

CURSUL 2: FUNCȚII

G. MINCU

1. FUNCȚII

Definiția 1. (provizorie!) Numim **funcție** orice triplet format din două mulțimi și o „lege de corespondență” care asociază *fiecărui* element din prima mulțime un *unic* element din cea de-a doua.

Definiția 2. Prima dintre cele două mulțimi care intră în componența unei funcții se numește **domeniul** (de **definiție** al) funcției, iar cea de a doua se numește **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcției.

Observația 3. Două funcții sunt egale dacă și numai dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de corespondență.

Notația uzuală pentru o funcție f care are domeniul A și codomeniul B este $f : A \rightarrow B$ (citim „ f este definită pe A și ia valori în B ”). Faptul că elementului $a \in A$ îi corespunde prin f elementul $b \in B$ se notează $f(a) = b$.

Definiția 4. Prin **graficul** unei funcții $f : A \rightarrow B$ înțelegem mulțimea $\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$.

Observația 5. Dacă $f : A \rightarrow B$, atunci $\Gamma_f \subset A \times B$.

Observația 6. Cunoscând graficul unei funcții, putem identifica domeniul de definiție al funcției, precum și legea de corespondență a acesteia¹. Din acest motiv, se preferă reformularea definiției 1 astfel încât să se evite termenul „lege”, care nu are în situația respectivă un înțeles foarte bine precizat:

Definiția 7. Numim **funcție** orice triplet format din trei mulțimi A, B, G , $G \subset A \times B$, cu proprietatea: $\forall a \in A \exists! b \in B (a, b) \in G$.

Observația 8. O consecință a axiomelor din teoria mulțimilor este faptul că, date fiind două mulțimi A și B , funcțiile definite pe A cu valori în B constituie o mulțime.

¹Nu însă și codomeniul; putem însă „vedea” imaginea funcției.

Observația 9. Dacă mulțimile finite A și B au a , respectiv b elemente, se arată ușor (temă!) că numărul funcțiilor definite pe A cu valori în B este b^a . Această observație ne sugerează utilizarea pentru mulțimea tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în B a notației B^A .

2. CLASE IMPORTANTE DE FUNCȚII

Definiția 10. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **injectivă** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Observația 11. În cuvinte, o funcție este injectivă dacă duce orice două elemente diferite în elemente diferite.

O caracterizare des utilizată a funcțiilor injective este dată de:

Propoziția 12. Funcția $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă și numai dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Exemplul 13. Dacă $A \subset B$, atunci $i : A \rightarrow B$, $i(a) = a$ este o funcție injectivă. Ea se numește **injectia canonică** a lui A în B .

Definiția 14. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **surjectivă** dacă $\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$.

Observația 15. În cuvinte, o funcție este surjectivă dacă „își umple codomeniul”.

Exemplul 16. $\pi_A : A \times B \rightarrow A$, $\pi_A(a, b) = a$ și $\pi_B : A \times B \rightarrow B$, $\pi_B(a, b) = b$ sunt funcții surjective (ele se numesc **proiecțiile canonice** ale produsului cartezian $A \times B$).

Definiția 17. O funcție injectivă și surjectivă se numește **bijectivă**.

Exemplul 18. Dată fiind o mulțime A , funcția $\text{id}_A : A \rightarrow A$, $\text{id}_A(a) = a$ este o funcție bijectivă. Ea se numește **funcția identică a mulțimii** A .

Definiția 19. O mulțime A se numește **infinită** dacă există $f \in A^A$ injectivă, dar nesurjectivă. Mulțimea A se numește **finită** dacă nu este infinită.

Propoziția 20. Fie A o mulțime nevidă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) A este finită.
- b) Există un număr $n \in \mathbb{N}^*$ și o funcție bijectivă $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$.

Pentru considerațiile de până la finalul acestei secțiuni vom considera că A și B desemnează submulțimi ale lui \mathbb{R} .

Definiția 21. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **crescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$.

Definiția 22. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **descrescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$.

Definiția 23. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **monotonă** dacă este fie crescătoare, fie descrescătoare.

Definiția 24. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **strict crescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$.

