

GABRIEL BERCU | LEONARD DĂUȘ
ARIADNA LUCIA PLETEA | DANIELA ROȘU
MARIUS VLĂDOIU | CRISTIAN VOICA

Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială și elemente de algebră tensorială

Volumul 1

Algebră liniară

Lucrarea a fost elaborată după cum urmează:

Capitolul 1: Marius Vlădoiu, Universitatea din București

Capitolul 2: Daniela Roșu, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași

Capitolul 3: Gabriel Bercu, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați

Capitolul 4: Ariadna Lucia Pletea, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași

Capitolul 5: Cristian Voica, Universitatea din București

Capitolul 6: Leonard Dăuș, Universitatea Tehnică de Construcții din București

Cuprins

	v
Prefață	ix
Introducere	xi
Capitolul 1. Preliminarii	1
1.1. Structuri algebrice	1
1.2. Grupul (S_n, \circ)	12
1.3. Inelul de polinoame $\mathbb{K}[X]$	17
1.4. Aritmetica lui $\mathbb{K}[X]$	20
1.5. Probleme propuse	24
Capitolul 2. Calcul matriceal	27
2.1. Matrice	27
2.2. Determinanți	32
2.3. Rangul unei matrice. Tipuri speciale de matrice	40
2.4. Sisteme de ecuații algebrice liniare	50
2.5. Probleme propuse	57
Capitolul 3. Spații vectoriale. Spații euclidiene	63
3.1. Definiție și exemple	63
3.2. Subspații vectoriale	64
3.3. Bază și dimensiune	70
3.4. Spații euclidiene reale. Produs scalar	73
3.5. Probleme propuse	78
Capitolul 4. Transformări liniare	81
4.1. Definiția transformării liniare	81
4.2. Operații cu transformări liniare	83
4.3. Proprietăți ale transformărilor liniare	84
4.4. Rangul și defectul unei transformări liniare	86
4.5. Spații vectoriale izomorfe	88
4.6. Matricea unei transformări liniare	89
4.7. Endomorfisme speciale pe spații euclidiene	96
4.8. Probleme propuse	101

0. CUPRINS

Capitolul 5. Vectori și valori proprii	105
5.1. Endomorfisme și subspații invariante	105
5.2. Subspații invariante de dimensiune 1	108
5.3. Subspații invariante de dimensiuni arbitrare	120
5.4. Forma canonică Jordan	125
5.5. Algoritmi pentru determinarea formei canonice Jordan	132
5.6. Aplicații: calcule cu matrice	136
5.7. Matrice diagonalizabile	139
5.8. Probleme propuse	140
Capitolul 6. Algebră multiliniară și produs tensorial. Aplicații biliniare, forme pătratice	145
6.1. Forme biliniare	145
6.2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică	148
6.3. Signatura unei forme pătratice. Teorema inerției	158
6.4. Aplicații multiliniare. Forme multiliniare	161
6.5. Produs tensorial	169
6.6. Probleme propuse	173
Soluții	177
Bibliografie	215
Index	217

Prefață

Cartea de față a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, "Formarea cadrelor didactice universitare și a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante și practice pentru piața muncii". Finanțat din Fondul Social European și implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni și Companii, Universitatea din București, Universitatea Tehnică de Construcții din București, Universitatea "Politehnica" din București, Universitatea din Pitești, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași, Universitatea de Vest din Timișoara, Universitatea "Dunărea de Jos" din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea "1 Decembrie 1918" din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane - POSDRU și se înscrie în domeniul major de intervenție 1.2 Calitate în învățământul superior. Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii și crearea de mecanisme și instrumente de extindere a oportunităților de învățare. Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice și studenților legate de utilizarea matematicii în învățământul superior, masterate și doctorate precum și analizarea eficacității și relevanței curriculumelor actuale la nivel de performanță și eficiență, în vederea dezvoltării de cunoștințe și competențe pentru studenții care învață discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea și armonizarea curriculumelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea și implementarea unui program de formare a cadrelor didactice și a studenților interesați din universitățile partenere, bazat pe dezvoltarea și armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne și funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de față. Formarea de competențe cheie de matematică și informatică presupune crearea de abilități de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială și inserție pe piața muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea și sprijinirea elevilor și studenților potențial talentați la matematică. Totuși, studiul matematicii a evoluat în exigențe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilității curriculumului, însoțită de analiza metodelor și instrumentelor folosite pentru identificarea și motivarea studenților talentați

la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât și celor de elită. Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul și locul matematicii în educația de bază în instrucție și în descoperirile științifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, și nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmărește evidențierea unor noi motivații solide pentru învățarea și studiul matematicii la nivelele de bază și la nivel de performanță; stimularea creativității și formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însușirea aspectelor specifice din alte științe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter și multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată pentru viitorii studenți ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Introducere

Algebra liniară constituie de multă vreme unul din instrumentele fundamentale pentru disciplinele matematice cu aplicabilitate în inginerie. Aceasta furnizează metode de lucru pentru geometrie, analiză matematică, ecuații diferențiale, teoria sistemelor etc.

Cursul de algebră liniară pe care îl prezentăm a fost elaborat pe baza lecțiilor de algebră liniară ținute de autori, la universitățile la care predau, pentru studenții anilor I. Credem că el va fi util atât studenților de la facultățile tehnice, cât și studenților de la facultățile de matematică și informatică. Cursul a fost elaborat în conformitate cu programa revizuită a disciplinei de algebră liniară. Are ca scop să asigure învățarea noțiunilor de bază ale algebrei liniare pe parcursul unui semestru de studiu.

Cartea se constituie ca un material unitar și cuprinzător, prezentat într-o ordine firească, conținând partea teoretică a problematicii. Majoritatea enunțurilor matematice sunt însoțite de demonstrații complete și de exemple sugestive care asigură asimilarea corectă a noțiunilor matematice. Sunt tratate următoarele capitole: calcul matriceal, spații vectoriale și euclidiene, transformări liniare, vectori și valori proprii, algebră multiliniară și produs tensorial.

La sfârșitul fiecărui capitol sunt introduse probleme propuse prin care studentul este invitat să verifice temeinicia însușirii noțiunilor prezentate. Au fost incluse un număr de aproximativ 160 de probleme, de diferite grade de dificultate. Unele probleme sunt calculatorii, altele de rutină și urmăresc fixarea unor noțiuni și tehnici de lucru, iar altele sunt de natură teoretică și au scopul de a îmbunătăți raționamentul matematic. Această activitate este ușurată de prezentarea la majoritatea problemelor a unor indicații și rezolvări.

Autorii

CAPITOLUL 1

Preliminarii

În acest capitol vom prezenta noțiunile algebrice de bază necesare pentru a putea parcurge capitolele următoare. În prima secțiune reamintim definițiile structurilor fundamentale din algebră (mulțimi, funcții, relații de echivalență, grupuri, inele și corpuri), precum și proprietăți importante ale acestora. A doua secțiune este dedicată studiului grupului de permutări (S_n, \circ) . Secțiunile 3 și 4 tratează inelul $\mathbb{K}[X]$, al polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienți într-un corp comutativ \mathbb{K} . Sunt studiate principalele proprietăți ale inelului $\mathbb{K}[X]$ și se arată că aritmetica lui $\mathbb{K}[X]$ este similară celei a lui \mathbb{Z} .

1.1. Structuri algebrice

1.1.1. Mulțimi. O colecție de obiecte se numește *mulțime*. Un membru al acestei colecții se mai numește și *element* al mulțimii. Dacă x este un element al mulțimii A , atunci spunem că x *aparține* lui A și scriem $x \in A$; în caz contrar, spunem că x *nu aparține* lui A și scriem $x \notin A$. De exemplu, $1 \in \{1, 2, 3\}$ și $4 \notin \{1, 2, 3\}$, unde $\{1, 2, 3\}$ reprezintă mulțimea având elementele 1, 2 și 3.

Spunem că două mulțimi A, B sunt *egale*, și scriem $A = B$, dacă au aceleași elemente. Spunem că A este o *submulțime* a lui B dacă orice element care aparține lui A aparține și lui B . Notăm aceasta prin $A \subseteq B$ sau $B \supseteq A$. Dacă, în plus, $A \neq B$, spunem că A este o *submulțime proprie* a lui B sau că A este *strict inclusă* în B și notăm $A \subset B$ sau $B \supset A$. Prin urmare, obținem că $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Avem următoarele exemple importante de mulțimi:

- (1) mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$,
- (2) mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,
- (3) mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$,
- (4) mulțimea numerelor reale $\mathbb{R} = \{\text{toate scrierile zecimale } \pm d_1 d_2 \dots d_n, a_1 a_2 a_3 \dots\}$,
- (5) mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Între aceste mulțimi au loc următoarele incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Vom nota cu $\mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ mulțimea numerelor raționale pozitive, respectiv a numerelor reale pozitive. De asemenea, vom nota cu $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ și analog definim mulțimile $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$. *Mulțimea vidă*, notată cu \emptyset , este mulțimea care nu are nici un element. O mulțime diferită de mulțimea vidă se numește *mulțime nevidă*.

Fie A, B două mulțimi. *Intersecția* mulțimilor A și B , notată cu $A \cap B$, reprezintă mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui B . Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă

se numesc *disjuncte*. Reuniunea mulțimilor A și B , notată cu $A \cup B$, reprezintă mulțimea elementelor care aparțin lui A sau lui B . Diferența dintre mulțimile A și B se notează cu $A \setminus B$ și reprezintă mulțimea tuturor elementelor care aparțin lui A și nu aparțin lui B . Produsul cartezian al mulțimilor A și B se notează cu $A \times B$ și reprezintă mulțimea tuturor perechilor ordonate (x, y) cu $x \in A$ și $y \in B$. De exemplu, dacă $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 3, 4\}$ atunci $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{3, 4\}$ și $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$.

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară pe mulțimea A este o submulțime R a produsului cartezian $A \times A$ și scriem $a \sim b$ dacă $(a, b) \in R$.

Relația binară \sim pe mulțimea A se numește:

- (a) *reflexivă* dacă $a \sim a$, pentru orice $a \in A$;
- (b) *simetrică* dacă $a \sim b$ implică $b \sim a$ pentru orice $a, b \in A$;
- (c) *tranzitivă* dacă $a \sim b$ și $b \sim c$ implică $a \sim c$ pentru orice $a, b, c \in A$.

O relație binară \sim pe A se numește *relație de echivalență* dacă \sim este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Dacă \sim definește o relație de echivalență pe A , atunci *clasa de echivalență* a elementului $a \in A$, pe care o vom nota cu \hat{a} , este mulțimea $\{x \in A | x \sim a\}$. Despre elementele clasei de echivalență a lui a se spune că sunt *echivalente* cu a . Dacă C este o clasă de echivalență, orice element al lui C se numește un *reprezentant* al clasei C . O submulțime S a lui A se numește *sistem complet de reprezentanți* pentru relația de echivalență \sim , dacă S conține exact câte un reprezentant al fiecărei clase de echivalență. Deci, S este sistem complet de reprezentanți pentru \sim dacă și numai dacă S verifică simultan următoarele condiții:

- (1) pentru orice $a \in A$ există $s_a \in S$ astfel încât $a \sim s_a$,
- (2) orice două elemente distincte ale lui S nu sunt echivalente.

Reamintim că o *partiție* a unei mulțimi nevide A este o familie de submulțimi nevide disjuncte două câte două ale lui A a cărei reuniune este A . Se poate observa ușor că mulțimea claselor de echivalență ale lui A în raport cu relația de echivalență \sim este o partiție a lui A . Mulțimea claselor de echivalență se numește *mulțimea factor a lui A modulo \sim* și se notează cu A/\sim . Așadar $A/\sim = \{\hat{a} : a \in A\}$.

Exemplul 1.1.1. Fie n un număr natural. Definim pe mulțimea \mathbb{Z} relația binară

$$a \sim b \quad \text{dacă și numai dacă} \quad n | b - a.$$

Se observă imediat că $a \sim a$ și $a \sim b$ implică $b \sim a$, ceea ce înseamnă că \sim este reflexivă și simetrică. Dacă $a \sim b$ și $b \sim c$ atunci obținem că $n | b - a$ și $n | c - b$, deci n divide și suma $(b - a) + (c - b) = c - a$. Prin urmare obținem că $a \sim c$, adică \sim este tranzitivă. Deci \sim este o relație de echivalență pe \mathbb{Z} , care se mai numește și *relația de congruență modulo n* pe \mathbb{Z} și se notează de obicei cu $\equiv (\text{mod } n)$. Pentru $n = 0$ se vede imediat că relația de congruență modulo 0 este chiar egalitatea, iar pentru $n = 1$ orice două numere sunt congruente modulo 1. Obținem în aceste două cazuri particulare că pentru un număr arbitrar $r \in \mathbb{Z}$ avem $\hat{r} = \{r\}$ dacă $n = 0$,

respectiv $\hat{r} = \mathbb{Z}$ dacă $n = 1$. Să presupunem în continuare că $n \geq 2$. Aplicând teorema împărțirii cu rest în \mathbb{Z} obținem că $a \equiv b \pmod{n}$ dacă și numai dacă a și b dau același rest prin împărțirea cu n . Deci $\hat{r} = \{r + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. În concluzie, \mathbb{Z} are exact n clase de echivalență distincte, iar un sistem complet de reprezentanți pentru relația $\equiv \pmod{n}$ este orice mulțime formată cu n numere consecutive, în particular $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Mulțimea factor a lui \mathbb{Z} modulo $\equiv \pmod{n}$ se notează cu \mathbb{Z}_n . Deci

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}.$$

1.1.2. Funcții. Fie A și B două mulțimi. Reamintim că o *funcție* (sau *aplicație*) f definită pe A cu valori în B , se notează $f : A \rightarrow B$, și asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element din B , pe care îl notăm $f(x)$. Mulțimea A se numește *domeniul de definiție* al lui f , iar B se numește *codomeniul* lui f . Trebuie remarcat că, dacă funcția f nu este definită explicit pentru fiecare element trebuie, în general, verificat că funcția f este bine definită.

Mulțimea $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$, unde $X \subset A$ este o submulțime a lui B , se numește *imagea* lui X prin f . În particular $f(A)$ se notează cu $\text{Im}(f)$ și se numește *imagea* lui f . Pentru fiecare submulțime C a lui B submulțimea lui A dată prin $f^{-1}(C) = \{a \in A \mid f(a) \in C\}$ se numește *preimagea* sau *imagea inversă* a lui C prin f . De exemplu, pentru funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, dată prin $f(n) = (-1)^n$, avem $\text{Im}(f) = \{-1, 1\}$, $f(\{1, 3\}) = \{-1\}$, $f^{-1}(\{2, 4\}) = \emptyset$ și $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{N}$, adică mulțimea numerelor naturale pare. Observați că f^{-1} astfel introdus nu este în general o funcție.

Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții. *Compunerea* dintre g și f se notează cu $g \circ f$ și este funcția $g \circ f : A \rightarrow C$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pentru orice $x \in A$. De exemplu, dacă $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^3$, atunci $(g \circ f)(x) = (1 + x)^3$ iar $(f \circ g)(x) = 1 + x^3$. Observați că, în general $f \circ g \neq g \circ f$ (presupunem că $f \circ g$ și $g \circ f$ sunt definite).

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Funcția f se numește:

- (1) *injectivă* dacă pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$ (sau echivalent dacă pentru orice $x, y \in A$ cu $f(x) = f(y)$ rezultă $x = y$).
- (2) *surjectivă* dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$ (sau echivalent $\text{Im}(f) = B$).
- (3) *bijectivă* dacă este simultan injectivă și surjectivă.
- (4) *inversabilă* dacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$, unde 1_A reprezintă *funcția identică* a mulțimii A , i.e. $1_A : A \rightarrow A$ cu $1_A(x) = x$ pentru orice $x \in A$.

Pentru a exemplifica definițiile de mai sus considerăm funcțiile $f, g, h, k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ date prin: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = [x/2]$ (prin $[x]$ notăm *partea întreagă* a numărului real x , adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x), $h(x) = x + 3$ și $k(x) = x^2$. Atunci f este injectivă și nesurjectivă, g este surjectivă și neinjectivă, h este bijectivă, iar k este neinjectivă și nesurjectivă. În plus, observăm că funcția $h_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definită prin $h_1(x) = x - 3$ are proprietatea că $h \circ h_1 = h_1 \circ h = 1_{\mathbb{Z}}$, ceea ce înseamnă că h este inversabilă. Lăsăm cititorului ca exercițiu demonstrarea următoarelor proprietăți importante ale funcțiilor.

