Tehnici de programare a aplicaţiilor grafice

Mihai-Sorin Stupariu

Semestrul al II-lea, 2017-2018

Cuprins

Capitolul 1

Motivaţie

1.1 Cum reprezentăm?

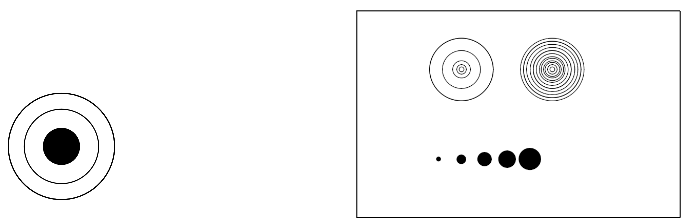

Figura 1.1: Grafică vectorială şi grafică rasterială

Comentarii:

(i) Fonturile sunt de fapt elemente grafice.

(ii) În proiectare este nevoie de forme cât mai variate, fie la nivel de schiţă, fie într-un stadiu mai avansat de proiectare.

Scop: Cum generăm elementele de grafică vectorială? (**Curbe Bézier**). Cum putem manevra grafica rasterială? (**Tehnici de procesare a imaginilor**)

1.2 Cum putem crea efecte realiste?

Tehnica **Ray Tracing**

1.3 Ce reprezentăm?

Obiectele utilizate în grafica 3D sunt bazate pe **reţele de poligoane şi triunghiuri (polygon / triangle meshes)**

Capitolul 2

Reprezentarea unor cazuri particulare de curbe şi suprafeţe

2.1 Conice şi cuadrice - breviar teoretic

Din motive de simetrie, vom nota coordonatele din plan cu x_1, x_2, iar pe cele din spaţiul tridimensional cu x_1, x_2, x_3. Descriem mai întâi conicele - locuri geometrice din plan, apoi, prin analogie, sunt introduse cuadricele.

Definiţii.

O **conică** (în planul $\mathbb{R}^2$) este o mulţime de puncte ale căror coordonate (x_1, x_2) verifică o ecuaţie de forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0, \qquad (2.1)$$

unde $(a_{ij})_{i,j}$ sunt coeficienţi reali astfel ca $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.

Pentru conica descrisă de ecuaţia (2.1) vom nota

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Matricea a se numeşte **matricea conicei**, iar matricea A se numeşte **matricea extinsă a conicei**. Vom folosi, de asemenea, următoarele notaţii:

$$\delta := \det a, \quad \Delta := \det A, \quad r := \operatorname{rang} a, \quad R := \operatorname{rang} A.$$

Exemple.

(i) $\dfrac{x_1^2}{9} + \dfrac{x_2^2}{25} - 1 = 0$. Avem $\delta = \dfrac{1}{225}$, $\Delta = -\dfrac{1}{225}$, $r = 2$, $R = 3$.

(ii) $2x_1^2+8x_1x_2+10x_2^2-2x_1+2x_2-5=0$. Avem $\delta=12$, $\Delta=-140$, $r=2$, $R=3$.

(iii) $x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+4x_1-4=0$. Avem $\delta=-2$, $\Delta=12$, $r=2$, $R=3$.

(iv) $x_2^2-6x_1=0$. Avem $\delta=0$, $\Delta=-9$, $r=1$, $R=3$.

(v) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4=0$. Avem $\delta=0$, $\Delta=0$, $r=1$, $R=2$.

Definiţii.

O conică se numeşte **nedegenerată** dacă $\Delta\neq 0$. În cazul în care $\Delta=0$, conica se numeşte **degenerată**.

Un punct $P_0\in\mathbb{R}^2$ se numeşte **centru** al unei conice dacă simetria de centru P_0 invariază conica.

Un punct $P_O=(x_{10},x_{20})$ este centru al conicei dacă şi numai dacă perechea (x_{10},x_{20}) este soluţie a sistemului

$$\begin{cases} a_{11}x_{10}+a_{12}x_{20}+a_{13}=0\\ a_{21}x_{10}+a_{22}x_{20}+a_{23}=0. \end{cases}$$

Rezultate:

(i) Mulţimea centrelor unei conice formează o varietate liniară (mulţimea vidă, un punct sau o dreaptă).

