③ Pe mulțimea $\mathbb{C}$ definim relația: $z_1 \sim z_2 \overset{def}{\iff} |z_1| = |z_2|$.

a) Dem. că $\sim$ este o relație de echivalență

b) Determinați clasele de echivalență ; c) Determinați mulțimea factor

d) Determinați un sistem complet și independent de reprezentanți

a) Fie $z = a+bi \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2},\ \forall a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = |z| \Rightarrow z \sim z$. Deci $\sim$ este reflexivă (I)

Fie $z_1 = a+bi \in \mathbb{C}$ și $z_2 = c+di \in \mathbb{C}$:

$z_1 \sim z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{c^2+d^2} \Rightarrow \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |z_2| = |z_1| \Rightarrow z_2 \sim z_1$.

Deci $\sim$ este simetrică (II)

Fie $z_1 = a+bi \in \mathbb{C}$, $z_2 = c+di \in \mathbb{C}$ și $z_3 = e+fi \in \mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \sim z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \\ z_2 \sim z_3 \Rightarrow |z_2| = |z_3| \end{array}\right| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Rightarrow z_1 \sim z_3$$

Deci $\sim$ este tranzitivă (III)

Din (I), (II) și (III) $\Rightarrow$ $\sim$ rel. de echivalență.

b) Fie $z = a+bi \in \mathbb{C}$

$\hat{z} = \{\theta \in \mathbb{C} \,/\, \theta \sim z\} = \{\theta \in \mathbb{C} \,/\, |\theta| = |z|\} = \{a+bi \in \mathbb{C} \,/\, \sqrt{a^2+b^2} = |z|\} =$

$= \{\theta = a+bi \in \mathbb{C} \,/\, a^2+b^2 = |z|^2\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, (a-0)^2 + (b-0)^2 = |z|^2\} =$

$= \mathcal{C}(O(0,0), |z|)$ cercul de centru $O(0,0)$ și raza $|z|$.

Obs: $\hat{1} = \mathcal{C}(O(0,0), 1)$; $\hat{i} = \mathcal{C}(O(0,0), i)$; $\widehat{1+i} = \mathcal{C}(O(0,0), \sqrt{2})$.

c) $\mathbb{C}/_\sim = \{\hat{z} \,/\, z \in \mathbb{C}\} = \{\mathcal{C}(O, |z|) \,/\, z \in \mathbb{C}\} = \{\mathcal{C}(O, r) \,/\, r = \sqrt{a^2+b^2},\ \forall a,b \in \mathbb{R}\}$

$= \{\mathcal{C}(O, r) \,/\, r \geq 0\} = \{\mathcal{C}(O, r) \,/\, r \in [0, \infty)\}$.

Obs: Este greu să lucrez cu cercuri. Caut o altă "imagine" mai bună a mulțimii factor (i.e. o mulțime cu care $\mathbb{C}/_\sim$ să fie în bijecție).

Întâi ghicesc acea mulțime X cu care $\mathbb{C}/_\sim$ este în bijecție: $X = [0, \infty)$

Apoi dem că $\exists$ o bijecție de la $\mathbb{C}/_\sim$ la X

Obs: Fie $f: A \to B$ funcție

$\rho_f \subseteq A \times A$, $a \rho_f b \overset{def}{\iff} f(a) = f(b)$ este o rel. de echivalență pe A.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & \mathbb{C}/_\sim \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] \\ {[0,\infty)} & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\pi}(z) = \hat{z}$

Iau $f: \mathbb{C} \to [0, \infty)$, $f(z) = |z|$.