Propoziția 1.1.2. (1) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Atunci f este bijectivă dacă și numai dacă f este inversabilă.

(2) Fie A o mulțime finită și $f : A \rightarrow A$ o funcție. Atunci f este injectivă $\iff f$ este surjectivă $\iff f$ este bijectivă. (vezi Problema 1.5.1 pentru generalizare)

1.1.3. Grupuri.

Definiția 1.1.3. Fie A o mulțime nevidă.

(1) O **operație algebrică** $*$ pe mulțimea A este o funcție $*$: $A \times A \rightarrow A$. Pentru orice $a, b \in A$ vom scrie $a * b$ în loc $*(a, b)$.

(2) O operație algebrică $*$ pe mulțimea A se numește **asociativă** dacă pentru orice $a, b, c \in A$ avem $a * (b * c) = (a * b) * c$.

(3) Dacă $*$ este o operație algebrică pe mulțimea A spunem că elementele $a, b \in A$ comută dacă $a * b = b * a$. Spunem că $*$ este **comutativă** pe mulțimea A dacă $a * b = b * a$ pentru orice $a, b \in A$.

Exemplele 1.1.4. (1) “+” (adunarea obișnuită) este o operație algebrică comutativă și asociativă pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , respectiv \mathbb{C} .

(2) “.” (înmulțirea obișnuită) este o operație algebrică comutativă și asociativă pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , respectiv \mathbb{C} .

(3) “−” (scăderea obișnuită) este o operație algebrică necomutativă și neasociativă pe \mathbb{Z} , unde $-(a, b) = a - b$. Într-adevăr, avem $2 - 1 = 1 \neq -1 = 1 - 2$ și $1 - (1 - 1) = 1 \neq -1 = (1 - 1) - 1$.

(4) “−” (scăderea obișnuită) nu este o operație algebrică pe \mathbb{N} (nici pe \mathbb{Q}_+ , \mathbb{R}_+). Într-adevăr, pentru $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a < b$ obținem că $a - b \notin \mathbb{N}$, adică − nu este o aplicație de la $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu valori în \mathbb{N} .

Presupunem că $*$ este o operație algebrică pe A și H este o submulțime nevidă a lui A . Dacă restricția lui $*$ la H este o operație algebrică pe H , i.e. pentru orice $a, b \in H$ avem $a * b \in H$, atunci H se numește **parte stabilă** a lui A în raport cu $*$ (vom scrie, pe scurt, când nu e pericol de confuzie că H este parte stabilă în raport cu $*$). Observați că dacă $*$ este operație algebrică asociativă (respectiv comutativă) pe A , iar restricția lui $*$ la o submulțime H a lui A este o operație algebrică pe H , atunci $*$ este automat asociativă (respectiv comutativă) pe H .

Definiția 1.1.5. Un **grup** este o pereche ordonată $(G, *)$ unde G este o mulțime și $*$ este o operație algebrică pe G care satisface următoarele axiome:

(G1) $a * (b * c) = (a * b) * c$, pentru orice $a, b, c \in G$ (i.e. $*$ este asociativă),

(G2) există un element $e \in G$ astfel încât $a * e = e * a = a$, pentru orice $a \in G$ (e se numește **element neutru** al lui G),

(G3) pentru fiecare $a \in G$ există un element $a' \in G$ astfel încât $a * a' = a' * a = e$ (a se numește **element inversabil**, iar a' se numește **inversul** lui a)

Grupul $(G, *)$ se numește **abelian** (sau **comutativ**) dacă $*$ este operație algebrică comutativă pe G , i.e. $a * b = b * a$ pentru orice $a, b \in G$. Grupul $(G, *)$ se numește **grup finit** dacă mulțimea G este finită.

Înainte de a considera câteva exemple de grupuri vom demonstra câteva proprietăți de bază ale acestora.

Propoziția 1.1.6. *Fie $(G, *)$ un grup. Atunci au loc următoarele:*

- (1) *elementul neutru al lui G , definit în axioma (G2), este unic determinat,*
- (2) *pentru fiecare $a \in G$ inversul său a' , definit în axioma (G3), este unic determinat.*

Demonstrație. (1) Dacă e și f sunt elemente neutre ale lui G atunci aplicând axioma (G2) obținem $f = e * f = e$.

(2) Să presupunem că b, c sunt ambele inverse ale lui a , iar e este elementul neutru al lui G . Folosind axiomele grupului obținem atunci următorul șir de egalități

$$c \stackrel{(G2)}{=} c * e \stackrel{(G3)}{=} c * (a * b) \stackrel{(G1)}{=} (c * a) * b \stackrel{(G3)}{=} e * b \stackrel{(G2)}{=} b. \quad \square$$

Prezentăm în continuare câteva exemple clasice de grupuri.

Exemplele 1.1.7. (1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri abeliene infinite cu elementul neutru $e = 0$ și $a' = -a$ pentru orice a .

(2) (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) , (\mathbb{Q}_+, \cdot) , (\mathbb{R}_+, \cdot) sunt grupuri abeliene infinite cu elementul neutru $e = 1$ și $a' = \frac{1}{a}$ pentru orice a . (\mathbb{Z}^*, \cdot) nu este grup deoarece singurele elemente inversabile în \mathbb{Z}^* sunt 1 și -1 .

(3) Dacă $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) sunt două grupuri, atunci putem forma cu ajutorul lor un nou grup $(G_1 \times G_2, \cdot)$, numit **produsul direct** al grupurilor $(G_1, *)$ și (G_2, \circ) , ale cărui elemente sunt perechile produsului cartezian $G_1 \times G_2$ iar operația algebrică \cdot este definită astfel:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \circ b_2).$$

Lăsăm cititorului verificarea axiomelor (G1) – (G3) pentru a vedea că $(G_1 \times G_2, \cdot)$ este un grup având elementul neutru (e_1, e_2) , unde e_1, e_2 sunt elementele neutre ale lui G_1 , respectiv G_2 . Mai mult, inversul elementului (a_1, a_2) este (a'_1, a'_2) , unde a'_1 este inversul lui a_1 în G_1 , iar a'_2 este inversul lui a_2 în G_2 .

(4) Fie $n \geq 1$. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ construită în Exemplul 1.1.1 definim o operație de adunare și una de înmulțire. Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$. Definim $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ și $\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy}$. Arătăm mai întâi că cele două operații sunt bine definite, adică nu depind de reprezentanții claselor. Într-adevăr, fie $x', y' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\hat{x} = \hat{x}'$ și $\hat{y} = \hat{y}'$. Atunci n divide $x' - x$ și $y' - y$. Deci n divide $x' + y' - x - y$ și $x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y)$. Rezultă că $\widehat{x+y} = \widehat{x'+y'}$ și $\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$. Lăsăm cititorului să verifice că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup abelian finit, având elementul neutru $\hat{0}$, iar inversul lui \hat{x} este $\widehat{-x}$. Ce putem spune despre (\mathbb{Z}_n, \cdot) ? Nu este grup. Într-adevăr, se poate verifica ușor că (\mathbb{Z}_n, \cdot) satisface (G1), (G2), dar nu satisface (G3) deoarece $\hat{0}$ nu este element inversabil ($\hat{0}\hat{x} = \hat{0}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$).

(5) Fie A o mulțime nevidă. Notăm cu S_A mulțimea tuturor funcțiilor definite pe A cu valori în A care sunt bijective. Să observăm că $S_A \neq \emptyset$ deoarece $1_A \in S_A$. Considerăm operația de compunere uzuală a funcțiilor “ \circ ” și lăsăm cititorului să verifice că (S_A, \circ) este un grup.

În general, acest grup nu este abelian, pentru că operația de compunere a funcțiilor nu este comutativă. Acest grup se mai numește și *grupul permutărilor mulțimii A*.

Un grup care are un singur element (elementul neutru!) se numește și grupul *trivial*. Dacă G are un număr finit de elemente, atunci numărul de elemente al grupului se numește **ordinul** grupului. Reamintim, fără demonstrație (încercați să le demonstrați!) următoarele reguli de calcul într-un grup $(G, *)$:

- Dacă $a \in G$ are inversul $a' \in G$ atunci inversul lui a' este $(a')' = a$.
- Dacă $a, b \in G$ au inversele $a', b' \in G$, atunci inversul lui $a * b$ este $b' * a'$.
- Pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ valoarea lui $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ este independentă de modul în care am putea pune parantezele (această proprietate se numește **legea de asociativitate generalizată**)

De acum înainte vom folosi în prezentarea rezultatelor teoretice referitoare la grupuri, pentru simplificarea scrierii, operația algebrică multiplicativă \cdot în loc de operația algebrică $*$. Implicit, vom nota inversul unui element x cu x^{-1} în loc de x' . Mai mult, vom scrie pe scurt G este grup în loc de (G, \cdot) este un grup.

Definiția 1.1.8. Fie G un grup și H o submulțime nevidă a lui G . Spunem că H este un **subgrup** al lui G , și notăm $H \leq G$, dacă pentru orice $x, y \in H$ rezultă $xy \in H$ și $x^{-1} \in H$.

Observați că rezultă imediat din definiție că orice subgrup H al grupului G conține elementul neutru e . În plus, H devine grup în raport cu operația indusă. Prin urmare, pentru orice grup G știm în mod automat două subgrupuri, numite și *subgrupuri improprii*. Este vorba despre G și $\{e\}$, unde e reprezintă elementul neutru al grupului. Celelalte subgrupuri ale lui G diferite de $\{e\}$ și G se numesc *subgrupuri proprii*. Se poate demonstra ușor că o submulțime nevidă H a unui grup G este subgrup dacă și numai dacă $xy^{-1} \in H$ pentru orice $x, y \in H$.

Exemplele 1.1.9. (1) Este ușor de verificat că avem următorul șir de subgrupuri: $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$.

(2) Fie $n \geq 1$ și submulțimea lui \mathbb{C}^* dată prin $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. Atunci U_n este subgrup al lui (\mathbb{C}^*, \cdot) . Într-adevăr dacă $x, y \in U_n$, atunci $(xy^{-1})^n = x^n(y^n)^{-1} = 1$, deci $xy^{-1} \in U_n$.

(3) Fie $n \in \mathbb{N}$ și notăm cu $n\mathbb{Z}$ mulțimea multiplilor întregi ai lui n , adică $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$. $n\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$. Într-adevăr, fie $x, y \in n\mathbb{Z}$. Atunci există $k, l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = nk$ și $y = nl$. Deci $x - y = n(k - l) \in n\mathbb{Z}$, ceea ce înseamnă că $n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$. Grupul $(\mathbb{Z}, +)$ are proprietatea că orice subgrup al său este de forma $n\mathbb{Z}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$. Să observăm mai întâi că subgrupurile improprii ale lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$. Fie H un subgrup propriu al lui $(\mathbb{Z}, +)$. Deoarece $H \neq \{0\}$ obținem că există $0 \neq m \in H$ și implicit, din definiția subgrupului, că $-m \in H$. Prin urmare, $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. Fie n cel mai mic număr natural nenul din $H \cap \mathbb{N}$ (Atenție! Existența lui n nu este evidentă; ea rezultă din faptul că \mathbb{N} este o mulțime bine ordonată). Arătăm că $H = n\mathbb{Z}$. Incluziunea $n\mathbb{Z} \subseteq H$ rezultă din faptul că $n \in H$ și H este grup. Reciproc, fie $h \in H$ și $h = nq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$ împărțirea cu rest

a lui h la n . Deoarece $h, nq \in H$ și H este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$ rezultă că $r = h - nq \in H$. Deci $r = 0$, altfel contrazicem alegerea lui n . În concluzie obținem că $h = nq \in n\mathbb{Z}$.

Definiția 1.1.10. Fie G și H două grupuri. O funcție $f : G \rightarrow H$ se numește **morfism de grupuri** dacă

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{pentru orice } x, y \in G.$$

Un morfism de grupuri bijectiv se numește **izomorfism de grupuri**. Un **automorfism** este un izomorfism de grupuri de la un grup la el însuși.

Fie $b = f(e_G)$, unde prin e_G am notat elementul neutru al grupului G . Din $e_G^2 = e_G$ rezultă că $b^2 = b = be_H$, unde e_H reprezintă elementul neutru al lui H . Înmulțind la stânga relația $b^2 = be_H$ cu b^{-1} obținem că $b = e_H$. Prin urmare, orice morfism de grupuri trimite elementul neutru în element neutru. O altă proprietate importantă a unui morfism de grupuri este că $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Într-adevăr, avem că

$$e_H = f(e_G) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}),$$

și analog $e_H = f(x^{-1})f(x)$, de unde rezultă folosind (G3) că $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Un prim exemplu de morfism de grupuri este *morfismul trivial*, i.e. aplicația $j : G \rightarrow H$ dată prin $j(x) = e_H$ pentru orice $x \in G$ (verificați că j este morfism!). Se arată imediat și că aplicația identică $1_G : G \rightarrow G$ este un automorfism al lui G . Ca exemple concrete, $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $f(n) = 5n$ este morfism de grupuri, dar nu este izomorfism, iar $g : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $g(x) = 5^x$ este izomorfism de grupuri.

Propoziția 1.1.11. Compunerea a două morfisme de grupuri este un morfism de grupuri. Inversul unui izomorfism de grupuri este tot un izomorfism.

Demonstrație. Ambele afirmații rezultă imediat din definiții. □

Spunem că grupurile G și H sunt *izomorfe* și scriem $G \cong H$, dacă există un izomorfism de grupuri $f : G \rightarrow H$. Intuitiv, faptul că două grupuri sunt izomorfe, înseamnă ca ele au aceleași proprietăți algebrice. În general, nu este ușor să arătăm că două grupuri sunt sau nu izomorfe. De exemplu, am arătat mai sus că $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ prin construirea unui astfel de izomorfism. Pentru a arăta că două grupuri nu sunt izomorfe, este util să căutăm o proprietate algebrică pe care un grup o are iar celălalt nu. De exemplu, $(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ deoarece (\mathbb{R}^*, \cdot) are un element de ordin 2 (vezi Definiția 1.1.13), pe -1 , iar $(\mathbb{R}, +)$ nu are. Formalizând, dacă presupunem prin absurd că $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ este un izomorfism obținem că

$$0 = f(1) = f((-1)^2) = 2f(-1),$$

deci $f(-1) = 0$, adică $f(-1) = f(1)$ o contradicție cu faptul că f este funcție bijectivă.

Pentru aplicații ulterioare avem nevoie de următorul rezultat.

Propoziția 1.1.12. Fie $f : G \rightarrow G'$ un morfism de grupuri, și $e_G, e_{G'}$ elementele neutre ale grupurilor G , respectiv G' .

- (a) Dacă H este un subgrup al lui G , atunci $f(H)$ este un subgrup al lui G' . În particular, avem că $\text{Im}(f) \leq G'$.

(b) Dacă H' este un subgrup al lui G' , atunci $f^{-1}(H')$ este un subgrup al lui G . În particular, avem că $\text{Ker}(f) := f^{-1}(\{e_{G'}\})$ este un subgrup al lui G , care se numește **nucleul** lui f .

(c) f este injectiv dacă și numai dacă $\text{Ker}(f) = \{e_G\}$.

Demonstrație. (a) Fie $x, y \in H$. Atunci folosind faptul că f este morfism de grupuri și H este subgrup al lui G obținem $f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in f(H)$.

(b) Fie $x, y \in f^{-1}(H')$. Atunci $f(x), f(y) \in H'$ și $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$. Deci $xy^{-1} \in f^{-1}(H')$.

(c) Este clar că dacă f este injectiv atunci $\text{Ker}(f) = \{e_G\}$. Reciproc, presupunem că $\text{Ker}(f) = \{e_G\}$ și fie $x, y \in G$ cu $f(x) = f(y)$. Atunci $e_{G'} = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1})$, adică $xy^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{e_G\}$. Prin urmare obținem că $x = y$. \square

În finalul acestei secțiuni reamintim cititorului definiția ordinului unui element într-un grup.

Definiția 1.1.13. Fie G un grup, e_G elementul său neutru și x un element al lui G . **Ordinul** lui x se definește prin

$$\text{ord}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } x^n \neq e_G \text{ pentru orice } n \geq 1 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* | x^n = e_G\}, & \text{dacă există } n \geq 1 \text{ cu } x^n = e_G. \end{cases}$$

Observăm că elementul neutru e_G are ordinul 1. De fapt, este singurul element de ordin 1 al grupului G . Dacă luăm de exemplu subgrupul multiplicativ $(\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$ (verificați că e subgrup!) al lui (\mathbb{C}^*, \cdot) avem $\text{ord}(i) = 4$ deoarece $i \neq 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ și $i^4 = 1$. Analog se arată că $\text{ord}(-i) = 4$ și $\text{ord}(-1) = 2$. Pe de altă parte, dacă luăm grupul $(\mathbb{Z}, +)$ orice element nenul are ordinul infinit.

