Seminar 2

① Dem. că $(5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7)=20\mathbb{Z}+3$.

„$\subseteq$" Fie $x\in(5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7) \Rightarrow x\in 5\mathbb{Z}-2 \wedge x\in 4\mathbb{Z}+7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}\quad x=5k-2 \quad \wedge \quad \exists l\in\mathbb{Z}\quad x=4l+7$

Atunci $5k-2=4l+7 \Rightarrow 5(k-1)=4(l+1) \Rightarrow \exists \lambda\in\mathbb{Z}:\ k-1=4\lambda$ / $\Rightarrow$
$x=5k-2$

$\Rightarrow \exists\lambda\in\mathbb{Z}:\ x=5(4\lambda+1)-2=20\lambda+3 \Rightarrow x\in 20\mathbb{Z}+3$

Prin urmare $(5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7)\subseteq 20\mathbb{Z}+3$ (1)

„$\supseteq$" Fie $x\in 20\mathbb{Z}+3 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}:\ x=20k+3$.

$$\left\{\ 20k+3=5j-2 \Rightarrow 5j=20k+5 \Rightarrow j=4k+1\right.$$

Iau $j=4k+1\in\mathbb{Z}$. Atunci $x=20k+3=5(4k+1)-2=5j-2$

Deci $x\in 5\mathbb{Z}-2$. (2)

$$\left\{\ 20k+3=4s+7 \Rightarrow 4s=20k-4 \Rightarrow s=5k-1\right.$$

Iau $s=5k-1\in\mathbb{Z}$. Atunci $x=20k+3=4(5k-1)+7=4s+7$

Deci $x\in 4\mathbb{Z}+7$ (3)

Din (2) și (3) $\Rightarrow x\in(5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7)$

Prin urmare $20\mathbb{Z}+3\subseteq(5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7)$ (4)

Din (1) și (4) $\Rightarrow (5\mathbb{Z}-2)\cap(4\mathbb{Z}+7)=20\mathbb{Z}+3$.

<u>Tema dirijată</u>: $(3\mathbb{Z}+2)\cap(4\mathbb{Z}+3)=12\mathbb{Z}+11$

② $a\mathbb{Z}\subseteq b\mathbb{Z} \Leftrightarrow b\mid a$

Dem: „$\Rightarrow$" $a\mathbb{Z}\subseteq b\mathbb{Z} \Rightarrow a\in b\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ a.î. $a=bk \Rightarrow b\mid a$

„$\Leftarrow$": Fie $x\in a\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}:\ x=ak$

Din ip: $b\mid a \Rightarrow \exists t\in\mathbb{Z}$ a.î. $a=bt$ | $\Rightarrow x=btk \Rightarrow x\in b\mathbb{Z}$

$\square$

③ $A \setminus (A \setminus B) \underset{4}{=} A \cap B$

$x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$

întrucât $p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$ este tautologie:

p	q	$\neg p \vee q$	$p \wedge (\neg p \vee q)$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

Temă dirijată: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

④ Desenați următoarele funcții. Studiați injectivitatea și surjectivitatea acestora:

a) $i_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i_1(x) = (x, 0)$

b) $i_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i_2(x) = (0, x)$

c) $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $d(x) = (x, x)$

d) $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$

e) $\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\pi_2(x, y) = y$

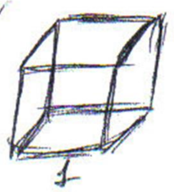
Temă

f) $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$

g) $i_1' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $i_1(x) = (x, 0, 0)$

