Criptografie și Securitate

- Prelegerea 22.1 -
Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

Adela Georgescu, Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Cuprins

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Am studiat schimbul de chei Diffie-Hellman peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin q;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Am studiat schimbul de chei Diffie-Hellman peste un grup ciclic $\mathbb{G}$, de ordin q;
- Transpunem construcția pe curbe eliptice:

$$(\mathbb{G}, \cdot) \to (E(\mathbb{Z}_q), +)$$

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

		
Alice	$\xrightarrow{E(\mathbb{Z}_q),\, P,\, H_1}$	Bob
$x \leftarrow \mathbb{Z}_q$		$y \leftarrow \mathbb{Z}_q$
$H_1 := xP$	$\xleftarrow{H_2}$	$H_2 := yP$
$k_A := xH_2$		$k_B := yH_1$

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Bob îi trimite H_2 lui Alice și întoarce cheia $k_B := yH_1$;

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Alice și Bob doresc să stabilească o cheie secretă comună;
- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, și P un punct pe curbă (generator);
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Bob alege $y \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Bob îi trimite H_2 lui Alice și întoarce cheia $k_B := yH_1$;
- Alice primește H_2 și întoarce cheia $k_A = xH_2$.

Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice

- Corectitudinea protocolului presupune ca $k_A = k_B$, ceea ce se verifică ușor:
- Bob calculează cheia

$$k_B = yH_1 = y(xP) = (xy)P$$

- Alice calculează cheia

$$k_A = xH_2 = x(yP) = (xy)P$$

Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;

Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?

Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?
- Răspuns: Ascultă mediul de comunicație și preia mesajele H_1 și H_2. Rezolvă *ECDLP* pentru H_1 și determină x, apoi calculează $k_A = k_B = xH_2$.

Securitate

- O condiție **minimală** pentru ca protocolul să fie sigur este ca ECDLP să fie dificilă în $\mathbb{G}$;
- Întrebare: Cum poate un adversar pasiv să determine cheia comună dacă poate sparge ECDLP?
- Răspuns: Ascultă mediul de comunicație și preia mesajele H_1 și H_2. Rezolvă *ECDLP* pentru H_1 și determină x, apoi calculează $k_A = k_B = xH_2$.
- Aceasta nu este însă singura condiție necesară pentru a proteja protocolul de un atacator pasiv!

ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;

ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;
- Aceasta este problema de calculabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECCDH): Fiind date curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, un punct P pe curbă și 2 alte puncte $H_1, H_2 \leftarrow^R E(\mathbb{Z}_q)$, să se determine:

$$ECCDH(H_1, H_2) = (ECDLP(P, H_1)ECDLP(P, H_2))P$$

ECCDH (Elliptic Curve Computational Diffie-Hellman)

- O condiție mai potrivită ar fi că adversarul să nu poată determina cheia comună $k_A = k_B$, chiar dacă are acces la întreaga comunicație;
- Aceasta este problema de calculabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECCDH): Fiind date curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$, un punct P pe curbă și 2 alte puncte $H_1, H_2 \leftarrow^R E(\mathbb{Z}_q)$, să se determine:

$$ECCDH(H_1, H_2) = (ECDLP(P, H_1)ECDLP(P, H_2))P$$

- Pentru schimbul de chei Diffie-Hellman, rezolvarea ECCDH înseamnă că adversarul determină $k_A = k_B = xyP$ cunoscând $H_1, H_2, E(\mathbb{Z}_q), P$ (toate disponibile pe mediul de transmisiune nesecurizat).

ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;

ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;

ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;
- Sau, altfel spus, să satisfacă problema de decidabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECDDH):

ECDDH (Elliptic Curve Decisional Diffie-Hellman)

- Nici această condiție nu este suficientă: chiar dacă adversarul nu poate determina cheia exactă, poate de exemplu să determine părți din ea;
- O condiție și mai potrivită este ca pentru adversar, cheia $k_A = k_B$ să fie **indistinctibilă** față de o valoare aleatoare;
- Sau, altfel spus, să satisfacă problema de decidabilitate Diffie-Hellman pe curbe eliptice (ECDDH):

Definiție

Spunem că problema decizională Diffie-Hellman (ECDDH) este dificilă (relativ la curba eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$), dacă pentru orice algoritm PPT $\mathcal{A}$ există o funcție neglijabilă negl *așa încât:*
$|Pr[\mathcal{A}(E(\mathbb{Z}_q), P, xP, yP, zP) = 1]$ - $Pr[\mathcal{A}(E(\mathbb{Z}_q), P, xP, yP, xyP) = 1]|$
$\leq negl(n)$, *unde* $x, y, z \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$

Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;

Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...

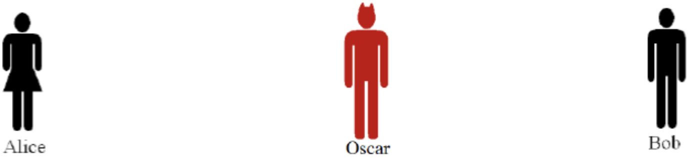
Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...
- ... care are dreptul de a intercepta, modifica, elimina mesajele de pe calea de comunicație;

Atacul Man-in-the-Middle

- Am analizat până acum securitatea față de atacatori pasivi;
- Arătăm acum că schimbul de chei Diffie-Hellman este total nesigur pentru un adversar activ ...
- ... care are dreptul de a intercepta, modifica, elimina mesajele de pe calea de comunicație;
- Un astfel de adversar se poate interpune între Alice și Bob, dând naștere unui atac de tip Man-in-the-Middle.

Atacul Man-in-the-Middle



$x \leftarrow \mathbb{Z}_q$	$\xrightarrow{E(\mathbb{Z}_q), P, H_1}$	$a \leftarrow \mathbb{Z}_q$		
$H_1 := xP$	$\xleftarrow{H_2'}$	$H_2' := aP$		
$k_A := xH_2'$		$b \leftarrow \mathbb{Z}_q$	$\xrightarrow{E(\mathbb{Z}_q), P, H_1'}$	$y \leftarrow \mathbb{Z}_q$
		$H_1' := bP$	$\xleftarrow{H_2}$	$H_2 := yP$
		$k_A := aH_1; k_B := bH_2$		$k_B := yH_1'$

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;
- Bob alege $y \xleftarrow{R} \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;

Atacul Man-in-the-Middle

- Alice generează o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_q)$ și P un punct pe curbă;
- Alice alege $x \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1 := xP$;
- Alice îi trimite lui Bob mesajul $(E(\mathbb{Z}_q), P, H_1)$;
- Oscar interceptează mesajul și răspunde lui Alice în locul lui Bob: alege $a \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2' := aP$;
- Oscar și Alice dețin acum cheia comună $k_A = axP$;
- Oscar inițiază, în locul lui Alice, o nouă sesiune cu Bob: alege $b \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_1' := bP$;
- Bob alege $y \leftarrow^R \mathbb{Z}_q$ și calculează $H_2 := yP$;
- Oscar și Bob dețin acum cheia comună $k_B = ybP$.

Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;

Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;

Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;
- Oscar îl decriptează folosind k_A, apoi îl recriptează folosind k_B și îl transmite către Bob;

Atacul Man-in-the-Middle

- Atacul este posibil pentru că poate **impersona** pe Alice și pe Bob;
- De fiecare dată când Alice va transmite un mesaj criptat către Bob, Oscar îl interceptează și îl previne să ajungă la Bob;
- Oscar îl decriptează folosind k_A, apoi îl recriptează folosind k_B și îl transmite către Bob;
- Alice și Bob comunică fără să fie conștienți de existența lui Oscar.

Important de reținut!

- Modalitatea de trecere de la o construcție peste $(\mathbb{Z}_q, \cdot)$ la $(E(\mathbb{Z}_q), +)$
- Prezumții criptografice: ECCDH, ECDDH
- Schimbul de chei Diffie-Hellman pe curbe eliptice păstrează proprietățile schimbului de chei Diffie Hellman definit peste $\mathbb{G}$ grup ciclic de ordin q