

Curs 10

2016-2017

Programare Logica

Cuprins

1 Sisteme de rescriere abstracte

Din cursurile trecute

- (S, Σ) semnătură și R sistem de rescriere
- pentru $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$ definim relația $t \rightarrow_R t'$ astfel:

$$\begin{aligned} t \rightarrow_R t' \quad \Leftrightarrow \quad & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\ & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & c \in T_{\Sigma}(X \cup \{z\}) \text{ context,} \\ & l \rightarrow_s r \in R \text{ cu } \text{Var}(l) = Y, \\ & \theta : Y \rightarrow T_{\Sigma}(X) \text{ substituție} \end{aligned}$$

- \rightarrow_R este relația de rescriere generată de sistemul de rescriere R .

Din cursurile trecute

- (S, Σ) semnătură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- \rightarrow_E relația de rescriere generată de R_E
- \leftrightarrow_E^* echivalența generată de \rightarrow_E

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \dot{=}_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t'$$

Sisteme de rescriere abstracte

Sisteme de rescriere abstracte

Definitie

Un **sistem de rescriere abstract** este o pereche (T, \rightarrow) unde:

- T este o mulțime,
- $\rightarrow \subseteq T \times T$ (\rightarrow este o relație binară pe T).

Definiii:

- $\leftarrow := \rightarrow^{-1}$ (relația inversă)
- $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$ (închiderea simetrică)
- $\xrightarrow{*} := (\rightarrow)^*$ (închiderea reflexivă și tranzitivă)
- $\leftrightarrow^* := (\leftrightarrow)^*$ (echivalența generată)

Rescrierea termenilor

(S, Σ) semnătură și Y mulțime de variabile.

regulă de rescriere	$l \rightarrow_s r$	l, r termeni din $T_\Sigma(Y)$
sistem de rescriere (TRS)	R	mai multe $l \rightarrow_s r$
relația de rescriere	\rightarrow_R	generată de R
echivalența	$\stackrel{*}{\leftrightarrow}_R$	generată de \rightarrow_R

$(T_\Sigma(Y), R)$ este un sistem de rescriere abstract.

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m, k) \mid \text{ex. } n \geq 0, \text{ ex. } k_1, \dots, k_n \in T \text{ a.i. } m \rightarrow k_1 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k\} \Rightarrow$
- $\xrightarrow{*} = \xrightarrow{+} \cup \{(k, k) \mid k \in T\}$

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

Definiție

- $t \in T$ este **reductibil** dacă există $t' \in T$ a.î. $t \rightarrow t'$.
- O **reducere** este un șir $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$ este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este o **formă normală a lui** t dacă
 - $t \xrightarrow{*} t_0$ și
 - t_0 este în formă normală.
- t_1 și t_2 **se întâlnesc** dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$.
 - notație: $t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele.
- k este o formă normală a lui m dacă k este un factor prim al lui m .

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă $w = a^n b^k$, cu $n, k \geq 0$.
- $w_1 \downarrow w_2$ dacă
 - $nr_a(w_1) = nr_a(w_2)$ și
 - $nr_b(w_1) = nr_b(w_2)$.

Sisteme de rescriere abstracte

(T, \rightarrow) sistem de rescriere.

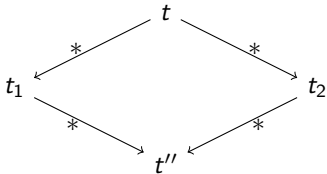
Definitie

(T, \rightarrow) se numește

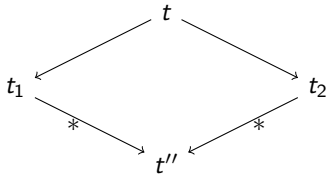
- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
 - orice rescriere se termină.
- **confluent**: $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **local confluent**: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Church-Rosser**: $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- **Normalizat**: orice element are o formă normală.
- **Complet** (convergent, canonic): confluent și noetherian.

