Criptografie și Securitate

- Prelegerea 18 -
Noțiuni de securitate în criptografia asimetrică

Adela Georgescu, Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Cuprins

1. Securitate perfectă

2. Securitate semantică = Securitate CPA

Securitate perfectă

- Începem studiul securității în același mod în care am început la criptografia simetrică: cu securitatea perfectă;

Securitate perfectă

- Începem studiul securității în același mod în care am început la criptografia simetrică: cu securitatea perfectă;
- Definiția e analoagă cu diferența că adversarul cunoaște, în afara textului criptat, și cheia publică;

Securitate perfectă

- Începem studiul securității în același mod în care am început la criptografia simetrică: cu securitatea perfectă;
- Definiția e analoagă cu diferența că adversarul cunoaște, în afara textului criptat, și cheia publică;

Definiție

O schemă de criptare peste un spațiu al mesajelor $\mathcal{M}$ este perfect sigură dacă pentru orice probabilitate de distribuție peste $\mathcal{M}$, pentru orice mesaj $m \in \mathcal{M}$ și orice text criptat c cu cheia publică pk pentru care $Pr[C = c] > 0$, următoarea egalitate este îndeplinită:

$$Pr[M = m|C = c] = Pr[M = m]$$

Securitate perfectă

- Întrebare: Securitatea perfectă este posibilă în cadrul criptografiei cu cheie publică?

Securitate perfectă

- Întrebare: Securitatea perfectă este posibilă în cadrul criptografiei cu cheie publică?
- Răspuns: NU! Indiferent lungimea cheilor și a mesajelor;

Securitate perfectă

- Întrebare: Securitatea perfectă este posibilă în cadrul criptografiei cu cheie publică?
- Răspuns: NU! Indiferent lungimea cheilor și a mesajelor;
- Având pk și un text criptat $c = Enc_{pk}(m)$, un adversar nelimitat computațional poate determina mesajul m cu probabilitate 1.

Securitate semantică

- Securitatea semantică în criptografia cu cheie publică este corespondenta noțiunii similare din criptografia cu cheie secretă;

Securitate semantică

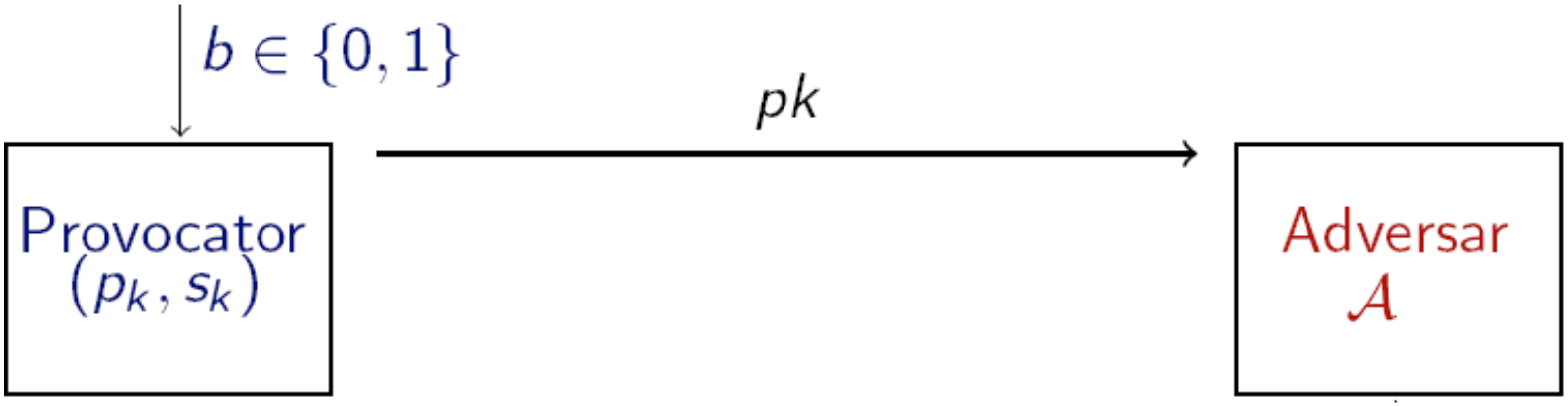
- Securitatea semantică în criptografia cu cheie publică este corespondenta noțiunii similare din criptografia cu cheie secretă;
- Vom defini securitatea semantică pe baza unui experiment de indistinctibilitate $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$ unde $\pi = (Enc, Dec)$ este schema de criptare iar n este parametrul de securitate al schemei π;

