Restanță Alg 2 05.09.2016

Pb 1

$I = (x^2, x^3) \trianglelefteq R[x]$

$(I, +) \leq (R[x], +)$ ~~definim idealul nostru~~ definiția idealului nostru

$(\forall) f(x) \in I \; \forall g(x) \in R[x] \Rightarrow f(x) \cdot g(x) \in I$

$I = (x^2, x^3) = \{ x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot g(x) \mid f(x) \cdot g(x) \in R[x] \}$

$x^3 = x^2 \cdot x \Rightarrow (x^3, x^2)$ (se poate scrie sub forma $(x^3) + (x^2)$ → suma a 2 ideale

1) $x^3, x^4, x^5, x^6 \in I$ - orice monom la o putere se scrie $x^2 \cdot x$ la o putere $\overset{\parallel}{(x^2)}$

$\Rightarrow P(x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \quad (x^k = x^2 - x^{k-2})$

2) $x \notin (x^2, x^3) = (x^2)$ (Dem: $x = x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot g(x)$ ↯ ↯ deoarece x nu apare în partea dreaptă adică în $x^2 \cdot f(x) + x^3 \cdot g(x)$ - apare doar x^k a.î. $k \geq 2$

$F(x) = \underset{\notin I}{x} + \underbrace{2x^3 + 3x^3 + 4x^4}_{\in I}$

Deoarece $2x^2 + 3x^3 + 4x^4 \in I$, dacă $F(x) \in I$ → (din def idealului că e subgrup în rap cu adunarea șir) $\Rightarrow F(x) = 2x^3 + 3x^3 + 4x^4 = x \in I$

$\Rightarrow F(x) \in I$ ↯

3) $I = (x^3)$

Un polinom de grad mai mic nu se poate găsi într-un ~~pe~~ ideal al unui polinom de grad mai mare

$\Rightarrow I \neq (x^3)$

Dacă $I = (x^3) \Rightarrow (x^3, x^2) \supset x^3$ DA și $(x^3, x^2) \in x^3$ adică

adică $x^2 \in (x^3) \Rightarrow x^2 = x^3$ ↯

4)

(c) $\mathbb{R}[x]/(x^2) \simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\{\widehat{ax+b} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$\widehat{ax+b} + \widehat{cx+d} = \overline{(a+c)x+b+d}$

$(\widehat{ax+b}) \cdot (\widehat{cx+d}) = \overline{ac\,x^2 + (ad+bc)x + bd} = \overline{(ad+bc)x+bd}$ — deoarece $x^3+x+1 \notin I$

Fiind izomorfism de inele, pe ambele operații trebuie să fie corect (HINT, HINT -> nu sunt izomorfe)

(TF 1, LCR pt izomorfism de învățat :)

nu merge!

căutăm proprietăți alg. pe care ~~nu~~ unul o are și celălalt nu

$\hat{0}, \hat{1} \longleftrightarrow (0,0)\ (1,1)$

Trebuie asta

Ne uităm la idempotenți $(x^2 - x)$

Tot ce se leagă de 0 sau 1 (div ai lui 0; $x^k = 1$ etc)

idempotenți în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sunt $(a,b)^2 = (a,b) \Rightarrow a^2 = a,\ b^2 = b$

Aici am 4 idempotenți $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \{0,1\} \\ b = \{0,1\} \end{array}\right| \Rightarrow$

$\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$\widehat{cx+d}^{\,2} = cx+d$

$\overline{c^2x^2 + 2cd\,x^2 + d^2} = c\,x \Leftrightarrow \widehat{2cd\,x + d^2} = \widehat{cx+d} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 2cd\,x + d^2 = cx + d \Leftrightarrow d = d^2$ și $2cd = c$, $c, d \in \mathbb{R}$

$d = 0 \Rightarrow c = 0$

$d = 1 \Rightarrow 2c = c \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow$ în $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ am doar 2 idempotenți

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]/I \not\simeq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $f(x) = x^3 + 3x + 2$

① $gr(f) = 3$ f e red în $\mathbb{Q}[x] \Rightarrow$ f nu are răd raționale

Dacă $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ are rădăcină rațională α

atunci $\alpha = \frac{p}{q}$ cu $p | a_0$ și $q | a_n$

$\left(2x+1 \rightarrow -\frac{1}{2}\right)$

Dacă f(x) are o răd rațională $\alpha = \frac{p}{q} \Rightarrow$ $p/2 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 2\}$