Sisteme de rescriere abstracte

Confluent:



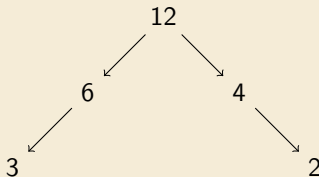
Local confluent:



Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- (T, \rightarrow) este noetherian:
 - orice m se rescrie într-un factor prim al său.
- (T, \rightarrow) nu este confluent:



Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (1)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \xleftrightarrow{*} t'$.

Demonstrație

Dacă $t \downarrow t'$, atunci există t_0 a.î. $t \xrightarrow{*} t_0 \xleftarrow{*} t'$, i.e. $t \xleftrightarrow{*} t'$.



Proprietăți

Propoziție (2)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

noetherian \Rightarrow orice element are o formă normală
 \nLeftarrow

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow Nat, s : Nat \rightarrow Nat, + : NatNat \rightarrow Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x, x + s y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \rightarrow x, x + s y \rightarrow s(x + y), 0 + y \rightarrow y + 0\}$
- orice termen are o formă normală, de forma $s(s(\dots(0)\dots))$
- R_E nu este noetherian: $0 + 0 \rightarrow_E 0 + 0 \rightarrow_E \dots$
- eliminând ultima regulă de rescriere, obținem un sistem de rescriere noetherian

Proprietăți

Propoziție (3)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

complet \Rightarrow orice element t are o unică formă normală $fn(t)$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, t are o formă normală, i.e.

$t \xrightarrow{*} t'$ și t' este în formă normală.

- Presupunem că t mai are o altă formă normală t'' .

- Cum $t \xrightarrow{*} t''$ și $t \xrightarrow{*} t'$, din confluență avem

$t' \downarrow t''$.

- Cum t' și t'' sunt în formă normală, putem obține doar $t' = t''$.

□

Proprietăți (goto 25)

Propoziție (4)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Leftrightarrow Church-Rosser

Demonstrație

(\Leftarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$.
- Atunci avem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$.
- Cum (T, \rightarrow) este Church-Rosser, obținem că $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci (T, \rightarrow) este confluent.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

(\Rightarrow)

- Presupunem $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$. Atunci există n și t'_1, \dots, t'_n a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:

- $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.

- $n \rightarrow n + 1$: Pres. $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$.

Din ip. de inducție știm $t'_1 \downarrow t'_n$. Atunci ex. w a.î. $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$.

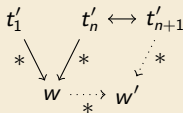
Avem două cazuri:

- $t'_{n+1} \rightarrow t'_n$: evident $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$, deci $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- $t'_n \rightarrow t'_{n+1}$: Cum $w \xleftarrow{*} t'_n \rightarrow t'_{n+1}$ și (T, \rightarrow) este confluent, obținem $w \downarrow t'_{n+1}$. Deci există w' a.î. $w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$.

Deci $t'_1 \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$, adică $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- În concluzie, $t_1 \downarrow t_2$.



□

Proprietăți

Propoziție (5)

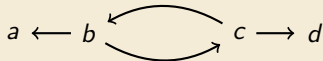
Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

confluent \Rightarrow local confluent
 \nLeftarrow

Exemplu

□ $T = \{a, b, c, d\}$

□ \rightarrow :



□ T este local confluent:

□ $a \leftarrow b \rightarrow c$ și $a \downarrow c$ (în a)

□ $b \leftarrow c \rightarrow d$ și $b \downarrow d$ (în d)

□ T nu este confluent:

□ $a \xleftarrow{*} b \xrightarrow{*} d$, dar $a \not\downarrow d$

□ $a \xleftarrow{*} c \xrightarrow{*} d$, dar $a \not\downarrow d$

Proprietăți

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

Demonstrație

- Deoarece (T, \rightarrow) este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.
- Fie M mulțimea elementelor care au cel puțin două forme normale diferite:

$$M = \{t \mid n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2, n_1, n_2 \text{ în formă normală} \}.$$

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(\star) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

□ Fie $t \in M$.

□ Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$.

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$:

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow n_2$.

■ Cum n_1 și n_2 în formă normală, obținem $n_1 = n_2$ (contradicție).