(ii) O conică are centru unic dacă şi numai dacă $\delta\neq 0$.

Propoziţia 2.1 (Clasificarea afină a conicelor)

(i) Numerele δ,Δ, r şi R asociate unei ecuaţii de forma (2.1) nu se modifică în urma unei schimbări afine de coordonate.

(ii) Printr-o schimbare de coordonate convenabil aleasă şi înmulţind, eventual, ecuaţia obţinută cu o constantă, orice ecuaţie de forma (2.1) poate fi adusă la una din formele de mai jos:

R	r	Forma canonică afină a conicei	Denumire
3	2	$x_1^2+x_2^2-1=0$	Elipsă
		$x_1^2-x_2^2-1=0$	Hiperbolă
		$-x_1^2-x_2^2-1=0$	Elipsă vidă
3	1	$x_1^2-2x_2=0$	Parabolă
2	2	$x_1^2+x_2^2=0$	Punct dublu
		$x_1^2-x_2^2=0$	Pereche de drepte secante
2	1	$x_1^2-1=0$	Pereche de drepte paralele
		$-x_1^2-1=0$	Pereche de drepte vidă
1	1	$x_1^2=0$	Dreaptă dublă

Definiţie. O **cuadrică** este un loc geometric din spaţiul $\mathbb{R}^3$ dat prin anularea unui polinom de gradul II, adică printr-o ecuaţie analoagă lui (2.1), în care apar coordonatele x_1,x_2,x_3. În mod similar se construiesc matricele a,A şi definesc numerele r şi R, fiind aplicate considerente şi raţionamente analoage celor din cazul conicelor. Mai jos sunt câteva exemple de cuadrice scrise sub forma canonică.

R	r	Forma canonică afină a cuadricei	Denumire
4	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$	Elipsoid
		$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	Hiperboloid cu o pânză
		$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$	Hiperboloid cu două pânze
4	2	$x_1^2 - x_2^3 - 2x_3 = 0$	Paraboloid hiperbolic
3	3	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Con
3	2	$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$	Cilindru eliptic
		$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$	Cilindru hiperbolic
3	1	$x_1^2 - 2x_2 = 0$	Cilindru parabolic
2	2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Dreaptă dublă
		$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Pereche de plane secante
2	1	$x_1^2 - 1 = 0$	Pereche de plane paralele
1	1	$x_1^2 = 0$	Plan dublu

2.2 Curbe şi suprafeţe Bézier

Definiţii.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ fixat, **polinoamele Bernstein de grad** n sunt definite prin

$$B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \{0, \ldots, n\},$$

unde $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Prin convenţie, definim $B_i^n(t) = 0$, dacă $i \notin \{0, \ldots, n\}$.

Fie $(\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n)$ o mulţime ordonată de puncte din $\mathbb{R}^m$, numită **poligon de control**. **Curba Bézier** $\mathbf{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ definită de poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n)$ este dată de formula

$$\mathbf{b}(t) := \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\mathbf{b}_i. \tag{2.2}$$

Exemplu Considerăm poligonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1,0), \quad \mathbf{b}_1 = (1,1), \quad \mathbf{b}_2 = (0,2).$$

Curba Bézier asociată $\mathbf{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ se scrie sub forma Bernstein

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{2} B_i^2(t)\mathbf{b}_i = (1-t)^2(1,0) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(0,2) =$$

$$(1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2, 2t - 2t^2 + 2t^2) = (1 - t^2, 2t).$$

Avem, de exemplu, $\mathbf{b}(\frac{1}{3}) = (\frac{8}{9}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{b}(\frac{1}{4}) = (\frac{15}{16}, \frac{1}{2})$, etc.

Algoritmul de Casteljau

Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^m$. Pentru $t \in [0,1]$ se notează $\mathbf{b}_i^0(t) := \mathbf{b}_i$ ($i = 0, \dots, n$) şi se definesc inductiv punctele de Casteljau

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \tag{2.3}$$

Teoremă. Punctul $\mathbf{b}_0^n(t)$ descrie, când t variază, curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ dată de ecuaţia (2.2).

