UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
Facultatea de Matematică și Informatică

Analiză Matematică

Anul I

Semestrul II

Autor:
Lect. dr. Petre ILIAȘ

Specializarea:
INFORMATICĂ

2010

Cuprins

Cursul I

1 Șiruri de funcții reale

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
$f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definiția 1. Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge simplu pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă $\forall\, x \in A$, șirul $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ este convergent.

NOTAȚIE $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe mulțimea A, $f : A \to \mathbb{R}$

Definiția 2. Spunem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge uniform pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă $\exists\, f : A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall\, n \geq n_\varepsilon, \forall\, x \in A$.

NOTAȚIE $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe mulțimea A.

Observație $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe mulțimea $A \subseteq D \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe mulțimea A.

1.1 Criteriul practic de convergență uniformă pentru un șir de funcții

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe mulțimea $A \subseteq D$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|) = 0$

1.2 Criteriul lui Cauchy pentru limite de funcții

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulțimea $A \subseteq D$

b) $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n_\varepsilon$, $\forall\, x \in A$

1.3 Teorema lui Weierstrass

Considerăm un șir de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o funcție $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe mulțimea A. Dacă $\exists\, x_0 \in A$ astfel încât f_n este continuă în x_0, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci f este continuă în x_0.

1.4 Teorema Stone-Weierstrass

Pentru orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, există un șir de funcții polinomiale $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $p_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ pe mulțimea $[a, b]$.

1.5 Teorema lui Dini

Considerăm un șir monoton de funcții continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) sau ($f_n \geq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) și o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$ pe mulțimea $[a, b]$.

Atunci $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ pe mulțimea $[a, b]$.

1.6 Teorema lui Polya

Considerăm un șir de funcții continue și monotone $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ și o funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{s} f$ pe mulțimea $[a, b]$.

Atunci $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ pe mulțimea $[a, b]$.

2 Serii de funcții reale

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$s_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)$

Definiția 1. Perechea de șiruri de funcții $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ se numește seria de funcții atașată șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și se notează $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Definiția 2.

a) Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulțimea A.

b) Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ este absolut convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe mulțimea A.

c) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulțimea A.

Observații

a) Din seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este absolut convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$, atunci ea este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$.

b) Dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$, atunci ea este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$

2.1 Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcții

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$.

b) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|f_n(x)+f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in A$.

2.2 Criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcții

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$, $A \subseteq D$ astfel încât $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea A.

Demonstrație $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ este convergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, p \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ ①

$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_{n+p}(x)| \leq a_n(x) + a_{n+1}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, n, p \in \mathbb{N}$. ②

Din ① și ② $\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât
$|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in A$.
$\xRightarrow{Cauchy}$ seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe A.

Cursul II

3 Șiruri de numere reale

3.1 Criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții

Considerăm $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ cu următoarele proprietăți:

a) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} 0$ pe mulțimea D

b) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$

c) $\exists M > 0$ astfel încât $|g_0(x) + g_1(x) + \ldots + g_n(x)| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$

Atunci seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n g_n$ este uniform convergentă pe D.

Definiția 1. Considerăm o serie de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ care este simplu convergentă pe o mulțime $A \in D$. Limita șirului de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asociat șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește suma seriei de funcții pe mulțimea A.

NOTAȚIE $s_n = f_0 + f1 + \ldots + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe mulțimea A.

$f : A \to \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \underline{\underline{not}}\ f$ pe mulțimea A.

Definiția 2. Se numește mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ mulțimea $A \subseteq D$ pe care seria de funcții este simplu convergentă.

Observație. $A = \{x \in D \,|\,$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ este convergentă$\}$

4 Șiruri de funcții derivabile

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ și $I \subseteq \mathbb{R}$ interval.

Teorema 1. Considerăm un șir de funcții derivabile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în care $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval mărginit ($\exists\, a < b \in \mathbb{R}$ astfel încât $I \subseteq [a, b]$). Presupunem că:

- $\exists\, x_0 \in I$ astfel încât seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ este convergentă
- seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniform pe I către funcția $g : I \to \mathbb{R}$

În aceste condiții, există o funcție derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:

a) seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniform pe I către funcția f

b) $f' = g$

Teorema 2. Considerăm un șir de funcții derivabile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu următoarele proprietăți:

a) seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniform pe I către funcția $f : I \to \mathbb{R}$

b) seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converge uniform pe I către funcția $g : I \to \mathbb{R}$

În aceste condiții, f este derivabilă pe I și $f' = g$.

5 Serii de puteri

Definiția 1. Se numește serie de puteri o serie de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, unde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, în care $x_0 \in \mathbb{R}$ fixat.

NOTAȚIE $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$

$A = \{x \in \mathbb{R} |$ seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ este convergentă$\}$ - (mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$), $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$.

Definiția 2. Numărul $R \stackrel{def}{=} sup\{\, r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$ este convergentă$\} \in [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$ se numește raza de convergență absolută a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$.

Mulțimea $(x_0 - R,\, x_0 + R) \subseteq \mathbb{R}$ se numește intervalul de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$.

5.1 Teorema Cauchy - Hadamard

Pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$, notăm $l = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty] \cup \{+\infty\}$.

Are loc egalitatea

$$R = \begin{cases} 0 & , l = +\infty \\ +\infty & , l = 0 \\ \frac{1}{l} & , l \in (0, +\infty) \end{cases}$$

5.2 Teorema lui Abel

a) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ este absolut convergentă pe $(x_0 - R,\, x_0 + R)$

b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - R,\, x_0 + R]$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ este divergentă

c) Seria de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ este uniform convergentă pe orice interval compact $[x_0 - r,\, x_0 + r]$ unde $0 \leq r < R$.

Corolar $(x_0 - R, x_0 - R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R,\, x_0 + R]$ și $A \subseteq \mathbb{R}$.

NOTAȚIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n = f,\ f : A \to \mathbb{R}$

Teorema 1.

a) $f|_{(x_0 - R, x_0 + R)}$ este funcție indefinit derivabilă pe $(x_0 - R,\, x_0 + R)$ și
$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(x - x_0)^n)^{(k)},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in (x_0 - R,\, x_0 + R)$.

b) Dacă seriile $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$ sunt convergente, atunci $f|_{(x_0-R,x_0+R)}$ este funcție indefinit derivabilă și f este continuă în $x_0 - R$ și $x_0 + R$.

c) Dacă seria $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ este convergentă și $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-R)^n$ este divergentă, $f|_{(x_0-R,x_0+R)}$ este indefinit derivabilă și f este continuă în $x_0 + R$.

