

Неравенства - 2

05.08.2019

Группа: пикачу

Задача 1. Докажите, что если для положительных a, b, c выполняется неравенство:
 $abc > ab + bc + ca$, то

$$\sqrt{abc} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad (1)$$

Задача 2. Докажите:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \quad (2)$$

Задача 3. Известно, что $a, b, c, d > 0, abcd = 1$. Докажите, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10 \quad (3)$$

Задача 4. Для $x + y + z + t = 1$ докажите:

$$\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+5y} + \sqrt{1+5z} + \sqrt{1+5t} \leq 6 \quad (4)$$

Задача 5. Для $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 1$ докажите:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}} \quad (5)$$

Задача 6. $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$. Докажите, что

$$ab + bc + ca - abc \leq 8/27 \quad (6)$$

Задача 7. Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом при помощи неравенства КШБ:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (7)$$

Задача 8. Докажите, что $x^2 + 2y^2 + z^2 \geq x\sqrt{x^2 + 2y^2} + y\sqrt{y^2 + 2z^2}$ и найдите все значения x, y, z для которых неравенство обращается в равенство.