Исследование сходимости разностного решения. Экстраполяция Ричардсона (правило Рунге, процесс Эйткена)

Важной составляющей Курсового проекта по вычислительной математике является верификация программы, реализующей численный метод путем проверки сходимости разностного решения к некоторому тестовому аналитическому решению $u(t,x)$

Определение сходимости в практических целях можно записать в таком виде (u(t,x) – точное решение, $y_m^n(\tau,h)$ – разностное, для наглядности вместе с номерами узлов указаны шаги разностной сетки, которые будут уменьшаться (сгущение сетки) с целью увеличить количество верных знаков:

$$\|u(t^n,x_m)-y_m^n(\tau,h)\| = C_1\tau^k + C_2h^l \qquad (*)$$

По поводу выбора норм: в случае, если решение непрерывная функция (параболические, эллиптические задачи) есть равномерная сходимость (норма максимум модуля). Решения уравнений гиперболического могут быть разрывными и для этого случая надо использовать нормы, в которых есть сходимость в смысле обобщенного решения. Например, разностный аналог нормы в пространстве функций с интегрируемым квадратом.

При наличии устойчивости разностного решения скорость сходимости k по τ и l по h по теореме Лакса-Рябенького-Филиппова теоретически равна порядку аппроксимации (степени главного члена разложения невязки по степеням τ и h.)

Обычно шаги по t и по x согласованы (из условия устойчивости или баланса главных членов погрешности либо как-то еще). Тогда в (*) в правой части остается зависимость только от h:

$$\|u(t^n,x_m)-y_m^n(\tau,h)\| = Ch^p \qquad (**)$$

Расчеты разностного решения выполняются на сгущающихся сетках с шагами h, h/2, h/4 и т.д. (до тех пор, пока коэффициент С в (**), определенный из расчетов с h и h/2 (два уравнения, два неизвестных С и p) и h/2 и h/4 изменится не более чем, например, на 10%. Последний параметр p дает нам фактическую скорость сходимости (сравниваем с теоретическим порядком аппроксимации). В литературе вычисление неизвестного p является частью процесса Эйткена. Далее, вычисляя $R_h = Ch^p$ получим оценку погрешности разностного решения (так называемое правило или метод Рунге). Имея разностные решения при различных τ и h $u(t^n,x_m)$ становится третьим неизвестным наряду с С и p и из трех уравнений (**), записанных в конкретном узле (t,x) «каркасной» сетки находим С, p, уточненное решение (и оценку погрешности). Если эту процедуру (правило Рунге) применить в ситуации, когда шаги сетки недостаточно малы (С еще изменяется – значит влияние отброшенных членов в разложении (**) погрешности по h еще значительно и P определяется некорректно. А следовательно экстраполяция может ухудшить, а не улучшить результат.