Cursul III

6 Serii Trigonometrice

Definiția 1. Se numește serie trigonometrică o serie de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ în care $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = a_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

NOTAȚIE $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \underline{\underline{not}}\ a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$.

a_0, a_n, b_n se numesc coeficienții seriei trigonometrice

$s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$

s_n se numește polinomul trigonometric de rang n.

$$s_n(x + 2k\pi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx + 2kp\pi) + b_k \sin(kx + 2kp\pi)] =$$

$$= a_0 + s_n(x + 2k\pi) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] = s_n(x)$$

$s_n(x + 2p\pi) = s_n(x)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

OBSERVAȚIE s_n este funcție periodică de perioadă 2π.

Teorema 1. Dacă seria trigonometrică este simplu convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci seria trigonometrică este simplu convergentă pe $\mathbb{R}$ și $f(x + 2k\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este suma seriei.

Teorema 2. Dacă seria trigonometrică este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ către funcția $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, atunci

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$,
- $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- $b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

6.1 Exemple de funcții Riemann

1) Orice funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

2) Orice funcție monotonă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Definiția 2. Numerele reale

- $a_0^f \stackrel{def}{=\!=} \dfrac{1}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$
- $a_n^f \stackrel{def}{=\!=} \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$
- $b_n^f \stackrel{def}{=\!=} \dfrac{1}{\pi} \cdot \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$

se numesc coeficienți Fourier ai funcției f.

Seria trigonometrică $a_0^f + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^f \cos(nx) + b_n^f \sin(nx)$ se numește seria Fourier a funcției f.

6.2 Egalitatea lui Parseval

Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Are loc egalitatea

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 2 \cdot (a_0^f)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(a_n^f)^2 + (b_n^f)^2]^{-\pi}$$

Teorema 3. Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și $x_0 \in (-\pi, \pi)$ astfel încât f este derivabilă în x_0. Atunci seria Fourier a funcției f este convergentă în x_0 și

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^f \cos(nx_0) + b_n^f \sin(nx_0)] = f(x_0).$$

Corolar. Dacă $f|_{(-\pi,\pi)}$ este derivabilă, atunci seria Fourier a funcției este simplu convergentă pe $(-\pi, \pi)$ și suma ei este $f||_{(-\pi,\pi)}$.

Teorema 4. Fie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(-\pi) = f(\pi)$ și $f' : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann. Atunci seria Fourier a funcției f este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$ către funcția $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ și au loc următoarele egalități:

- $a_n^f = -\frac{1}{n} \cdot a_n^{f'}$
- $b_n^f = \frac{1}{n} \cdot b_n^{f'}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Cursul IV

7 Derivabilitate în $\mathbb{R}$

Definiția 1. O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

NOTAȚIE $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underline{\underline{not}}\ f'(x_0)$ (derivata funcției f în x_0).

Definiția 2. Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește derivabilă în orice punct din $D \cap D'$.

Observație Funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dervabilă în $x_0 \in D \cap D' \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in D\ \{x_0\}$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ avem că $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| < \varepsilon$. În acest caz, $l = f'(x_0)$.

Definiția 3. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap (D \cap (-\infty, x_0))'$. f este derivabilă la stânga în x_0 dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

NOTAȚIE $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underline{\underline{not}}\ f'_s(x_0) - x < x_0$.

Definiția 4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$. f este derivabilă la stânga în x_0 dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$.

NOTAȚIE $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underline{\underline{not}}\ f'_d(x_0) - x < x_0$.

Observație Dacă $x_0 \in D^\circ$ atunci $x_0 \in D \cap (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$.

Teorema 1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D^\circ$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este derivabilă în x_0;

b) f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

În acest caz, $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Teorema 2. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ atunci f este continuă în x_0.

Demonstrație $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0),\ \forall x \in D \setminus \{x\}$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$$
$\Rightarrow f$ este continuă în x_0.

Observație Reciproca teoremei 2 este falsă.

Exemple:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

f este continuă în 0

f nu este derivabilă în 0

2) $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$

f este continuă în 1, în -1

f nu este derivabilă în 1, în -1

3) $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}^*$

f este continuă în 0

f nu este derivabilă în 0

7.1 Operații cu funcții derivabile

Considerăm f, $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât f și g sunt derivabile în x_0. Atunci:

a) $f + g$, $f - g$, λf, $f \cdot g$ sunt derivabile în x_0 și au loc următoarele formule:

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

b) Dacă, în plus, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in D$, atunci $\dfrac{f}{g}$ este funcție derivabilă în x_0 și $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x)}$

7.2 Compunerea funcțiilor derivabile

Considerăm $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $Imf \subseteq A$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât $f(x_0) \in (Imf)'$

Dacă f este derivabilă în x_0 și g este derivabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

7.3 Derivabilitatea inversei unei funcții

Considerăm o funcție bijectivă $f : I \to J$, unde I, $J \subseteq \mathbb{R}$ sunt intervale.

Fie $x_0 \in I \cap I'$ astfel încât $f(x_0) \in J \cap J'$. Dacă f este derivabilă în x_0, dacă f^{-1} este continuă în $y_0 = f(x_0)$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Definiția 5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$

a) x_0 se numește punct de maxim *global* pentru f dacă $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in D$

b) x_0 se numește punct de maxim *local* pentru f dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$,
$\forall x \in V \cap D$

c) x_0 se numește punct de minim *global* pentru f dacă $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in D$

d) x_0 se numește punct de minim *local* pentru f dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$,
$\forall x \in V \cap D$

7.4 Teorema lui Fermat

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathring{I}$ astfel încât f este derivabilă în x_0 și x_0 este punct de extrem local pentru f. Atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstrație Presupunem că x_0 este punctul de maxim local. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in V \cap I$.

$$\left.\begin{array}{r} x \in \mathring{I} \Rightarrow I \in \mathcal{V}(x_0) \\ V \in \mathcal{V}(x_0) \end{array}\right| \Rightarrow I \cap V \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow \exists r > 0 \text{ astfel încât } (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I \cap V \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$.

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $\forall x \in (x_0 - r, x_0)$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + r)$

Obținem că $f'_s(x_0) \geq 0$ și $f'_d(x_0) \leq 0$.
f este derivabilă în $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = f's(x_0) = f'd(x_0)$.
Concluzie: $f'(x_0) = 0$.

Cursul V

7.5 Teorema lui Rolle

Considerăm o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) și continuă pe $[a, b]$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrație

$[a, b]$ mulțime închisă și mărginită în $\mathbb{R} \Rightarrow [a, b]$ mulțime compactă în $\mathbb{R}$.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă pe $[a, b]$.
f este funcție mărginită și își atinge marginile.
$\exists x_0, y_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(y_0) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
x_0 punct de minim global pentru f.
y_0 punct de maxim global pentru f.

Cazul 1.

$\left.\begin{array}{r} x_0, y_0 \in \{a, b\}. \\ f(a) = f(b) \end{array}\right| f(x_0) = f(y_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) = f(y_0), \forall x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) = 0,$ $\forall x \in (a, b)$

Cazul 2.

