12.04.2016

SEMINAR 9

1) $X^5-1=(X-1)\underbrace{(X^4+X^3+X^2+X+1)}_{\text{ireductibil pe } \mathbb{Q}}$

$X^4+X^3+X^2+X+1=(X^2+aX+b)(X^2+cX+d)=$

$=X^4+cX^3+dX^2+aX^3+acX^2+adX+bX^2+bcX+bd=$

$=X^4+X^3(a+c)+X^2(ac+b+d)+X(ad+bc)+bd$

$$\begin{cases} a+c=1 \Rightarrow c=1-a \\ ac+b+d=1 \\ ad+bc=1 \\ bd=1 \Rightarrow d=\frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1-a)+b+\frac{1}{b}=1 \\ a\cdot\frac{1}{b}+b(1-a)=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab-a^2b+b^2+1=b \\ ab+b^2-b^2a=b \end{cases}$$

$\cancel{\Rightarrow ab-a^2b+b^2+1=ab+b^2-b^2a}$

$\cancel{1-a^2b=-b^2a}$

$\cancel{a^2b-b^2a=1 \Rightarrow ab(a-b)=1}$

$\cancel{a(ab-b^2)=1}$

$b^2-b+b(a-a^2)+1=0$

$b^2-b^2a+a-b=0$

$a(1-b^2)=b-b^2$

$a=\frac{b(1-b)}{(1-b)(1+b)}=\frac{b}{1+b}$

$b=1$ e soluție înlocuim în prima relație

$1+a-a^2+1-1=0 \Leftrightarrow a^2-a-1=0$

$\Delta=1+4=5 \Rightarrow a_1=\frac{1+\sqrt5}{2}\notin\mathbb{Q}$, $a_2=\frac{1-\sqrt5}{2}\notin\mathbb{Q}$

$b\neq1 \Rightarrow a=\frac{b}{1+b}$

$1+\frac{b^2}{1+b}-\frac{b^2}{(1+b)^2}\cdot b+b^2-b=0$

$(b+1)^2+(1+b)b^2-b^3+(b^2-b)(1+b)^2=0$

$b^2+2b+1+b^2+b^3-b^3+b^2+b^4-b+b^3=0$

$\cancel{b^4+3b^2-b^3+b+1=0}$

$b^2+2b+1+b^2+(b^2-b)(1+2b+b^2)=0 \Leftrightarrow b^2+2ab+1+b^2+b^2+2b^3+b^4-b-$

$-b^3=0 \Leftrightarrow b^4+b^3+b^2+b+1=0 \Rightarrow b\in\emptyset$

$x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+dx+c)$, $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$ ← descompunerea de forma asta e valabilă și pe $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a+c=0 \Rightarrow c=-a & (x^3) \\ d+ac+b=0 & (x^2) \\ ad+bc=0 & (x) \\ bd=1 \Rightarrow d=\frac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{b}-a^2+b=0 \\ \frac{a}{b}-ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-a^2b+b^2=0 \\ ab-ab^2=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a(1-b^2)=0 \Rightarrow a=0$ / $b=1$ / $b=-1$

cazul 1: $a=0 \Rightarrow b^2+1=0$ nu are soluții în $\mathbb{Q}$

cazul 2: $b=1 \Rightarrow 2-a^2=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

cazul 3: $b=-1 \Rightarrow 2+a^2=0$ nu are soluții în $\mathbb{Q}$

$(f,g)=(x^2+1)(x+1)^2$

$[f,g]=(x^2+1)(x-1)^4(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)$

TEMĂ: miercuri 18^{00}

476, 479, 485 (fără generalizare)
câte matrice de ord. 3 cu det = 1

52) $f(X)=X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2}$

$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

α răd, β răd

$x^4+x^2+1 \mid f(X) \Rightarrow f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$\alpha^3=1$, $\beta^3=-1$

$f(\alpha)=\alpha^{3m}+\alpha^{3n+1}+\alpha^{3p+2}=1+\alpha+\alpha^2=0$

$f(\beta)=\beta^{3m}+\beta^{3n}\cdot\beta+\beta^{3p}\cdot\beta^2=(-1)^m+(-1)^n\beta+(-1)^p\beta^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m,p \,\vdots\, 2, n \not\vdots\, 2 \\ n \,\vdots\, 2, m,p \not\vdots\, 2 \end{cases}$