1) Волновое уравнение на прямой. Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера для однородного волнового уравнения. Арина

2) Волновое уравнение на прямой. Задача Коши для волнового уравнения. Принцип Дюамеля, формула Даламбера для неоднородного волнового уравнения. Витя

Источник: http://www.lib.unn.ru/students/src/onewaveeq.pdf (25-я страница).

Задача Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), -\infty < x < +\infty, t > 0 - \text{волновое уравнение} \\ u(x,0) = \phi(x), -\infty < x < +\infty \ - \text{начальное смещение} \\ u_t(x,0) = \psi(x) - \infty < x < +\infty \ - \text{начальная скорость} \end{cases}$$

Принцип Дюамеля:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s) d\xi ds$$

Формула Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\phi(x-at) + \phi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(\xi,s) d\xi ds$$

3) Волновое уравнение на полупрямой. Начально-краевая задача. Формула Даламбера. Настя

Источник: вики

Начально-Краевая задача – краевая задача для гиперболических и параболических уравнений, удовлетворяющих краевым/граничным условиям в концах интервала или на границе области и начальным условиям

Источник: **вики**

Волновое уравнение — линейное гиперболическое дифференциальное уравнение в частных производных, задающее малые поперечные колебания тонкой мембраны или струны, а также другие колебательные процессы.

Задача на полупрямой [править | править код]

Рассмотрим однородное уравнение колебаний на полупрямой $[0; +\infty)$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с закрепленным концом:

$$u(0, t) = 0$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

для того, чтобы задача имела решение, необходима согласованность начальных условий и граничного условия, а именно:

$$\varphi(0) = 0, \qquad \psi(0) = 0$$

Задача на полупрямой легко сводится к задаче на прямой после того, как мы антисимметрично продолжим начальные условия:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \qquad \psi(-x) = -\psi(x) \qquad \forall x \in [0, +\infty)$$

В силу того, что начальные условия $\varphi(x), \psi(x)$ — нечётные функции, логично ожидать, что и решение $u(x,t)$ будет нечётной функцией. В этом можно непосредственно убедиться, рассмотрев решение в виде формулы Д'Аламбера. Поэтому полученное решение u(x, t) будет удовлетворять начальным условиям и граничному условию $u(0,t) = 0$ (последнее следует из нечётности функции).

Формула Д'Аламбера [править | править код]

Решение одномерного волнового уравнения (здесь $v = a$ — фазовая скорость)

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ (функция $f(x,t)$ соответствует вынуждающей внешней силе)

с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

имеет вид

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)dsd\tau$$

Дополнительно: преза, ещеИнфа

4) Волновое уравнение на отрезке. Начально-краевая задача. Разделение переменных и метод Фурье. Антон

Волновое уровнение на отрезке a-b

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f, c = const, x \in [a, b](1)$

u_{tt} — вторая производная по t т. е. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Начально-краевая задача:

(1)

$u|_{t=0} = \varphi, u_t|_{t=0} = \psi;(2)$

+ краевые условия. Например:

$u|_{x=a} = u|_{x=b} = 0(3)$

(1),(2),(3) — начально-краевая задача

Решение начально-краевой задачи находится методом разделения переменных и его логическим продолжением — методом Фурье

Находим собственные функции V_k и собственные числа λ_k для оператора $-c^2 u_{xx}$

Находим решение в виде: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} V_k(x)W_k(t)(4)$,

Тогда (1) преобразуется к виду:

$\sum V_k(x)\left(\lambda_k W_k + \ddot{W}_k\right) = f$(точка — производная по t)

$\sum V_k(x)W_F(0) = \varphi(x)$

$\sum V_k(x)W^{\cdot}_F(0) = \psi(x)$

После этого раскладываем f, φ, ψв ряд фурье
Приравниваем коэффициенты. Получаем семейство обыкновенных диффуров с начальными условиями на W_k, решаем.
(само решение вроде можно не выписывать)

5) Уравнение Штурма-Лиувилw. Краевые условия для уравнения Штурма-Лиувилля. Функция Грина. **<u>Оля</u>**

6) Уравнение Штурма-Лиувилля. Краевые условия для уравнения Штурма-Лиувилля. Метод Фурье. **<u>Мила</u>**

Из конспекта:

Ур-ние Штурма-Лиувилля

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\begin{cases} p(x) \geq \delta > 0 \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$$

Задача Ш.-Л.:

$\begin{cases} \text{У. Ш.-Л.} \\ \text{Граничные усл. (м.б. всякие разные)} \end{cases}$

Определения. Дифференциальный оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y, \qquad (2.50)$$

где p, p', q непрерывны, $p \geqslant \text{const} > 0$, называется *дифференциальным оператором Штурма—Лиувилля*.