1.1.4. Inele.

Definiția 1.1.14. (1) Se numește **inel** o mulțime nevidă R înzestrată cu două operații binare $+$ și \cdot (numite adunare și înmulțire) care satisfac următoarele axiome:

- (i) $(R, +)$ este grup abelian,
- (ii) \cdot este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pentru orice $a, b, c \in R$,
- (iii) înmulțirea este distributivă față de adunare: pentru orice $a, b, c \in R$ avem

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \text{și} \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

(2) Inelul R se numește **comutativ** dacă operația de înmulțire este comutativă.

(3) Inelul R se numește **inel unitar** dacă operația de înmulțire are element neutru, adică există un element $e \in R$ astfel încât

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{pentru orice } a \in R.$$

Elementul neutru al adunării se notează cu 0 și se numește *elementul nul* al inelului, iar inversul elementului a în raport cu operația de adunare se notează cu $-a$. Cel mai simplu exemplu de inel este inelul $\{0\}$ numit și *inelul nul*. Să observăm că într-un inel unitar nenul $1 \neq 0$. Toate inelele studiate de noi vor fi inele unitare nenule. Într-un inel unitar elementul

neutru al înmulțirii se notează cu 1 și se numește *elementul unitate*. Într-un inel unitar R , un element $a \in R$ se numește inversabil dacă este inversabil față de înmulțire. Mulțimea elementelor inversabile din inelul unitar R se notează cu $U(R)$. Un inel R se numește **integr** dacă pentru orice elemente $a, b \in R \setminus \{0\}$ avem $ab \neq 0$. Un inel integr comutativ se numește **domeniu de integritate**.

Exemplele 1.1.15. (1) Mulțimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire sunt inele comutative și unitare.

(2) Mulțimea \mathbb{Z}_n împreună cu operațiile de adunare și înmulțire definite în Exemplul 1.1.7 este un inel comutativ și unitar.

(3) Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Mulțimea $n\mathbb{Z}$ împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a numerelor întregi este un inel comutativ, fără element unitate.

(4) Fie mulțimea $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$. Mulțimea $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor definite în mod uzual: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ și $(fg)(x) = f(x)g(x)$ este un inel comutativ și unitar.

(5) Un exemplu clasic de inel necomutativ este dat de inelul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de matrice pătratică de ordinul n ($n \geq 2$). Pentru definiția lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vezi capitolul următor, iar pentru demonstrarea faptului că $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inel unitar necomutativ vezi Teorema 2.1.11 și Observația 2.1.12.

(6) Fie R și S două inele. Produsul cartezian $R \times S$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire definite pe componente:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \quad \text{și} \quad (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2),$$

este un inel numit *produsul direct* al inelelor R și S .

De acum înainte, pe tot parcursul acestui capitol prin inel vom înțelege inel comutativ și unitar.

Definiția 1.1.16. Fie R un inel. O submulțime nevidă $I \subset R$ se numește **ideal** dacă $(I, +)$ este subgrup al grupului aditiv $(R, +)$ și dacă pentru orice $a \in I$ și $x \in R$ rezultă că $ax \in I$. Notăm faptul că I este un ideal al lui R prin $I \trianglelefteq R$.

Exemplele 1.1.17. (1) Idealele lui \mathbb{Z} sunt $n\mathbb{Z}$ cu $n \geq 0$ un număr întreg. Într-adevăr, știm deja din Exemplul 1.1.9 (3) că $n\mathbb{Z}$ cu $n \geq 0$ sunt toate subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$, și în mod evident produsul dintre un element din $n\mathbb{Z}$ cu unul din \mathbb{Z} este un element din $n\mathbb{Z}$.

(2) Fie R, S două inele. Se poate arăta ușor (verificați), pe baza definiției, că idealele produsului direct de inele $R \times S$ sunt toate submulțimile lui $R \times S$ de forma $I \times J$, unde $I \trianglelefteq R$ și $J \trianglelefteq S$.

Orice inel R are idealele R și $\{0\}$. Un ideal nenul I al lui R se numește **propriu** dacă $I \neq R$. Cu ajutorul idealelor unui inel putem construi noi inele. Construcția este asemănătoare cu cea dată pentru \mathbb{Z}_n . Fie R un inel fixat și I un ideal al său. Definim pe inelul R următoarea relație de echivalență, numită *congruența modulo I* :

$$x \sim y(\text{mod } I) \quad \text{dacă} \quad x - y \in I.$$

Pe mulțimea factor, notată R/I , definim următoarele asocieri:

$$(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} + \hat{y} := \widehat{x+y} \text{ și } (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} \cdot \hat{y} := \widehat{x \cdot y},$$

unde prin \hat{x} am prescurtat $x(\text{mod } I)$. Se verifică imediat (exercițiu!) faptul că aceste asocieri nu depind de reprezentanții aleși pentru clasele de echivalență. Ele determină două operații algebrice, care definesc pe mulțimea factor R/I o structură de inel (comutativ și unitar), în care elementul nul este $\hat{0}$, iar elementul unitate este $\hat{1}$. Inelul astfel obținut este **inelul factor** al lui R prin idealul I , se notează cu R/I și este mulțimea $\{x(\text{mod } I) \mid x \in R\}$.

Definiția 1.1.18. Fie R și S două inele.

(1) Un **morfism de inele** este o aplicație $\varphi : R \rightarrow S$ care satisface următoarele condiții:

- (i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pentru orice $a, b \in R$,
- (ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pentru orice $a, b \in R$,
- (iii) $\varphi(1_R) = 1_S$, unde am notat cu $1_R, 1_S$ elementele unitate ale inelelor R și S .

(2) Un morfism de inele bijectiv se numește **izomorfism de inele**.

Menționăm în continuare câteva exemple de morfisme de inele. Pentru orice inel R aplicația identică $i : R \rightarrow R$, definită prin $i(x) = x$ pentru orice $x \in R$, este un izomorfism de inele. Dacă $I \trianglelefteq R$ atunci aplicația canonică $p : R \rightarrow R/I$, definită prin $p(x) = \hat{x}$ este un morfism de inele surjectiv. Singurul morfism de inele $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ este cel dat de $f(k) = k \cdot 1_R$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ (rezultă imediat din definiția morfismului de inele). Să observăm că dacă $\varphi : R \rightarrow S$ este morfism de inele atunci $\text{Ker}(\varphi)$ este un ideal al lui R , iar $\text{Im}(\varphi)$ este un **subinel** al lui S (adică inel în raport cu operațiile induse de S).

1.1.5. Corpuri. Reamintim că în precedenta secțiune am făcut convenția că toate inelele considerate în acest capitol vor fi comutative și unitare. Pentru a evidenția importanța fundamentală a comutativității corpurilor renunțăm la această convenție doar pentru definiția generală. Un polinom cu coeficienți într-un corp necomutativ poate avea mai multe rădăcini decât îi este gradul (vezi Problema 1.5.10) pe când un polinom cu coeficienți într-un corp comutativ are cel mult atâtea rădăcini cât îi este gradul (vezi Propoziția 1.3.5).

Definiția 1.1.19. Un inel unitar \mathbb{K} se numește **corp** dacă orice element nenul al său este inversabil. Echivalent un inel unitar \mathbb{K} este corp dacă și numai dacă $U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$, unde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dacă, în plus, înmulțirea este comutativă, corpul se numește **comutativ**.

Se observă imediat din definiție că orice corp este un inel integru. Reciproca nu este adevărată după cum se poate vedea din următorul exemplu: \mathbb{Z} este un inel integru, dar $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. Are loc totuși o reciprocă parțială: orice inel integru finit este corp (vezi Problema 1.5.11). Prezentăm în continuare câteva exemple de corpuri.

Exemplele 1.1.20. (1) Mulțimile $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a numerelor sunt corpuri comutative.

(2) Fie p un număr natural prim. Atunci mulțimea \mathbb{Z}_p împreună cu operațiile de adunare și înmulțire definite în Exemplul 1.1.7 este un corp comutativ (vezi Problema 1.5.12).

(3) Considerăm mulțimea $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Atunci $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ împreună cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a numerelor reale este un corp comutativ. Într-adevăr, se verifică ușor că $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ este un inel comutativ. Arătăm doar că orice element nenul este inversabil. Fie $a + b\sqrt{3} \neq 0$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$. Prin calcul direct se observă că

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2} \sqrt{3},$$

unde a doua egalitate a fost obținută prin raționalizarea fracției, adică amplificarea cu “conjugatul” numitorului.

(4) Fie inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ al matricelor pătrate de ordin 2 peste corpul \mathbb{C} (vezi Definiția 2.1.1). Considerăm $\mathbb{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

\mathbb{H} este un corp necomutativ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor, vezi Problema 1.5.10.

Notăție: De acum înainte prin corp vom înțelege un corp comutativ, iar prin inel un inel unitar și comutativ.

Lema 1.1.21. *Un inel R este corp dacă și numai dacă $\{0\}$ și R sunt singurele ideale ale lui R .*

Demonstrație. Să presupunem că R este un corp și fie I un ideal nenul al lui R . Atunci există $x \in I$ astfel încât $x \neq 0$. Din definiția corpului rezultă că există $y \in R$ astfel încât $xy = 1$. Aplicând acum definiția idealului obținem că $1 = xy \in I$, de unde rezultă imediat că $I = R$.

Reciproc, presupunem că $\{0\}$ și R sunt singurele ideale ale lui R . Fie $x \in R$, $x \neq 0$ un element arbitrar. Considerăm mulțimea $\{ax \mid a \in R\}$. Este evident din definiția idealului că această mulțime este un ideal al lui R , care este în plus și nenul (acest ideal se mai numește și idealul generat de x). Din ipoteză rezultă că obligatoriu acest ideal este R , adică

$$\{ax \mid a \in R\} = R.$$

Cum $1 \in R$, egalitatea de mai sus implică existența unui element $y \in R$ astfel încât $yx = 1$. Obținem așadar că x este inversabil. Cum x a fost ales arbitrar nenul, înseamnă că R este corp. \square

Definiția 1.1.22. *Fie \mathbb{K} un corp. O submulțime nevidă F a lui \mathbb{K} se numește **subcorp** al lui \mathbb{K} dacă*

$$(1) \forall x, y \in F \text{ rezultă } x - y \in F \quad \text{și} \quad (2) \forall x, y \in F, y \neq 0 \text{ rezultă } xy^{-1} \in F.$$

Rezultă imediat din definiție că: orice corp \mathbb{K} este subcorp al lui însuși; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ este un subcorp în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor; $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ este un subcorp al lui \mathbb{R} .

Definiția 1.1.23. Fie \mathbb{K} și \mathbb{K}' două corpuri. Se numește morfism de corpuri de la \mathbb{K} la \mathbb{K}' o funcție $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$, astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiții:

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{K}$;
- (2) $f(xy) = f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{K}$;
- (3) $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'}$.

Se observă că $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ este un morfism de corpuri dacă este un morfism de inele.

Propoziția 1.1.24. Orice morfism de corpuri este injectiv.

Demonstrație. Fie $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ un morfism de corpuri. Cum f este și morfism de inele știm că $\text{Ker}(f)$ este un ideal al lui \mathbb{K} . Din Lema 1.1.21 rezultă că $\text{Ker}(f) = \{0\}$ sau $\text{Ker}(f) = \mathbb{K}$. Dacă $\text{Ker}(f) = \mathbb{K}$ atunci $f(1_{\mathbb{K}}) = 0$ și cum $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'}$ (pentru că f e morfism) am obține atunci că $1_{\mathbb{K}'} = 0$, o contradicție. Deci $\text{Ker}(f) = \{0\}$, adică f este injectiv. \square

Încheiem această secțiune despre corpuri cu definiția caracteristicii unui corp. Fie \mathbb{K} un corp și $1_{\mathbb{K}}$ elementul său neutru. Deoarece $(\mathbb{K}, +)$ este grup abelian, atunci elementele $1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}, \dots$ se găsesc în \mathbb{K} și nu sunt neapărat distincte. Pentru un număr natural nenul n punem

$$n \cdot 1_{\mathbb{K}} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}}}_{n \text{ ori}}.$$

Atunci avem două posibilități: ori toate elementele $n \cdot 1_{\mathbb{K}}$ sunt distincte, ori $m \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ pentru un anumit număr natural nenul m .

Definiția 1.1.25. Caracteristica unui corp \mathbb{K} , se notează cu $\text{char}(\mathbb{K})$, și se definește ca fiind cel mai mic număr natural nenul p astfel încât $p \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ dacă un astfel de p există și 0 în caz contrar.

De exemplu, $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$ pe când $\text{char}(\mathbb{Z}_2) = 2$. Apriori se pare că un corp \mathbb{K} poate avea caracteristica orice număr natural diferit de 1. În realitate avem:

Propoziția 1.1.26. Caracteristica unui corp \mathbb{K} este ori 0 ori un număr prim p .

Demonstrație. Să presupunem că $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 0$. Rezultă din definiție că $\text{char}(\mathbb{K}) = m$ pentru un anumit număr natural nenul m . Dacă m nu e prim, atunci $m = ab$ cu $a, b > 1$. Deoarece $m \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ atunci

$$m \cdot 1_{\mathbb{K}} = ab \cdot 1_{\mathbb{K}} = (a \cdot 1_{\mathbb{K}})(b \cdot 1_{\mathbb{K}}) = 0.$$

Dar \mathbb{K} este corp, prin urmare domeniu de integritate, ceea ce implică $a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ sau $b \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$, o contradicție cu minimalitatea lui m . Obținem așadar că $\text{char}(\mathbb{K}) = p$ cu p număr prim. \square

1.2. Grupul (S_n, \circ)

Fie A o mulțime nevidă. Reamintim că în Exemplul 1.1.7 (5), am notat cu S_A grupul permutărilor mulțimii A . Operația algebrică în raport cu care S_A este grup este operația de compunere uzuală a funcțiilor. Dacă A și B sunt două mulțimi finite cu același număr de

elemente atunci grupurile S_A și S_B sunt izomorfe (vezi Problema 1.5.15). Prin urmare, grupul permutărilor unei mulțimi finite cu n elemente este izomorf cu grupul permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, pe care îl notăm cu S_n și îl numim *grupul permutărilor de grad n* .

Grupul S_n are $n!$ elemente. Într-adevăr, aplicând Propoziția 1.1.2 b) permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ sunt exact funcțiile injective definite de la această mulțime în ea însăși. Folosind acum Problema 1.5.2 obținem că S_n are exact $n!$ elemente. Pentru scrierea elementelor lui S_n vom folosi următoarea notație: permutarea $\sigma \in S_n$ se scrie sub forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Importanța studierii grupului S_n este justificată de următorul rezultat fundamental din teoria grupurilor.

Teorema 1.2.1. (Cayley) *Orice grup cu n elemente este izomorf cu un subgrup al lui S_n .*

Demonstrație. Fie G un grup cu n elemente. Deoarece S_n este izomorf cu S_G , este suficient să arătăm că G este izomorf cu un subgrup al grupului S_G . Pentru fiecare $g \in G$, considerăm aplicația $\phi_g : G \rightarrow G$ definită prin $\phi_g(x) = gx$ pentru orice $x \in G$. Obținem astfel că pentru orice $g, h, x \in G$ avem $(\phi_g \circ \phi_h)(x) = ghx = \phi_{gh}(x)$. În particular avem ϕ_g bijecție deoarece $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = 1_G$ și aplicația $\Phi : G \rightarrow S_G$, $\Phi(g) = \phi_g$ este bine definită. Mai mult, Φ este morfism injectiv de grupuri. Într-adevăr, $\Phi(g)\Phi(h) = \phi_g\phi_h = \phi_{gh} = \Phi(gh)$ și $\text{Ker}(\Phi) = \{g | \phi_g = 1_G\} = \{e_G\}$. Deci G este izomorf cu subgrupul $\Phi(G)$ al lui S_G . \square

Vom descrie elementele din S_n folosindu-ne de o metodă, numită *descompunerea în cicluri disjuncti*, pe care o prezentăm în continuare. Un **ciclu** este notat printr-un șir de întregi distincți cuprinși între 1 și n și reprezintă elementul lui S_n care permută ciclic acești întregi și fixează restul întregilor. Concret, un ciclu se reprezintă astfel: fie i_1, \dots, i_k numere distincte cuprinse între 1 și n . Ciclul $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$ este permutarea din S_n definită prin $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_1$ și $x \mapsto x$ pentru $x \neq i_j$ pentru orice $j = 1, \dots, k$. Numărul k se numește *lungimea ciclului*. Rezultă din definiția ciclului că permutarea identică este singurul ciclu de lungime 1 din S_n . Ciclii de lungime 2 se numesc **transpoziții**. De exemplu, ciclul $(2 \ 1 \ 4) \in S_7$, de lungime 3, reprezintă permutarea lui S_7 definită prin $2 \mapsto 1, 1 \mapsto 4, 4 \mapsto 2$ și $i \mapsto i$ pentru orice $i \notin \{1, 2, 4\}$. Folosind notația introdusă deasupra Teoremei 1.2.1

$$(2 \ 1 \ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Este ușor de observat că pentru $n \geq 3$ avem $(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2) \circ (2 \ 3) \neq (2 \ 3) \circ (1 \ 2) = (1 \ 3 \ 2)$. În particular, rezultă că S_n nu este grup abelian pentru $n \geq 3$, în timp ce S_1 și S_2 sunt abeliene.