Proprietăţi elementare

Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control din $\mathbb{R}^m$. Curba Bézier asociată $\mathbf{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ are următoarele proprietăţi:

(i) $\mathbf{b}$ este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n;

(ii) curba $\mathbf{b}$ interpolează extremităţile poligonului de control, i.e. $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;

(iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier $\mathbf{b}$ se află în acoperirea convexă a punctelor de control;

(iv) **invarianţa la schimbări afine de parametru**: dacă $\varphi : [0,1] \to [\alpha, \beta]$, $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ este o schimbare afină de parametru şi dacă $\mathbf{b}^{[\alpha,\beta]}$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$, dar definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$, atunci $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{[\alpha,\beta]} \circ \varphi$;

(v) **invarianţă afină**: dacă $\tau : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este o aplicaţie afină, atunci curba Bézier asociată poligonului de control date de $(\tau(\mathbf{b}_0), \dots, \tau(\mathbf{b}_n))$ este curba $\tau(\mathbf{b}^n)$;

(vi) **(Invarianţa la combinaţii baricentrice)**: fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$, respectiv $(\widetilde{\mathbf{b}}_0, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}_n)$ două poligoane de control şi $\mathbf{b}$, respectiv $\widetilde{\mathbf{b}}$ curbele Bézier corespunzătoare. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, curba Bézier asociată poligonului de control $((1-\alpha)\mathbf{b}_0 + \alpha\widetilde{\mathbf{b}}_0, \dots, (1-\alpha)\mathbf{b}_n + \widetilde{\mathbf{b}}_n)$ este curba $(1-\alpha)\mathbf{b} + \alpha\widetilde{\mathbf{b}}$.

(vii) dacă $\widetilde{\mathbf{b}} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0)$, atunci $\widetilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}(1-t)$, în particular, cele două curbe au aceeaşi imagine geometrică.

Suprafeţe Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ două numere naturale nenule şi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \dots & \mathbf{b}_{0n} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} & \dots & \mathbf{b}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b}_{m0} & \mathbf{b}_{m1} & \dots & \mathbf{b}_{mn} \end{pmatrix}$$

o matrice ale cărei elemente sunt puncte din $\mathbb{R}^3$, numită **reţea Bézier (poliedru de control)**. **Suprafaţa Bézier de tip produs tensorial** asociată acestor date este dată de formula:

$$: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{b}_{ij}.$$

Proprietăţi elementare

(i) Prin analogie cu curbele Bézier, suprafaţa de tip produs tensorial are următoarele proprietăţi:

- interpolarea punctelor $\mathbf{b}_{00} = (0,0), \mathbf{b}_{0n} = (0,1), \mathbf{b}_{m0} = (1,0), \mathbf{b}_{mn} = (1,1)$;
- imaginea suprafeţei este inclusă în acoperirea convexă a punctelor poliedrului de control;
- invarianţă la transformări afine.

(ii) Curbele frontieră, i.e. curbele de coordonate $(0,\cdot)$, $(1,\cdot)$, $(\cdot,0)$ şi $(\cdot,1)$ sunt curbe Bézier având poligoane de control respectiv $(\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \dots, \mathbf{b}_{0n})$, $(\mathbf{b}_{m0}, \mathbf{b}_{m1}, \dots, \mathbf{b}_{mn})$, $(\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{10}, \dots, \mathbf{b}_{m0})$, $(\mathbf{b}_{0n}, \mathbf{b}_{1n}, \dots, \mathbf{b}_{mn})$. Restul curbelor de coordonate sunt, la rândul lor, curbe Bézier. Totuşi, acestea din urmă *nu* au drept puncte de control linii sau coloane din matricea $(\mathbf{b}_{ij})_{i,j}$.

Exemplu. Dacă $m = n = 1$ avem

$$(u,v) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} B_i^1(u)B_j^1(v)\mathbf{b}_{ij} = \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}.$$

De exemplu, dacă

$$\mathbf{b}_{00} = (0,0,0), \quad \mathbf{b}_{01} = (1,0,0), \quad \mathbf{b}_{10} = (0,1,0), \quad \mathbf{b}_{11} = (1,1,1),$$

un calcul direct arată că $(u,v) = (v, u, uv)$.