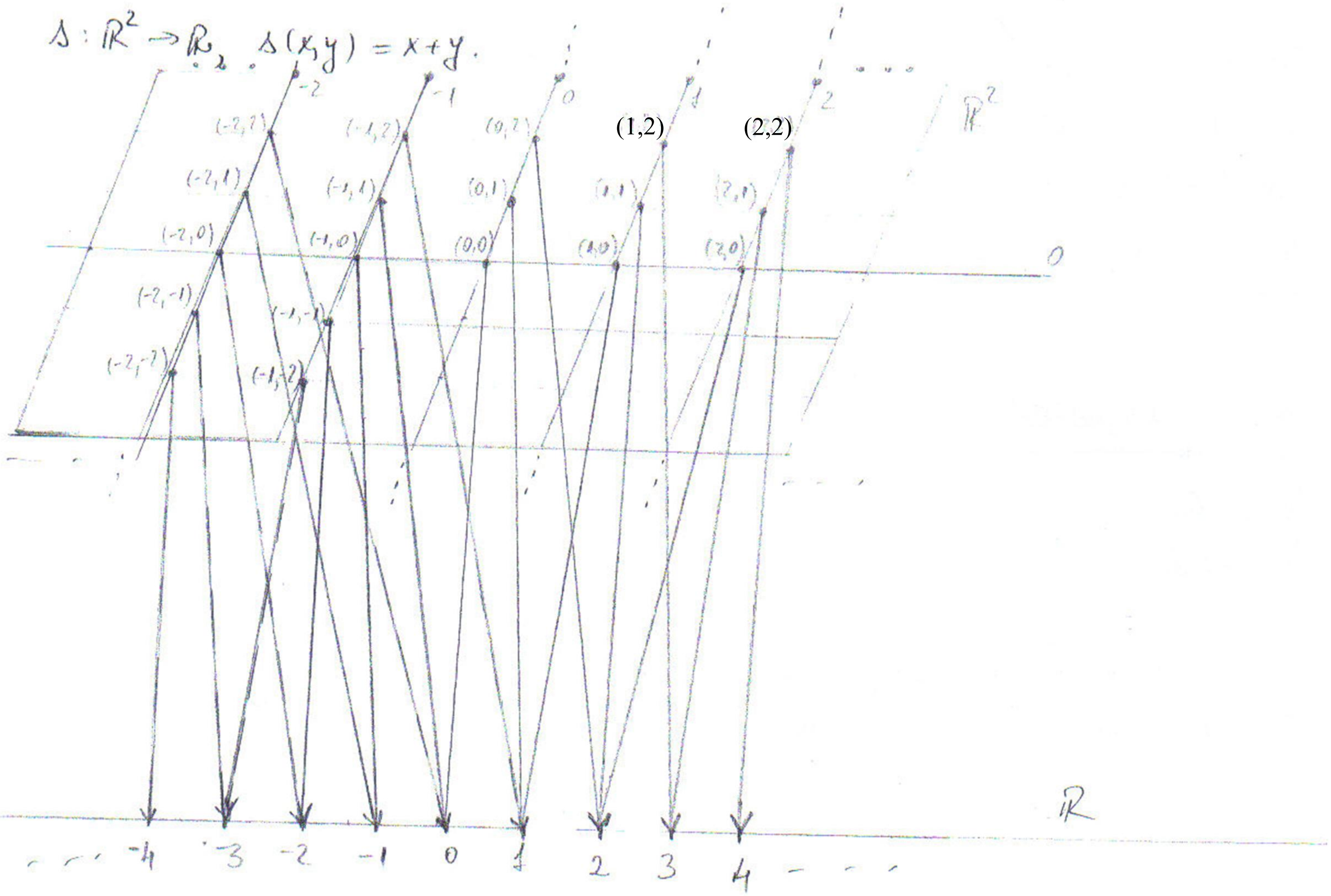
h) $\pi_1' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\pi_1'(x, y, z) = x$.