Spunem că doi cicluri $(i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$ și $(j_1 \ j_2 \ \dots \ j_l)$ sunt *disjuncti* dacă $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$. Este ușor de verificat (Exercițiu!) că doi cicluri disjuncti comută. Putem demonstra acum rezultatul central al acestei secțiuni.

Teorema 1.2.2. *Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca produs de cicluri disjuncti, scrierea fiind unică până la ordinea ciclurilor.*

Demonstrație. Existența: Fie $\sigma \in S_n$. Definim pe mulțimea $\{1, \dots, n\}$ relația binară $x \sim y$ dacă și numai dacă există un întreg $k \geq 1$ cu $\sigma^k(x) = y$. Este ușor de verificat că \sim este o relație de echivalență. Clasele de echivalență ale relației \sim formează o partiție a mulțimii $\{1, \dots, n\}$. Să presupunem că \sim are exact r clase de echivalență, pe care le notăm cu $\{i_{11}, \dots, i_{1k_1}\}, \{i_{21}, \dots, i_{2k_2}\}, \dots, \{i_{r1}, \dots, i_{rk_r}\}$. Ținând cont de definiția relației de echivalență \sim , rezultă că fixând $x \in \{1, \dots, n\}$ și considerând $k \geq 1$ cel mai mic întreg astfel încât $\sigma^k(x) = x$ obținem că, clasa de echivalență a lui x este $\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$. Prin urmare, pentru orice $l \in \{1, \dots, r\}$ există $x_l \in \{1, \dots, n\}$ astfel încât avem

$$\{i_{l1}, \dots, i_{lk_l}\} = \{x_l, \sigma(x_l), \dots, \sigma^{k_l-1}(x_l)\}.$$

Rezultă că, până la o renumerotare a elementelor din fiecare clasă de echivalență, putem presupune că $i_{l1} = \sigma^{k_l}(i_{l1})$ și $i_{lj} = \sigma^{j-1}(i_{l1})$ pentru orice l, j cu $1 \leq l \leq r$ și $2 \leq j \leq k_l$. Obținem că

$$\sigma = (i_{11} \ i_{12} \ \dots \ i_{1k_1}) \cdots (i_{r1} \ i_{r2} \ \dots \ i_{rk_r}).$$

Unicitatea: Fie $\sigma = (j_{11} \ j_{12} \ \dots \ j_{1s_1}) \cdots (j_{t1} \ j_{t2} \ \dots \ j_{ts_t})$ o altă scriere a lui σ ca produs de cicli disjuncți. Conform definiției relației de echivalență și faptului că ciclii disjuncți comută rezultă că $\{j_{11}, \dots, j_{1s_1}\}, \{j_{21}, \dots, j_{2s_2}\}, \dots, \{j_{t1}, \dots, j_{ts_t}\}$ sunt clasele de echivalență ale lui σ . Obținem că $r = t$ și până la o eventuală renumerotare putem presupune că $\{i_{l1}, \dots, i_{lk_l}\} = \{j_{l1}, \dots, j_{ls_l}\}$ pentru orice $l \in \{1, \dots, t\}$. De aici obținem concluzia dorită. \square

Prezentăm în continuare un algoritm de descompunere al unei permutări σ din S_n în produs de cicli disjuncți și îl aplicăm în paralel pe o anumită permutare. Fie $n = 13$ și fie $\sigma \in S_{13}$ următoarea permutare

$$(1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Algoritm 1.2.3. Pasul 1: pentru a începe un nou ciclu alegem cel mai mic element al lui $\{1, 2, \dots, n\}$ care nu a apărut deja într-un ciclu anterior - îl notăm cu a (dacă este primul ciclu, $a = 1$); începem noul ciclu: $(a$. În exemplul considerat avem $(1$.

Pasul 2: scriem $\sigma(a)$ din definiția permutării σ - îl notăm cu b . Dacă $b = a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă (fără a-l scrie pe b); astfel am scris un ciclu - ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $b \neq a$, scriem b lângă a în acest ciclu: $(a \ b$. În exemplul considerat $\sigma(1) = 12 = b$, $12 \neq 1$ deci scriem: $(1 \ 12$.

Pasul 3: scriem $\sigma(b)$ din definiția lui σ - îl notăm cu c . Dacă $c = a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă și ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $c \neq a$, scriem c după b în acest ciclu: $(a \ b \ c$. Repetăm acest pas folosind numărul c ca noua valoare a lui b până se încheie ciclul. În exemplul nostru $\sigma(12) = 8$, $8 \neq 1$ deci continuăm ciclul astfel: $(1 \ 12 \ 8$. \square

Natural, această procedură se termină când toate numerele din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ au apărut într-un ciclu. În exemplul considerat mai sus avem:

$$\sigma = (1 \ 12 \ 8 \ 10 \ 4)(2 \ 13)(3)(5 \ 11 \ 7)(6 \ 9).$$

În general în scrierea în produs de cicli disjuncți a unei permutări se omit ciclul de lungime 1, adică în exemplul considerat $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$. Pentru a calcula descompunerea în cicli disjuncți a lui σ^{-1} , și prin urmare pe σ^{-1} , scriem numerele din fiecare ciclu din descompunerea în cicli disjuncți a lui σ în ordine inversă. În exemplul considerat avem

$$\sigma^{-1} = (4\ 10\ 8\ 12\ 1)(13\ 2)(7\ 11\ 5)(9\ 6).$$

Corolarul 1.2.4. (1) *Ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este cel mai mic multiplu comun al lungimii ciclilor care apar în descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncți.*

(2) *Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca produs de transpoziții.*

Demonstrație. Fie $\sigma \in S_n$. Conform Teoremei 1.2.2, σ se scrie ca produs de $r \geq 1$ cicli disjuncți,

$$\sigma = (i_{11}\ i_{12}\ \dots\ i_{1k_1}) \cdots (i_{r1}\ i_{r2}\ \dots\ i_{rk_r}).$$

Deoarece $(i_{l1}\ i_{l2}\ \dots\ i_{lk_l}) = (i_{l1}\ i_{l2})(i_{l2}\ i_{l3}) \cdots (i_{lk_{l-1}}\ i_{lk_l})$ pentru orice $l = 1, \dots, r$ rezultă că σ se scrie ca produs de transpoziții. Folosind faptul că orice doi cicli disjuncți comută obținem că pentru orice $t \geq 1$ avem

$$\sigma^t = (i_{11}\ i_{12}\ \dots\ i_{1k_1})^t \cdots (i_{r1}\ i_{r2}\ \dots\ i_{rk_r})^t.$$

În plus, observând că ordinul unui ciclu este egal cu lungimea lui, obținem că ordinul lui σ este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor k_1, \dots, k_r . \square

Folosind din nou permutarea σ considerată în (1) avem mai întâi că $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$. Scriind fiecare ciclu ca produs de transpoziții obținem

$$\sigma = (1\ 12)(12\ 8)(8\ 10)(10\ 4)(2\ 13)(5\ 11)(11\ 7)(6\ 9).$$

În plus, ordinul lui σ este $[5, 2, 3, 2] = 30$.

Definiția 1.2.5. Fie $\sigma \in S_n$, unde $n \geq 2$. Definim **signatura** lui σ prin

$$(2) \quad \text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

O pereche (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$ cu $\sigma(i) > \sigma(j)$ se numește **inversiune** a lui σ . Notăm cu $m(\sigma)$ numărul inversiunilor lui σ .

Propoziția 1.2.6. Fie $\sigma \in S_n$, unde $n \geq 2$. Atunci $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Demonstrație. Deoarece σ este o bijecție avem

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i)) = (-1)^{m(\sigma)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = (-1)^{m(\sigma)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i).$$

Prin urmare, obținem că

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} = (-1)^{m(\sigma)}. \quad \square$$

O consecință a acestei propoziții este că signatura unei permutări poate fi doar ± 1 . Permutările cu signatura 1 se numesc **permutări pare**, iar cele cu signatura -1 se numesc **permutări impare**. Mulțimea permutărilor pare din grupul S_n se notează cu A_n . Permutarea

identică e nu are nici o inversiune, prin urmare $m(e) = 0$ și conform propoziției anterioare e este permutare pară. Transpoziția $(1\ 2)$ are exact o inversiune $(1, 2)$, deci este o permutare impară. Calculul signaturii cu ajutorul propoziției anterioare poate fi destul de complicat. Revenind la permutarea σ din (1) și numărând toate inversiunile obținem

$$m(\sigma) = 11 + 11 + 2 + 0 + 8 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 50,$$

unde termenul al i -lea din sumă reprezintă numărul de inversiuni (i, j) ale lui σ . Putem decide mai simplu dacă o anumită permutare este pară sau impară? Care este numărul permutărilor pare, respectiv impare?

Teorema 1.2.7. *Fie $n \geq 2$. Aplicația $\text{sgn} : (S_n, \circ) \mapsto (\{-1, 1\}, \cdot)$ este un morfism surjectiv de grupuri, având nucleul $\text{Ker}(\text{sgn}) = A_n$. În particular, A_n este un subgrup al lui S_n și $|A_n| = n!/2$.*

Demonstrație. Aplicația sgn este evident o funcție surjectivă (vezi exemplele calculate). Verificăm că sgn este morfism de grupuri:

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma\tau) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(j) - (\sigma\tau)(i)}{j - i} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(j) - (\sigma\tau)(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau), \end{aligned}$$

unde pentru prima egalitate am aplicat definiția signaturii, iar pentru ultima egalitate definiția signaturii și faptul că τ este o bijecție. Evident $\text{Ker}(\text{sgn}) = A_n$ și, aplicând Propoziția 1.1.12(b), obținem că A_n este un subgrup al lui S_n . Pentru ultima afirmație a teoremei să observăm că, deoarece sgn este un morfism de grupuri, aplicațiile

$$A_n \xrightarrow{(1\ 2)} S_n \setminus A_n \quad \text{și} \quad S_n \setminus A_n \xrightarrow{(1\ 2)} A_n,$$

date de înmulțirea cu transpoziția $(1\ 2)$ sunt bine definite și inverse una celeilalte. Prin urmare, mulțimile finite A_n și $S_n \setminus A_n$ au același număr de elemente, adică $n!/2$. \square

Ca o primă consecință a acestei teoreme să observăm ca orice transpoziție este permutare impară. Într-adevăr, pentru $1 \leq i < j \leq n$ se poate verifica ușor că

$$(i\ j) = (1\ i)(2\ j)(1\ 2)(2\ j)(1\ i),$$

și folosind faptul că sgn este morfism de grupuri obținem că

$$\text{sgn}((i\ j)) = \text{sgn}((1\ i))^2 \text{sgn}((2\ j))^2 \text{sgn}((1\ 2)) = -1.$$

Am văzut în demonstrația Corolarului 1.2.4 că un ciclu de lungime k se scrie ca produs de $k-1$ transpoziții, deci ciclii de lungime pară sunt permutări impare, iar ciclii de lungime impară sunt permutări pare. Prin urmare, pe baza acestei teoreme și folosindu-ne de Teorema 1.2.2, verificarea parității unei permutări $\sigma \in S_n$ se poate face mult mai simplu astfel: descompunem σ în produs de cicli disjuncți folosindu-ne de Algoritmul 1.2.3 și calculăm signatura lui σ făcând produsul signaturilor cicliilor componente. Ca exemplu, pentru permutarea σ din (1) avem

$$\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}((1\ 12\ 8\ 10\ 4)) \text{sgn}((2\ 13)) \text{sgn}((5\ 11\ 7)) \text{sgn}((6\ 9)) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1,$$

adică σ este permutare pară.

1.3. Inelul de polinoame $\mathbb{K}[X]$

Fie \mathbb{K} un corp comutativ. Notăm cu $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mulțimea șirurilor $(a_n)_{n \geq 0}$ cu elemente din \mathbb{K} cu un număr finit de termeni nenuli. Pe $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ definim două operații algebrice: dacă $f = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ și $g = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$, atunci

$$f + g := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) \quad \text{și} \quad f \cdot g := (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots, \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}, \dots).$$

Lăsăm cititorului să verifice că:

Propoziția 1.3.1. *Mulțimea $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ împreună cu operațiile de adunare și înmulțire definite mai sus este un inel comutativ.*

În plus avem că elementul nul al acestui inel este $(0, 0, \dots, 0, \dots)$, iar elementul neutru este $(1, 0, \dots, 0, \dots)$. Menționăm că același rezultat rămâne valabil dacă înlocuim pe \mathbb{K} cu un inel comutativ unitar R . Să observăm că aplicația $s : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ dată prin $s(a) = (a, 0, \dots, 0, \dots)$ este un morfism injectiv de inele (numit și *scufundarea canonică*). Prin urmare putem identifica corpul \mathbb{K} cu imaginea sa $s(\mathbb{K})$ prin acest morfism. În inelul descris mai sus, notăm *convențional* cu X șirul $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ și îl numim **nedeterminată**. Prin convenție, definim $X^0 = 1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)$. Se observă prin calcul că $X^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, unde 1 este precedat de n zerouri. Cu aceste notații, orice element $f = (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ se poate scrie ca o sumă finită

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n,$$

deoarece șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are doar un număr finit de termeni nenuli. Rezultă că pentru orice $f \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ există un număr natural $m(f)$ astfel încât $f = \sum_{i=0}^{m(f)} a_i X^i$. Inelul $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ se notează cu $\mathbb{K}[X]$ și se numește **inelul de polinoame într-o nedeterminată** cu coeficienți în \mathbb{K} . Prin urmare, elementele lui $\mathbb{K}[X]$ se numesc polinoame. Fie $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_{m(f)} X^{m(f)}$ un polinom. Numim **gradul lui f** , și îl notăm cu $\text{grad}(f)$, cel mai mare număr natural k cu $a_k \neq 0$. Prin convenție, definim gradul polinomului nul ca fiind $-\infty$. Dacă $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ are gradul n , atunci a_0, \dots, a_n se numesc **coeficienții** polinomului, iar a_n este **coeficientul dominant** al polinomului. În cazul în care coeficientul dominant al polinomului este 1, polinomul se numește **polinom unitar**.

Propoziția 1.3.2. *Fie \mathbb{K} un corp și $f, g \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Atunci:*

- (a) $\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$.
- (b) $\text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.
- (c) $U(\mathbb{K}[X]) = U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$.

Demonstrație. Fie $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ și $g = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$ polinoame din $\mathbb{K}[X]$ de grade n , respectiv m .

(a) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $n \geq m$. Atunci $f + g = (a_0 + b_0) + \dots + (a_m + b_m) X^m + a_{m+1} X^{m+1} + \dots + a_n X^n$, de unde rezultă imediat concluzia dorită.

(b) Deoarece $\text{grad}(f) = n$ și $\text{grad}(g) = m$ rezultă că $a_n \neq 0$ și $b_m \neq 0$. Prin urmare $a_n b_m \neq 0$. Calculând produsul dintre f și g obținem

$$fg = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k,$$

deci $\text{grad}(fg) = n + m$, conform definiției.

(c) Avem în mod evident incluziunea $U(\mathbb{K}) \subset U(\mathbb{K}[X])$. Pentru a proba incluziunea contrară fie $f \in U(\mathbb{K}[X])$. Rezultă că există $g \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $fg = 1$. Aplicând punctul (b) obținem că

$$0 = \text{grad}(1) = \text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g).$$

Din această egalitate rezultă că $\text{grad}(f) = \text{grad}(g) = 0$. Asta înseamnă că $f, g \in \mathbb{K}^* = U(\mathbb{K})$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Teorema 1.3.3. (Teorema împărțirii cu rest) *Fie \mathbb{K} un corp și fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $g \neq 0$. Atunci există și sunt unice polinoamele $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât*

$$f = qg + r \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(g).$$

Polinoamele q, r se numesc câtul, respectiv restul împărțirii lui f la g .

