CONSULTAȚII – Joi, $11^{00} - 12^{00}$ sala 8

ȘIRURI DE FUNCȚII

Ex 1 Fie $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ și $0 \le a \le b$.

Studiați convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (a) și $\left(f_n\big|_{[a,b]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (b)

Rezolvare

(a) Fie $x \in [0,\infty)$

Calc. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$

$A = \{x \in D \mid \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = [0,+\infty)$

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,+\infty)$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[0,+\infty)}]{s} f$ nu putem aplica POLYA sau DINI pt că $[0,+\infty)$ nu e compactă (nu e mărginită sup).

Verificăm criteriul practic:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \right) = ?$

$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{x+n} - 0 \right| = \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{x}{x+n} \overset{\text{not.}}{=} g(x)$

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} g(x) = \sup\limits_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{x+n}$

(- Pct de discontinuitate, de derivabilitate, derivata, tabelul)

$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

g continuă pe $[0,\infty)$

g derivabilă pe $[0,\infty)$

$g'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2}$ $\forall x \in [0,\infty)$

$$g'(x)=0 \Rightarrow \frac{n}{(n+x)^2}=0 \Rightarrow x\in\emptyset$$

x	$[0$			$+\infty)$
$g'(x)$	$+$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$		$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$		1

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{n}{x}\right)} = 1$$

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = 1 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-f(x)|\right) = 1.$$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)-f(x)|\right)\neq 0 \Rightarrow f_n \underset{[0,\infty)}{\overset{u}{\not\longrightarrow}} f.$$

(d) MET I $\left(f_n\big|_{[a,b]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n \underset{[0,\infty)}{\overset{s}{\longrightarrow}} f \Longrightarrow \left(f_n\big|_{[a,b]}\right) \underset{[a,b]}{\overset{s}{\longrightarrow}} f\big|_{[a,b]}$$

intersecția celor 2 domenii

De la punctul (a) avem

$$g(x)=|f_n(x)-f(x)| = \frac{x}{x+n} \quad \forall\, x\in[a,b].$$

$$g\big|_{[a,b]} : [a,b]\to\mathbb{R}.$$

x	$[a$		$b]$
g'	$+$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$	$+$
g	$\frac{a}{a+n}$	$\nearrow$	$\frac{b}{b+n}$

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = \frac{b}{b+n} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{b+n} = 0 \Longrightarrow f_n\big|_{[a,b]} \underset{[a,b]}{\overset{u}{\longrightarrow}} f\big|_{[a,b]}.$$

MET II Studiem conv. unif a lui $f_n|_{[a,b]}$ cu TEO. DINI:

- $[a,b]$ compactă ✓
- $f_n|_{[a,b]}$ funcție continuă pe $[a,b]$. ✓
- $f|_{[a,b]}$ funcție continuă pe $[a,b]$. ✓
- $f_n|_{[a,b]} \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f|_{[a,b]}$. ✓
- monotonia șirului de funcții

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x}{x+n+1} - \frac{x}{x+n} =$$

$$= \frac{\cancel{x+n+1}\ \cancel{n}x + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{xn} - x}{(x+n+1)(x+n)} = \frac{-x}{(x+n+1)(x+n)} \leq 0 \quad \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Rightarrow f_{n+1} \leq f_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow f_n|_{[a,b]}$ este descrescator

$\Rightarrow f_n|_{[a,b]}$ este monoton.

$\xRightarrow{\text{TEO. DINI}} f_n|_{[a,b]} \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f|_{[a,b]}$. ✓

Ex. 2 Studiați convergența simplă și uniformă a șirului de fcți

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = x^n(1-x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} A = [0,1] \\ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$$

Nu putem aplica POLYA pt că nu avem șir de funcții continue

$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n} = nx^{n-1}(1-2x^n)$ pe $[0,1]$.

Semnul derivatei variată $\Rightarrow$ nu e continuă pe $[0,1]$.

Nu se poate aplica nici DINI.