$z_1 \rho_f z_2 \iff f(z_1) = f(z_2) \iff |z_1| = |z_2| \iff z_1 \sim z_2$, deci avem că $\sim = \rho_f$

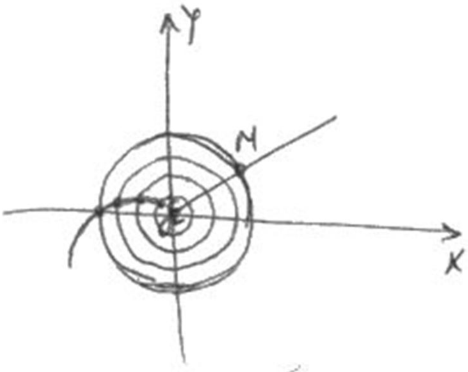
Conform proprietății de universalitate a mulțimii factor avem că

$\exists! \ \bar{f} : \mathbb{C}/_{\sim} \to [0,\infty)$ a.î. $\bar{f} \circ \pi = f$

$$\bar{f}(\hat{z}) = f(z) = |z|, \quad \forall \hat{z} \in \mathbb{C}/_{\sim}$$

Obs: $\sim = \rho_f \Rightarrow \bar{f}$ inj
f surj $\Rightarrow \bar{f}$ surj $\Big| \Rightarrow \bar{f} : \mathbb{C}/_{\sim} \to [0,\infty)$ bijecție $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{C}/_{\sim}$ în bij cu $[0,\infty) \Rightarrow [0,\infty)$ e o altă imagine a mulț factor.



Un sistem complet și independent de reprezentanți ar putea fi segmentul de dreaptă $[OY$ sau $[OM$ sau spirala descrisă în figură.

4. Fie A, B mulțimi. Definim suma numerelor cardinale $|A|$ și $|B|$ prin:
$|A|+|B| \overset{def}{=} |(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})|$. Demonstrați buna definire a sumei.

Vreau: $|A|=|A'|$ și $|B|=|B'| \underset{?}{\Rightarrow} |(A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})| = |(A'\times\{0\})\cup(B'\times\{1\})|$

$|A|=|A'| \Rightarrow \exists f: A\to A'$ bij.
$|B|=|B'| \Rightarrow \exists g: B\to B'$ bij.

$A\times\{0\} \xrightarrow[\sim]{\lambda} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\lambda'} A'\times\{0\}$; $\lambda'\circ f\circ\lambda : A\times\{0\}\to A'\times\{0\}$ bij (compunere de 3 funcții bijective)
$(a,0) \longmapsto a \longmapsto f(a) \longmapsto (f(a),0)$

$B\times\{1\} \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{g} B' \xrightarrow{\mu'} B'\times\{1\}$, $\mu'\circ g\circ\mu : B\times\{1\}\to B'\times\{1\}$ bij.

Definesc $h: (A\times\{0\})\cup(B\times\{1\}) \to (A'\times\{0\})\cup(B'\times\{1\})$ prin

$$h(x) = \begin{cases} (\lambda'\circ f\circ\lambda)(x), & \text{dc. } x\in A\times\{0\} \\ (\mu'\circ g\circ\mu)(x), & \text{dc. } x\in B\times\{1\}. \end{cases}$$

~~Fie x, y ∈ A×{0}~~ Fie $x, y \in (A\times\{0\})\cup(B\times\{1\})$, cu $x\neq y$.

I. Dc. $x,y\in A\times\{0\} \overset{x\neq y}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=(a,0) \\ y=(a',0)\end{cases}$ cu $a\neq a'$, $a,a'\in A$

$h(x) = h((a,0)) = (\lambda'\circ f\circ\lambda)((a,0)) = \lambda'(f(\lambda(a,0))) = \lambda'(f(a)) = (f(a),0)$
$h(y) = (f(a'),0)$
$a\neq a' \overset{f\ inj}{\Longrightarrow} f(a)\neq f(a') \Rightarrow (f(a),0)\neq(f(a'),0)$
$\Rightarrow h(x)\neq h(y)$.

II. Dc. $x\in A\times\{0\}$ și $y\in B\times\{1\} \Rightarrow \exists a\in A, \exists b\in B$ a.î. $\begin{cases} x=(a,0) \\ y=(b,1)\end{cases}$

$h(x) = (f(a),0)$
$h(y) = (g(b),1)$
$\Rightarrow h(x)\neq h(y)$ căci diferă pe a II-a componentă

III. Dc. $x,y\in B\times\{1\} \overset{x\neq y}{\Longrightarrow} \exists b,b'\in B$ cu $b\neq b'$ a.î. $\begin{cases} x=(b,1) \\ y=(b',1)\end{cases}$

$h(x) = (g(b),1)$
$h(y) = (g(b'),1)$
$b\neq b' \overset{g\ inj}{\Longrightarrow} g(b)\neq g(b')$
$\Rightarrow h(x)\neq h(y)$.