$q/1 \Rightarrow q \in \{\pm 1\}$

$f(1) = 6 \neq 0$

$f(-1) = -2 \neq 0$

$f(2) \neq 0$

$f(-2) \neq 0$

$\Rightarrow$ f ired. în $\mathbb{Q}[x]$

2) Corp. Care e definiția corpului?

corp = inel în care orice el nenul e inversabil

Ne gândim dacă e domeniu de integritate

Dacă e, $\widehat{g(x)} \cdot \widehat{h(x)} = \hat{0} \Rightarrow \widehat{g(x)} = \hat{0}$ sau $\widehat{h(x)} = 0$

$\Updownarrow$ def

$g(x) \cdot h(x) \in (f(x)) \Rightarrow f(x) \,|\, g(x) \cdot h(x)$

$\Downarrow$ f ired

$f | g$ sau $f | h$

$\Updownarrow$

$\widehat{g(x)} = \hat{0}$ sau $\widehat{h(x)} = \hat{0}$

$\Rightarrow$ e domeniu

(Asta dacă nu era sigur că e corp)

$\mathbb{Q}[x]/(f) = \{\widehat{g(x)} \mid g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ și grad g < grad f$\}$

Teorema împ cu rest

$f = g \cdot c + r$

Fie $\widehat{g(x)} \neq \hat{0}$ cu ~~ro~~ gr $g <$ grad $f \Rightarrow (g, f) = 1$

$\Rightarrow$ Alg lui Euclid $\Rightarrow \hat{1} = \hat{g}(x) \cdot \widehat{h(x)} + \widehat{f(x)} \cdot \widehat{g(x)}$

$\Rightarrow$ corp

3) $\mathbb{Z}[x]/(f) \Rightarrow A$ ~~net~~ inel factor

(3p) $\hat{x} \neq \hat{0}$ in A, A nu e corp (2p)

$\hat{x} \notin U(A)$;

$\hat{x} \neq \hat{0}$ si $\hat{x} \notin A \xrightarrow[\text{corpului}]{\text{def}}$ A nu e corp

Presupunem $\hat{x} = \hat{0} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in \underset{\substack{\text{idealul}\\ \text{generat de } f}}{(x^3+3x+2)} \Rightarrow x = x^3+3x+2) \overset{\mathbb{Z}[x]}{\downarrow} h(x)$

do de grade

ca la ex (1)-2,3

$\Rightarrow \hat{x} \neq \hat{0}$

Presupunem $\hat{x} \in U(A) \Rightarrow x \cdot \widehat{ax^2+bx+c} = \hat{1}$

$A = \mathbb{Z}[x]/(x^3+3x+2) = \{\widehat{ax^2+bx+c} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}$

$\widehat{ax^3+bx^2+cx} = \hat{1}$

Stiu că $\widehat{x^3+3x+2} = \hat{0} \Rightarrow \hat{x^3} = \widehat{-3x-2}$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{bx^2 - 3ax + cx - 2a} = \hat{1} \\ \widehat{bx^2 - (3a-c)x - 2a} = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$bx^2 - (3a-c)x - 2a - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -3a + c = 0 \\ -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$ dar $a, b, c \in \mathbb{Z}$ do

4

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{L_3 = L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 = L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \underset{L_4 = L_3 - 5L_1}{\overset{L_3 = L_3 - 5L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 = L_1 + 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z - 4t = -5 \\ y - z - t = -1 \end{cases}$ z, t nec secundare; x, y nec principale

$\rightarrow S = \{(2z - 4t - 5, z + t - 1, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

2) $z = t = 0 \Rightarrow (-5, -1, 0, 0)$ soluție particulară a sistemului

$(2z + 4t - 5, z + t - 1, z, t) = \underbrace{(-5, -1, 0, 0)}_{x_0} + (2z + 4t, z + t, z, t)$

$V = \{(2z + 4t, z + t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$ spațiu vectorial

3) $\dim V$

$V = \{(2z + 4t, t + t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(2z, z, z, 0) + (4t, t, 0, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{z \cdot (2, 1, 1, 0) + t \cdot (4, 1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \langle (2,1,1,0), (4,1,0,1) \rangle \Rightarrow \dim V = 2$ și $B = \{(2,1,1,0), (4,1,0,1)\}$ bază în V