Securitate semantică

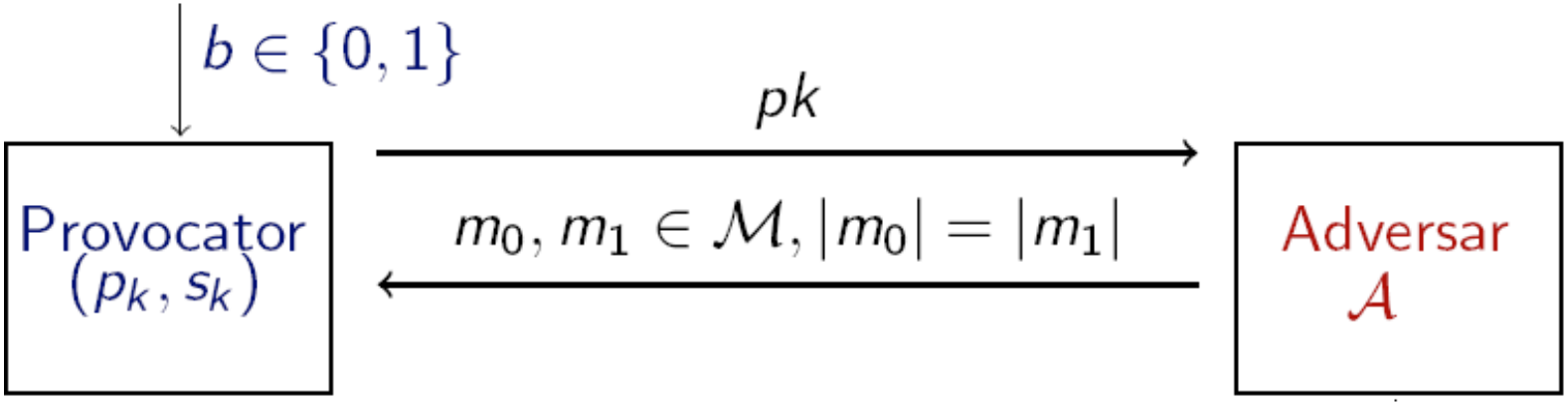
- Securitatea semantică în criptografia cu cheie publică este corespondenta noțiunii similare din criptografia cu cheie secretă;
- Vom defini securitatea semantică pe baza unui experiment de indistinctibilitate $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$ unde $\pi = (Enc, Dec)$ este schema de criptare iar n este parametrul de securitate al schemei π;
- Personaje participante: **adversarul** $\mathcal{A}$ care încearcă să spargă schema și un **provocator (challenger)**.

Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$

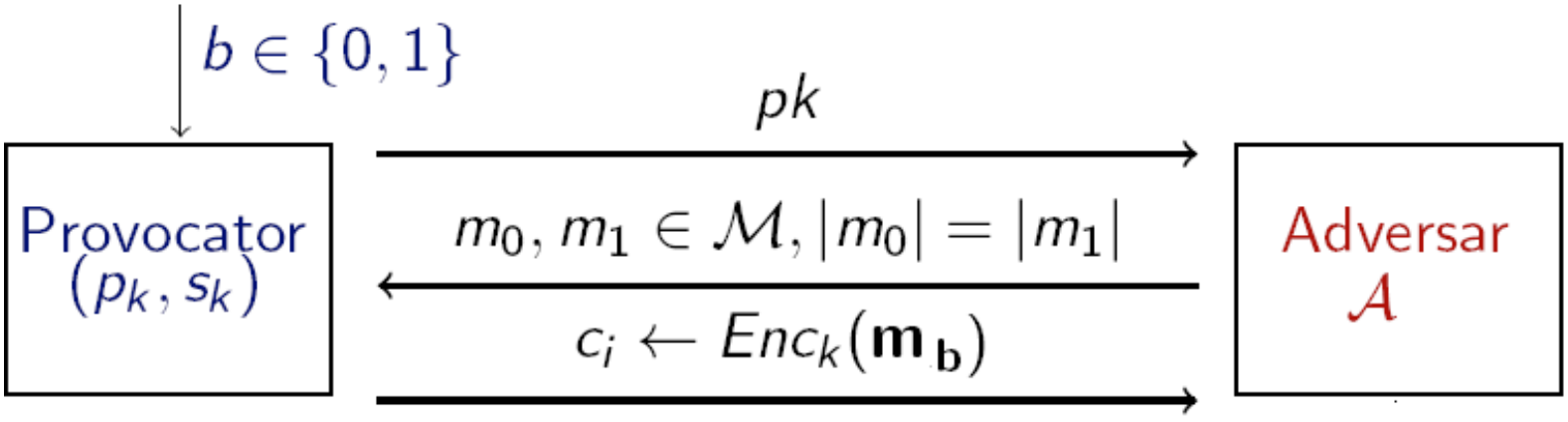
Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



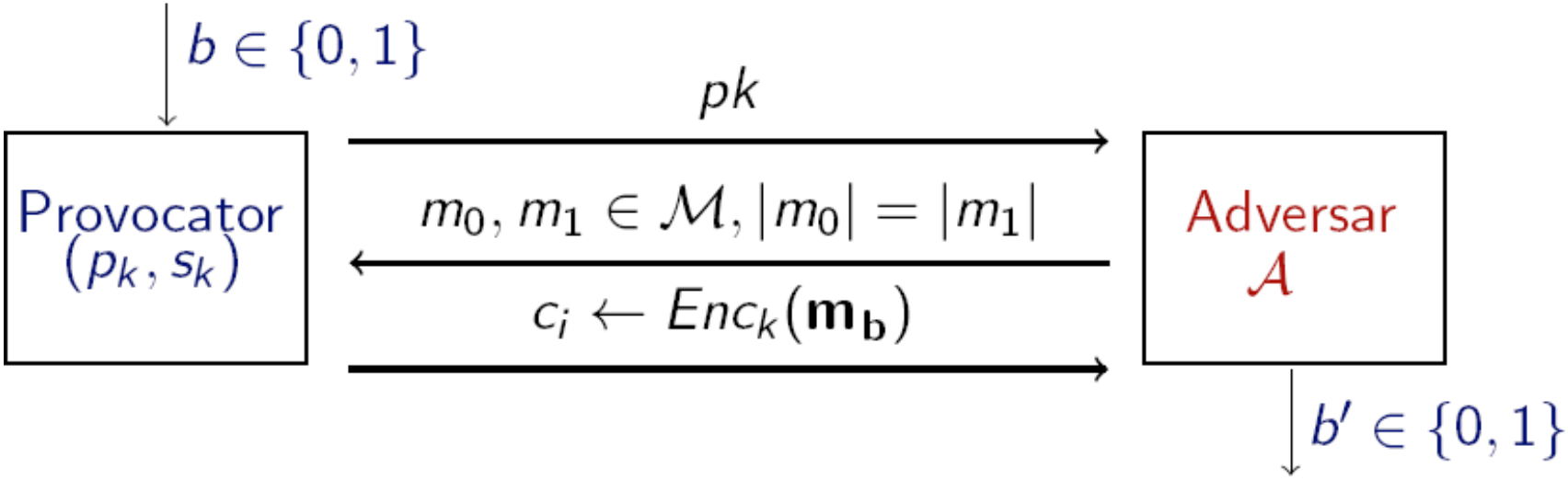
Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



