n - \frac{l}{\pi na} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na\tau}{l} d\tau. \quad (2.18)$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \varphi_n \sin \frac{\pi nat}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi na} \cos \frac{\pi nat}{l} +$$

$$+ \frac{l}{\pi na} \left(\sin \frac{\pi nat}{l} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi na\tau}{l} d\tau - \cos \frac{\pi nat}{l} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi na\tau}{l} d\tau \right). \quad (2.19)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (2.17), (2.19) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \left(\frac{\pi nx}{l} \right).$$

3. № 654^m. (Классический способ)

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \quad x \in [0, l]. \quad (3.3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (3.4)$$

$$(3.5)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Рассмотрим задачу

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.6)$$

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.7)$$

Задача (3.6)–(3.7) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение нам уже известно:

$$\lambda_n = \frac{(\pi nx)^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin \left(\frac{\pi nx}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$ в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье по синусам (так как в данном примере f не зависит от t , то f_n тут просто константы, не зависящие от t)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n. \quad (3.9)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (3.10)$$

Тогда уравнение (3.1) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n(x) T''_n(t) - a^2 X''_n(x) T_n(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x) T''_n(t) - a^2 X''_n(x) T_n(t) = f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t)\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T''_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad (3.11)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (3.1) – (3.4).

Из условий задачи (3.1) – (3.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{\alpha - \beta}{l} x - \alpha$, $u_t(x, 0) = \psi = 0$. Найдём разложение функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящих в начальные условия, в ряд по синусам

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \text{где } \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (3.12)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \text{где } \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (3.13)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right); \\ \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(0) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).\end{aligned}$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n \qquad T'_n(0) = \psi_n \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (3.11) и (3.12) – (3.13), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T''_n(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = f_n \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T'_n(0) = \psi_n \end{cases} \quad \text{для } n \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in \mathbb{R}$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

Найдём φ_n , ψ_n из (3.12), (3.13) с учётом, что

$$\varphi(x) = \frac{\beta - \alpha}{l}x + \alpha, \quad \psi = 0.$$

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{\pi n} \frac{\beta - \alpha}{l} x \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{\pi n} \frac{\alpha - \beta}{l} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx + \alpha \int_0^l \sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx \right) = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_0 \\ &= \frac{2}{l} \left(-\frac{(-1)^n l (\beta - \alpha)}{\pi n} + \frac{\alpha l (1 - (-1)^n)}{\pi n} \right) = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta),\end{aligned}$$

$$\psi_n = 0.$$

При $n \in \mathbb{N}$:

сначала решаем однородное уравнение:

$$T''_n(t) + \frac{(\pi na)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi nat}{l} + c_2 \cos \frac{\pi nat}{l}.$$

Простой вид правой части позволяет нам угадать частное решение неоднородного уравнения (3.14) в виде константы: $\frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}$. Поэтому общее решение (3.14) имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Из начального условия $T'_n(0) = \psi_n = 0$ следует, что

$$c_1 = 0.$$

А второе начальное условие $T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta)$ даёт нам

$$c_2 = \frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \left(\frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}. \quad (3.15)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (3.15) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right).$$

Получим ответ:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} (\alpha - (-1)^n \beta) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right).$$

4. № 654^m. (Короткий способ, использующий вид данных функций)

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \quad x \in [0, l]. \quad (4.3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

Шаг 1. Так как правые части всех равенств в этой задаче не зависят от времени, будем искать решение задачи в виде суммы $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$.

Найдём $w = w(x)$ такую, чтобы

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (4.6)$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.7)$$

Раз $w = w(x)$, то $w_{tt} = 0$, и задача (4.6) – (4.7) принимает более простой вид:

$$w''(x) = -\frac{f(x)}{a^2}, \quad x \in (0, l), \quad (4.8)$$

$$w(0) = w(l) = 0. \quad (4.9)$$

Проинтегрируем уравнение (4.8) один раз:

$$w'(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x f(s) ds + c_1.$$

Проинтегрируем второй раз:

$$w(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(s) ds dy + c_1 x + c_2.$$

Из краевого условия $w(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, а из $w(l) = 0$, – что

$$0 = -\frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy + c_1 l,$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{la^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy.$$

Итак, функция $w(x)$ нам полностью известна:

$$w(x) = \frac{x}{la^2} \int_0^l \int_0^y f(s) ds dy - \frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(s) ds dy. \quad (4.10)$$

Тогда для $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$ получается задача

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (4.11)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.12)$$

$$v(x, 0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (4.13)$$

$$v_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

Такую задачу мы уже умеем решать (см. номер 643, семинар 6). Её ответ:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right), \quad (4.16)$$

где A_n и B_n задаются равенствами

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx; \quad (4.17)$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \quad (4.18)$$

В нашем случае $\psi = 0$, а $\varphi = \frac{\beta - \alpha}{l}x + \alpha - w(x)$, откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{\beta - \alpha}{l}x + \alpha - w(x) \right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \quad B_n = 0$$

и функция v имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right). \quad (4.19)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x)$$

найденные функции v и w из (4.19) и (4.10).

5. № 667

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (5.3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.

Этот шаг мы проходили, когда решали задачу № 649^M. Результат: бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ в виде

$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имеют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right). \quad (5.6)$$

Пусть функция $f(x, t)$ разложена при каждом $t \in [0, T]$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) f_n(t). \quad (5.7)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам (как мы убедились, решая № 649^M):

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) dx. \quad (5.8)$$

Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n(x) T_n'''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x) T_n'''(t) - a^2 X_n''(x) T_n(t) = f_n(t) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T_n'''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) \right) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) = f_n(t) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_n'''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = f_n(t) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad (5.9)$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$ с краевыми условиями $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$.

Шаг 3. Решаем задачу (5.1) – (5.4).

Из условий задачи (5.1) – (5.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. Функции $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по функциям $X_n(x)$

$$\varphi(x) \equiv 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где } \varphi_n = 0, \quad (5.10)$$

$$\psi(x) \equiv 0 = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \quad x \in [0, l] \quad \text{где } \psi_n = 0 \quad (5.11)$$

Подставим функцию $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \right) = 0.$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n = 0 \quad T_n'(0) = \psi_n = 0 \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (5.9) и (5.10) – (5.11), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.12)$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0, T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

сначала решаем однородное уравнение:

$$T_n''(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2 a^2}{4l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2 \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (5.12) в виде

$$T_n(t) = c_1(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \quad \text{где } c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2'(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} = 0; \\ \frac{\pi(2n-1)a}{2l} \left(c_1'(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} - c_2'(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \right) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t) \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \quad c_2'(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a} f_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n = 0$, $T_n'(0) = \psi_n = 0$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau, \quad c_2(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau. \quad (5.13)$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a} \left(\sin \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \int_0^t f_n(\tau) \cos \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau - \cos \frac{\pi(2n-1)at}{2l} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l} d\tau \right). \quad (5.14)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (5.14) в формулу

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

№ I.

Найти решение $u(x, t)$ задачи

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (5.15)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.16)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5.17)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5.18)$$

$$(5.19)$$

Решение: см. № 654^M (Классический способ), стр. 6.

№ II.

Найти решение $u(x, t)$ задачи

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (5.20)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.21)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l]. \quad (5.22)$$

$$(5.23)$$

Решение: см. № 654^M (Короткий способ), стр. 9.