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n(1-x^n) - 0| = |\underbrace{x^n}_{\geq 0}\underbrace{(1-x^n)}_{\geq 0}| =$$

$$= x^n(1-x^n) = g(x).$$

$$g\left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)^n\left[1 - \left(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4} \quad \Big| \cdot \text{Aplic} \lim_{n\to\infty}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\right) \geq \frac{1}{4} \neq 0$$

$$\Longrightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} f.$$

Ex 3

Studiați convergența simplă și unif. a șirului de fcții.

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Nu merge cu DINI sau POLYA pt că $\mathbb{R}$ nu e comp.

Fie $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sin(nx)}_{[-1,1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 0$$

$A = \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{s} f$

Nu putem aplica condiția suficientă, pt că f este continuă peste tot.

$\Rightarrow$ Criteriul practic.

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n} - 0\right| = \left|\frac{\sin(nx)}{n}\right| = \frac{|\sin(nx)|}{n} = g(x)$$

Evaluăm supremumul

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{n}$$

$|\sin(nx)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big| \cdot \frac{1}{n}$

$g(x) \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big|$ Trecem la $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) \leq \frac{1}{n}$ Nu putem trece la limită în inegalitate.

$\Rightarrow$ Folosim alte criterii (cleşte, majorare, etc)

nu există!

$(-1)^n \leq \frac{2n}{n+1} \ \Big| \lim\limits_{n\to\infty} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \leq 2$

$$0 \le \sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) \le \frac{1}{n}$$

$n\to\infty$: $\sup_{x\in\mathbb{R}} g(x) \to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$

$\xrightarrow{\text{T. Cleste}}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)|\right)=0$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} f.$$

Ex. 4 Conv. simplă și unif. a șirului de fcții.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a\in(-1,1) \\ 1, & a=1 \\ +\infty, & a>1 \\ \nexists, & a\le -1 \end{cases}$$

$f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$, $n\in\mathbb{N}^*$. $x^n \to 0$

Luăm $x\in(-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$A=(-1,1)$

$f:(-1,1)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, f continuă $\Rightarrow$ nu merge cu condiția suficientă

$$f_n \xrightarrow[(-1,1)]{s} f.$$

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{-x^n}{1-x}\right| =$$

$$= \frac{|-x^n|}{1-x} = \frac{|x^n|}{1-x} = \frac{|x|^n}{1-x}$$

$$= g(x) = \begin{cases} \dfrac{(-x)^n}{1-x}, & x\in(-1,0) \\ \dfrac{x^n}{1-x}, & x\in[0,1) \end{cases}$$

de terminat, temă

continuitatea, derivabilitatea, apoi derivăm

sau evaluăm modulul.

1 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

a) studiați derivabilitatea lui f

b) studiați continuitatea derivatei lui f

(a) f continuă pe $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{x^2}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\in[-1,1]} = 0\\ f(0)=0\end{array}\right| \Rightarrow f \text{ continuă în } 0$$

(funcțiile cu $|\,|$, $\sqrt{\ }$, arcsin, arccos sunt continue peste tot dar au probleme cu derivabilitatea)

f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ fiind compunere de funcții derivabile. Verificăm derivabilitatea în 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\cos\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{x}\underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\in[-1,1]} = 0$$

$\Rightarrow f$ derivabilă în 0 și $f'(0)=0$

(b) Facem derivata

$$f'(x)=\begin{cases}\left(x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\right)', & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases} = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+x^2\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\cancel{x^2}\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases} = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f'(x)$ este sigur continuă (pt $x\neq 0$) pe $\mathbb{R}^*$, fiind $\left\{\begin{array}{l}\text{compunere}\\ \text{produse}\\ \text{și adunare}\end{array}\right.$ de funcții elementare.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\underset{\downarrow\, 0}{2x}\underset{\in[-1,1]}{\cos\frac{1}{x}}}_{\downarrow x\to 0\ \ 0} + \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{g(x)\ \nexists}\Big)$$

$\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = k\pi$

$\Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$

$\sin\frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi + 4k\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{2}{\pi(4k+1)}$

Luăm 2 șiruri $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$y_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$

$\lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n) = 0$

$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = 1 \quad \Big\| \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} g(x)$

$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) \nexists \Longrightarrow$ f' nu e continuă în 0.