Definiția 25. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **strict descrescătoare** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2)$.

Definiția 26. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **strict monotonă** dacă este fie strict crescătoare, fie strict descrescătoare.

3. FUNCȚIA CARACTERISTICĂ A UNEI SUBMULTIMI

Definiția 27. Fie E o mulțime și $A \subset E$. Funcția

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

se numește **funcția caracteristică² a lui A în E** .

Teorema 28. Fie E o mulțime. Funcția $\chi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$, $\chi(A) = \chi_A$ este bijectivă.

Funcțiile caracteristice ale submulțimilor au proprietăți calculatorii interesante care, laolaltă cu teorema 28, le conferă o largă aplicabilitate:

Propoziția 29. Fie E o mulțime și A, B submulțimi ale sale. Au loc relațiile:

- a) $\chi_E = 1$; $\chi_\emptyset = 0$.
- b) $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \chi_B$.
- c) $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.
- d) $\chi_{\complement_E A} = 1 - \chi_A$.

4. „TRANSPORTUL” SUBMULTIMILOR PRIN FUNCȚII

Definiția 30. Dacă $f : A \rightarrow B$ și $C \subset A$, notăm $f(C)$ și numim **imaginea submulțimii C prin funcția f** mulțimea

$$\{b \in B : \exists c \in C \quad f(c) = b\}.$$

²Uneori, cu precădere în teoria probabilităților, se mai folosește pentru funcția prezentată denumirea de **funcția indicator a submulțimii A a lui E**

Definiția 31. Prin **imaginea** funcției $f : A \rightarrow B$ înțelegem mulțimea $f(A)$.

Notăția folosită în mod uzual pentru imaginea funcției f este $\text{Im}f$.

Observația 32. O funcție este surjectivă dacă și numai dacă imaginea sa coincide cu codomeniul său.

Definiția 33. Dacă $f : A \rightarrow B$ și $D \subset B$, notăm $f^{-1}(D)$ și numim **preimaginea**³ **submulțimii** D **prin funcția** f mulțimea $\{a \in A : f(a) \in D\}$.

Observația 34. Notăția din definiția 33 se utilizează și în situația în care funcția f nu este inversabilă!

Propoziția 35. Considerăm funcția $f : A \rightarrow B$. Atunci:

- a) Dacă $M \subset N \subset A$, atunci $f(M) \subset f(N)$.
- b) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.
- c) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.
- d) Dacă $P \subset Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$.
- e) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.
- f) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.

Temă: Demonstrați propoziția 35!

Temă: Generalizați afirmațiile din propoziția 35 la situația unei familii arbitrare de submulțimi!

Observația 36. Observăm că în cazul relațiilor din propoziția 35 imaginea inversă „se poartă mai bine” decât imaginea directă. Aparenta „anomalie” de la punctul c) dispăre pentru funcțiile injective:

Propoziția 37. Funcția $f : A \rightarrow B$ este injectivă dacă și numai dacă

$$\forall M, N \subset A \quad f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

5. COMPUNEREA FUNCȚIILOR

Definiția 38. Date fiind funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ cu⁴ $B \subset C$, definim funcția $g \circ f : A \rightarrow D$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. Funcția $g \circ f$ se numește **compusa lui** g **cu** f .

O situație importantă din punctul de vedere al compunerii funcțiilor este prezentată în

³sau **imaginea inversă**, sau încă **imaginea reciprocă**

⁴în caz de necesitate, se poate impune doar condiția mai slabă $\text{Im}f \subset C$

Exemplul 39. Dată fiind o funcție arbitrară $f : A \rightarrow B$, $\text{id}_B \circ f = f$ și $f \circ \text{id}_A = f$.

Propoziția 40. Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ și $h : E \rightarrow F$, unde $B \subset C$ și $D \subset E$. Atunci⁵ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propoziția 41. Fie funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$, unde $B \subset C$. Atunci:

- a) Dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
- b) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.
- c) Dacă f și g sunt surjective și $B = C$, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
- b) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.
- e) Dacă f și g sunt bijective și $B = C$, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
- b) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă, iar g este surjectivă.