$x_0 \in (a, b)$ sau $y_0 \in (a, b)$
f este derivabilă în x_0 sau $y_0 \xRightarrow{\text{Th. Fermat}} f'(x_0) = 0$ sau $f'(y_0) = 0$.

7.6 Teorema lui Lagrange

Considerăm o funcție $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) și continuă pe $[a, b]$.
Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Demonstrație

Construim funcția $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x$
g continuă pe $[a, b]$
g derivabilă pe (a, b)

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= \frac{bf(a) - af(a) + af(a) - af(b)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \\ g(b) &= \frac{bf(b) - af(b) + af(b) - af(a)}{b - a} = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{aligned}\right| \Rightarrow g(a) = g(b) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\xRightarrow{\text{Th. Rolle}} \exists c \in (a, b) \text{ astfel încât } g'(c) = 0 \\ &g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \end{aligned}\right| \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolare la teorema lui Lagrange

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) Dacă f este derivabilă pe I și $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci f este funcție constantă pe I.

2) Presupun că f este derivabilă pe I

- Dacă $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, atunci f este crescătoare.
- Dacă $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare.
- Dacă $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$, atunci f este descrescătoare.
- Dacă $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, atunci f este strict descrescătoare.

3) Fie $x_0 \in I' \cap I$ astfel încât f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și continuă pe I.
Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

7.7 Teorema lui L'Hôpital

7.7.1 Varianta $\dfrac{0}{0}$

Considerăm $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $x_0 \in I' \setminus I$ și $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe I astfel încât:

1) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$.

3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \bar{\mathbb{R}}$.

În aceste condiții, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ și $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

7.7.2 Varianta $\dfrac{\infty}{\infty}$

Considerăm $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $x_0 \in I' \setminus I$ și $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe I astfel încât:

1) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \bar{\mathbb{R}}$.

În aceste condiții, $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \cap I$ și $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

7.8 Teorema lui Darboux

Pentru orice funcție derivabilă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f' are proprietatea lui Darboux.

Coroloar Presupun că $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I și că $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.
Atunci $f'(x) > 0, \forall x \in I$
sau $f'(x) < 0, \forall x \in I$

Demonstrație Presupun că $\exists a, b \in I$ astfel încât $f'(a) < 0$ și $f'(b) > 0$, $a \neq b \in I$
$0 \in (f'(a), f'(b))$
f' are proprietatea lui Darboux $\Big|$ $\exists c \in I$ situat între a și b astfel încât $f'(c) = 0 \Rightarrow$ Contradicție!

8 Derivate de ordin superior

8.1 Formula lui Taylor

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$

Definiția 1. Spunem că f este de două ori derivabilă în x_0 dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât f este derivabilă pe $V \cap D$ și f' este derivabilă în x_0.

NOTAȚIE $f''(x_0) = (f')'(x_0)$

Definiția 2. Spunem că f este de $n \in \mathbb{N}$ ori derivabilă în $x_0 (n \geq 2)$ dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât f este derivabilă de $n-1$ ori pe $V \cap D$ și $f^{(n-1)}$ este derivabilă în x_0.

NOTAȚIE $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))'$.

Definiția 3. Spunem că f este de n ori derivabilă pe $D(n \geq 2)$ dacă este derivabilă de n ori în orice punct al mulțimii D.

Definiția 4. Considerăm $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ astfel încât f este derivabilă de n ori în x_0.

Funcția $\mathcal{T}_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mathcal{T}_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește polinomul Taylor de rang n asociat funcției f și punctului x_0.

Funcția $\mathcal{R}_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R}_{f,n,x_0}(x) = f(x) - \mathcal{T}_{f,n,x_0}(x)$$

se numește restul lui Taylor de grad n.

Formula lui Taylor Considerăm $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_0 \in I \cap I'$ astfel încât f este de n ori derivabilă în x_0. Atunci $\exists \mathcal{W} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $\mathcal{W}(x_0) = 0$ este continuă în x_0 și are loc egalitatea

$$f(x) = \mathcal{T}_{f,n,x_0}(x) + (x - x_0)^n \mathcal{W}(x)$$

$\forall x \in I$.

8.2 Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange

Considerăm $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât f este de $n+1$ ori derivabilă pe I. Pentru orice elemente $x \neq x_0 \in I$, $\exists c \in I$ situat între x și x_0 astfel încât are loc formula

$$f(x) = \mathcal{T}_{f,n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Cursul VI

9 Derivata in $\mathbb{R}$

9.1 Teorema lui Cauchy

Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) cu $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Există $c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema 1. Considerăm un șir de funcții derivabile $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, o funcție $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f'_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} g$ pe $[a, b]$ și $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ este convergent. În aceste condiții, există o funcție derivabilă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{u} f$ pe $[a, b]$ și $f' = g$.

9.2 Operații cu funcții derivabile de n ori ($n \geq 2$)

Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, astfel încât f, g sunt derivabile de n ori în x_0. Funcțiile $f + g$, $f - g$, λf, $f \cdot g : D \in \mathbb{R}$ sunt derivabile de n ori în x_0 și $(f \pm g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \pm g^{(n)}(x_0)$.

$(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$

$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0)$

Definiția 1. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție, I un interval.

a) f se numește convexă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$, $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$.

b) f se numește concavă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$, $\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0, 1]$.

Teorema 2. Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I, unde I este un interval.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este convexă pe $I \Leftrightarrow f'$ este crescătoare pe I;

b) f este concavă pe $I \Leftrightarrow f'$ este descrescătoare pe I.

Corolar. Dacă f este derivabilă de două ori pe I, avem următoarele echivalențe:

a) f este convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$;

b) f este concavă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.

Teorema 3. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, I interval, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_0 \in I \cap I'$ astfel încât f este de n ori derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$.

a) Dacă $n = 2k$ și $f_{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local pentru f

b) Dacă $n = 2k$ și $f_{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de minim local pentru f

c) Dacă $n = 2k + 1$, $x_0 \in \mathring{I}$ și $f_{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 nu este punct de extrem local pentru f

10 Spații normate

Fie X spațiu vectorial peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definiția 1. Se numește normă pe X o funcție $p : X \to \mathbb{R}_+$ care are următoarele proprietăți:

a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$

b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in K$

c) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$

NOTAȚIE $p(x) \overset{not}{=} \|x\|$ - norma elementului x.
$P \overset{not}{=} \| \ \|$.

Definiția 2. Se numește spațiu normat un spațiu vectorial X peste $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ pe care se definește o normă $\| \ \|$.

NOTAȚIE $(X, \| \ \|)$

Teorema 1. Orice spațiu normat $(X, \| \ \|)$ este spațiu metric. Reciproca teoremei este falsă!.