$\boxed{2}$ Fie $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x-1|+1}$

(a) derivabilitatea lui f

(b) $f(0)$, $f(2)$ și verificați aplicabilitatea T. Rolle

(a) $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x}, & x\in[0,1) \\ \frac{1}{x}, & x\in[1,2] \end{cases}$

Verificăm continuitatea.

f este sigur continuă pe $(1,2] \cup [0,1)$

$l_s(1) = \lim_{x\nearrow 1}\frac{1}{2-x} = 1$

$l_d(1) = \lim_{x\searrow 1}\frac{1}{x} = 1$

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$\Longrightarrow f$ este continuă în 1

$\Rightarrow f$ continuă pe $[0,2]$.

Derivabilitatea

f e sigur derivabilă pe $(1,2] \cup [0,1)$

$$\cancel{f'_s(1) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{2-x} - 1}{}}$$

$$f'_s(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\frac{1}{2-x} - 1}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{\cancel{(x-1)}}{(2-x)\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{2-x} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \searrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{1-x}{x(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \searrow 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \searrow 1} -\frac{1}{x} = -1 \in \mathbb{R}.$$

Dar $f'_s(1) \neq f'_d(1) \Rightarrow f$ nu e derivabilă în 1

$\Rightarrow f$ este derivabilă pe $[0,2] \setminus \{1\}$.

(b) $f(0) = \frac{1}{2}$ $\qquad f(2) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1), & x \in [0,1) \\ -\frac{1}{x^2} & x \in (1,2] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-x)^2}, & x \in [0,1) \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in (1,2] \end{cases}$$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x [0,2] \setminus \{1\}$

derivata nu se anulează

$f(0) = f(2)$

$f(a) = f(b)$

f continuă pe $[a,b]$

$\cancel{f\ e}$ derivabilă pe $(0,2)$

NU ESTE

$\Rightarrow$ Nu se poate aplica T. Rolle deoarece f nu e derivabilă $(0,2)$

3 Determinați nr real $a \in (0, +\infty)$ care verifică inegalitatea $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = 2^x + a^x - 3^x - 4^x \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 0$ punct de minim global (2)

$\mathbb{R}$ mulțime deschisă $\Rightarrow 0 \in \mathring{\mathbb{R}}$ (1)

f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în 0 (3)

$(1)+(2)+(3) \xRightarrow{\text{Fermat}} f'(0) = 0$

$f'(x) = 2^x \ln 2 + a^x \ln a - 3^x \ln 3 - 4^x \ln 4$

$f'(0) = \ln 2 + \ln a - \ln 3 - \ln 4 = 0$

$\ln 2a - \ln 12 = \ln 1$

$\ln\left(\frac{2a}{12}\right) = \ln 1 \Rightarrow \frac{2a}{12} = 1$

$2a = 12 \Rightarrow a = 6$.

4 Fie $f: \mathbb{R} \to (1, +\infty)$

$f(x) = 3^x + 2^x + 1$.

(a) dem că f este strict monotonă și bijectivă

(b) calculați $(f^{-1})(6)$.

(a) f continuă pe $\mathbb{R}$

f derivabilă pe $\mathbb{R}$

$f'(x) = \underset{>0}{3^x}\, \underset{>0}{\ln 3} + \underset{>0}{2^x}\, \underset{>0}{\ln 2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare

$\Rightarrow f$ strict monotonă

$\Rightarrow f$ injectivă. (1)

f continuă pe $\mathbb{R} \Longrightarrow$ are DARBOUX
f strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3^x + 2^x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (3^x + 2^x + 1) = \infty$$

$\Rightarrow \text{Im} f = (1, \infty)$

$\text{Im} f =$ codomeniu $\Longrightarrow$ f este ~~bijectivă~~ surjectivă (2).

(1) + (2) $\Longrightarrow$ bijectivă.