Demonstrație. Demonstrăm mai întâi existența polinoamelor q și r . Dacă $f = 0$ atunci putem pune $q = 0$ și $r = 0$. Deci, putem presupune că $f \neq 0$ și demonstrăm existența lui q și r prin inducție după $n = \text{grad}(f)$. Cazul $n = 0$ este evident. Fie $m = \text{grad}(g)$. Dacă $n < m$ atunci luăm $q = 0$ și $r = f$. În caz contrar avem că $n \geq m$. Presupunem că $f = a_0 + \dots + a_n X^n$ și $g = b_0 + \dots + b_m X^m$, unde $a_n, b_m \neq 0$. Atunci polinomul $f_1 = f - a_n(b_m)^{-1}X^{n-m}g$ are gradul mai mic strict decât n și are coeficienții în corpul \mathbb{K} . Aplicăm acum ipoteza de inducție și obținem existența polinoamelor $q_1, r_1 \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea că

$$f_1 = q_1 g + r_1 \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g).$$

Punând $q = q_1 + a_n(b_m)^{-1}X^{n-m}$ și $r = r_1$ avem

$$f = qg + r \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(g),$$

ceea ce încheie demonstrația pasului de inducție.

Pentru demonstrarea unicității să presupunem că și q_1, r_1 satisfac condițiile teoremei. Atunci atât $f - q_1 g$ cât și $f - qg$ sunt polinoame de grad mai mic strict decât $m = \text{grad}(g)$. Prin urmare, folosind Propoziția 1.3.2(a), diferența celor două polinoame, i.e. $g(q - q_1)$ are gradul mai mic strict decât m . Dacă $q - q_1 \neq 0$ aplicând Propoziția 1.3.2(b) obținem

$$m > \text{grad}(g(q - q_1)) = \text{grad}(g) + \text{grad}(q - q_1) = m + \text{grad}(q - q_1) \geq m,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. Deci $q = q_1$, ceea ce impică $r = r_1$. \square

O observație importantă este că demonstrarea pasului de inducție reprezintă de fapt algoritmul de împărțire cu rest a două polinoame. O altă consecință a Teoremei împărțirii cu rest este că putem introduce pe $\mathbb{K}[X]$ o relație de divizibilitate, pe care o notăm “|”. Mai precis, pentru $f, g \in \mathbb{K}[X]$ spunem că f **divide** g (sau g este **divizibil** cu f) și scriem $f|g$ dacă și

Demonstrație. Aplicând Propoziția 1.3.5 obținem că $f = b(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$, unde $b \in \mathbb{K}^*$. Prin identificarea coeficienților dominanți obținem că $b = a_n$. Restul relațiilor se obțin prin identificarea celorlalți coeficienți. \square

1.4. Aritmetica lui $\mathbb{K}[X]$

Am văzut în secțiunea anterioară că în inelul $\mathbb{K}[X]$, la fel ca în \mathbb{Z} , funcționează Teorema împărțirii cu rest (vezi Teorema 1.3.3). Acest fapt implică, cu o demonstrație similară cu cea dată în Exemplul 1.1.9 (3), că idealele lui $\mathbb{K}[X]$ sunt generate de un singur polinom. Într-adevăr, dacă I este un ideal nenul al lui $\mathbb{K}[X]$ (idealul nul este generat evident de polinomul nul) considerăm $g \in I \setminus \{0\}$ un polinom de grad minim. Evident $(g) \subset I$. Fie $f \in I$ un polinom arbitrar. Aplicând Teorema 1.3.3, există $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $f = qg + r$ cu $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$. Cum $r = f - qg \in I$ (definiția idealului) rezultă din minimalitatea gradului polinomului g că $r = 0$. Obținem deci $f = qg$, adică $I \subset (g)$. În concluzie, orice ideal al lui $\mathbb{K}[X]$ este generat de un singur polinom. Prin urmare, inelele factor ale lui $\mathbb{K}[X]$ sunt de forma $\mathbb{K}[X]/(f)$, unde $f \in \mathbb{K}[X]$. Tot cu ajutorul Teoremei 1.3.3 putem descrie mai bine elementele acestor inele factor.

Lema 1.4.1. *Fie K un corp și $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Atunci elementele inelului factor $\mathbb{K}[X]/(f)$ se reprezintă unic sub forma $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \pmod{(f)}$ cu $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.*

Demonstrație. Conform definiției inelului factor dată în prima secțiune a acestui capitol, $\mathbb{K}[X]/(f) = \{g \pmod{(f)} \mid g \in \mathbb{K}[X]\}$. Fie $g \in \mathbb{K}[X]$. Aplicăm Teorema 1.3.3 și obținem existența polinoamelor $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $g = qf + r$ și $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$. Rezultă că $g \pmod{(f)} = r \pmod{(f)}$. Prin urmare, clasa de echivalență modulo idealul (f) a unui polinom $g \in \mathbb{K}[X]$ este egală cu clasa de echivalență a unui polinom de grad $< n$. Pentru încheierea demonstrației mai avem de arătat că dacă r, r' sunt două polinoame diferite de grad $< n$ atunci $r \pmod{(f)} \neq r' \pmod{(f)}$. Dacă prin absurd am avea egalitate atunci, din definiția relației de echivalență, am obține că $r - r' = fh$, pentru un $h \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Aplicând acum Propoziția 1.3.2(a) și (b) rezultă

$$n \leq \text{grad}(f) + \text{grad}(h) = \text{grad}(fh) = \text{grad}(r - r') < \max\{\text{grad}(r), \text{grad}(r')\} < n,$$

o contradicție. \square

Fără a intra în detalii, precizăm că relația de divizibilitate introdusă pe $\mathbb{K}[X]$ în secțiunea anterioară are proprietăți similare cu relația de divizibilitate de pe \mathbb{Z} . Mai precis, pentru orice două elemente din $\mathbb{K}[X]$ se definește analog ca în \mathbb{Z} *cel mai mare divizor comun* și *cel mai mic multiplu comun*. Mai exact, polinomul unitar de grad cel mai mare care divide și pe f și pe g este **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g , pe când polinomul unitar de grad minim posibil care este divizibil atât cu f cât și cu g este **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f și g . De asemenea, spunem că două polinoame sunt **relativ prime** dacă polinomul unitar care reprezintă cel mai mare divizor comun este 1, adică are gradul 0.

Pentru calculul celui mai mare divizor comun, la fel ca în \mathbb{Z} , putem folosi varianta polinomială a algoritmului lui Euclid, pe care o prezentăm pe scurt, demonstrația fiind lăsată cititorului.

Algoritm 1.4.2. Fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$ cu $g \neq 0$. Următorul algoritm, numit **algoritmul lui Euclid**, furnizează cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g . Aplicăm succesiv Teorema împărțirii cu rest:

$$f = q_1g + r_1, \quad g = q_2r_1 + r_2, \quad \dots, \quad r_{n-2} = q_nr_{n-1} + r_n, \quad r_{n-1} = q_{n+1}r_n,$$

unde r_n este ultimul rest nenul. Un astfel de r_n există deoarece $\text{grad}(g) > \text{grad}(r_1) > \text{grad}(r_2) > \dots > \text{grad}(r_n)$ este un șir descrescător de numere naturale care nu poate fi infinit. Polinomul unitar egal cu r_n/c , unde c este coeficientul dominant al lui r_n reprezintă cel mai mare divizor comun al lui f și g , vezi Problema 1.5.19 pentru un exemplu. Să mai observăm că înlocuind pe r_{n-1} din ultima relație în penultima relație, etc. obținem la final existența a două polinoame $u, v \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $r_n = uf + vg$. În particular, avem următoarea echivalență: există polinoamele $u, v \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $fu + gv = 1$ dacă și numai dacă $(f, g) = 1$.

În continuare vrem să vedem cine este omologul elementului prim din \mathbb{Z} , în $\mathbb{K}[X]$.

Definiția 1.4.3. Un polinom neconstant (adică de $\text{grad} \geq 1$) $f \in \mathbb{K}[X]$ se numește **polinom ireductibil** dacă f nu se poate scrie ca produs de două polinoame neconstante, altfel spus, singurii divizori ai lui f sunt a și af cu $a \in \mathbb{K}^*$. Un polinom neconstant care nu este ireductibil se numește **polinom reductibil**.

Spre exemplu, polinomul $X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ este un polinom ireductibil, $(X - 1)(X - 2) \in \mathbb{Q}[X]$ este reductibil, iar problema (i)reductibilității constantei -7 nu se pune. În \mathbb{Z} cunoaștem elementele prime, oare putem scrie și polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$? După cum o să vedem, ireductibilitatea unui polinom depinde de corpul în care are coeficienții și prin urmare este imposibil să scriem polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ fără a avea informații precise despre corpul \mathbb{K} . Cu toate acestea, indiferent de cine este corpul \mathbb{K} avem o mulțime clară de polinoame ireductibile și un criteriu general pentru a testa dacă un anumit polinom este sau nu ireductibil.

Lema 1.4.4. Fie K un corp. În $\mathbb{K}[X]$

- (a) polinoamele de gradul 1 sunt ireductibile,
- (b) un polinom de grad 2 sau 3 este ireductibil dacă și numai dacă nu are rădăcini în \mathbb{K} .

Demonstrație. (a) este evidentă. Pentru (b) să observăm că din definiție rezultă că un polinom de grad 2 sau 3 este reductibil dacă și numai dacă este divizibil cu un polinom de gradul 1, adică dacă și numai dacă polinomul are o rădăcină în \mathbb{K} . Negând această echivalență obținem concluzia dorită. \square

De exemplu, $X^2 - 3$ este polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ deoarece nu are rădăcini raționale, dar este reductibil în $\mathbb{R}[X]$ pentru că $X^2 - 3 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$.

Atenție! deseori suntem tentați să folosim (b) sub forma: un polinom din $\mathbb{K}[X]$ este ireductibil dacă și numai dacă nu are rădăcini în \mathbb{K} . Greșit, după cum arată următorul exemplu

simplu: polinomul $(X^2 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$ dar nu are rădăcini în \mathbb{Q} . Cum mai putem caracteriza polinoamele ireductibile?

Lema 1.4.5. *Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom neconstant. Atunci f este ireductibil dacă și numai dacă satisface condiția:*

$$f|gh \text{ cu } f, g \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow f|g \text{ sau } f|h.$$

Demonstrație. Să considerăm mai întâi că f este ireductibil și $f|gh$. Presupunem prin absurd că $f \nmid g$ și $f \nmid h$. Deoarece f este ireductibil (conform definiției are ca divizori doar polinoamele unitare 1 și f) din $f \nmid g$ și $f \nmid h$ rezultă că $(f, g) = 1$ și $(f, h) = 1$. Din algoritmul lui Euclid obținem atunci că există polinoamele $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât au loc relațiile

$$fu_1 + gv_1 = 1 \quad \text{și} \quad fu_2 + hv_2 = 1.$$

Făcând produsul celor două egalități obținem că

$$f(u_1u_2f + u_1hv_2 + u_2gv_1) + gh(v_1v_2) = 1.$$

De aici rezultă că $(f, gh) = 1$, o contradicție cu faptul că $f|gh$.

Reciproc, fie f un polinom neconstant care satisface condiția din enunț și să presupunem prin absurd că f este reductibil. Prin urmare, există $g, h \in \mathbb{K}[X]$ polinoame neconstante astfel încât $f = gh$. În particular $f|gh$. Deoarece g, h sunt polinoame neconstante atunci $\text{grad}(g), \text{grad}(h) < \text{grad}(f)$ ceea ce implică, via Propoziția 1.3.2(b), că $f \nmid g$ și $f \nmid h$, o contradicție. Obținem deci că f este ireductibil. \square

De ce suntem interesați de polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$? Pentru că în \mathbb{Z} cunoașterea elementelor prime implică automat, via faimoasa Teorema a lui Euclid, că orice număr întreg diferit de 0, ± 1 se poate scrie în mod unic ca produs de numere prime. Prin urmare, dacă s-ar păstra analogia cu \mathbb{Z} , atunci și în $\mathbb{K}[X]$ cunoașterea polinoamelor ireductibile ar fi esențială pentru structura elementelor din $\mathbb{K}[X]$. Într-adevăr, următorul rezultat clarifică acest aspect.

Teorema 1.4.6. *Fie \mathbb{K} un corp.*

- (a) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie ca produs de polinoame ireductibile.*
- (b) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie în mod unic sub forma $f = ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s}$, unde $a \in \mathbb{K}^*$, iar g_1, \dots, g_s sunt polinoame ireductibile unitare distincte cu $k_1, \dots, k_s \geq 1$.*
- (c) *Mulțimea polinoamelor unitare ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ este infinită.*

Demonstrație. (a) Să presupunem prin reducere la absurd că există polinoame neconstante care nu se pot scrie ca produs de polinoame ireductibile. Fie h un astfel de polinom de grad minim. Cum h nu este ireductibil, putem scrie, conform definiției, $h = fg$ cu f, g polinoame neconstante, deci de grade strict mai mici decât gradul lui h . Datorită minimalității lui h , polinoamele f și g se pot scrie ca produs de polinoame ireductibile. Dar atunci obținem și că $h = fg$ este produs de polinoame ireductibile, contradicție.

(b) Un polinom ireductibil $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie sub forma ag , unde a este coeficientul dominant al polinomului f , iar g este polinomul unitar ireductibil f/a . Această observație

ne arată că existența descompunerii a fost probată la punctul (a). Demonstrăm unicitatea. Să presupunem că f se poate scrie în afară de forma din enunț și $f = bh_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ cu $b \in \mathbb{K}^*$, $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{K}[X]$ polinoame unitare ireductibile distincte două câte două și $l_1, \dots, l_r \geq 1$. Să observăm că din egalitatea coeficienților dominanți în cele două scrieri obținem că $a = b$, care este coeficientul dominant al lui f . Facem inducție după m , unde $m = k_1 + \cdots + k_s$. Dacă $m = 1$ atunci afirmația este evidentă deoarece f este ireductibil. Presupunem acum că afirmația e adevărată pentru $m - 1$ și o demonstrăm pentru $m > 1$. Cum $g_s | f$ și $f = bh_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ rezultă din Lema 1.4.5 că g_s divide unul dintre polinoamele ireductibile h_1, \dots, h_r , să zicem h_r . Acest fapt implică, deoarece g_s, h_r sunt polinoame unitare ireductibile, că $g_s = h_r$. Din egalitatea $ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s} = ah_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ obținem, prin simplificare cu g_s , că $ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s-1} = ah_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r-1}$. Din ipoteza de inducție rezultă că $s = r$, și după o eventuală renumerotare, $g_i = h_i$ și $k_i = l_i$ pentru $i = 1, \dots, s - 1$, și $k_s - 1 = l_s - 1$, adică $k_s = l_s$.

(c) În cazul în care \mathbb{K} este corp infinit concluzia este imediată deoarece mulțimea polinoamelor ireductibile de forma $X - a$ cu $a \in \mathbb{K}$ este infinită. Fie \mathbb{K} un corp finit și să presupunem prin absurd că mulțimea polinoamelor unitare ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ este finită. Notăm cu f_1, \dots, f_r aceste polinoame unitare ireductibile. Atunci, polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ sunt de forma af_i cu $a \in \mathbb{K}^*$ și $i \in \{1, \dots, r\}$. Fie F polinomul neconstant $f_1 \cdots f_r + 1$. Aplicând (a) rezultă că există $i \in \{1, \dots, r\}$ astfel încât $f_i | F$. Prin urmare, restul împărțirii cu rest a lui F la f_i este 0. Pe de altă parte, ținând cont că $F = f_1 \cdots f_r + 1$ aplicând teorema împărțirii cu rest obținem că $F = (f_1 \cdots f_{i-1}f_{i+1} \cdots f_r)f_i + 1$, deci restul este 1, o contradicție. Așadar, mulțimea polinoamelor unitare ireductibile este infinită. \square

Acest rezultat aduce mai multe informații asupra inelelor factor ale lui $\mathbb{K}[X]$ prin ideale generate de polinoame ireductibile.