Definiția 3. Distanța construită în Teorema 1 se numește distanța asociată normei $\| \ \|$.

Definiția 4. Prin topologia normei $\| \ \|$ se înțelege topologia generată de distanța asociată normei.

NOTAȚIE $\tau_{\| \ \|}$

Definiția 5. Se numește spațiu Banach un spațiu normat în care orice șir Cauchy este convergent.

Definiția 6. Se numește aplicație liniară o funcție $\mathcal{T} : (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ pentru care
$\mathcal{T}(x+y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$, $\forall x, y \in X$;
$\mathcal{T}(\lambda x) = \lambda \mathcal{T}(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in K$.

Definiția 7. Se numește aplicație continuă între spațiile normate $(X, \| \|_X)$ și $(Y, \| \|_Y)$ orice funcție continuă $\mathcal{T} : (X, \tau_{\| \|_X}) \to (Y, \tau_{\| \|_Y})$.

NOTAȚIE $\mathcal{L}(X,Y) \stackrel{def}{=} \{\mathcal{T} : X \to Y | \mathcal{T}$ este aplicație liniară și continuă$\}$.

Definiția 8. Normele p_1, $p_2 : X \to \mathbb{R}_+$ se numesc echivalente dacă $\exists c_1$ și $c_2 > 0$ astfel încât
$c_1 p_1(x) \leq p_2(x) \leq c_2 p_1$, $\forall x \in X$.

NOTAȚIE $p_1 \sim p_2$

Teorema 2. Fie p_1, $p_2 : X \to \mathbb{R}_+$ două norme. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $p_1 \sim p_2$

b) $\tau_{p_1} = \tau_{p_2}$

Teorema 3. O aplicație liniară $\mathcal{T} : (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ este continuă dacă și numai dacă $\exists c > 0$ astfel încât $\|\mathcal{T}\|_Y \leq c\|x\|_X$, $\forall x \in X$.

Cursul VII

Exemple de spații normate

1) $\mathbb{R}$
$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, $B = \{1\}$
$| \, | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ norma pe $\mathbb{R}$

2) $\mathbb{R}^k = \{(x_1, \ldots, x_k) | x_i \in \ldots R, \forall 1 \leq i \leq k\}$, $k \geq 2$
$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^k = k$
$B = \{e_1, \ldots, e_k\}$ - baza canonică a lui $\mathbb{R}_k$,
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
$\vdots$
$e_k = (0, 0, \ldots, 1)$

- $\| \|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$
  $\|(x_1, \ldots, x_k)\|_2 \stackrel{def}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}$ - norma euclidiană a lui $\mathbb{R}^k$.

- $\| \ \|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$
  $\|(x_1, \ldots, x_k)\|_1 \stackrel{def}{=} |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$ - normă pe $\mathbb{R}^k$
- $\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$
  $\|(x_1, \ldots, x_k)\|_\infty \stackrel{def}{=} max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$ - normă pe $\mathbb{R}^k$

Teorema 1. Orice două norme definite pe $\mathbb{R}^k$ sunt echivalente.

Teorema 2. Orice aplicație liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă.

Observații

1) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ aplicație liniară $\Leftrightarrow \exists!\ v \in \mathbb{R}_p$ astfel încât $T(x) = x \cdot v$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ aplicație liniară $\Leftrightarrow \exists!\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ astfel încât $T(x_1, \ldots, x_k) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, $\forall x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^k$

3) $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, k, $p \geq 2$ aplicație liniară $\Leftrightarrow \exists!\ A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$T(x_1, \ldots, x_k) = \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right]^t, \ \forall (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

11 Funcții diferențiabile în spații Banach

$f : D \subseteq (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$, $x_0 \in D \cap D'$, X, Y spații Banach.

Definiția 1. Funcția f se numește diferențiabilă în x_0 dacă $\exists!\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($T : X \to Y$, T aplicație liniară și continuă) astfel încât

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} = 0$$

NOTAȚIE $T \stackrel{not}{=} df_{x_0}$ - diferențiala lui f în x_0.

Definiția 2. f se numește diferențiabilă pe D dacă este diferențiabilă în orice punct al mulțimii D.

Teorema 1. Dacă $f : D \subseteq (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$, atunci f este continuă în x_0.

Demonstrație $\|f(x)-f(x_0)\|_Y = \dfrac{\|f(x)-f(x_0)\|_Y}{\|x-x_0\|_X} \cdot \|x-x_0\|_X,\ \forall x \neq x_0 \in D$

$$\|f(x)-f(x_0)\|_Y = \frac{\|\overbrace{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}^{a}+\overbrace{T(x-x_0)}^{b}\|_Y}{\|x-x_0\|_X} \cdot \|x-x_0\|_X \leq$$

$$\leq \frac{\|f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)+T(x-x_0)\|_Y}{\|x-x_0\|_X} \cdot \|x-x_0\|_X =$$

$$= \left(\frac{\|f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)\|_Y}{\|x-x_0\|_X} + \frac{\|T(x-x_0)\|_Y}{\|x-x_0\|_X} \searrow_0 \right),$$

$\forall x \neq x_0$ ①
$T \in \mathcal{L}(X,Y) \Rightarrow \exists c > 0$ astfel încât $\|T(y)\|_Y \leq c\|y\|_X,\ \forall y \in X$
$\dfrac{\|T(x-x_0)\|_Y}{\|x-x_0\|_X} \leq \dfrac{c\|x-x_0\|_X}{\|x-x_0\|_X} = c,\ \forall x \neq x_0$ ②

Din ① și ② $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \|f(x)-f(x_0)\|_Y = 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f$ este continuă în x_0.

Operații cu funcții diferențiabile

Considerăm $f, g : D \subseteq (X, \| \quad \|_X) \to (Y, \| \quad \|_Y)$, $h : D \subseteq (X, \| \quad \|_X) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât f, g, h sunt diferențiabile în x_0. Atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, $\lambda f : D \subseteq X \to Y$ și $hf : D \to Y$ sunt diferențiabile în x_0 și au loc formulele:

- $d(f+g)_{x_0} = df_{x_0} + dg_{x_0}$
- $d(f-g)_{x_0} = df_{x_0} - dg_{x_0}$
- $d(\lambda f)_{x_0} = \lambda f_{x_0}$
- $d(hf)_{x_0} = dh_{x_0} \cdot f(x_0 + h(x_0) \cdot df_{x_0}$

Teorema 3. Dacă $f : D \subseteq X \to Y$ este funcție continuă ($\exists y_0 \in Y$ astfel încât $f(x) = y_0,\ \forall x \in D$), atunci f este diferențiabilă pe mulțimea D și $df_{x_0} = 0$ (funcția nulă).