(b) $f^{-1} : (1, \infty) \to \mathbb{R}$

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad f(x_0) = y_0, \quad y_0 = 6$$

$f(x_0) = 6 \iff 3^{x_0} + 2^{x_0} + 1 = 6$
$\iff 3^{x_0} + 2^{x_0} = 5$
$x_0 = 1$ verifică.

f bijectivă are soluție unică $\Rightarrow$ căutam soluția

Verificăm că f e derivabilă în $x_0 = 1$
f derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ derivabilă în 1

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$f'(1) = \underbrace{3 \ln 3}_{>0} + \underbrace{2 \ln 2}_{>0} > 0$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x_0) = (f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\ln 3 + 2\ln 2}$$

$\boxed{5}$ Din urmatoarele inegalitati Folosim LAGRANGE

(a) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(b) $\frac{y-x}{y} < \ln \frac{y}{x} < \frac{y-x}{x}$

(a) Inegalitatea este evidenta dacă $x = y$

Pp că $x < y$

Aplicăm LAGRANGE pt $\operatorname{arctg} t$ pe $[x, y]$

$f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(t) = \operatorname{arctg} t$

FUNCȚII DERIVABILE. SERII DE FUNCȚII.

Ex 1 Dem inegalitățile:

$$e^x \leq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x \leq 0 \text{ și}$$

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x \geq 0$$

Ambele inegalități sunt verificate pt $x=0$

Considerăm $x \neq 0$

Alegem funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

f e

$\boxed{ex\ 2}$ Calculați $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^{2n+1}}$

Toate monoamele $\frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots$ sunt în jurul lui 0
$\Rightarrow y=0$ (y-ul din curs)

$\forall x \neq 0\ \exists c \in \mathbb{R}$ situat între 0 și x ai.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{e^c}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

Calculam $\dfrac{e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^{2n+1}} = \dfrac{e^c \cdot \cancel{x^{2n+1}}}{(2n+1)!} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x^{2n+1}}} =$

$= \dfrac{e^c}{(2n+1)!}$ S-a schimbat variabila. $c \in 0$ și x

$\left.\begin{array}{l} c \text{ situat între } 0 \text{ și } x \\ x \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow c \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - \frac{x}{1!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{x^{2n+1}} = \lim_{c\to 0} \dfrac{e^c}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$

$\boxed{ex\ 3}$ Vom folosi fct. concave/convexe.
Arătați că $\operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{2} \leq \dfrac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y}{2}\ \forall x, y \leq 0$

Aleg. o fct, Arăt că e concavă/convexă. Apoi folosim
Verif că e de 2 ori deriv
una din def. fct. convx/concav.

Alegem $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$

$$f'(x)=(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{x^2+1} \quad \forall x\in(-\infty,0]$$ ≥ 0 pt că $x\leq 0$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=-\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2x=-\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad \forall x\in(-\infty,0]$$ ≥ 0

$\Rightarrow f$ derivabilă de 2 ori pe $(-\infty,0]$

$\Rightarrow f''(x)<0 \quad \forall x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ convexă

$\Rightarrow f((1-t)x+ty)\leq(1-t)f(x)+t f(y) \quad \forall x,y\in(-\infty,0]$
$\forall t\in[0,1]$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}[(1-t)x+ty]\leq \underline{(1-t)\operatorname{arctg}x+t\operatorname{arctg}y}$
$\forall x,y\in(-\infty,0]$
$\forall t\in[0,1]$

Alegem $t=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{x+y}{2}\leq\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}y \quad \forall x,y\in(-\infty,0]$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{x+y}{2}\leq\frac{\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y}{2} \quad \forall x,y\in(-\infty,0]$

Dacă $x,y\geq 0$, f era concavă și se schimba semnul inegalității cu $\geq$.

$\boxed{ex4}$ Fie $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă a.î. $\exists$

$\exists \lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = l \in \mathbb{R}$. Dem că $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = l$ și

$\exists \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

~~Trebuie să scriem~~ $f(x)+f'(x)$ ca raport de 2 derivate.

$f(x)+f'(x) = \frac{g'(x)}{h'(x)}$??