□ Pres. $n_1 \leftarrow t \xrightarrow{*} n_2$:

■ Atunci există t_2 a.î. $n_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$.

■ Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow t_2$.

■ Cum n_1 în formă normală, obținem $t_2 \xrightarrow{*} n_1$.

■ Deci $t_2 \in M$ și $t \rightarrow t_2$.

□ Pres. $n_1 \xleftarrow{*} t \rightarrow n_2$:

■ Atunci există t_1 a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$.

■ Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow n_2$ și, mai departe, $t_1 \xrightarrow{*} n_2$.

■ Deci $t_1 \in M$ și $t \rightarrow t_1$.

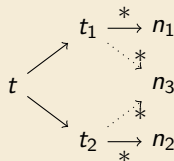
Proprietăți

Demonstrație (cont.)

□ (★) pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \rightarrow t'$.

Pres. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2$:

- Atunci există t_1, t_2 a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$.
- Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci ex. n_3 în formă normală a.î. $t_1 \xrightarrow{*} n_3$ și $t_2 \xrightarrow{*} n_3$.
- Deoarece $n_1 \neq n_2$, deducem că $n_3 \neq n_1$ sau $n_3 \neq n_2$.
- Dacă $n_3 \neq n_1$, atunci $t_1 \in M$ și $t \rightarrow t_1$.
- Dacă $n_3 \neq n_2$, atunci $t_2 \in M$ și $t \rightarrow t_2$.



Demonstrație (cont.)

- Arătăm unicitatea formei normale, i.e. $M = \emptyset$.
 - Pres. prin absurd că $M \neq \emptyset$. Atunci există $t_1 \in M$.
 - Din (\star) , ex. $t_2 \in M$ a.î. $t_1 \rightarrow t_2$.
 - Prin inducție, obținem un șir $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de elemente din M a.î.

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow \dots$$

ceea ce contrazice faptul că (T, \rightarrow) este noetherian.

- Pres. $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$. Cum t are o unică formă normală n , obținem $t_1 \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t_2$. Deci $t_1 \downarrow t_2$.
- În concluzie, (T, \rightarrow) este confluent.



Proprietăți

Propoziție (7)

Fie (T, \rightarrow) sistem de rescriere complet.

$$t \xleftrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

Demonstrație

(\Leftarrow)

- Dacă $fn(t) = fn(t')$, atunci evident $t \downarrow t'$.
- Aplicăm Propoziția (1) și obținem $t \xleftrightarrow{*} t'$.

(\Rightarrow)

- Cum (T, \rightarrow) este complet, este confluent și or. element are o unică formă normală. Din Propoziția (4), este Church-Rosser.
- Deoarece $t \xleftrightarrow{*} t'$, obținem că $t \downarrow t'$, i.e. există w a.î. $t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'$.
- Fie n unica formă normală a lui w .
- În concluzie, $t \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t'$, deci $fn(t) = fn(t')$.



Deducția ecuațională și rescriere

- (S, Σ) semnătură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- \rightarrow_E relația de rescriere generată de R_E
- \leftrightarrow_E^* echivalența generată de \rightarrow_E

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \dot{=}_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t'$$

Corolar (8)

Dacă sistemul de rescriere $(T_{\Sigma}(X), R_E)$ este *complet*, atunci:

$$E \vdash (\forall X) t \dot{=}_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \leftrightarrow_E^* t' \quad \Leftrightarrow \quad fn(t) = fn(t')$$

Concluzii

Dacă E este o mulțime de ecuații a.î.
 R_E este un **sistem de rescriere complet**,
atunci **deducția ecuațională** $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t'$ este decidabilă:

Algoritm:

1. $t \xrightarrow{*}_E fn(t)$
2. $t' \xrightarrow{*}_E fn(t')$
3. $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$

Observații

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
 - echivalentă cu oprirea mașinilor Turing
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
 - diverse metode
- Pentru sisteme de rescriere care se termină, **confluența este decidabilă**.
 - algoritmul Knuth-Bendix



Pe săptămâna viitoare!