Teorema 4. Dacă $f : X \to Y$ este aplicație liniară și continuă atunci f este diferențiabilă pe mulțimea X și $df_{x_0} = f,\ \forall x_0 \in X$.

Teorema 5. Considerăm $f : D \subseteq X \to B \subseteq Y$ și $g : B \subseteq Y \to Z$, $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât $f(x_0) \in B \cap B'$. Dacă f este diferențiabilă în x_0 și g este diferențiabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f : D \subseteq X \to Z$ este diferențiabilă în x_0 și $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$.

Cursul VIII

12 Derivate parțiale. Legătura cu diferențiabilitatea

$f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \in \mathbb{N}^*$

$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (f_1(x_1, \ldots, x_k), f_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_k))$.
$f_1, f_2, \ldots, f_p : D \to \mathbb{R}$, $f \overset{not}{=\!=} (f_1, f_2, \ldots, f_p)$.

$\mathbb{R}^k$ este spațiu vectorial real, $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^k = k$.

$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ - baza canonică în $\mathbb{R}^k$,
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
$\ldots$
$e_k = (0, 0, \ldots, 1)$

Definiția 1. Spunem că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, $1 \leq i \leq k$ în punctul $x_0 \in D$ dacă $\exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + te_i) - f(x_0)) \in \mathbb{R}^p$.

NOTAȚIE $\lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + te_i) - f(x_0)) \overset{not}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ - derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul x_0.

Observație $x_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$
$x_0 + te_i = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_k)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_k) - f(a_1, a_2, \ldots, a_k)) \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 1. Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$ și $x_0 \in D$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în x_0;

b) $f_1, f_2, \ldots, f_p$ admit derivată parțială în raport cu variabila x_i în x_0.

În plus, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x_0)\right)$.

Exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$. Studiați dacă f admite derivată parțială în origine $(0, 0)$.

$f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x, y) = xy$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2$.

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f_1((0,0) + t(1,0)) - f_1(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f_1(t,0) - f_1(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t \cdot 0 - 0 \cdot 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_2((0,0)+t(1,0))-f_2(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_2(t,0)-f_2(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2+0^2-0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\exists \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \quad = 0 \Rightarrow$ Conform teoremei 1 $\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_1((0,0)+t(0,1))-f_1(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_1((0,t))-f_1(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0-0}{t} = 0 \Rightarrow \exists \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) =$
0

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_2((0,0)+t(0,1))-f_2(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f_2(0,t)-f_2(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2-0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) =$
$0 \Rightarrow$ Conform teoremei 1 $\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Teorema 2. Dacă $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în $x_0 \in D$, atunci f admite toate derivatele parțiale în x_0 și avem următoarele formule:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df_{x_0}(e_i), \forall\, 1 \leq i \leq k$

b) $df_{x_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$
$df_{x_0}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \ldots + x_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0), \forall\, (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

Corolar. Dacă f nu admite cel puțin o dervată parțială în x_0, atunci f nu este diferențiabilă în x_0.

Teorema 3. Fie $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $x_0 \in D$ și $V \in \mathcal{V}(x_0) \subseteq D$ astfel încât f admite toate derivatele parțiale pe V și acestea sunt continue în x_0. Atunci f este diferențiabilă în x_0.

Cazuri particulare

1) $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p (k = 1)$
$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x))$, $f_1, f_2, \ldots, f_p : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- f este diferențiabilă în $x_0 \in D \Leftrightarrow f_1, f_2, \ldots, f_p$ sunt derivabile în x_0.
- $df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $df_{x_0}(x) = x \cdot (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \ldots, f_p'(x_0))$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $(p = 1)$, $k \geq 2$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}$, $df_{x_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$
$df_{x_0}(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \ldots + x_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$.

3) $f : D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 2$
$f(x_1, \ldots, x_k) = (f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_k))$
$f_1, f_2, \ldots, f_p : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $df_{x_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$

$$df_{x_0}(x_1,\ldots,x_k) = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \ldots + x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\right]^t,$$

unde $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1(x_0)} \end{pmatrix}$

Cursul IX

Operații cu funcții diferențiabile

a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât f și g sunt diferențiabile în x_0. Atunci $f+g$, $f-g$, $\alpha f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ sunt diferențiabile în x_0 și

- $d(f+g)_{x_0} = df_{x_0} + dg_{x_0}$
- $d(f-g)_{x_0} = df_{x_0} - dg_{x_0}$
- $d(\alpha f)_{x_0} = \alpha df_{x_0}$

b) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $g : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât f și g sunt diferențiabile în x_0. Atunci $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în x_0 și $d(fg)_{x_0} = g(x_0) \cdot df_{x_0} + f(x_0) \cdot dg_{x_0}$.

c) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to A \subseteq \mathbb{R}^q$ și $g : A \subseteq \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$, $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât $f(x_0) \in A \cap A'$. Dacă f este diferențiabilă în x_0 și g este diferențiabilă în $f(x_0)$, atunci $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$ este diferențiabilă în x_0 și $d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}$.

Definiția 1. O funcție $f : D = D_\circ \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ se numește de clasă C^1 pe mulțimea D și
$df : D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^q)$ este continuă.

NOTAȚIE $C_1(D, \mathbb{R}^q) \overset{def}{=} \{f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q \mid f$ funcție de clasă C_1 pe D $\}$

Observație $f \in C_1(D, \mathbb{R}^k) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{admite toate derivatele parțiale pe mulțimea } D \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}^q \text{ sunt continue pe mulțimea } D \end{cases}$

12.1 Teorema de inversiune locală

Fie $f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ astfel încât $f \in C_1(D, \mathbb{R}^k)$ și $x_0 \in D$ astfel încât $df_{x_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este bijectivă și $(df_{x_0})^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ este liniară și continuă.
Atunci $\exists r_1,\ r_2 > 0$ astfel încât $B(x_0, r_1) \subseteq D$, $f|_{B(x_0,r_1)} : B(x_0, r_1) \to B(f(x_0), r_2)$ este bijectivă, $(f|_{B(x_0,r_1)})^{-1} \in C_1(B(f(x_0), r_2), \mathbb{R}^k)$.

12.2 Teorema funcțiilor implicite

Fie $f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^{k+p} \to \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ și $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+p}$ astfel încât

a) $f(x_0, y_0) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$

b) f este continuă în (x_0, y_0)

c) $\exists \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}} : D \to \mathbb{R}^q$ și sunt continue în (x_0, y_0), $\forall 1 \le i,\ j \le p$.

d) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}}(x_0, y_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{k+p}}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}}(x_0, y_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{k+p}}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{k+1}}(x_0, y_0) & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_{k+p}}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci $\exists r_1, r_2 > 0$ astfel încât $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$.
$(\exists!)$ $h : B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ o funcție continuă astfel încât $h(x_0) = y_0$ și $f(x, h(x)) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^p$, $\forall x \in B(x_0, r_1)$.