Краевые условия

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y + \alpha_2 y' |_{x=a} = 0, \quad & \beta_1 y + \beta_2 y' |_{x=b} = 0, \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad & |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.51)$$

называются *краевыми условиями типа Штурма—Лиувилля.*

Пусть комплекснозначная функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на отрезке (a, b). *Рядом Фурье* функции $f(x)$ по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля называется ряд

$$\left.\begin{gathered} f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x), \\ c_i = \int_a^b f(x) \rho(x) y_i(x)\, dx, \quad \int_a^b y_i^2 \rho(x)\, dx = 1. \end{gathered}\right\} \qquad (2.59)$$

Источник: https://scask.ru/d_book_leph.php?id=8

7) Уравнение Уравнение Штурма-Лиувилля. Краевые условия для уравнения Штурма-Лиувилля. Вариационный принцип Гильберта-Куранта нахождения собственных чисел.

Ур-ние Штурма-Лиувилля

$$-\left(p(x)\,u'(x)\right)' + q(x)\,u(x) = f(x), \qquad x \in [a,b]$$

$$\begin{cases} p(x) \geq \delta > 0 \\ q(x) \geq 0 \end{cases}$$

Задача Ш.-Л.:

$$\begin{cases} \text{У. Ш.-Л.} \\ \text{Граничные усл. (м.б. всякие разные)} \end{cases}$$

Источник: http://math.phys.msu.ru/archive/2014_2015/121/Theme_7.pdf

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y$, где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ удовлетворяют условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$.

Поставим вопрос: найти такие числа λ, при которых существует нетривиальное решение следующей краевой задачи $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,\ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0)$:

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Эта задача называется краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно - задача Штурма-Лиувилля); числа λ_n, при которых существуют нетривиальные решения, - собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями.

u_k - базис в L_2; $\displaystyle\int_0^L u_k u_m\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases} \Leftrightarrow \int_0^L u_k^2\,dx = 1$ | $\displaystyle(Tu,u) = \int_0^L (u')^2\,dx > 0$

Принцип Гильберта-Куранта: $\displaystyle\lambda_{k+1} = \max_{v_1,\dots,v_k}\ \min_{\substack{u \perp v_j \\ j=1\dots k}} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}$ | $\displaystyle(u,u) = \int_0^L u^2\,dx$

* не забыть подписать:

удовлетворяющих однородным краевым (граничным) условиям

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0;$$
$$\alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0;$$

8) Простейшая вариационная задача: постановка. Уравнение Эйлера. Паша

https://drive.google.com/drive/folders/1quy5pEH3QEWqsdbAOq2uCEirjKW6-MfL?usp=sharing

9) Вариационная задача с недостаточным количеством условий Дирихле. Уравнение Эйлера. Естественные граничные условия. Настя Кузина

сложные формулировки вот отсюда (вики)
сначала опишем полные условия Дирихле - закрепление искомой кривой на ее концах, т.е. задание значений y(x0), y(x1). Т.е. для струны это значит, что она закреплена с двух концом.

Если предположить, что струна закреплена только с одной стороны или не закреплена вообще, то возникает случай недостаточного количества условий, тогда возникают условия естественные.