Alegem $(e^x \cdot f(x))' = e^x f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$

$\Downarrow f(x)+f'(x) = \frac{(e^x f(x))'}{e^x}$ $= (e^x)'$

Și aleg $g, h : (a,\infty) \to \mathbb{R}$

$g(x) = e^x \cdot f(x)$

$h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x$

verificăm ipotezele lui L'HOSPITAL:

1) g, h derivabile pe $(a,+\infty)$

2) $e^x = h'(x) \neq 0$

3) Aflăm cazul de nedeterminare al lui $\frac{g}{h}$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

4) $\exists ? \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = l \in \mathbb{R}$ (din ip)

$\Longrightarrow \exists \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{h'(x)} = l$

$\Rightarrow$ ~~$\lim_{x\to\infty} e^x(f(x)\ f'(x)$~~ $\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{e^x}\cdot f(x)}{\cancel{e^x}} = \lim_{x\to\infty} f(x) = l$.

$f'(x) = \underbrace{f(x)+f'(x)}_{\downarrow x\to\infty \; l} - \underbrace{f(x)}_{\downarrow x\to\infty \; l} \xRightarrow{l\in\mathbb{R}} \exists \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

$\boxed{ex\ 5}$ a) Dem că seria de f-cții ~~cu~~ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

b) Dem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$, dar este unif. convg. pe $\mathbb{R}$.

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$$

Prin inegalități scăpăm de x și căutăm majoranți.

$|\cos(nx)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ seria armonică cu $\alpha > 1 \Longrightarrow$ convergentă $\Rightarrow$

↳ serie converg. de nr reale

$\xrightarrow[\text{lui WEIERSTRASS}]{\text{Criteriul}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ nu este absolut conv. pe $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ nu este simplu convergentă pe $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ seria de nr reale $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ este divergentă.

Se fixează x în $\mathbb{R}$ și obț. o serie de nr reale.

x = constantă.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

Facem cu criterii de comp. de la serii de nr reale.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x^2} = 1 \in (0,+\infty)$$

$\Rightarrow$ seriile $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură.

iar $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ este serie armonică cu $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ este divergentă $\longrightarrow$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ este divergentă $\forall x \in \mathbb{R}$

Deci $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ nu e simplu convergentă pe $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ nu e absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

q.e.d.

O serie e simplu conv.: se fixează un x și se arată că seria de nr reale atașată de fct. e conv.

O serie e ~~simpl~~ abs conv: —— " —— seria de nr reale de fct a modulelor e convergentă

TEMĂ: Arătați că e unif. converg, folosind crit lui DIRICHLET.

Funcții diferențiabile

ex. 1 Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Studiați diferențiabilitatea funcției.

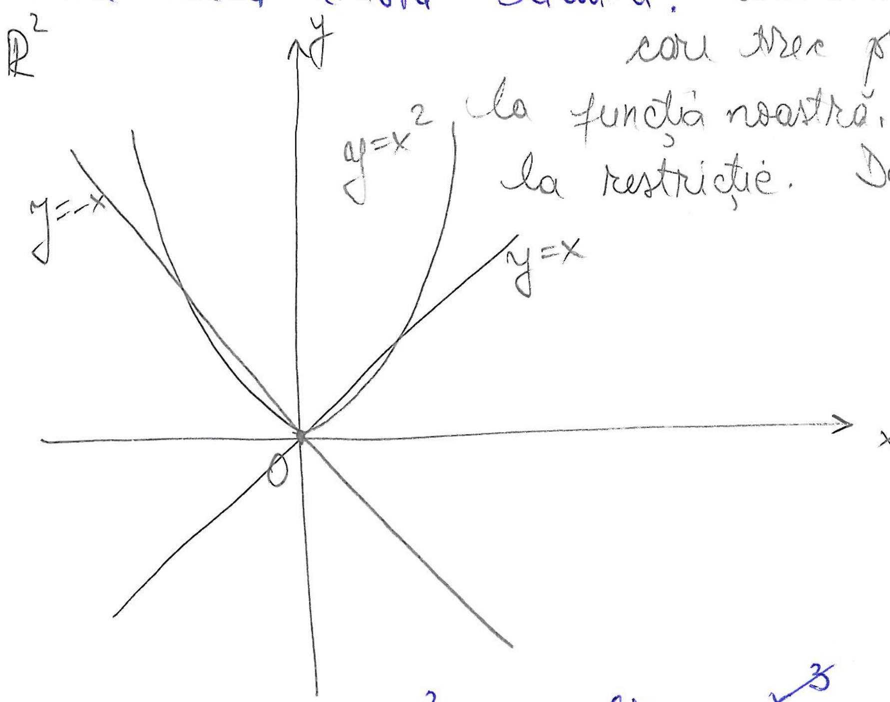
b) Det. punctele critice ale lui f.