Propoziția 1.4.7. *Fie \mathbb{K} un corp și $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom ireductibil. Atunci inelul factor $\mathbb{K}[X]/(f)$ este corp.*

Demonstrație. Am văzut în demonstrația Lemei 1.4.1 că un element nenul din inelul $\mathbb{K}[X]/(f)$ se scrie sub forma $r(\text{mod } (f)) := \hat{r}$ cu $r \in \mathbb{K}[X]$ cu $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$. Prin urmare, r este nedivizibil cu f . Cum f este ireductibil, rezultă din Teorema 1.4.6 că f, r sunt relativ prime, cu alte cuvinte cel mai mare divizor comun al lui f și r este o constantă $c \in \mathbb{K}^*$. Conform algoritmului lui Euclid există polinoamele $f_1, r_1 \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $c = ff_1 + rr_1$. Trecând la clase modulo idealul (f) obținem $\hat{r}\hat{r}_1 = \hat{1}$, adică \hat{r} este inversabil. În concluzie, $\mathbb{K}[X]/(f)$ este corp. \square

Obținem ca un corolar al acestei propoziții Lema lui Kronecker, un rezultat fundamental care va fi folosit în capitolele următoare.

Corolarul 1.4.8. (Lema lui Kronecker) *Fie K un corp și $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad ≥ 1 . Atunci există un corp L care îl conține pe K astfel încât f are o rădăcină în L .*

Demonstrație. Din Teorema 1.4.6 rezultă că putem considera un polinom ireductibil $g \in \mathbb{K}[X]$ care îl divide pe f . Din demonstrația Propoziției 1.4.7 rezultă că morfismul canonic de inele $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}[X]/(g)$, $\phi(a) = \hat{a}$, unde ca mai înainte $\hat{a} = a(\text{mod } (g))$ este un morfism de

corpuri și deci injectiv. Putem astfel să identificăm pe K cu un subcorp al lui $\mathbb{K}[X]/(g)$ prin identificarea fiecărui element $a \in \mathbb{K}$ cu \hat{a} . Prin această identificare polinomul $g = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ se identifică cu $\hat{a}_0 + \hat{a}_1X + \dots + \hat{a}_nX^n$ și atunci

$$g(\hat{X}) = a_0 + a_1\hat{X} + \dots + a_n\hat{X}^n = \hat{a}_0 + \hat{a}_1\hat{X} + \dots + \hat{a}_n\hat{X}^n = \hat{f} = \hat{0}.$$

Deci \hat{X} este o rădăcină a lui g în corpul $\mathbb{K}[X]/(g)$. Deoarece $g|f$ rezultă că \hat{X} este și rădăcină a lui f . \square

Încheiem acest prim capitol de noțiuni preliminare prin enunțarea, fără demonstrație, a unui rezultat esențial al algebrei numit Teorema Fundamentală a Algebrei.

Teorema 1.4.9. (D'Alembert-Gauss) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{C}[X]$ are cel puțin o rădăcină în \mathbb{C} .*

Consecința imediată a acestei teoreme este că polinoamele ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt doar cele de gradul 1. Totodată, din această teoremă putem determina imediat și polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$.

Corolarul 1.4.10. *Polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt polinoamele de gradul 1 și cele de gradul 2 fără rădăcini reale.*

Demonstrație. Prin aplicarea Lemei 1.4.4 rezultă imediat că polinoamele din enunț sunt ireductibile. Fie acum $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad ≥ 3 . Teorema 1.4.9 asigură existența unei rădăcini $\alpha \in \mathbb{C}$ a lui f . Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci f este reductibil în $\mathbb{R}[X]$. Dacă nu, deoarece coeficienții polinomului sunt reali rezultă că și $\bar{\alpha}$, conjugatul complex al lui α , este rădăcină a lui f . Aplicând Propoziția 1.3.5 rezultă că $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ divide pe f în $\mathbb{C}[X]$. Dar cum polinoamele $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ și f aparțin lui $\mathbb{R}[X]$ atunci polinomul $f/(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ aparține tot lui $\mathbb{R}[X]$. Deci, f este reductibil. \square

1.5. Probleme propuse

Problema 1.5.1. Fie A o mulțime. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) A este finită,
- (b) orice funcție injectivă $f : A \rightarrow A$ este bijectivă,
- (c) orice funcție surjectivă $f : A \rightarrow A$ este bijectivă.

Problema 1.5.2. Fie m, n două numere naturale iar A, B două mulțimi având m , respectiv n elemente. Demonstrați că

- (a) Numărul funcțiilor de la A la B este n^m .
- (b) Dacă $m \leq n$ atunci numărul funcțiilor injective de la A la B este $n!/(n - m)!$.
- (c) Dacă $m \geq n$ atunci numărul funcțiilor surjective de la A la B este

$$n^m - C_n^1(n - 1)^m + C_n^2(n - 2)^m - \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Problema 1.5.3. Care dintre următoarele relații binare pe \mathbb{R} este relație de echivalență:

- (a) $x \sim y$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$; (b) $x \equiv y$ dacă $|x - y| < 3$; (c) $x \circ y$ dacă $x + y \in \mathbb{Z}$?

Problema 1.5.4. Pe mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} definim relația binară: $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Arătați că \sim este relație de echivalență, determinați clasele de echivalență și un sistem complet de reprezentanți.

Problema 1.5.5. Pe mulțimea numerelor complexe \mathbb{C} definim relația binară: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}$. Arătați că \sim este relație de echivalență, determinați clasele de echivalență și un sistem complet de reprezentanți.

Problema 1.5.6. Fie \sim relația binară pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită prin $(a, b) \sim (c, d)$ dacă $a + d = b + c$. Arătați că \sim este o relație de echivalență și că mulțimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ se află în bijecție cu mulțimea \mathbb{Z} .

Problema 1.5.7. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe \mathbb{Z} definim operația $x * y = axy + b(x + y) + c$. Arătați că operația $*$ este asociativă dacă și numai dacă $b = b^2 - ac$. Arătați că operația $*$ are element neutru dacă și numai dacă $b = b^2 - ac$ și $b|c$.

Problema 1.5.8. Arătați că singurul morfism de grupuri $(\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ este cel nul.

Problema 1.5.9. Arătați că grupurile $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) sunt două câte două neizomorfe.

Problema 1.5.10. Fie $\mathbb{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Să se arate că \mathbb{H} este un corp necomutativ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Arătați că polinomul $X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$ are o infinitate de rădăcini în \mathbb{H} .

Problema 1.5.11. Să se arate că orice inel integru finit este corp (inelul nu trebuie să fie neapărat comutativ).

Problema 1.5.12. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se arate că mulțimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{x} \mid 1 \leq x \leq n-1, (x, n) = 1\}$, unde prin \hat{x} am notat clasa de echivalență $x(\bmod n)$. Deduceți apoi că \mathbb{Z}_n este corp dacă și numai dacă n e prim.

Problema 1.5.13. Fie $\mathbb{K} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ mulțimea matricelor de forma

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

Să se arate că \mathbb{K} este un corp comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea obișnuită a matricelor. Generalizare!

Indicație! Înlocuiți pe 7 cu un număr prim p astfel încât $p \equiv 3(\bmod 4)$.

Problema 1.5.14. Să se arate că nu există un izomorfism de corpuri, i.e. morfism de corpuri bijectiv, între corpurile $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ și $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Problema 1.5.15. Arătați că dacă A și B sunt două mulțimi finite cu același număr de elemente, atunci grupurile S_A și S_B sunt izomorfe.

Problema 1.5.16. Fie $\sigma, \tau \in S_{15}$ următoarele permutări

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 2 & 15 & 14 & 10 & 6 & 12 & 3 & 4 & 1 & 7 & 9 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 9 & 10 & 2 & 12 & 6 & 5 & 11 & 15 & 3 & 8 & 7 & 4 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Calculați și apoi descompuneți în produs de cicli disjuncți fiecare din următoarele permutări: $\sigma, \tau, \sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma$ și $\sigma^2\tau$. Pentru fiecare din permutările anterioare calculați ordinul și signatura.

Problema 1.5.17. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \in S_{11}$.

- (1) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți.
- (2) Descompuneți σ în produs de transpoziții.
- (3) Calculați $\text{sgn}(\sigma)$ și $\text{ord}(\sigma)$.
- (4) Există permutări de ordin 35 în S_{11} ?
- (5) Rezolvați ecuația $\tau^{2011} = \sigma$ în S_{11} .

Problema 1.5.18. Arătați că grupul S_n este generat de: (a) transpozițiile $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$; (b) transpozițiile $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n)$; (c) transpoziția $(1\ 2)$ și n -ciclul $(1\ 2\ \dots\ n)$.

Problema 1.5.19. (a) Calculați toate ordinele posibile ale permutărilor din S_5 și dați câte un exemplu de permutare pentru fiecare ordin posibil.

(b) Dacă $\tau = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$ determinați dacă există un n -ciclul σ ($n \geq 10$) cu $\tau = \sigma^k$ pentru un anumit întreg k .

(c) Dacă $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ determinați dacă există un n -ciclul σ ($n \geq 5$) cu $\tau = \sigma^k$ pentru un anumit întreg k .

Problema 1.5.20. Calculați cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^4 - 2X^3 + 1$ și $X^3 - 2X^2 + 1$ în inelul $\mathbb{R}[X]$ și scrieți-l apoi în funcție de cele două polinoame.

Problema 1.5.21. Descompuneți polinomul $X^n - 1$, $1 \leq n \leq 6$, în produs de polinoame ireductibile în $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.

Problema 1.5.22. În ce caz este polinomul $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2} \in \mathbb{R}[X]$ divizibil cu $X^4 + X^2 + 1$?

Problema 1.5.23. Dacă α, β sunt rădăcinile reale ale polinomului $X^2 - 6X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci pentru orice număr natural n , $\alpha^n + \beta^n$ este un număr întreg, nedivizibil cu 5.

Problema 1.5.24. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ și $d = (a, b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor a și b . Arătați că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^a - 1$ și $X^b - 1$ în $\mathbb{K}[X]$, unde \mathbb{K} este un corp, este $X^d - 1$.

CAPITOLUL 2

Calcul matriceal

În acest capitol prezentăm noțiunile de matrice și determinant precum și o sinteză a rezultatelor referitoare la acestea. În Secțiunea 2.1 ne ocupăm de matrice, operații cu matrice. Secțiunea 2.2 este dedicată determinantilor, proprietăților și metodelor de calcul ale acestora. În Secțiunea 2.3 definim rangul unei matrice și ne ocupăm de clasa matricelor inversabile. Se prezintă pe scurt maniera de determinare a inversei unei matrice folosind matricea adjuncată, metodă studiată în ciclul liceal. Un paragraf al acestei secțiuni este dedicat transformărilor elementare ale liniilor unei matrice. Aceste transformări își evidențiază utilitatea în determinarea rangului unei matrice, a inversei unei matrice nesingulare, dar și în rezolvarea sistemelor algebrice liniare. Propunem și o metodă de lucru cu matrice partiționate în matrice ”mai mici”, numite blocuri. În Secțiunea 2.5 ne ocupăm de studiul sistemelor de ecuații algebrice de gradul întâi cu mai multe necunoscute, omogene și neomogene, numite și sisteme liniare. Întrebuințarea cuvântului ”liniar” pentru a arăta că o anumită expresie este de gradul întâi provine din Geometrie Analitică, unde ecuația unei linii drepte este de gradul întâi în raport cu coordonatele x, y . Pentru un sistem de ecuații liniare vom pune în evidență condiții de compatibilitate și vom prezenta metoda eliminării Gauss-Jordan de determinare a soluțiilor. În finalul capitolului propunem un set de probleme, aplicații la întregul material teoretic prezentat anterior.

2.1. Matrice

Definiția 2.1.1. Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corpul comutativ al numerelor reale, \mathbb{R} , sau cel al numerelor complexe, \mathbb{C} . Se numește **matrice de tipul** (m, n) cu elemente din \mathbb{K} o aplicație

$$f : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad f(i, j) = a_{ij},$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Vom nota matricea A sub forma unui tablou ce conține valorile funcției f :

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau, pe scurt,

$$(5) \quad A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

2. CALCUL MATRICEAL

Datorită notației (4) vom spune că matricea A are m linii și n coloane. Sistemul ordonat de elemente $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ se numește **linia i** , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, iar sistemul ordonat de elemente $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ se numește **coloana j** , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a matricei A .

O matrice de tipul $(1, n)$ se numește **matrice linie** și este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

O matrice de tipul $(m, 1)$ se numește **matrice coloană** și este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

În cazul $n = m$ se obține **matricea pătratică de ordin n**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

În această situație, sistemul ordonat $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ se numește **diagonala principală**, iar sistemul ordonat de elemente $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ se numește **diagonala secundară** a matricei A .

Vom nota $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având elementele în \mathbb{K} , mulțimea matricelor pătratice de ordin n se va nota $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ iar elementele acestor mulțimi le vom nota fie prin A, B, \dots , fie prin A_1, A_2, \dots . Evident au loc incluziunile $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Definiția 2.1.2. Două matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, se numesc **egale** dacă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru toți $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

2.1.1. Operații cu matrice.

Definiția 2.1.3. Fie matricele $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ și $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Prin **suma lor** înțelegem matricea $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dată prin

$$(6) \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Teorema 2.1.4. Mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ înzestrată cu operația de adunare are structură de grup aditiv abelian.

Demonstrație.

1) Adunarea este **asociativă**, adică oricare ar fi matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ avem

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad (A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

și, analog găsim $A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Proprietatea rezultă evident din asociativitatea operației de adunare în corpul \mathbb{K} .

2) Adunarea admite **element neutru** care este matricea ale cărei elemente sunt toate egale cu 0, notată $0_{m,n}$ sau $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$ și numită **matricea nulă**. Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ are loc $A + 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})} + A = A$, proprietate a cărei verificare este evidentă.

3) Pentru orice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ există matricea $-A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, numită **opusa** matricei A , astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = 0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$. Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ atunci matricea $-A = (-a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ satisface proprietatea enunțată.

4) Adunarea este **comutativă**, adică oricare ar fi matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ avem $A + B = B + A$, afirmație ce rezultă evident din comutativitatea adunării în corpul \mathbb{K} . \square

Observația 2.1.5. Dacă A și $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ atunci suma $A + (-B)$ se notează $A - B$ și se numește **diferența** matricelor A și B . Operația care asociază matricelor A și B diferența lor se numește **scădere**.

Exemplul 2.1.6. Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad -A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiția 2.1.7. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice de tipul (m, n) și $B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}}$ o matrice de tipul (n, p) . Numim **produsul** matricelor A și B , matricea $A \cdot B$ de tip (m, p) dată prin

$$(7) \quad A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}.$$

Elementul matricei $A \cdot B$ care figurează în linia i și coloana k este egal cu suma termenilor care se obțin înmulțind elementele liniei i a matricei A cu elementele corespunzătoare ale coloanei j a matricei B (lui a_{i1} îi corespunde b_{1k} , lui a_{i2} îi corespunde b_{2k} ... lui a_{in} îi corespunde b_{nk}).

Exemplul 2.1.8. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. CALCUL MATRICEAL

Are sens să efectuăm produsul $C = A \cdot B$, care va fi o matrice de tipul $(2, 2)$ și ale căror elemente c_{ij} , $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, 2}$ se obțin astfel

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = 0, & c_{12} &= 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -3, \\ c_{21} &= (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -10, & c_{22} &= (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 12. \end{aligned}$$

Deci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1.9. *Au loc următoarele proprietăți:*

- 1) *Înmulțirea matricelor este asociativă, adică oricare ar fi matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ are loc $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.*
- 2) *Înmulțirea matricelor este distributivă la stânga față de adunare, adică oricare ar fi matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ are loc $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.*
- 3) *Înmulțirea matricelor este distributivă la dreapta față de adunare, adică oricare ar fi matricele $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ are loc $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.*

Demonstrație.

- 1) Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}}$, $C = (c_{kl})_{\substack{k=\overline{1,p} \\ l=\overline{1,q}}}$. Avem

$$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}} \cdot (c_{kl})_{\substack{k=\overline{1,p} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right) \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{j=\overline{1,n} \\ l=\overline{1,q}}} = A \cdot (B \cdot C). \end{aligned}$$

- 2) Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}}$, $C = (c_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}}$ și notăm

$$A \cdot (B + C) = D, \quad A \cdot B = D', \quad A \cdot C = D'',$$

$$D = (d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}, \quad D' = (d'_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}, \quad D'' = (d''_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$$

atunci

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} c_{jk} = d'_{ik} + d''_{ik}.$$

- 3) Justificarea acestei proprietăți este asemănătoare cu cea de la 2. și o propunem cititorului ca exercițiu. □

În cazul matricelor pătrate are loc următorul rezultat

Teorema 2.1.10. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ are structură de monoid.

Demonstrație. Având în vedere Proprietatea 1 din Teorema 2.1.9, este suficient să mai arătăm că în mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ există un **element neutru** la înmulțire.

