THEORY 1

Фраза в условии задачи “Original timeseries is generated using stable distribution with the following parameters:” направила меня по ложному пути, предположению что цена подчиняется устойчивому распределению. Простая проверка параметров этого распределения (location=1) показывает что не так потому что цена не может быть отрицательной. Более логично предположить что one day returns (а не цена), подчиняется этому распределению. В этом случае среднее значение (delta=1) означает что в среднем стоимость актива за день меняется на 100% (тем не менее, очень большое значение).

1. Расчет 10 days returns из 1 day returns:

Из определения 1 day returns следует:

$$P_{i+1} = P_i(r_i^1 + 1) \text{ или } P_{i+10} = P_i(r_i^1 + 1)(r_{i+1}^1 + 1)\ldots(r_{i+9}^1 + 1)$$

Следовательно формула для 10 days returns принимает вид:

$$r_i^{10} = \left(P_{i+10} - P_i\right) / P_i = (r_i^1 + 1)(r_{i+1}^1 + 1)\ldots(r_{i+9}^1 + 1) - 1$$

Следовательно, среднее 10 days returns (оно существует тк alpha=1.7>1) оценивается как :

$$E[r^{10}] = 2^{10} - 1 = 1023$$

2. Определение условия остановки по вариации среднего значения:

$$Var[m_{r^{10}}] = E[\left(m_{r^{10}} - E[r^{10}]\right)^2] = E[\left(\sum r_i^{10} / n - nE[r^{10}] / n\right)^2] =$$

$$= E[\left(\sum (r_i^{10} - E[r^{10}]) / n\right)^2] = E[\left(\sum (\xi_i) / n\right)^2] = E[(\xi_1 + \xi_2 + \ldots)(\xi_1 + \xi_2 + \ldots)] / n^2 =$$

$$= \sum E[\xi_i^2] / n^2 + 2\sum E[\xi_i \xi_{i+1}] / n^2 + 2\sum E[\xi_i \xi_{i+2}] / n^2 + \ldots$$

THEORY 2

Первое слагаемое равно сумме стандартных отклонений популяции деленному на n^2
Остальные слагаемые равны нулю в предположении статистической независимости ksi_i

$$E[\xi_i \xi_{i+k}] = E[(r_i^{10} - E[r^{10}])(r_{i+k}^{10} - E[r^{10}])] = E[r_i^{10} r_{i+k}^{10}] - \left(E[r^{10}]\right)^2$$

$$E[\xi_i \xi_{i+k}] = 0 \qquad \text{для} \qquad E[r_i^{10} r_{i+k}^{10}] = E[r_i^{10}]E[r_{i+k}^{10}]$$

В общем случае остальные слагаемые не равны нулю

$$E[r_i^{10} r_{i+k}^{10}] = E[\left((r_i^1 + 1)(r_{i+1}^1 + 1)\ldots(r_{i+9}^1 + 1) - 1\right)\left((r_{i+k}^1 + 1)(r_{i+k+1}^1 + 1)\ldots(r_{i+k+9}^1 + 1) - 1\right)] = \ldots$$

Расчет вторых моментов (p=2) не очевиден тк из теории устойчивого распределения известно:

$$E[|r_i^1|^p] < \infty \Leftrightarrow p < \alpha = 1.7$$

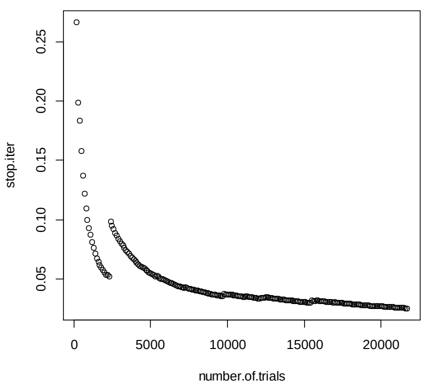
В первом приближении условие остановки можно определить как:

$$\sqrt{Var[m_{r^{10}}]} / E[r^{10}] = \sigma_{population} / (\sqrt{n} E[r^{10}]) = 0.5\% / 100 = 0.005$$

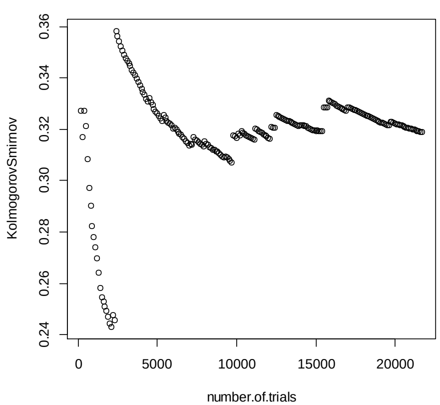
Или по вариации среднего значения квантиля $K_{0.01}$:

$$\sqrt{E[\left(\sum K_{0.01,i} / n - E[K_{0.01}]\right)^2]} / E[K_{0.01}] = \sigma_{K_{0.01}} / (\sqrt{n} E[K_{0.01}]) = 0.5\% / 100 = 0.005$$

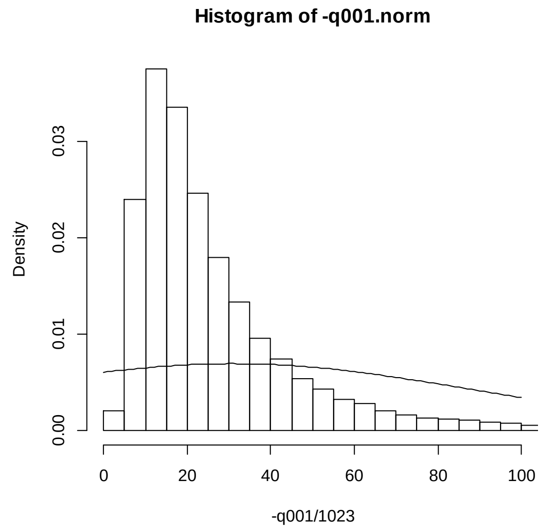
RESULTS



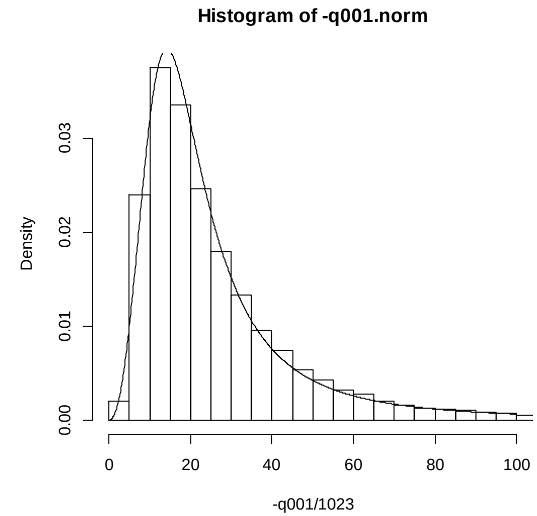
The defined above stopping condition provides well the stationarity.



Kolmogorov Smirnov test for normal distribution of 0.01 quantile (q001).



However, normal distribution is not the best choice.



Burr distribution looks much better.