a) f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ fiind o compunere și un raport de funcții elementare continue

Verificăm continuitatea în $(0,0)$

Calc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=}$

Testăm dacă există limita. Căutăm două direcții diferite care trec prin punct și restricționăm la funcția noastră. Apoi facem limitele la restricție. Dacă dau diferit $\Rightarrow$ lim nu există



$\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\sqrt{2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^3}}{\cancel{|x|}\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot |x|}{\sqrt{2}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3}{\sqrt{2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^3}{|x|\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x\,|x|}{\sqrt{2}} = 0$

$y = x^2$ parabolă

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{|x|\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2|x|}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ limita funcției <u>s-ar putea</u> să fie 0.

Folosim criteriul cleștelui și realizăm prin inegalități funcțiile ajutătoare.

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq |x|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{|x|} \quad \Big| \cdot \cancel{x^2y} \leftarrow \text{nu știm ce semn are.}$$

$$\cdot |x^2y|$$

$|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$

$$\Rightarrow \frac{|x^2y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x^2y|}{|x|} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y)|}_{a} \leq \underbrace{|xy|}_{r}$$

$$\Rightarrow -|xy| \leq f(x,y) \leq |xy|$$

$(x,y)\to(0,0)$: $-|xy| \to 0$, $|xy| \to 0$; $(x,y)\to(0,0)$

$\xrightarrow{\text{Teo. Cleste}}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$f(0,0) = 0$.

$\Rightarrow f$ este continuă în $(0,0) \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(x^2y)'_x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - (x^2y)\cdot(\sqrt{x^2+y^2})'_x}{|x^2+y^2|} =$$

$$= \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} + x^2y\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

geometria euclidiană plană și tridimensională - ref 2

$$= \frac{x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{x^2\sqrt{x^2+y^2} - x^2y\cdot(\sqrt{x^2+y^2})'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^2\sqrt{x^2+y^2} - x^2y\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Acum verificăm în $(0,0)$. Cu definiția.

$$\lim_{t\to 0} f((0,0) + t\cdot \overset{(1,0)}{\overset{\shortparallel}{e_1}}) - f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} =$$

$$~~\lim_{t\to 0} \frac{t^2\cdot 0}{\sqrt{\ldots}}~~ = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^2\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}} - 0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t\cdot \overset{(0,1)}{\overset{\shortparallel}{e_2}}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

is de mai

$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mulțime deschisă
$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

În $(0,0)$ studiem diferențiabilitatea cu definiția.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(x,y) = a\cdot x + b\cdot y = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y = 0$$

$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|_2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\substack{\in[0,1] \\ \text{mărginită}}} \cdot \underbrace{|y|}_{\to 0}\right) = 0$$

$\Rightarrow f$ este diferențiabilă în $(0,0)$

și $df_{(0,0)} = T = 0$

b) <u>Punctele critice</u>

$df_{(0,0)} = 0 \Rightarrow (0,0)$ punct critic pentru f

Mai căutăm puncte critice și în $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{y^3+2xy^3}{x^2+y^2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (*) \\ \frac{x^4}{x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^3+2xy^3=0 \\ x^4=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3(1+2x)=0 \\ x^4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0=0 \ \forall\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \{(0,y) \mid y\in\mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow C = \{(0,y) \mid y\neq 0\} \cup \{(0,0)\}$$

mulțimea punctelor critice.

c) $df(1,2) = ?$

$df(1,2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df(1,2)(x,y) = a\cdot x + b\cdot y = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\, y$$