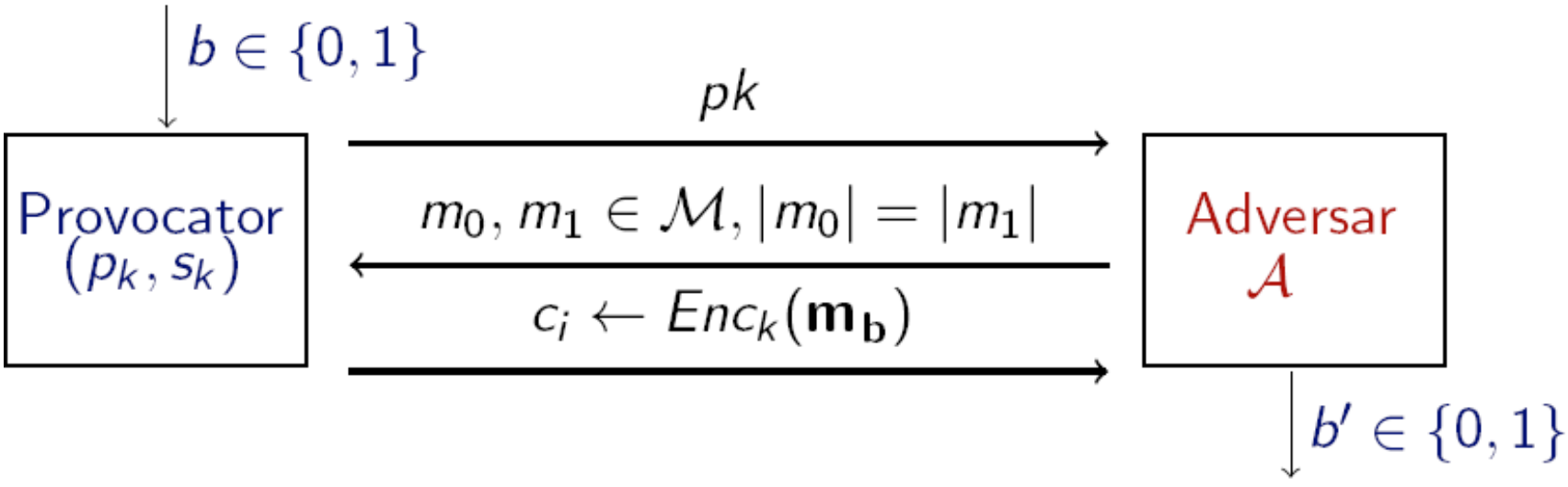
Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



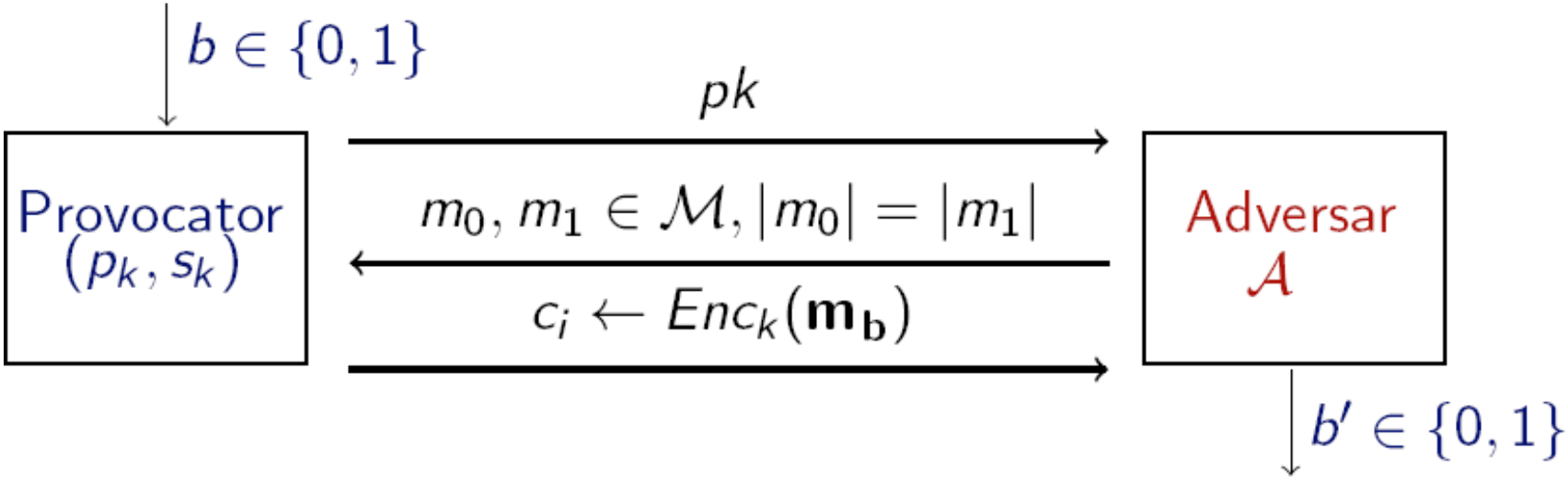
Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