2.3 Exerciţii

Exerciţiul 2.2 Considerăm poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, unde

$$\mathbf{b}_0 = (2,3), \quad \mathbf{b}_1 = (4,3), \quad \mathbf{b}_2 = (4,5), \quad \mathbf{b}_3 = (-2,9).$$

Scrieţi schema de Casteljau corespunzătoare acestui poligon de control şi valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului.

Exerciţiul 2.3 Scrieţi forma Bernstein a curbei Bézier asociate poligonului de control $\mathbf{b}_0 = (-2,1)$, $\quad \mathbf{b}_1 = (1,5)$, $\quad \mathbf{b}_2 = (3,0)$.

Exerciţiul 2.4 În $\mathbb{R}^2$ considerăm poligoanele de control $P = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ respectiv $\widetilde{P} = (\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4)$, unde

$$\mathbf{b}_0 = (-6,-4),\ \mathbf{b}_1 = (3,3),\ \mathbf{b}_2 = (\lambda - 1, 3),\ \mathbf{b}_3 = (7, \mu + 1),\ \mathbf{b}_4 = (-3,-1).$$

Fie $\mathbf{b} : [2,5] \to \mathbb{R}^2$, respectiv $\widetilde{\mathbf{b}} : [5,8] \to \mathbb{R}^2$ curbele Bézier asociate lui P, respectiv $\widetilde{P}$. Discutaţi dacă $\mathbf{b}$ şi $\widetilde{\mathbf{b}}$ au un racord de clasă $G\mathcal{C}^1$ sau $\mathcal{C}^1$ în $\mathbf{b}_2$.

Exerciţiul 2.5 Considerăm poligonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1,1), \quad \mathbf{b}_2 = (2,0), \quad \mathbf{b}_3 = (0,0)$$

şi fie $\mathbf{b} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ curba Bézier asociată. Calculaţi $\mathbf{b}(\frac{1}{3})$ şi stabiliţi dacă punctul $(1, \frac{1}{3})$ aparţine imaginii lui $\mathbf{b}$.

Bibliografie

[1] G. Albeanu, *Grafica pe calculator. Algoritmi fundamentali*, Editura Universităţii din Bucureşti, 2001.

[2] R. Baciu, *Programarea aplicaţiilor grafice 3D cu OpenGL*, Editura Albastră, 2005.

[3] L. Bădescu, *Lecţii de Geometrie*, Editura Universităţii Bucureşti, 2000.

[4] W. Boehm şi H. Prautzsch, *Geometric Concepts for Geometric Design*, AK Peters, Wellesley, 1994.

[5] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD - A practical guide,* Academic Press, 2002.
`http://www.farinhansford.com/books/cagd/materials.html`
`http://www.vis.uni-stuttgart.de/ kraus/LiveGraphics3D/cagd/`

[6] J. Foley, A. van Dam, S. Feiner şi J. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice* (2nd edition in C), Addison Wesley, 1995.

[7] D. Hearn şi M. Baker, *Computer Graphics with OpenGL*, 2003.

[8] L. Ornea şi A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Editura Theta, Bucureşti, 2000.

[9] H. Prautzsch, W. Boehm şi M. Paluszny, *Bézier and B-Spline Techniques*, Springer, 2002.
`http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html`

[10] P. Schneider şi D. Eberly, *Geometric Tools for Computer Graphics*, Morgan Kaufmann, 2003.

[11] P. Shirley, M. Ashikhmin, M. Gleicher, S. Marschner, E. Reinhard, K. Sung, W. Thompson şi P. Willemsen, *Fundamentals of Computer Graphics* (2nd edition), AK Peters, Wellesley, 2005.

[12] D. Shreiner, M. Woo, J. Neider şi T. Davis. *OpenGL Programming Guide* (6th edition), Addison Wesley, 2008.
`http://www.opengl-redbook.com`

[13] `http://www.opengl.org`