Caz particular p = 1
$f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ soluție a ecuației, $f : D = D^\circ \subseteq \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$.

a) $f(x_0, y_0) = 0$

b) f continuă în (x_0, y_0)

c) $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}} : D \in \mathbb{R}$ și este continuă în (x_0, y_0)

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(x_0, y_0) \neq 0$

$\exists r_1, r_2 > 0$ astfel încât $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$.
$(\exists!)$ $h : B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ o funcție continuă astfel încât $h(x_0) = y_0$ și $f(x, h(x)) = 0 \in \mathbb{R}^p$, $\forall x \in B(x_0, r_1)$.

Cursul X

13 Aplicații biliniare și continue

Definiția 1.

a) $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numește biliniară dacă

- $T(\alpha u + \beta v, w) = \alpha T(u, w) + \beta T(v, w)$
- $T(u, \alpha v + \beta w) = \alpha T(u, v) + \beta T(u, w)$

$\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall u, v, w \in \mathbb{R}^p$

b) O aplicație biliniară $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numește simetrică dacă $T(u, v) = T(v, u)$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^k$

Definiția 2. Fie $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o aplicație biliniară.

a) T se numește pozitivă ($T \geq 0$) dacă $T(u, u) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^k$

b) T se numește strict pozitivă ($T > 0$) dacă $T(u, u) > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$

c) T se numește negativă ($T \leq 0$) dacă $T(u, u) \leq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^k$

d) T se numește strict negativă ($T < 0$) dacă $T(u, u) < 0$, $\forall u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$

Propoziția 1. Aplicația $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este biliniară dacă și numai dacă $\exists\ \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq k\} \subseteq \mathbb{R}^p$ astfel încât $T((x_1, x_2, \ldots, x_k), (y_1, y_2, \ldots, y_k)) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} x_i y_j a_{ij}, \forall (x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.
În plus, T este aplicație biliniară simetrică dacă și numai dacă $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall 1 \leq i, j \leq k$.

Propoziția 2. Fie $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ o aplicație biliniară simetrică și $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ matricea asociată lui T.

a) $T > 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq l \leq k, det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l}$

b) $T < 0 \Leftrightarrow \forall 1 \leq l \leq k, (-1)^l det(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq l} > 0$

Propoziția 3. Orice aplicație biliniară $T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă.

NOTAȚIE $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p) \stackrel{def}{=} \{T : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p \mid T$ aplicație liniară și continuă $\}$

14 Derivate parțiale de ordinul doi. Diferențiala de ordinul doi

$f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$
$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_p(x_1, \dots, x_k))$
$f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$
$f_1, f_2, \dots, f_p : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

Definiția 1. Spunem că f admite derivată parțială de ordinul doi, în raport cu variabilele x_i și x_j în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât f admite derivată parțială în raport cu variabila x_j pe $D \cap V$ și $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în x_0.

NOTAȚIE $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$

Observație $\exists\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \in \mathbb{R}^p \Leftrightarrow \exists\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}(x_0), \dots, \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \in \mathbb{R}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_i \partial x_j}(x_0), \dots, \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)$.

Definiția 2. Spunem că f este diferențiabilă de două ori în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists$ $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât f este diferențiabilă pe $V \cap D$ și df este diferențiabilă în x_0.

NOTAȚIE $d^2 f_{x_0} = d(df)_{x_0}$, $d^2 f_{x_0} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ aplicație biliniară și continuă.

14.1 Teorema lui Schwarz

Dacă f este diferențiabilă de două ori în x_0, atunci f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi în x_0. În plus, au loc următoarele egalități:

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, $\forall 1 \le i, j \le k$

b) $d^2 f_{x_0}((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{k} x_i y_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, $\forall (x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$.

Observații

1) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă de două ori în $x_0 \in D \cap D'$, $d^2 f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este aplicație biliniară, continuă și simetrică.

2) Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în $x_0 \in D \cap D'$, $d^2 f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este aplicație biliniară, continuă și simetrică.

I se asociază matricea $A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ care se numește hessiana funcției f în x_0.

14.1.1 Corolare la teorema lui Schwarz

1) Dacă f nu admite cel puțin o derivată parțială de ordin doi în x_0, atunci f nu este diferențiabilă de două ori în x_0.

2) Dacă f admite derivatele parțiale de ordinul doi în x_0 și $\exists\ 1 \le i, j \le k$ astfel încât $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ atunci f nu este diferențiabilă de două ori în x_0.

14.2 Teorema lui Young

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \mathring{D}, V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $V \subseteq D$ și f admite toate derivatele parțiale de ordin doi pe V și acestea sunt funcții continue în x_0. Atunci f este diferențiabilă de două ori în x_0.

Corolar Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $G = \mathring{G} \subseteq D$ astfel încât f admite toate derivatele parțiale de ordin doi pe G și acestea sunt funcții continue pe G. Atunci f este diferențiabilă de două ori pe G.

Cursul XI

15 Puncte de extrem local pentru funcții care depind de mai multe variabile reale

$f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

Definiția 1.

a) $x_0 \in D$ se numește punct de maxim local pentru f dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \le f(x_0), \forall x \in V \cap D$.

b) $x_0 \in D$ se numește punct de minim local pentru f dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in D \cap V'$.

Definiția 2. $x_0 \in D \cap D'$ se numește punct critic pentru f dacă f este diferențiabilă în x_0 și $df_{x_0} = 0$.

Observație $x_0 \in D \cap D'$ este punct critic pentru $f \Leftrightarrow$

- f este diferențiabilă în x_0

- $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0 \end{cases}$$

15.1 Teorema lui Fermat. Cazul multidimensional

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât f este diferențiabilă în x_0 și x_0 este punct de extrem local pentru f. Atunci $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ este punct critic pentru f.

15.2 Criteriul lui Sylvester

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât f este diferențiabilă de două ori în x_0 și x_0 este punct critic pentru f.

a) Dacă $d^2 f_{x_0} > 0$, atunci x_0 este punct de minim local pentru f

b) Dacă $d^2 f_{x_0} < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local pentru f

Remarcă $d^2 f_{x_0} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$d^2 f_{x_0} \to A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\Delta_k = det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j \in \overline{1,k}}$$

- $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k > 0 \Rightarrow x_0$ punct de minim local pentru f.
- $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^k \Delta_k > 0 \Rightarrow x_0$ punct de maxim local pentru f.

Dacă $\Delta_1, \ldots, \Delta_k \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\ldots$, $(-1)^k \Delta_k \geq 0$, $\exists 1 \leq i \leq k$ astfel încât $\Delta_i = 0$ atunci criteriul lui Sylvester nu se poate aplica.
Dacă nu suntem în niciuna din situațiile anterioare, x_0 nu este punct de extrem local pentru f.