Din I, II și III $\Rightarrow h$ inj.

Fie $y \in (A' \times \{0\}) \cup (B' \times \{1\}) \Rightarrow y \in (A' \times \{0\}) \lor y \in (B' \times \{1\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y = (a', 0)$ cu $a' \in A') \lor (y = (b', 1)$ cu $b' \in B')$

f, g surj $\Rightarrow \begin{cases} \exists\, a \in A \text{ a.î. } a' = f(a) \\ \exists\, b \in B \text{ a.î. } b' = g(b) \end{cases}$ $\Bigg/ \Rightarrow$

$\Rightarrow (y = (f(a), 0)$ cu $a \in A) \lor (y = (g(b), 1)$ cu $b \in B)$

Dc. $y = (f(a), 0)$ cu $a \in A$, iau $x = (a, 0) \in (A \times \{0\})$. Obțin: $h(x) = (f(a), 0) = y$.
Dc. $y = (g(b), 1)$ cu $b \in B$, iau $x = (b, 1) \in (B \times \{1\})$. Obțin: $h(x) = (g(b), 1) = y$.
Concluzie: h surj.

Deci h bij $\Rightarrow |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| = |(A' \times \{0\}) \cup (B' \times \{1\})|$ q.e.d.

Temă dirijată

1) Fie A și B două mulțimi. Definim produsul numerelor cardinale $|A|$ și $|B|$ prin $|A| \cdot |B| \overset{def}{=} |A \times B|$. Demonstrați că produsul ~~definit este~~ de numere cardinale este bine definit.

2) Pe $\mathbb{C}$ definim relația $\sim$ prin: $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{R}$.
a) Demonstrați că $\sim$ este o relație de echivalență.
b) Determinați clasele de echivalență și un sistem de reprezentanți.

(5) Fie mulțimea $P = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$. Fie $f: P \to \mathbb{R}$, $f((x,y)) = |x-y|$.

Pe P definim relația: $(x,y) \sim (z,t) \overset{def}{\iff} f((x,y)) = f((z,t))$.

Fie $(x,y) \in P$: $f((x,y)) = f((x,y)) \Rightarrow (x,y) \sim (x,y)$. Deci $\sim$ reflexivă (1)

Fie $(x,y), (z,t) \in P$: $(x,y) \sim (z,t) \Rightarrow f((x,y)) = f((z,t)) \Rightarrow f((z,t)) = f((x,y)) \Rightarrow (z,t) \sim (x,y)$.

Deci $\sim$ simetrică (2)

Fie $(x,y), (z,t), (v,w) \in P$: $\left.\begin{array}{l}(x,y) \sim (z,t) \Rightarrow f((x,y)) = f((z,t)) \\ (z,t) \sim (v,w) \Rightarrow f((z,t)) = f((v,w))\end{array}\right| \Rightarrow f((x,y)) = f((v,w)) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y) \sim (v,w)$. Deci $\sim$ tranzitivă (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \sim$ rel. de echivalență.

$\widehat{(1,1)} = \{(x,y) \in P \mid (x,y) \sim (1,1)\} = \{(x,y) \in P \mid f(x,y) = 0\} = \{(2,2), (3,3), (4,4), (1,1)\}$.

$\widehat{(1,2)} = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3)\}$

$\widehat{(1,3)} = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2)\}$.

$\widehat{(1,4)} = \{(1,4), (4,1)\}$

$P/_\sim = \{\widehat{(1,1)}, \widehat{(1,2)}, \widehat{(1,3)}, \widehat{(1,4)}\}$.

Exemple de:

√Sisteme de reprezentanți:

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$, $\{(1,1), (2,3), (4,2), (4,1)\}$ etc.