Temă: Demonstrați propoziția 41!

Propoziția 42. Fie $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$, $B \subset C$, și funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$. Atunci:

- a) Dacă f și g sunt de aceeași monotonie, atunci $g \circ f$ este crescătoare.
- b) Dacă f și g sunt de monotonii opuse, atunci $g \circ f$ este descrescătoare.
- c) Dacă f și g sunt de aceeași monotonie strictă, atunci $g \circ f$ este strict crescătoare.
- d) Dacă f și g sunt de monotonii stricte opuse, atunci $g \circ f$ este strict descrescătoare.

Temă: Demonstrați propoziția 42!

Propoziția 43. Orice funcție strict monotonă este injectivă.

Temă: Demonstrați propoziția 43!

6. INVERSAREA FUNCȚIILOR

Definiția 44. (provizorie!) Prin **inversă a funcției** $f : A \rightarrow B$ înțelegem orice funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = \text{id}_A$ și $f \circ g = \text{id}_B$.

Definiția 45. Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **inversabilă** dacă ea admite (cel puțin o) inversă.

Propoziția 46. Dacă funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă, atunci ea admite o unică inversă

⁵Anticipând discuția referitoare la legi de compoziție, această relație arată că, dată fiind o mulțime M , compunerea funcțiilor este o operație asociativă pe M^M .

Demonstrație: Presupunem că f este inversabilă și că g și h sunt inverse ale sale. Atunci,

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_A \circ h = h. \quad \square$$

Definiția 47. Dacă funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă, atunci prin **inversa** lui f înțelegem unica (conform propoziției 46) funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = \text{id}_A$ și $f \circ g = \text{id}_B$.

Notăția pe care o vom folosi pentru a desemna inversa funcției inversabile f este f^{-1} .

Observația 48. Dacă $f : A \rightarrow B$ este inversabilă, iar $D \subset B$, atunci, în acord cu definiția 33, notația $f^{-1}(D)$ ar desemna atât preimagea lui D prin f , cât și imaginea lui D prin f^{-1} . Întrucât aceste două mulțimi coincid, utilizarea aceleiași notații nu prezintă ambiguități.

Teorema 49. O funcție este inversabilă dacă și numai dacă ea este bijectivă.

7. PRODUSUL CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULȚIMI

Observația 50. Perechea ordonată $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ poate fi interpretată ca fiind o reprezentare a funcției $a : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$, $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$. Evident, $a(1) \in A_1$ și $a(2) \in A_2$. Aceste considerații ne sugerează:

Definiția 51. Dată fiind familia de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, definim produsul său cartezian ca fiind mulțimea $\{a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : \forall i \in I \ a(i) \in A_i\}$ ^{6,7}

Vom nota produsul cartezian al familiei de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ cu $\prod_{i \in I} A_i$, iar elementul $a \in \prod_{i \in I} A_i$ cu $(a(i))_{i \in I}$ sau, mai frecvent, cu $(a_i)_{i \in I}$.

Definiția 52. Pentru $j \in I$, funcția $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$, $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$ se numește **proiecția canonică** a produsului $\prod_{i \in I} A_i$ pe componenta j .

Observația 53. Proiecțiile canonice ale produsului cartezian sunt surjective.

⁶Axiomele teoriei mulțimilor au drept consecință faptul că aceasta este într-adevăr o mulțime.

⁷Una dintre axiomele teoriei mulțimilor (așa-numita „axiomă a alegerii”) afirmă că dacă toate mulțimile familiei date sunt nevide, atunci produsul cartezian al familiei este nevid.

Observația 54. Dacă avem familia de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ cu proprietatea $A_i = A$ pentru orice $i \in I$, atunci, conform definiției 51, produsul cartezian $\prod_{i \in I} A_i$ constă exact în funcțiile definite pe I și care iau valori în A . Deci, în acest caz avem $\prod_{i \in I} A_i = A^I$. Dacă în situația prezentată avem $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, vom folosi în loc de A^I notația A^n .

Observația 55. Conform observației anterioare,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}.$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.
- [4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.