16 Funcții integrabile Riemann

16.1 Diviziunea unui interval $[a, b]$, norma diviziunii, sistemul de puncte intermediare ale unei diviziuni

$$I = [a, b] \tag{1}$$

Definiția 1. Se numește diviziune a intervalului $[a, b]$ o mulțime finită $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_p\}$ unde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{p-1} < x_p = 0$

NOTAȚIE $\mathcal{D}([a, b])$ = mulțimea tuturor diviziunilor invervalului $[a, b]$.
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$

Definiția 2. $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$
Norma diviziunii Δ este numărul real $\|\Delta\| \overset{def}{=} max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_p - x_{p-1}\}$.

Exemplu $[0, 1]$
$\Delta : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$
$\|\Delta_n\| = max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{n}$.

Definiția 3. Se numește sistem de puncte intermediare al diviziunii Δ mulțimea finită

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_p\} \text{ unde } \begin{cases} t_1 \in [x_0, x_1] \\ t_2 \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ t_p \in [x_{p-1}, x_p] \end{cases}$$

16.2 Sume Riemann. Sume Darboux

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{p-1} < x_p = b$
$T = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$

Definiția 4. Se numește sumă Riemann asociată funcției f, diviziunii D și sistemului de puncte intermediare numărul real $\sigma_\Delta(f, T) = f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x1) + \dots + f(t_p)(x_p - x_{p-1}) = \sum_{i=1}^{p} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.
Alegem $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită.

- $\Delta : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$

- $M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

- $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Definiția 5.

a) Se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ numărul real $S_\Delta(f) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_p(x_p - x_{p-1})$.

b) Se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și diviziunii Δ numărul real $s_\Delta(f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_p(x_p - x_{p-1})$.

Cursul XII

16.3 Definiția funcției integrabile Riemann, criterii de integrabilitate, operații cu funcții integrabile Riemann

Definiția 1. Funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numește integrabilă Riemann dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $\forall T$ un sistem de puncte intermediare al diviziunii Δ avem $|\delta_\Delta(f, T) - I| < \varepsilon$.

NOTAȚIE $I \overset{def}{=} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (integrala definită a funcției f pe $[a, b]$).
$\mathcal{R}([a, b]) \overset{def}{=} \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]\}$

Observații Dacă $f \in \mathcal{R}([a, b]), (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}([a, b])$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir de sisteme de puncte intermediare asociate diviziunii $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, T_n) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

16.3.1 Criteriul lui Darboux de integrabilitate

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f \in \mathcal{R}([a, b])$

b) f este funcție mărginită pe $[a, b]$ și $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$, $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Definiția 2. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesque dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de intervale deschise astfel încât $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$ și $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Exemple de mulțimi neglijabile Lebesque

1) ϕ

2) Orice mulțime finită din $\mathbb{R}$

3) Orice mulțime numărabilă din $\mathbb{R}$

16.3.2 Criteriul lui Lebesque de integrabilitate

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f \in \mathcal{R}([a, b])$

b) f este funcție mărginită pe $[a, b]$ și $\{x \in [a, b] \mid f$ nu este continuă în $x\}$ este neglijabilă Lebesque.

Teorema 1. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f \in \mathcal{R}([a, b])$ și g este funcție mărginită pe $[a, b]$. Dacă $\{x \in [a, b] \mid f(x) + g(x)\}$ este ori finită, ori numărabilă, atunci $g \in \mathcal{R}([a, b])$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Operații cu funcții integrabile Fie $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Atunci $f+g, f-g, f \cdot g, \alpha f, |f| \in \mathcal{R}([a, b])$ și au loc următoarele relații:

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

16.4 Clase de funcții integrabile Riemann

Teorema 2. Orice funcție monotona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Demonstrație Presupunem funcția f crescătoare și demonstrăm că $f \in \mathcal{R}([a, b])$ folosind criteriul lui Darboux.

$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ este funcție mărginită.

$M_i = \sup\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
$m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_{i-1})$

$$S_\Delta(f) - \Delta_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{p} m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \|\Delta\|$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \sum_{i=1}^{p}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \|\Delta\|$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \|\Delta\|(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_p) - f(x_{p-1}))$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \|\Delta\|(f(b) - f(a)) \text{ ①}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Alegem $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$.

Dacă $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|\Delta\|(f(b) - f(a)) < \varepsilon \overset{①}{\Rightarrow} S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$

Teorema 3. Orice funcție continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Demonstrație Demonstrăm că $f \in \mathcal{R}([a,b])$ folosind criteriul lui Lebesque.

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continuă pe}[a,b] \\ [a,b] \subseteq \mathbb{R} \text{ mulțime compactă} \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ este mărginită și își atinge marginile.}$$

$\{x \in [a,b] \mid f \text{ nu este continuă în } x\ \} = \phi$ este neglijabilă Lebesque $\Rightarrow f \in \mathcal{R}([a,b])$.

16.5 Permutarea limitei cu integrala

16.5.1 Teorema lui Weierstrass

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}([a,b])$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe $[a,b]$. Atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

16.5.2 Teorema convergenței mărginite

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}([a,b])$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{s} f$ pe $[a,b]$ și $\exists M > 0$ astfel încât $|f_n(x) \leq M|, x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$.

16.6 Proprietățile funcțiilor integrabile Riemann

Teorema 5. Fie $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și considerăm funcțiile $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$,

$G(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$. Atunci F, G funcții continue pe $[a,b]$.

Dacă f este continuă în $x_0 \in [a,b]$ atunci F, G sunt derivabile în x_0 și $F'(x_0) = f'(x_0)$ și $G'(x_0) = -f(x_0)$.

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci F, G derivabile peste tot și $F'(x) = f(x), G'(x) = -f(x), \forall x \in [a,b]$.

Cursul XIII

Propoziția 1. Fie $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și considerăm funcțiile $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ definite prin $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt, G(x) = \int_x^b f(t)\,dt$. Atunci F, G sunt funcții continue pe $[a,b]$.

Dacă f este continuă în $x_0 \in [a,b]$, F, G sunt derivabile în x_0 și $F'(x_0) = f(x_0), G'(x_0) = -f(x_0)$.

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, F, G sunt derivabile pe $[a,b]$ și $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Corolar Orice funcție continuă $f : \underset{\text{interval}}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive.

Construcția unei primitive: $a \in I$ se fixează. $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Propoziția 2. Fie $f : \underset{\text{interval}}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g, h : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe J. Atunci funcția $F : J \to \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_{g(x)}^{f(x)} f(t)\,dt$ este derivabilă pe J și
$F'(x) = f(h(x) \cdot h'(x)) - f(g(x) \cdot g'(x))$, $\forall x \in J$.