Într-adevăr matricea

$$(8) \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

sau $I_n = (\delta_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}}$, unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

sunt simbolurile lui Kronecker, are proprietatea că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ are loc

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci

$$A \cdot I_n = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = A.$$

În mod analog se arată că $I_n \cdot A = A$.

I_n se numește **matricea unitate** de ordinul n . □

Teorema 2.1.11. *Mulțimea $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ este inel cu element unitate.*

Demonstrație. Afirmatia rezultă evident din Teoremele 2.1.4, 2.1.9 și 2.1.10. □

Observația 2.1.12. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deși au sens produsele $A \cdot B$ și $B \cdot A$, în general, $A \cdot B \neq B \cdot A$, adică *înmulțirea matricelor nu este comutativă*.

Exemplul 2.1.13. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observația 2.1.14. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ putem defini succesiv matricele $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$, \dots , $A^k = A^{k-1} \cdot A$.

Exemplul 2.1.15. Fie

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Să calculăm matricea A^k ($k \geq 1$). Putem scrie evident

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & -2 \sin \varphi \cos \varphi \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

iar prin inducție matematică rezultă

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}.$$

Definiția 2.1.16. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ și $\lambda \in \mathbb{K}$. Numim **produs al matricei** A cu scalarul λ , matricea $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ definită prin

$$(9) \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}.$$

Exemplul 2.1.17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci $iA = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Teorema 2.1.18. Înmulțirea cu scalari are următoarele proprietăți:

- 1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
- 2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
- 3) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
- 4) $1A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Verificarea acestor proprietăți este imediată și o propunem cititorului ca exercițiu.

Definiția 2.1.19. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. **Transpusa matricei** A este matricea

$$(10) \quad A^T = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Exemplul 2.1.20. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

Atunci

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}).$$

Se observă că A^T se obține luând liniile matricei A (respectiv coloanele lui A) drept coloane (respectiv linii) în A^T .

Operația de transpunere a unei matrice are următoarele proprietăți ce se verifică fără nicio dificultate:

- 1) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
- 2) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- 3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

2.2. Determinanți

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice pătratică.

Definiția 2.2.1. Numim **determinant** al matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elementul notat $\det(A) \in \mathbb{K}$ dat de

$$(11) \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

unde S_n este mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, iar $\varepsilon(\sigma)$ este signatura permutării σ .

Determinantul matricei A se notează

$$(12) \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Observațiile 2.2.2. 1) Noțiunea de determinant al unei matrice are sens doar pentru matrice pătratice.

2) Matricea este o funcție cu valori în corpul comutativ \mathbb{K} real sau complex, în timp ce determinantul unei matrice este un element din \mathbb{K} , adică un număr real sau complex.

3) În suma din formula (11) sunt $n!$ termeni, numărul produselor de forma $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$ înzestrate cu semnul $+$ este egal cu cel al produselor de aceeași formă înzestrate cu semnul $-$.

4) Definiția 2.2.1 se aplică și matricelor de ordin 1, când $A = (a_{11})$ și $\det(A) = a_{11}$.

2.2.1. Proprietățile determinantilor.

Propoziția 2.2.3. *Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.*

$$(13) \quad \det(A) = \det(A^T) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice arbitrară și fie $A^T = (a_{ji})_{j,i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ transpusa ei. Avem

$$(14) \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

$$(15) \quad \det(A^T) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \dots a_{\tau(n)n}.$$

Să notăm $\sigma(i) = k_i$. Atunci $i = \sigma^{-1}(k_i)$ și

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1} a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2} \dots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}.$$

Deoarece $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ și numerele k_1, k_2, \dots, k_n sunt numerele $1, 2, \dots, n$, eventual într-o altă ordine, iar înmulțirea este comutativă, rezultă

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Prin urmare orice termen al sumei (14) se regăsește ca termen în suma (15) și invers. Deci $\det(A) = \det(A^T)$. \square

Observația 2.2.4. Propoziția 2.2.3 arată că dacă o proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată atunci ea rămâne adevărată și pentru coloanele determinantului.

Propoziția 2.2.5. *Dacă toate elementele unei linii (coloane) ale unei matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ și să presupunem că toate elementele de pe linia i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sunt nule. Fiecare termen din suma ce definește valoarea determinantului este un produs ce conține un element de pe linia i , deci acest termen este zero. \square

Propoziția 2.2.6. *Dacă într-o matrice schimbăm două linii (coloane) între ele atunci determinantul matricei astfel obținute este egal cu opusul determinantului matricei inițiale.*

Demonstrație. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Prin schimbarea liniilor i și j între ele obținem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

al cărei determinant este $\det(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)}$.

Fie transpoziția $\tau = (i, j)$; $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k \quad \forall k \neq i, j$.

Pentru că $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, obținem succesiv

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \dots a_{j(\sigma\tau)(j)} \dots a_{i(\sigma\tau)(i)} \dots a_{n(\sigma\tau)(n)} = \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \dots a_{i(\sigma\tau)(i)} \dots a_{j(\sigma\tau)(j)} \dots a_{n(\sigma\tau)(n)}. \end{aligned}$$

Când σ parcurge toate permutările grupului S_n , $\sigma\tau$ parcurge toate permutările lui S_n și notând $\sigma\tau = \pi$, rezultă

$$\det(A') = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)},$$

de unde concluzia. □

Propoziția 2.2.7. *Dacă o matrice are două linii (coloane) identice atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ o matrice pătratică în care liniile k și l sunt identice, adică $a_{kj} = a_{lj}$ pentru toți $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prin urmare, schimbând liniile k și l între ele obținem matricea $A' = A$. Pe de altă parte, conform Propoziției 2.2.6 avem $\det(A') = -\det(A)$ și deci $\det(A) = -\det(A)$. Prin urmare $\det(A) = 0$. □

Propoziția 2.2.8. *Dacă elementele unei linii (coloane) ale unei matrice se înmulțesc cu un scalar λ , atunci determinantul matricei astfel obținute este egal cu λ înmulțit cu determinantul matricei inițiale.*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică și fie $A' = (a'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea care se obține din A prin înmulțirea liniei k cu scalarul λ . Deci pentru toți $j = \overline{1,n}$ avem $a'_{kj} = \lambda a_{kj}$ și $a'_{ij} = a_{ij} \quad \forall i \neq k$. Atunci

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a'_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (\lambda a_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \lambda \det(A). \end{aligned}$$

□

Propoziția 2.2.9. *Dacă două linii (coloane) ale unei matrice au elementele proporționale atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Afirmatia rezultă cu ușurință prin aplicarea succesivă a Propozițiilor 2.2.8 și 2.2.7. □

Propoziția 2.2.10. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică. Dacă elementele liniei k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sunt sume de câte doi termeni, $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$, $\forall j = \overline{1,n}$ și A' (respectiv A'') este matricea care se obține din A înlocuind elementele liniei k cu a'_{kj} (respectiv a''_{kj}), atunci $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.*

Demonstrație. Au loc:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots (a'_{k\sigma(k)} + a''_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \\ &+ \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a''_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A') + \det(A''). \end{aligned}$$

□

Definiția 2.2.11. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică. Spunem că linia i este **combinație liniară** a celorlalte linii, dacă există scalarii $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ astfel încât, pentru toți $j = \overline{1,n}$, să avem*

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots + \lambda_{i-1} a_{i-1,j} + \lambda_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + \lambda_n a_{nj}.$$

O definiție analoagă are loc și pentru o coloană, combinație liniară a celorlalte coloane.

Propoziția 2.2.12. *Dacă o linie (coloană) a unei matrice este combinație liniară a celorlalte linii (coloane) atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstrație. Aplicând Propoziția 2.2.10, determinantul matricei date este sumă de determinanți cu câte două linii proporționale. Se aplică apoi Propoziția 2.2.9. □

Propoziția 2.2.13. *Dacă la o linie (coloană) a unei matrice adunăm elementele altei linii (coloane), înmulțite, eventual, cu un același scalar nenul, atunci matricea obținută are același determinant cu matricea inițială.*

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ și fie $A' = (a'_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea care se obține din A prin adunarea la linia i a liniei k înmulțită cu scalarul λ .

$$a'_{ij} = a_{ij} + \lambda a_{kj}, \quad a'_{lj} = a_{lj}, \quad l \neq i; \quad j = \overline{1,n}.$$

Din Propoziția 2.2.10, determinantul matricei A' este suma dintre determinantul matricei A și determinantul unei matrice cu două linii proporționale. Acesta din urmă este nul, conform Propoziției 2.2.9. \square

2.2.2. Calculul determinantilor. În cazul determinantilor de ordin doi calculul se face conform relației:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

În cazul determinantilor de ordin trei calculul se face conform relației:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul determinantilor de ordin mai mare sau egal cu patru se aplică regula lui Laplace pe care o ilustrăm în continuare.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice pătratică și $1 \leq p \leq n$, un număr natural.

Definiția 2.2.14. *Numim minor de ordinul p al matricei A determinantul matricei de ordinul p format cu elementele situate la intersecția a p linii și p coloane ale matricei A .*

Dacă $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ și $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ sunt p linii și respectiv p coloane ale matricei A , atunci minorul corespunzător este

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \dots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Definiția 2.2.15. *Numim minor complementar al minorului M de ordin p al matricei A determinantul M_c de ordinul $n - p$ al matricei extrase din A prin suprimarea celor p linii și p coloane corespunzătoare lui M .*

Minorii de ordinul 1 ai matricii A sunt elementele sale, a_{ij} . Minorii complementari ai acestora sunt determinanți de ordinul $n - 1$.

Definiția 2.2.16. Numim **complement algebric** al minorului M al matricei A elementul din \mathbb{K} definit de $C = (-1)^s M_c$, unde $s = (i_1 + i_2 + \dots + i_p) + (j_1 + j_2 + \dots + j_p)$, adică suma indicilor liniilor și coloanelor matricei A utilizate în M .

Determinantul matricei pătratice de ordinul $n - 1$ care se obține din A prin suprimarea liniei i și coloanei j se numește **minorul complementar al elementului** a_{ij} și se notează cu M_{ij} . Numărul $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numește **complementul algebric al elementului** a_{ij} .

Teorema 2.2.17. (Teorema lui Laplace) Determinantul matricei A este egal cu suma produselor minorilor de ordinul p ce se pot construi cu elementele a p linii (coloane) fixate ale matricei A prin complementii lor algebrici. \square

În particular, pentru $p = 1$, rezultă că oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$(16) \quad \det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

numită **regula de dezvoltare a determinantului matricei A după linia i** .

Corolarul 2.2.18. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pentru orice $j \neq i$ are loc egalitatea

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0.$$

Demonstrație. Fie

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea care se obține din A prin înlocuirea liniei j cu linia i . Deoarece A' are două linii egale, conform Propoziției 2.2.7, rezultă $\det(A') = 0$. Pe de altă parte, dezvoltând determinantul matricei A' după linia j , obținem $\det(A') = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn}$. \square

În mod asemănător, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$(17) \quad \det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj},$$

numită **regula de dezvoltare a determinantului matricei A după coloana j** , precum și următorul rezultat:

Corolarul 2.2.19. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pentru orice $i \neq j$ are loc egalitatea

$$a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \dots + a_{nj}C_{ni} = 0.$$

Exemplul 2.2.20. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

folosind regula lui Laplace prin dezvoltare după primele două linii.

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \\
 &\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1+2+4} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \\
 &\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+1+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \\
 &\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5.
 \end{aligned}$$

Exemplul 2.2.21. Să se calculeze valoarea determinantului de mai sus folosind dezvoltarea după prima linie.

$$\begin{aligned}
 D &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \\
 &2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5.
 \end{aligned}$$

Procedura recomandată pentru a calcula în mod expeditiv un determinant:

1. Utilizând Propoziția 2.2.13, se încearcă să se obțină pe o anumită linie (coloană) cât mai multe elemente egale cu zero.
2. Se scrie dezvoltarea determinantului după elementele liniei (coloanei) obținute după transformările de la punctul 1.

Exemplificăm acest procedeu pentru a calcula determinantul de mai sus, prin dezvoltarea după prima linie, după ce pe aceasta obținem cât mai multe zerouri.

Coloana 1 o înmulțim cu -1 și o adunăm la coloana 2, coloana 1 o înmulțim cu -2 și o adunăm la coloana 3, coloana 1 o înmulțim cu -3 și o adunăm la coloana 4. Dezvoltăm acum după prima linie și obținem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ -1 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -5.$$

Exemplul 2.2.22. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ab & bc & ca \\ a & b & c \\ \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad abc \neq 0.$$

$$\text{Avem } D = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} - \frac{1}{b} & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \end{vmatrix} =$$

$$abc(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{bc} & -\frac{1}{ab} \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{bc} & -\frac{1}{ab} \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c) \left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} \right) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

Teorema 2.2.23. *Determinantul produsului a două matrice A și B este egal cu produsul determinantilor celor două matrice, adică*

$$(18) \quad \det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B = (b_{jk})_{j,k=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ și fie matricea produs $C = AB = (c_{ik})_{i,k=\overline{1,n}}$,

$$(19) \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

Construim matricea pătratică de ordinul $2n$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dezvoltăm determinantul matricei P , folosind Teorema lui Laplace 2.2.17, după primele n linii și obținem $\det(P) = \det(A) \det(B)$.

Pe de altă parte, matricea P poate fi transformată, fără a modifica valoarea determinantului ei, folosind proprietățile determinantilor, încât la intersecția ultimelor n linii și n coloane să obținem zerouri. Pentru aceasta este suficient ca la elementele coloanei $n+k$ să adunăm elementele corespunzătoare ale primelor n coloane înmulțite respectiv cu b_{1k} , b_{2k} , \dots , b_{nk} , pentru $k = \overline{1, n}$. Ținând seama de (19), matricea P devine

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dezvoltăm determinantul matricei Q , folosind Teorema lui Laplace, după ultimele n linii și obținem $\det(Q) = (-1)^{2n(n+1)} \det(C) = \det(C)$. Cum $\det(P) = \det(Q)$, deducem că $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. \square

2.3. Rangul unei matrice. Tipuri speciale de matrice

Definiția 2.3.1. Matricea nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ are **rangul** r dacă există în A cel puțin un minor de ordinul r diferit de zero și toți minorii de ordin mai mare decât r , dacă există, sunt egali cu zero. Notăm $\text{rang}(A) = r$.

Pentru matricea nulă, convenim ca $\text{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Teorema 2.3.2. O matrice nenulă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ are rangul r dacă și numai dacă există un minor de ordinul r diferit de zero și toți minorii de ordin $r + 1$, dacă există, sunt egali cu zero.

Demonstrație. Necesitatea este consecință evidentă a Definiției 2.3.1. Să admitem acum că există un minor de ordinul r diferit de zero și că toți minorii de ordin $r + 1$ sunt nuli. Atunci toți minorii de ordin $r + 2$ sunt nuli. Într-adevăr dezvoltând un minor de ordin $r + 2$ după elementele unei linii (coloane) obținem o sumă de produse iar în fiecare produs apare ca factor un minor de ordin $r + 1$. Asemănător, rezultă că toți minorii de $r + 3$, $r + 4$, \dots , câți există, sunt egali cu zero, deci rangul matricei este r . \square

Lema 2.3.3. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Orice minor de ordin k , $1 \leq k \leq \min\{m, p\}$ al matricei produs $A \cdot B$ se poate scrie ca o combinație liniară de minori de ordin k ai uneia dintre matricele A sau B . \square

Teorema 2.3.4. Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal decât rangul fiecărei matrice.

Demonstrație. Concluzia rezultă cu ușurință din Lema 2.3.3 observând că, dacă toți minorii de un anumit ordin k , ai matricei A sau B sunt nuli, atunci toți minorii de același ordin k ai matricei $A \cdot B$ sunt, de asemenea, nuli. \square

În continuare punem în evidență câteva tipuri de matrice importante pentru parcurgerea materialului teoretic ce va urma.

Definiția 2.3.5. Orice matrice pătratică de tipul

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \dots, n$, se numește **matrice diagonală**.

O matrice pătratică care are toate elementele de sub diagonală principală egale cu zero, se numește **matrice superior triunghiulară** iar dacă toate elementele de deasupra diagonalei principale sunt nule atunci spunem că matricea este **inferior triunghiulară**. Determinantul unei matrice triunghiulară este evident egal cu produsul elementelor de pe diagonală principală.

Definiția 2.3.6. Spunem că matricea pătratică A este **simetrică** dacă $A^T = A$. Spunem că matricea pătratică A este **antisimetrică** dacă $A^T = -A$.