Experimentul $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



- Output-ul experimentului este 1 dacă $b' = b$ și 0 altfel. Dacă $PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n) = 1$, spunem că $\mathcal{A}$ a efectuat experimentul cu succes.

Securitate pentru interceptare simplă

Definiție

O schemă de criptare $\pi = (Enc, Dec)$ este indistinctibilă în prezența unui atacator pasiv dacă pentru orice adversar $\mathcal{A}$ există o funcție neglijabilă negl așa încât

$$Pr[PubK^{eav}_{\mathcal{A},\pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + negl(n).$$

Securitate pentru interceptare simplă

- Principala diferență față de definiția similară studiată la criptografia cu cheie secretă este că $\mathcal{A}$ primește cheia publică pk;

Securitate pentru interceptare simplă

- Principala diferență față de definiția similară studiată la criptografia cu cheie secretă este că $\mathcal{A}$ primește cheia publică pk;
- Adică $\mathcal{A}$ primește acces *gratuit* la un oracol de criptare, ceea ce înseamnă că el poate calcula $Enc_{pk}(m)$ pentru orice m;

Securitate pentru interceptare simplă

- Principala diferență față de definiția similară studiată la criptografia cu cheie secretă este că $\mathcal{A}$ primește cheia publică pk;
- Adică $\mathcal{A}$ primește acces *gratuit* la un oracol de criptare, ceea ce înseamnă că el poate calcula $Enc_{pk}(m)$ pentru orice m;
- Prin urmare, definiția este echivalentă cu cea pentru securitate CPA (nu mai este necesar oracolul de criptare pentru că $\mathcal{A}$ își poate cripta singur mesajele);

Securitate pentru interceptare simplă

- Principala diferență față de definiția similară studiată la criptografia cu cheie secretă este că $\mathcal{A}$ primește cheia publică pk;
- Adică $\mathcal{A}$ primește acces *gratuit* la un oracol de criptare, ceea ce înseamnă că el poate calcula $Enc_{pk}(m)$ pentru orice m;
- Prin urmare, definiția este echivalentă cu cea pentru securitate CPA (nu mai este necesar oracolul de criptare pentru că $\mathcal{A}$ își poate cripta singur mesajele);
- Reamintim că în criptografia simetrică există scheme sigure la securitate semantică dar care nu sunt CPA-sigure .

Insecuritatea schemelor deterministe

- După cum am văzut la criptografia simetrică, nici o schemă deterministă nu poate fi CPA sigură;

Insecuritatea schemelor deterministe

- După cum am văzut la criptografia simetrică, nici o schemă deterministă nu poate fi CPA sigură;
- Datorită echivalenței între noțiunile de securitate CPA și securitate semantică pentru interceptare simplă (în criptografia asimetrică) concluzionăm că:

Teoremă

Nici o schemă de criptare cu cheie publică deterministă nu poate fi semantic sigură pentru interceptarea simplă.

Insecuritatea schemelor deterministe

- În realitate, schemele de criptare cu cheie publică deterministe sunt vulnerabile la atacuri practice;

Insecuritatea schemelor deterministe

- În realitate, schemele de criptare cu cheie publică deterministe sunt vulnerabile la atacuri practice;
- Acestea permit unui adversar să determine când un mesaj este trimis de două ori;

Insecuritatea schemelor deterministe

- În realitate, schemele de criptare cu cheie publică deterministe sunt vulnerabile la atacuri practice;
- Acestea permit unui adversar să determine când un mesaj este trimis de două ori;
- Mai mult, îi permit să găsească mesajul m cu probabilitate 1, dacă spațiul mesajelor este mic.