(„T-ul")

$$= \frac{18}{5\sqrt5}^{\circledast} x + \frac{1}{5\sqrt5} y$$

$$df(1,2) = \frac{18}{5\sqrt5}\underbrace{pr_1}_{dx} + \frac{1}{5\sqrt5}\underbrace{pr_2}_{dy}$$

$\boxed{ex\ 2}$ Det. punctele de extrem local ale funcției

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 - 6x - 6y$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = 4x - 2y - 6$ $\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y) = -2x + 10y - 6$

5/6

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2$

f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

$$(\mathbb{R}^2) \begin{cases} 4x - 2y - 6 = 0 \\ -2x + 10y - 6 = 0 \quad | \cdot 2 \end{cases} \oplus$$

$$18y - 18 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

$$4x - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$C = \{(2,1)\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = (4x - 2y - 6)'_x = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (-2x + 10y - 6)'_x = -2$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = (4x - 2y - 6)'_y = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = (-2x + 10y - 6)'_y = 10$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă de 2 ori pe $\mathbb{R}^2$

$$\cancel{H_f(x_0)} \quad H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 4 > 0 \qquad \Delta_2 = 36 > 0$$

$(2,1)$ e ~~pun~~ minim local ptr f

Funcții diferențiabile. Funcții integrabile Riemann

$\boxed{\text{ex 1}}$ Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ def. prin $f(x,y,z) = g(xy, x^2+y^2+z^2)$ unde $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă. Arăt. că f este o fct. diferențiabilă și calculați $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.

Rezolvare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow^{f} & \downarrow g \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

$f = g \circ h$

$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$h(x,y,z) = (\underbrace{xy}_{h_1(x,y,z)}, \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{h_2(x,y,z)})$

h_1 funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$
h_2 diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$
$\Rightarrow h$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$ (1)

g funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$ (2)

$\overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow}$ $f = g \circ h$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(g(\overbrace{xy}^{u}, \overbrace{x^2+y^2+z^2}^{v})) \cancel{\frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2+z^2)}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot (xy)'_x + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot (x^2+y^2+z^2)'_x$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot y + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot (2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial (g(xy, x^2+y^2+z^2))}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot \underbrace{(xy)'_y}_{x} + \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2+z^2) \cdot \underbrace{(x^2+y^2+z^2)'_y}_{2y} = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial\big(g(\overset{u}{xy}, \overset{v}{x^2+y^2+z^2})\big)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial v}(xy, x^2+y^2+z^2)\cdot \underbrace{(x^2+y^2+z^2)'_z}_{2z}$$

$\boxed{\text{ex } 2}$ Aceleași cerințe pentru funcția $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = g(x+y, y+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\big(g(\overset{u}{x+y}, \overset{v}{y+z})\big)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, y+z)\cdot \underbrace{(x+y)'_x}_{1} +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, y+z)\cdot \underbrace{(y+z)'_x}_{0} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, y+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\big(g(x+y, y+z)\big)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, y+z)\cdot \underbrace{(x+y)'_y}_{1} +$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial u}(x+y, y+z)\cdot (y+z)'_y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\big(g(x+y, y+z)\big)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial v}(x+y, y+z)\underbrace{(y+z)'_z}_{1}$$

$\boxed{\text{ex } 3}$ Arătați că ecuația $x^2+y^2+z^2+z^3-xy+x+y-3=0$ are o infinitate de soluții de forma $z=f(x,y)$

Algebric, cu z necunoscută principală și x și y nec. secundare.
Algebric e moartea!

Calculați $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

Se introduce funcția f, cu 3 variabile

Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+z^3-xy+x+y-3$

Trebuie să fie def. pe o mulț. deschisă, care admite toate deriv. parțiale și ele sunt continue (funcție de clasă C^1)

$\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y + 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x + 1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z + 3z^2$ $\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$

$\xrightarrow[\text{mai sus}]{\text{din cele de}}$ f funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$

Nec. principală trebuie să fie z.

Avem nevoie de a,b,c a.î. $f(a,b,c)=0$ și $\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial z} \neq 0$

$f(1,1,0)=0$, dar $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)=0$ NU!