Дальше инфа взята вот отсюда: (ссылка 1 - стр 238, ссылка2 - стр 29)

83. Естественные граничные условия. До сих пор при рассмотрении экстремума функционала (93) мы принимали в качестве предельных условий закрепление искомой кривой на ее концах, т. е. задание значений $y(x_0)$ и $y(x_1)$. Укажем сейчас другой вид предельных условий. Положим, что мы ищем экстремум интеграла

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y')\,dx, \tag{117}$$

причем левый конец искомой кривой закреплен, т. е. на левом конце имеется предельное условие $y(x_0)=y_0$, а на правый конец никакого условия не наложено; кроме того, само собой очевидно, что этот конец должен находиться на прямой $x=x_1$, параллельной оси y. Мы покажем сейчас, что на таком свободном конце должно быть также выполнено некоторое предельное условие, которое непосредственно получится из условия экстремума интеграла (117). Действительно, если некоторая кривая дает экстремум интегралу (117) по сравнению со всеми близкими кривыми со свободным правым концом, то тем более она дает экстремум интегралу (117) при условии закрепления правого конца. Но тогда эта кривая, как мы показали выше, должна удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. быть экстремалью интеграла (117). Обратимся теперь к общему выражению первой вариации интеграла **[72]**:

$$\delta J=[F_{y'},\ \delta y]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y\,dx \quad (\delta y=\alpha\eta).$$

Как и выше, эта первая вариация должна обращаться в нуль. Член, содержащий интеграл, равен нулю, поскольку функция $y(x)$, как мы только что показали, должна и в этом случае удовлетворять уравнению Эйлера. Внеинтегральный член должен обращаться в нуль при $x=x_0$, так как этот конец является закрепленным. Таким образом, равенство нулю первой вариации приводит нас к равенству $F_{y'}\eta=0$ при $x=x_1$. На свободном конце η может быть произвольным, и окончательно мы получаем на свободном конце следующее предельное условие:

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0. \tag{118}$$

Оно дает нам некоторую связь между y и y' на свободном конце. Нетрудно проверить, что для интеграла (2_1) условие (118) будет иметь вид $y'=0$, т. е. в случае интеграла (2_1) оно сводится к требованию, чтобы на конце $x=x_1$ экстремаль была перпендикулярна к прямой $x=x_1$. Предельное условие (118) называется обычно *естественным предельным* или *граничным условием*.

(и вот это вроде как необязательно:)

Рассмотрим теперь интеграл, содержащий производные второго порядка:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\ y,\ y',\ y'')\,dx.$$

Принимая во внимание формулы (27) и (28), а также то обстоятельство, что на свободном конце $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ произвольны, мы получаем следующие два естественных граничных условия на свободном конце:

$$F_{y'}-\frac{d}{dx}F_{y''}=0;\quad F_{y''}=0. \tag{119}$$

Отметим, что первое из этих условий дает связь между величинами y, y', y'', y''' на свободном конце. Совершенно так же для двойного интеграла

$$J=\iint_B F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\,dx\,dy \tag{120}$$

естественные граничные условия на контуре l будут иметь такой вид:

$$F_{u_x}\frac{dy}{ds}-F_{u_y}\frac{dx}{ds}=0, \tag{121}$$

где s — длина дуги контура l. Это непосредственно вытекает из формулы (33) для первой вариации интеграла (120).

Про уравнение эйлера вроде написано внутри, хз нужно ли что-то дополнительное - больше не нашла

Подвижные концы в простейшей вариационной задаче

Задача со свободными концами

Рассмотрим задачу нахождения экстремума функционала

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),\dot{x}(t))dt,$$

областью определения которого является класс всевозможных гладких функций $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$. Краевые условия отсутствуют, т.е. концы графиков допустимых функций лежат на вертикальных прямых $t=t_0$ и $t=t_1$.

Теорема 1.11. Если функция $x=x_0(t)$ доставляет экстремум интегралу $J[x]=\int_{t_0}^{t_1} F(t,x(t),\dot{x}(t))dt$, то она есть экстремаль, а на концах выполняются условия:

$$F_{\dot{x}}\big|_{t=t_0}=0,\quad F_{\dot{x}}\big|_{t=t_1}=0. \tag{1.16}$$

Условия (1.16) называют *естественными краевыми условиями*.

30

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, когда один конец закреплен, а другой свободен. Для определения экстремали в такой задаче необходимо использовать только одно из условий (1.16), соответствующее свободному концу.

10) Изопериметрическая задача. Множитель Лагранжа. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Никита