16.6.1 Formula Leibniz-Newton

Fie $f \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel încât f admite primitive. Atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, unde F este o primitivă a lui f.

16.6.2 Formula de integrare prin părți

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe $[a,b]$ astfel încât $f', g' \in \mathcal{R}([a,b])$. Atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$.

16.6.3 Schimbarea de variabilă pentru integralele definite

Fie $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $f : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ o funcție bijectivă cu $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, derivabilă cu φ' funcție continuă. Atunci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx$.

Teorema 1. Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$.

a) Dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) Dacă $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

c) Are loc inegalitatea $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$, unde $m = \inf\limits_{t\in[a,b]} f(t)$, $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$.

d) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ și $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

e) Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ și $\exists\, x_0 \in [a,b]$ astfel încât $f(x_0) > 0$. Atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

16.6.4 Prima teoremă de medie pentru integralele definite

Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel încât f are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$ și $g \geq 0$. Atunci $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\,dx$.

Corolar Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este funcție continuă, $\exists\, c \in (a,b)$ astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b 1\,dx = f(c)\,(b-a)$.

16.6.5 A doua teoremă de medie pentru integralele definite

Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel încât g este funcție monotonă. Atunci $\exists\, c \in [a,b]$ astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x)\,dx$.

Corolar Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $g : [a.b] \to \mathbb{R}_+$.

a) Dacă g este crescătoare, $\exists\, c \in [a,b]$ astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(b) \cdot \int_b^c f(x)\,dx$.

b) Dacă g este descrescătoare, $\exists\, c \in [a,b]$ astfel încât $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx$.

16.7 Integrala improprie

$f : I \to \mathbb{R}$
$I = [a,b) \vee (a,b] \vee (a,b) \vee (-\infty,a] \vee (-\infty,a) \vee (a,+\infty) \vee [a,+\infty) \vee \mathbb{R}$ ($\vee$ = sau).

Definiția 1. Funcția $f : I \to \mathbb{R}$ se numește local integrabilă pe I dacă $\forall\, \alpha < \beta \in I$, $f\big|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]$.

NOTAȚIE $\mathcal{R}_{loc}(I) \overset{def}{=\!=} \{f : I \to \mathbb{R} \mid f$ este local integrabilă pe $I\}$.

Exemple de funcții local integrabile:

1) Orice funcție monotonă $f : I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I.

2) Orice funcție continuă $f : I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I.

$f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$.

Definiția 2. Fie $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b])$. Integrala improprie $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ se numește convergentă dacă $\exists \displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $\exists \displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a\\ y\to b\\ y<b}} \int_x^y f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\exists \displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

Integrala improprie $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ se numește divergentă dacă nu este convergentă.

Integrala improprie $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ se numește absolut convergentă dacă integrala $\displaystyle\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ este convergentă.

16.7.1 Criteriul lui Cauchy pentru integralele improprii

Fie $f \in \mathcal{R}_{loc}([a, b])$.

a) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, t_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\,dt\right| < \varepsilon$, $\forall t_\varepsilon < x < y < b$.

b) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este absolut convergentă $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, t_\varepsilon \in [a, b)$ astfel încât $\displaystyle\int_x^y |f(t)|\,dt < \varepsilon$, $\forall t_\varepsilon < x < y < b$.

Teorema 1. Dacă $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este absolut convergentă atunci este convergentă.

Dacă $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este absolut convergentă $\xRightarrow[\text{Cauchy (b)}]{\text{Criteriul lui}}$ $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, t_\varepsilon \in [a,b)$ astfel încât $\displaystyle\int_x^y |f(t)|\,dt < \varepsilon$, $\forall\, t_\varepsilon < x < y < b$ ①.

Știm că $\displaystyle\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt$, $\forall x < y$ ②.

Din ① și ② $\Rightarrow$ $\displaystyle\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| < \varepsilon$, $\forall\, t_\varepsilon < x < y < b$ $\xRightarrow[\text{Cauchy (b)}]{\text{Criteriul lui}}$ $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă.

Reciproca teoremei este falsă.

Cursul XIV

16.8 Criterii de convergență pentru integralele improprii

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă pe $[a,b)$.

16.8.1 Criteriul de comparație cu inegalități

Fie $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$ astfel încât $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in [a,b)$.

Dacă $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă.

16.8.2 Criteriul de comparație cu limite

Fie $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$ astfel încât $f(x), g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b)$ și $\exists \displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.

- Dacă $l \in (0, +\infty)$, $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ și $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ au aceiași natură.
- Dacă $l = 0$ și $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă.
- Dacă $l = +\infty$ și $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă.

16.8.3 Formula Leibniz-Newton pentru integralele improprii

Fie $f \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))f$ admite primitive pe $[a,b)$ și $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) \in \mathbb{R}$, unde $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ este primitivă a lui f. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) \in \mathbb{R}$.

În plus, $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}}(F(x) - F(a))$.

16.8.4 Formula de integrare prin părți a integralelor improprii

Fie $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe $[a,b)$ astfel încât $f', g' \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$ și $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\,g(x) \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$ este convergentă.

b) $\displaystyle\int_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă.

$$\int_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^{b-0} - \int_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx,$$

unde $\displaystyle f(x)\,g(x)\Big|_a^{b-0} = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)$.

16.8.5 Formula de schimbare de variabilă pentru integralele improprii

Fie $f \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$ și $\varphi : [c,d) \to [a,b)$ astfel încât

- φ este derivabilă cu derivata funcției continuă;
- φ este bijectivă;
- $\varphi(c) = a, \lim\limits_{\substack{y\to d\\ y<d}} \varphi(y) = b$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă;

b) $\displaystyle\int_c^{d-0} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy$ este convergentă.

În plus, $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \int_c^{d-0} f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy$.

16.8.6 Criteriile Abel-Dirichlet pentru integralele improprii

Fie $f, g \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$ astfel încât f este funcție descrescătoare pe $[a,b)$ și $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

a) Dacă $l \in \mathbb{R}$ și $\displaystyle\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă;

b) Dacă $l = 0$ și $\exists\, M > 0$ astfel încât $\displaystyle\left|\int_a^{b-0} g(x)\,dx\right| \leq M$, $\forall c \in [a,b)$, atunci $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă.

Teorema 1. Fie $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ o funcție descrescătoare și pozitivă pe $[a,+\infty)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă;

b) $\displaystyle\sum_{n \geq [a]} f(n)$ este convergentă.

Bibliografie

[1] Nicu Boboc. *Analiză Matematică.* Editura Universității București, 1992, 1993 (2 vol.).

[2] Ion Colojoară. *Analiză Matematică.* Editura Didactică și Pedagogică București, 1983.

[3] XXX. *Analiză Matematică.* Editura Didactică și Pedagogică București, Ediția V, 1980 (2 vol.).