Criptare multiplă

- Definim noțiunea de securitate la interceptare multiplă analog cu definiția similară din criptografia simetrică, pe baza unui experiment;

Criptare multiplă

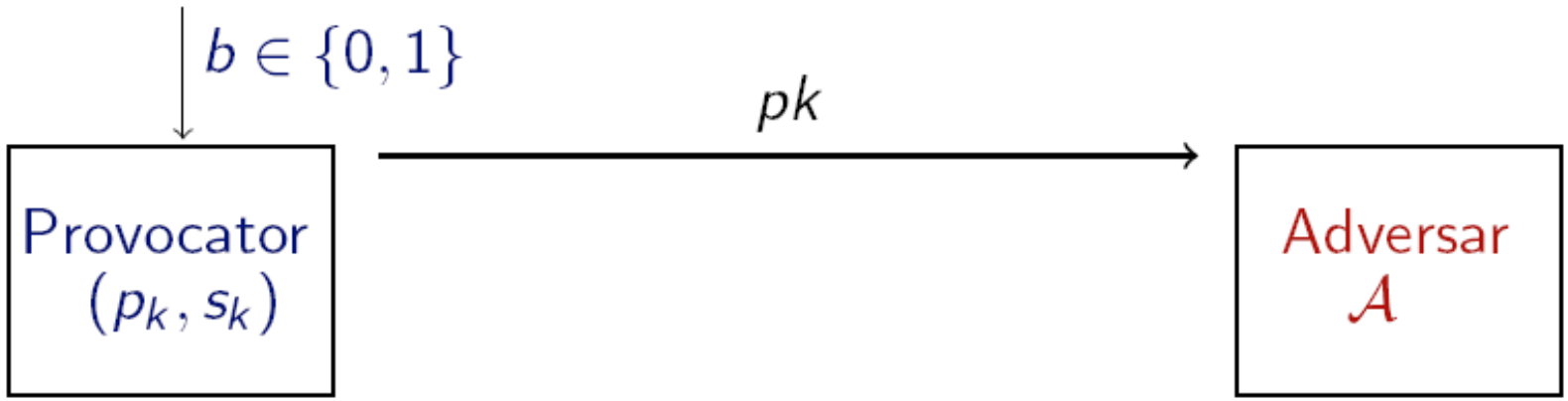
- Definim noțiunea de securitate la interceptare multiplă analog cu definiția similară din criptografia simetrică, pe baza unui experiment;
- Este clar că ea e echivalentă cu o definiție în care sunt considerate atacuri CPA;

Criptare multiplă

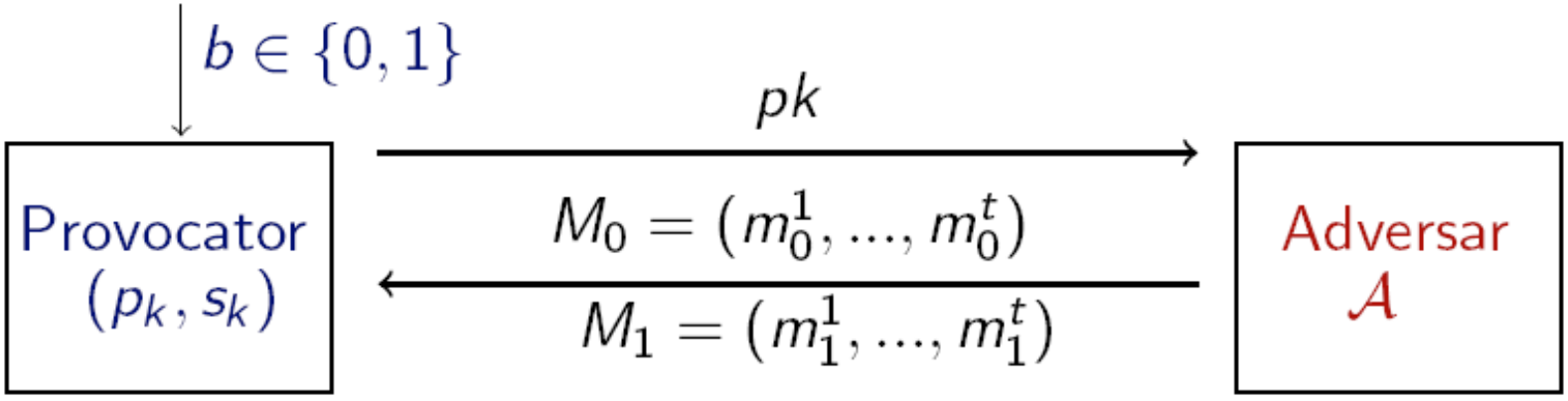
- Definim noțiunea de securitate la interceptare multiplă analog cu definiția similară din criptografia simetrică, pe baza unui experiment;
- Este clar că ea e echivalentă cu o definiție în care sunt considerate atacuri CPA;
- De remarcat că securitatea la interceptare simplă implică securitate la interceptare multiplă;

Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$

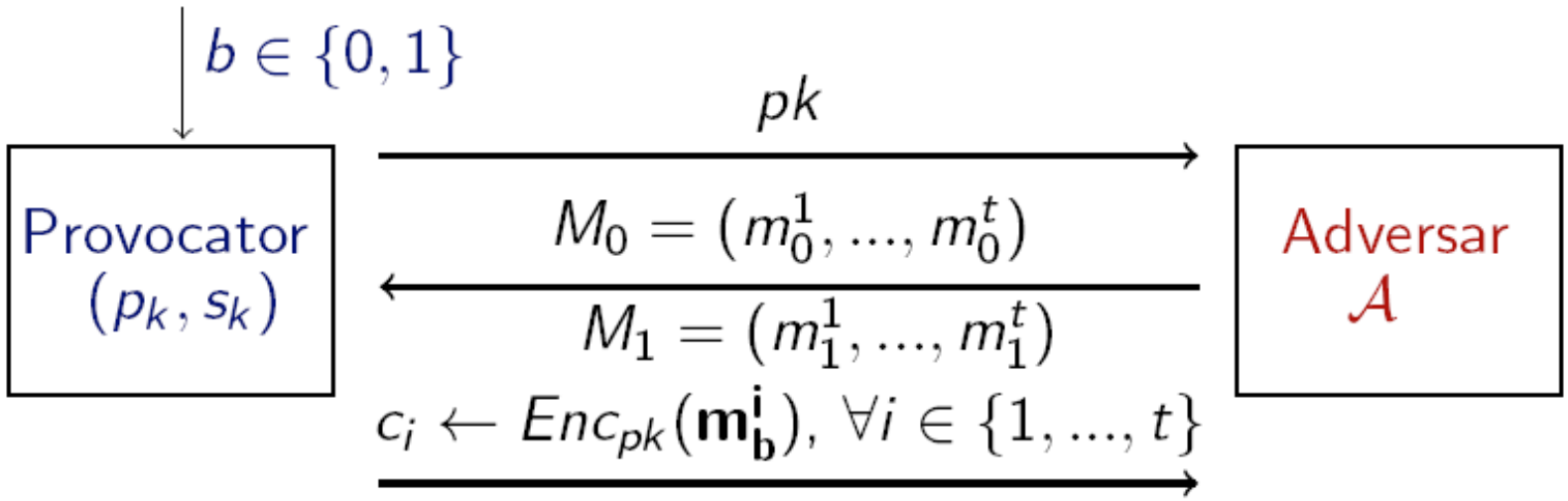
Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



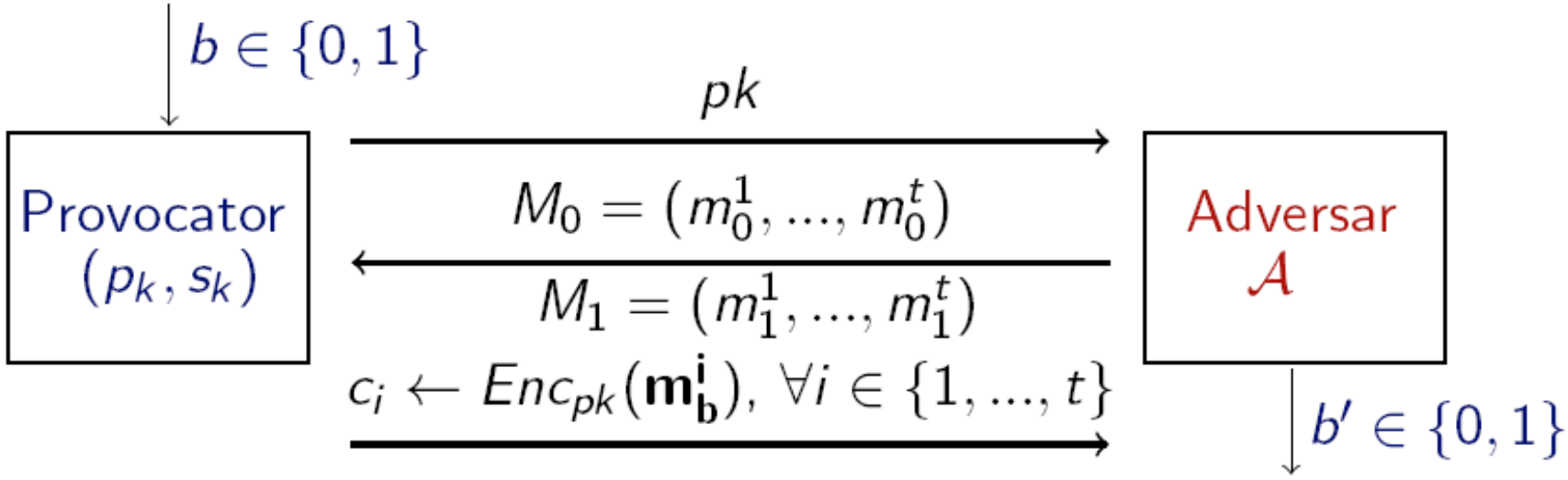
Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



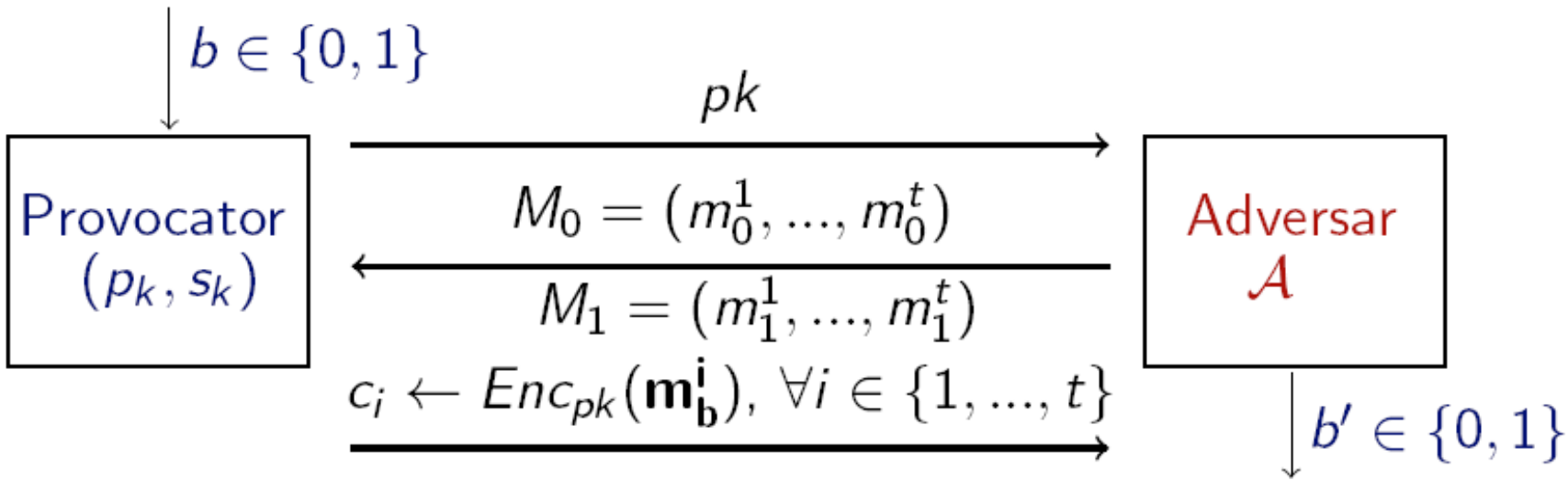
Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