$f(1,1,-1)=0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-1) = -2+3 = 1 \neq 0$

Împărțim în 2 componente: vectorul $(1,1)$ și nec. prin (-1).

$\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}^2}(1,1)$ $\Rightarrow$ există 2 vecinătăți în care apar vectorul și necunosc. prime.

a.î.

$\exists\, W \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}}(-1)$

a.î. $V \times W \subseteq \mathbb{R}^3$ $(\exists!)$ $\varphi: V \to W$ funcție de clasă C^1 a.î. ① $\varphi(1,1) = -1$

② $f(x,y,\varphi(1,1)) = 0 \quad \forall (x,y) \in V$

$\Rightarrow$ ecuația are soluții de forma $(x,y,\varphi(x,y))$ cu $(x,y) \in V$

$\Rightarrow$ are o inf. de soluții.

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$

$f(x,y,\overbrace{\varphi(x,y)}^{z}) = 0 \quad \forall (x,y) \in V$ $\quad \frac{\partial}{\partial x}$

Derivăm parțial în rap cu x și y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \underset{\overset{\|}{1}}{(x)'_x} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \quad \forall (x,y) \in V$$

$$\cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) =}$$

$$f(x,y,\underbrace{\varphi(x,y)}_{z}) = 0 \quad \forall (x,y) \in V \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \underset{\overset{\|}{1}}{(y)'_y} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\forall (x,y) \in V$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \quad \forall (x,y) \in V$$

$$= -\frac{2y-x+1}{2\varphi(x,y)+3\varphi^2(x,y)} \quad \forall (x,y) \in V$$

$\boxed{\text{ex 4}}$ (ex de funcție integrabilă care nu admite primitive)

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & [0,\frac{1}{2}] \\ 3, & (\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

a) Ar că $f \in \mathcal{R}([0,1])$ și calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Dem că f nu admite primitive pe $[0,1]$

$f|_{[0,\frac{1}{2}]}$ crescătoare

$f|_{(\frac{1}{2},1]}$ crescătoare.

$\max f|_{[0,\frac{1}{2}]} = \frac{1}{4} \le \min f|_{(\frac{1}{2},1]} = 3 \Rightarrow f$ crescătoare
$\Rightarrow f \in \mathcal{R}([0,1])$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 3\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + 3x\Big|_{\frac{1}{2}}^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \left(3 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{24} + \frac{3}{2} \quad \frac{37}{24}$$

b) Pp că f admite primitive $\Longrightarrow$ f are P. lui DARBOUX pe $[0,1]$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$f(1) = 3$

$\frac{1}{4} < 1 < 3$

$f(x) = 1 \iff \cancel{x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1}$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 1, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ 3 = 1, & x \in (\frac{1}{2},1) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1, & x \in [0,\frac{1}{2}] \\ x = \emptyset, & x \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

dar $-1, 1 \notin [0,\frac{1}{2}]$

$\Rightarrow 1 \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow$ nu are P. DARBOUX.

$\Longrightarrow$ presupunere falsă $\longrightarrow$ nu admite primitive.

$\boxed{\text{Ex 5}}$ Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}, & x\neq\frac{1}{n}\ \forall n\in\mathbb{N}^*\\ \frac{1}{2^n} & \exists n\in\mathbb{N}^* \text{ a.î. } x=\frac{1}{n}\end{cases}$$

Dem că $f\in\mathcal{R}([0,1])$. In caz afirmativ calculați integrala.

Observăm că $0\leq f(x)<1 \quad \forall x\in[0,1]$ (1)

f continuă pe $[0,1]\setminus\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{n}}\frac{x}{1+x}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n}\neq\frac{1}{n+1}\quad\forall n\geq 2$$

$\Longrightarrow D_f=\{\frac{1}{n}\mid n\geq2\}$ numărabilă $\Rightarrow$ f neglijabilă Lebesgue (2)

Din (1) si (2) $\Longrightarrow f\in\mathcal{R}([0,1])$

Pt a afla integralele:

Prelungim o ramură peste tot. Alegem $g(x)=\frac{x}{x+1}$ când $x\in[0,1]$