Temă

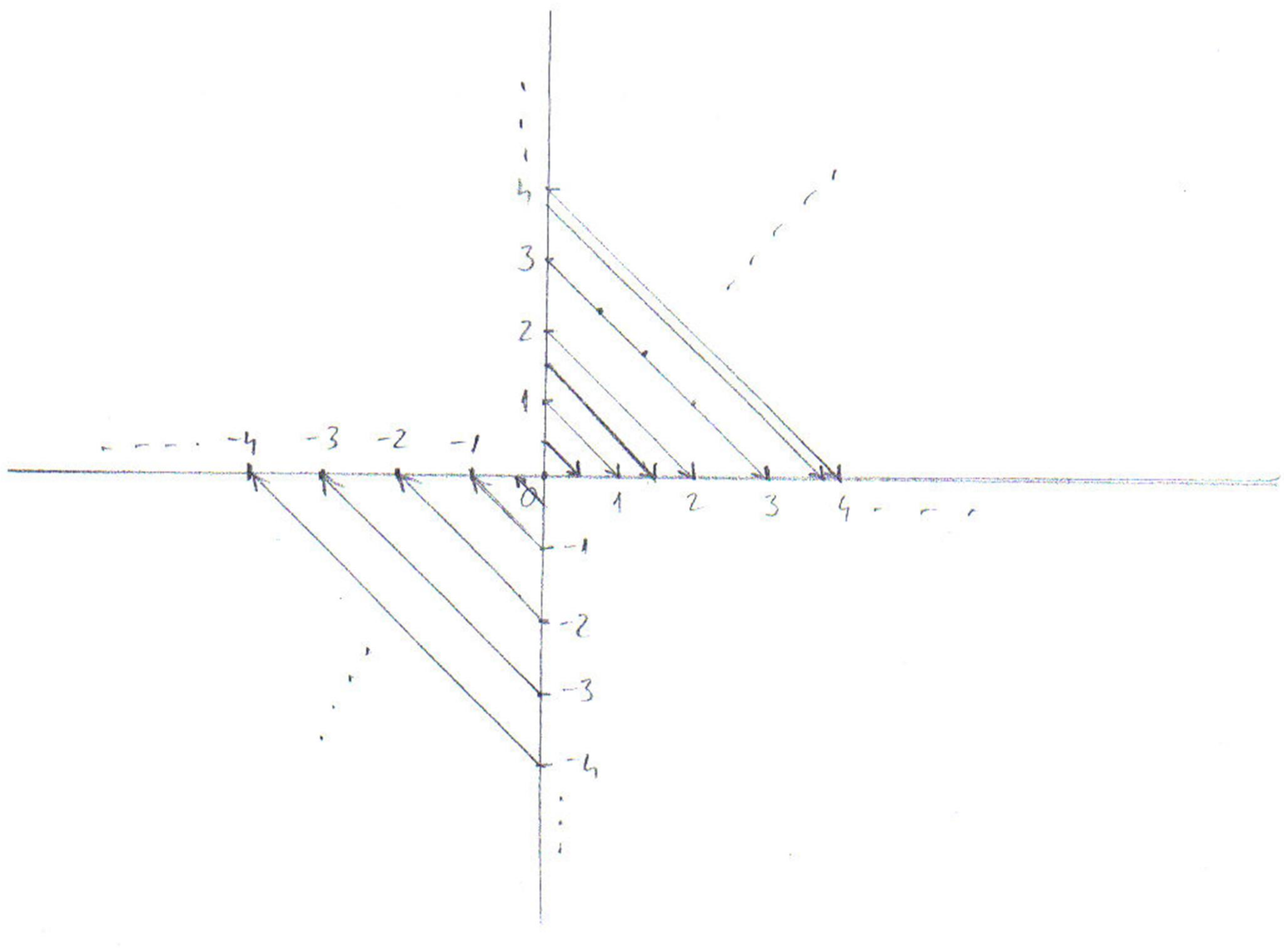
Problemă suplimentară: Pt. o dimensiune avem segmentul de lungime 1 ($\underset{1}{\vdash\!\!\dashv}$), în plan avem pătratul de latură 1 (), în spațiul tridimensional avem cubul de latură 1 ().

Desenați figura corespunzătoare în spațiul cu 4 dimensiuni.

$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ s(x,y) = x+y.$



Sau:



s nu este injectivă

Iau $x = (0,2) \in \mathbb{R}^2$.

Iau $y = (1,1) \in \mathbb{R}^2$

Evident $x \neq y$.

$$\left.\begin{array}{l} s(x) = s((0,2)) = 0+2 = 2 \\ s(y) = s((1,1)) = 1+1 = 2 \end{array}\right| \Rightarrow s(x) = s(y) \Big| \Rightarrow s \text{ nu e injectivă}$$

s este surjectivă

Fie $y \in \mathbb{R}$.

Iau $k \in \mathbb{R}$.

Iau $x = (k, y-k) \in \mathbb{R}^2$

$s(x) = s((k, y-k)) = k + y - k = y$

Prin urmare s este surjectivă.

4) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Det imaginea intervalului $(0,4)$

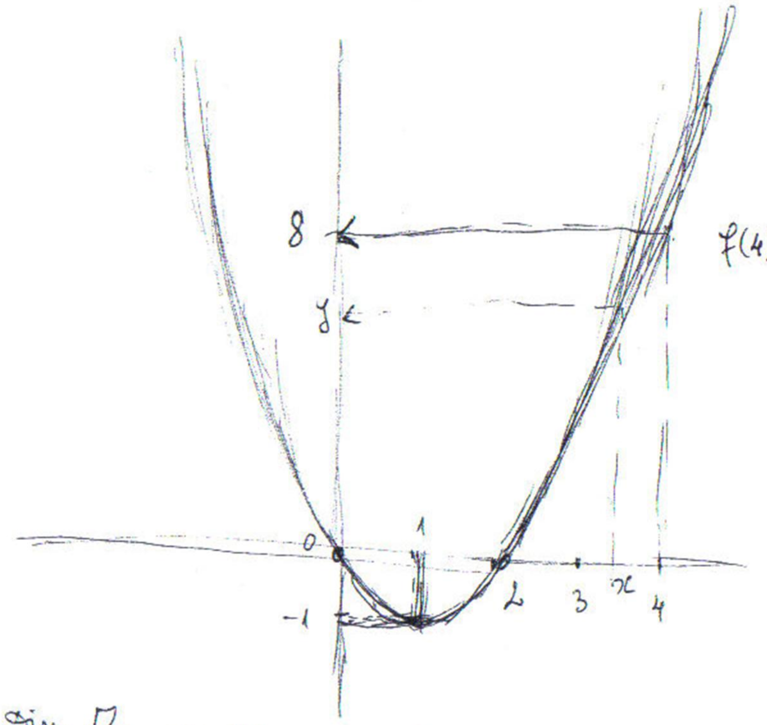
b) Det preimaginea intervalului $(0,2)$

a) $f((0,4)) = ?$

$x_V = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1 \Rightarrow y_V = f(1) = 1-2 = -1$. Deci $V(1,-1)$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(x) = 0$

$\quad\quad\quad\quad\;\; x = 2 \Rightarrow y = f(2)$



$f(4) = 16 - 8 = 8$

Din $\Gamma_f \Rightarrow f((0,4)) = [-1,8)$

Rămâne de dem. egalitatea de mulțimi:

$f((0,4)) = [-1,8)$

"$\subseteq$" Fie $y \in f((0,4)) \Rightarrow \exists x \in (0,4)$ a.î. $y = f(x) = (x-1)^2 - 1$

$x \in (0,4) \Rightarrow x-1 \in (-1,3) \Rightarrow (x-1)^2 \in [0,9) \Rightarrow (x-1)^2 - 1 \in [-1,8)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in [-1,8) \Rightarrow y \in [-1,8)$ qed

"$\supseteq$" Fie $y \in [-1,8)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - y = 0 \\ \Delta = 4 - 4(-y) = 4\underbrace{(1+y)}_{>0} \\ x_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+y} \\ \text{Din grafic} \Rightarrow \text{e convenabil să iau } x = 1 + \sqrt{1+y} \end{cases}$$

Iau $x = 1 + \sqrt{1+y}$

$y \in [-1,8) \Rightarrow x$ e bine definit

$f(x) = (1+\sqrt{1+y})^2 - 2(1+\sqrt{1+y}) = \cancel{1}+\cancel{1}+y+\cancel{2\sqrt{1+y}}-\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{1+y}} = y$

$y \geq -1 \Rightarrow \sqrt{1+y} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+y} \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$

$y < 8 \Rightarrow 1 + y < 9 \Rightarrow \sqrt{1+y} < 3 \Rightarrow 1 + \sqrt{1+y} < 4 \Rightarrow x < 4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [1,4) \subset (0,4)$ $\square$

b) Fie $x \in f^{-1}((0,2)) \Leftrightarrow f(x) \in (0,2) \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 - 2x < 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty) \\ x^2 - 2x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty,0) \cup (2,\infty) \\ x \in (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1-\sqrt{3},0) \cup (2, 1+\sqrt{3})$

$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-2) = 12$; $x_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{3}$	0	2	$1+\sqrt{3}$	∞
x^2-2x-2	$+\ +$	0	$-$	$-$	0	$+\ +$

$\square$.