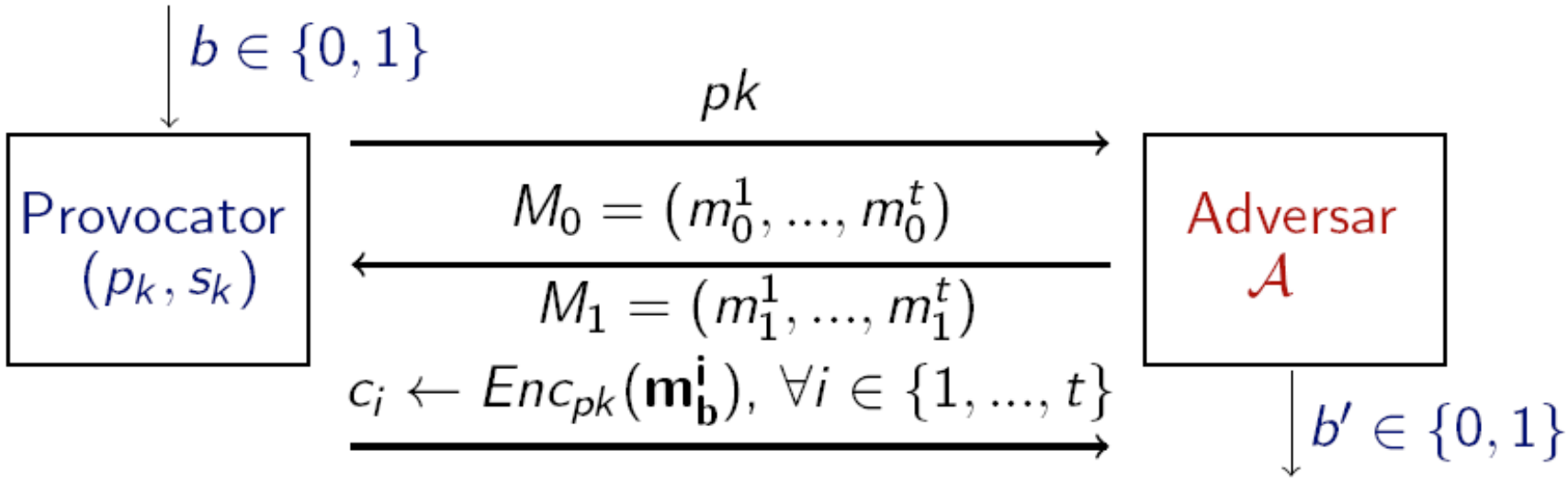
Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$

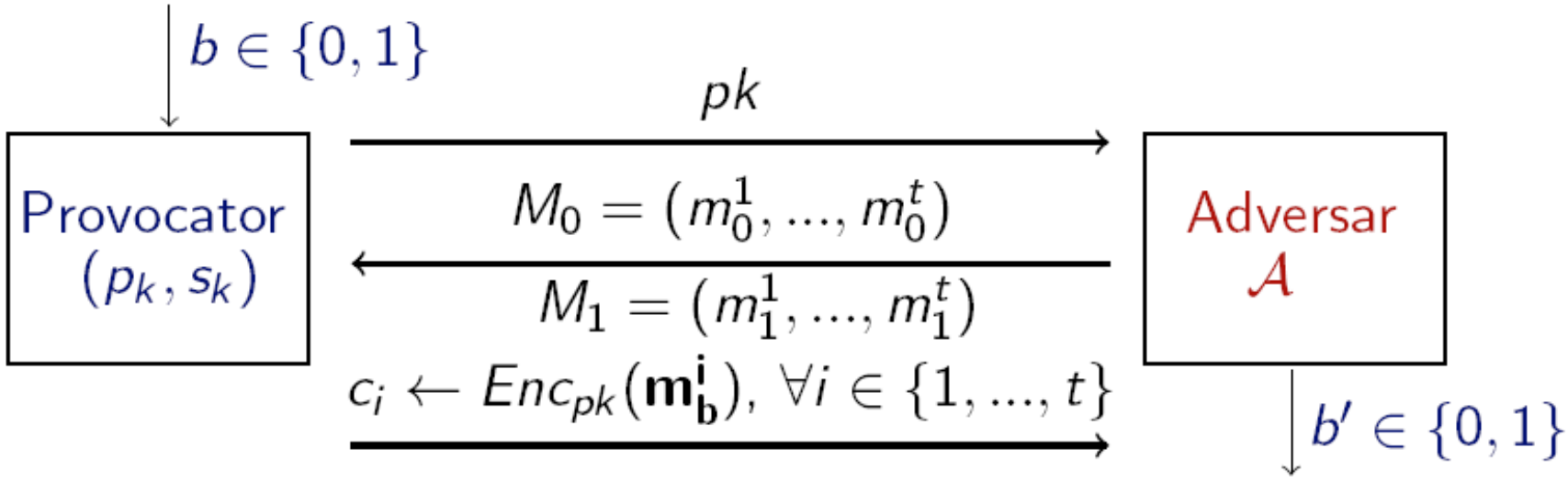


Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



- Output-ul experimentului este 1 dacă $b' = b$ și 0 altfel;

Experimentul $PubK^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n)$



- Output-ul experimentului este 1 dacă $b' = b$ și 0 altfel;
- Definiția de securitate este aceeași, doar că se referă la experimentul de mai sus.

Securitate pentru interceptare multiplă

Definiție

O schemă de criptare $\pi = (Enc, Dec)$ este indistinctibilă în prezența unui adversar (este semantic sigură) dacă pentru orice adversar $\mathcal{A}$ există o funcție neglijabilă negl așa încât

$$Pr[Priv^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + negl(n).$$

Securitate pentru interceptare multiplă

Definiție

O schemă de criptare $\pi = (Enc, Dec)$ este indistinctibilă în prezența unui adversar (este semantic sigură) dacă pentru orice adversar $\mathcal{A}$ există o funcție neglijabilă negl așa încât

$$Pr[Priv^{mult}_{\mathcal{A},\pi}(n) = 1] \leq \frac{1}{2} + negl(n).$$

Teoremă

Dacă o schemă de criptare cu cheie publică este sigură la interceptare simplă, atunci ea este sigură și la interceptare multiplă.

Criptarea mesajelor de lungime arbitrară

- Consecință a rezultatului anterior: o schemă de criptare sigură pentru mesaje de *lungime fixă* este sigură și pentru mesaje de *lungime arbitrară*;

Criptarea mesajelor de lungime arbitrară

- Consecință a rezultatului anterior: o schemă de criptare sigură pentru mesaje de *lungime fixă* este sigură și pentru mesaje de *lungime arbitrară*;
- Dacă $\pi = (\mathrm{Enc}, \mathrm{Dec})$ este o schemă de criptare cu spațiul mesajelor $\mathcal{M} = \{0,1\}$, putem construi o schemă sigură peste spațiul mesajelor $\mathcal{M} = \{0,1\}^*$ definind Enc':

$$Enc'_{pk}(m) = Enc_{pk}(m_1), ..., Enc_{pk}(m_t)$$

unde $m = m_1 ... m_t$

Criptarea mesajelor de lungime arbitrară

- Consecință a rezultatului anterior: o schemă de criptare sigură pentru mesaje de *lungime fixă* este sigură și pentru mesaje de *lungime arbitrară*;
- Dacă $\pi = (\mathrm{Enc}, \mathrm{Dec})$ este o schemă de criptare cu spațiul mesajelor $\mathcal{M} = \{0,1\}$, putem construi o schemă sigură peste spațiul mesajelor $\mathcal{M} = \{0,1\}^*$ definind Enc':

$$Enc'_{pk}(m) = Enc_{pk}(m_1), ..., Enc_{pk}(m_t)$$

  unde $m = m_1 ... m_t$
- Rezultatul este adevărat pentru atacuri CPA dar nu este adevărat pentru atacuri CCA.

Securitate CCA

- Noțiunea de securitate CCA rămâne identică cu cea de la sistemele simetrice;

Securitate CCA

- Noțiunea de securitate CCA rămâne identică cu cea de la sistemele simetrice;
- Capabilitățile adversarului: el poate interacționa cu un **oracol de decriptare**, fiind un adversar *activ* care poate rula atacuri în timp polinomial;

Securitate CCA

- Noțiunea de securitate CCA rămâne identică cu cea de la sistemele simetrice;
- Capabilitățile adversarului: el poate interacționa cu un **oracol de decriptare**, fiind un adversar *activ* care poate rula atacuri în timp polinomial;
- Adversarul poate transmite către oracolul de decriptare *anumite* mesaje c și primește înapoi mesajul clar corespunzător;

Securitate CCA

- Noțiunea de securitate CCA rămâne identică cu cea de la sistemele simetrice;
- Capabilitățile adversarului: el poate interacționa cu un **oracol de decriptare**, fiind un adversar *activ* care poate rula atacuri în timp polinomial;
- Adversarul poate transmite către oracolul de decriptare *anumite* mesaje c și primește înapoi mesajul clar corespunzător;
- Ca și în cazul securității CPA, adversarul nu mai necesită acces la oracolul de criptare pentru că deține cheia publică pk și poate realiza singur criptarea oricărui mesaj m.

Important de reținut!

- În criptografia cu cheie publică:
  - NU există securitate perfectă
  - securitate semantică = securitate CPA