Observația 2.3.7. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este antisimetrică, atunci $a_{ji} = -a_{ij}$ oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pentru $i = j$ obținem $a_{ii} = -a_{ii}$ și deci $a_{ii} = 0$ pentru toți $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Rezultă că o matrice antisimetrică are toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero.

Exemplul 2.3.8. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice antisimetrică. Dacă n este număr impar, atunci $\det(A) = 0$.

Într-adevăr, avem $A^T = -A$. Din Propozițiile 2.2.3 și 2.2.8 rezultă $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Dar n este impar și deci $\det(A) = 0$.

Definiția 2.3.9. Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este **ortogonală** dacă

$$(20) \quad A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n.$$

Notăm $\mathcal{O}(n)$ mulțimea matricelor de ordin n care sunt ortogonale.

Exemplul 2.3.10. Matricea A din Exemplul 2.1.15 este ortogonală. În Geometria Analitică această matrice reprezintă matricea schimbării de coordonate la o rotație în plan, de unghi φ .

2.3.1. Matrice inversabilă.

Definiția 2.3.11. O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ al cărei determinant este diferit de zero se numește **nesingulară**. Dacă $\det(A) = 0$ spunem că matricea A este **singulară**.

Definiția 2.3.12. Spunem că matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este **inversabilă** dacă există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât

$$(21) \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Definiția 2.3.13. Matricea A^{-1} se numește **inversa** matricei A .

Teorema 2.3.14. Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.

Demonstrație. Fie A o matrice pătratică de ordin n . Să presupunem că există două matrice de ordin n , B și B' astfel încât

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad \text{și} \quad A \cdot B' = B' \cdot A = I_n.$$

Folosind asociativitatea înmulțirii matricelor obținem

$$B' = B' \cdot I_n = B' \cdot (A \cdot B) = (B' \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B.$$

□

Notăm $GL_n(\mathbb{K})$ mulțimea matricelor pătratice de ordin n care sunt inversabile. Din Teorema 2.1.10 deducem:

Teorema 2.3.15. Mulțimea $GL_n(\mathbb{K})$ înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor are structură de grup necomutativ.

Demonstrație. Să observăm că produsul dintre două matrice inversabile este matrice inversabilă: dacă $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ atunci putem scrie $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$ și deci

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Evident $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ cu $I_n^{-1} = I_n$. Dacă $A \in GL_n(\mathbb{K})$ atunci există A^{-1} și $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ cu $(A^{-1})^{-1} = A$. \square

$GL_n(\mathbb{R})$ se numește **n-grupul liniar general real**, iar $GL_n(\mathbb{C})$ este numit **n-grupul liniar general complex**.

$$GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*.$$

Teorema 2.3.16. *Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este inversabilă dacă și numai dacă este nesingulară, adică $\det(A) \neq 0$.*

Demonstrație. Dacă A este inversabilă atunci, conform Teoremei 2.2.23 avem $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ și deci $\det(A) \neq 0$. Reciproc, dacă A este nesingulară, demonstrăm că ea este inversabilă, construind efectiv inversa ei după cum urmează.

Construim mai întâi matricea A^* numită **adjuncta** sau **reciproca** matricei A , înlocuind fiecare element al matricei A^T prin complementul său algebric. Adică, elementul liniei i și coloanei j din A^* este complementul algebric al elementului a_{ji} din matricea A . Mai precis putem scrie $A^* = (a_{ij}^*)_{i,j=\overline{1,n}}$, cu $a_{ij}^* = C_{ji}$. Calculăm produsele $A \cdot A^*$ și $A^* \cdot A$. Folosind formula de dezvoltare a unui determinant după o linie (16) și Corolarul 2.2.18 obținem

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix},$$

unde $d = \det(A)$. Împartim prin d egalitățile de mai sus și rezultă

$$A \cdot \left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right) \cdot A = I_n,$$

fapt ce demonstrează că A este inversabilă și

$$(22) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*.$$

\square

Exemplul 2.3.17. Să calculăm inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(A) = -4$ deci A este inversabilă. Calculăm

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

unde

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{s.a.m.d.}$$

Obținem

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Propoziția 2.3.18. *Mulțimea matricelor ortogonale $(\mathcal{O}(n), \cdot)$ este subgrup în mulțimea matricelor inversabile $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$.*

Demonstrație. Dacă matricea $A \in \mathcal{O}(n)$ atunci $\det(A) = \pm 1$. Într-adevăr, din Teorema 2.2.23 și Propoziția 2.2.3 deducem $(\det(A))^2 = 1$ de unde afirmația. Deci matricea A este inversabilă și din Definiția 2.3.9 rezultă $A^{-1} = A^T$.

Fie $A, B \in \mathcal{O}(n)$. Avem $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = I_n$ și deci $A, B \in \mathcal{O}(n)$. Pentru $A \in \mathcal{O}(n)$ avem evident $A^T \in \mathcal{O}(n)$ și deci $A^{-1} \in \mathcal{O}(n)$, fapt ce încheie demonstrația afirmației din enunț. \square

$\mathcal{O}(n)$ se numește **n-grupul ortogonal**.

Considerăm mulțimea

$$\mathcal{SO}(n) = \{ A \in \mathcal{O}(n); \det(A) = +1 \}.$$

Propoziția 2.3.19. *$(\mathcal{SO}(n), \cdot)$ este subgrup în mulțimea matricelor ortogonale $(\mathcal{O}(n), \cdot)$.*

Demonstrație. Un calcul elementar arată că $\mathcal{SO}(n)$ este parte stabilă la înmulțirea matricelor. Fie $A \in \mathcal{SO}(n)$. Deoarece $A^{-1} = A^T$ rezultă $\det(A^{-1}) = \det(A^T) = \det(A) = +1$ deci $A^{-1} \in \mathcal{SO}(n)$. \square

$\mathcal{SO}(n)$ se numește **n-grupul ortogonal special**.

Observația 2.3.20. Mulțimea

$$\mathcal{O}^-(n) = \{ A \in \mathcal{O}(n); \det(A) = -1 \}$$

nu este parte stabilă la înmulțirea matricelor. Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{O}^-(n)$ atunci $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = (-1) \cdot (-1) = +1$.

Exemplul 2.3.21. Au loc $\mathcal{O}(1) = \{-1, +1\}$, $\mathcal{SO}(1) = \{+1\}$, $\mathcal{O}^-(1) = \{-1\}$.

2.3.2. Transformări elementare ale liniilor unei matrice. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se poate scrie în una din formele:

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \text{ cu ajutorul liniilor } L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m} \text{ sau}$$

$$A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}, \text{ cu ajutorul coloanelor } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}.$$

Definiția 2.3.22. *Numim transformări elementare asupra liniilor matricei A :*

\mathbf{T}_1 transformarea prin care se înmulțește o linie cu un scalar nenul;

\mathbf{T}_2 transformarea prin care se schimbă două linii între ele;

\mathbf{T}_3 transformarea prin care se adună la elementele unei linii elementele corespunzătoare altei linii înmulțite, eventual, cu un scalar nenul.

Folosind scrierea matricei cu ajutorul liniilor, cele trei transformări elementare se reprezintă prin schemele:

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_1} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_2} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T}_3} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \beta L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

Definiția 2.3.23. *Două matrice de același tip se numesc echivalente pe linii dacă una se obține din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare ale liniilor.*

Definiția 2.3.24. *O matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se numește matrice eșalon dacă îndeplinește următoarele condiții:*

- a) primul element diferit de zero din fiecare linie cu elemente diferite de zero este 1,
- b) coloana care conține numărul 1 al unei linii este situată la dreapta coloanelor care conțin 1 de pe liniile precedente,
- c) numărul 1 din condiția a) este singurul element diferit de zero din coloana în care acest număr se află,
- d) liniile cu elementele diferite de zero sunt înaintea liniilor care au toate elementele egale cu zero.

Teorema 2.3.25. *Orice matrice este echivalentă pe linii cu o matrice eșalon.*

Demonstrație. Presupunem că $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ și că prima coloană a lui A care conține un element diferit de zero este coloana de ordin j . Dacă elementul de pe linia i și coloana j este diferit de zero, atunci facem transformarea $L_i \rightarrow \frac{1}{a_{ij}}L_i$ urmată de $L_i \rightarrow L_1$ și astfel matricea A se transformă în

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{1,j+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2j} & b_{2,j+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mj} & b_{m+1,j} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

În continuare se aplică matricei B transformările $L_i \rightarrow L_i - b_{ij}L_1$ pentru $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ și se obține matricea

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{1,j+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,j+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m+1,j} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dacă după aceste transformări se obțin linii formate numai din elemente egale cu zero atunci ele vor ocupa ultimele locuri în matricea C . Procedeu se repetă acum pentru submatricea formată din liniile $2, 3, \dots, m$ și coloanele $j + 1, \dots, n$. În acest fel după un număr finit de asemenea transformări elementare se obține o matrice eșalon echivalentă cu matricea inițială A . \square

Următoarea observație este utilă pentru realizarea unui program pe calculator care să realizeze aceste transformări.

Observația 2.3.26. Transformările elementare asupra liniilor se realizează folosind operația de înmulțire a matricelor, după cum urmează:

T₁. Transformarea prin care se înmulțește linia L_i cu un scalar nenul α , se realizează înmulțind la stânga matricea A cu matricea pătratică de ordin n , $\mathbf{M}_i(\alpha)$ de mai jos.

$$\mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{pmatrix} & & & & \overset{i}{\downarrow} & & \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i, \quad \det(\mathbf{M}_i(\alpha)) = \alpha \neq 0;$$

Această matrice are pe diagonala principală 1 cu excepția poziției (i, i) al cărei element este α , iar elementele nediagonale sunt toate egale cu zero.

T₂. Transformarea prin care se schimbă între linia L_i cu linia L_j se realizează înmulțind matricea A la stânga cu matricea pătratică de ordin n

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{pmatrix} & \begin{smallmatrix} i \\ \downarrow \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} j \\ \downarrow \end{smallmatrix} & & & & \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}, \det(\mathbf{M}_{ij}) = 1 \neq 0,$$

matrice care are pe diagonala principală 1 cu excepția pozițiilor (i, i) și (j, j) care sunt egale cu 0, iar elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt zero cu excepția elementelor de pe pozițiile (i, j) și (j, i) care sunt egale cu 1.

T₃. Transformarea T_3 prin care linia j înmulțită cu un scalar β , se adună la linia i se realizează prin înmulțirea la stânga a matricei A cu o matrice pătratică de ordin n de forma:

$$\mathbf{M}_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} & \begin{smallmatrix} i \\ \downarrow \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} j \\ \downarrow \end{smallmatrix} & & & & \\ 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}, \det(\mathbf{M}_{ij}(\beta)) = 1 \neq 0,$$

matrice care are pe diagonala principală 1, iar elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt zero cu excepția elementului de pe poziția (i, j) care este egal cu β .

Matricele introduse mai sus $M_i(\alpha)$, M_{ij} , $M_{ij}(\beta)$ poartă denumirea de **matrice elementare**.

Teorema 2.3.27. *Dacă matricea B se obține prin aplicarea a k transformări elementare liniilor lui A , atunci există k matrici elementare E_1, E_2, \dots, E_k astfel încât să avem*

$$(23) \quad B = E_1 E_2 \dots E_k A.$$

□

Corolarul 2.3.28. *Dacă matricea B se obține din matricea A prin aplicarea de transformări elementare asupra liniilor acesteia, atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.*

□

Exemplul 2.3.29. Folosind transformări elementare să se determine rangul matricei A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplicăm transformările elementare pentru a obține zerouri sub diagonală a_{11} , a_{22}, \dots . Numărul de elemente nenule de pe această diagonală dă rangul matricei.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow (-2)L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow (-3)L_1 + L_3 \\ L_4 \rightarrow (-5)L_1 + L_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Deoarece pe diagonală care pleacă din poziția a_{11} sunt 3 elemente nenule rezultă că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = 3$.

Corolarul 2.3.30. *Dacă matricea A este inversabilă atunci*

$$A^{-1} = E_1 E_2 \dots E_k.$$

Demonstrație. Afirmatia rezultă dacă în relația (23) considerăm $B = I_n$. □

Ca o aplicație a acestui Corolar prezentăm *algoritmul Gauss-Jordan de inversare a unei matrice*.

Exemplul 2.3.31. Să se calculeze, folosind transformări elementare, inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det(A) = -31 \neq 0$, matricea este inversabilă. Formăm matricea $(A|I)$. Cu ajutorul transformărilor elementare efectuate asupra liniilor acestei matricii o vom aduce la forma $(I|B)$. Vom avea $A^{-1} = B$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow -5L_1 + L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} L_1 \rightarrow (-1/2)L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow (3/2)L_2 + L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow (-31/8)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow (-5/8)L_3 + L_1 \\ L_2 \rightarrow (-7/4)L_3 + L_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{array} \right).$$

Rezultă că

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}.$$

Exemplele 2.3.32. i) Inversa unei matrice diagonale este o matrice de același tip.

Într-adevăr, împărțind fiecare linie din matricea $(A|I_n)$ cu elementul a_{ii} (dacă $a_{ii} \neq 0$), aflat pe diagonală matricei A obținem $(I_n|A^{-1})$, deci A^{-1} va avea pe diagonală principală elementele $1/a_{ii}$ și în rest zero.

ii) Inversa unei matrice triunghiulare superior (inferior) având 1 pe diagonală este o matrice de același tip.

Dacă A este superior triunghiulară cu 1 pe diagonală principală, vor fi necesare doar acele transformări ale matricei $(A|I_n)$ ce produc zerouri deasupra diagonalei matricei A . Ele păstrează zerourile aflate sub diagonală și nu modifică elementele de pe diagonală, atât în matricea A , cât și în I_n . Analog în cazul matricelor triunghiulare inferior.

2.3.3. Matrice cu blocuri.

Definiția 2.3.33. O matrice cu blocuri A este o matrice construită cu ajutorul altor matrice de ordin mai mic numite blocuri sau submatrice ale lui A .

Să considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $m \geq 2$, $n \geq 2$ pe care o partiționăm în p benzi orizontale (o bandă orizontală este formată din linii consecutive ale matricei A) și q benzi verticale (o bandă verticală este formată din coloane consecutive ale matricei A). O matrice care se află la intersecția unei benzi orizontale cu o bandă verticală se numește **bloc** sau **submatrice**. Notăm blocurile cu $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m/p, n/q}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ și atunci matricea A se reprezintă sub forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{array} \right)$$

Notăm $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$.

Observația 2.3.34. i) În matricea A blocurile $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iq}$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ au același număr de linii, iar blocurile $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{pj}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ au același număr de coloane.

ii) Blocurile de dimensiune $(1, n)$ sunt liniile matricei M , cele de dimensiune $(m, 1)$ sunt coloanele matricei, iar cele de dimensiune $(1, 1)$ sunt elementele matricei A .

Două matrice partiționate la fel $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ și $B = (B_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ se pot aduna evident pe blocuri după regula

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}.$$

Fie $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ și $B = (B_{jk})_{\substack{j=\overline{1,q} \\ k=\overline{1,r}}}$ două matrice pentru care se poate efectua produsul $A \cdot B$. Admitem că pentru fiecare $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ și $k = \overline{1,r}$ numărul coloanelor din matricea A_{ij} este egal cu numărul de linii din matricea B_{jk} , deci se poate efectua produsul $A_{ij}B_{jk}$. Se verifică prin calcul direct că produsul AB se obține după regula cunoscută a înmulțirii matricelor pe elemente

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} B_{jk} \right)_{\substack{i=\overline{1,p} \\ k=\overline{1,r}}}.$$

Exemplul 2.3.35. Să se determine inversa matricei cu blocuri M de forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

știind că matricele A și B sunt pătratice (pot fi de dimensiuni diferite) inversabile.

Se verifică imediat că matricea

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

verifică relațiile $MM^{-1} = M^{-1}M = I$.

Exemplul 2.3.36. Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

unde $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $p + q = n$. Dacă $A \in GL_p(\mathbb{K})$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) $M \in GL_n(\mathbb{K})$;
- ii) $D - CA^{-1}B \in GL_q(\mathbb{K})$.

Când $M \in GL_n(\mathbb{K})$ să se arate că:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}(I_p + BSCA^{-1}) & -A^{-1}BS \\ -SCA^{-1} & S \end{pmatrix}$$

unde $S = (D - CA^{-1}B)^{-1}$.

i) \Rightarrow ii). Fie

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Deoarece $MM^{-1} = I_n$ rezultă:

$$(24) \quad AE + BG = I_p, \quad AF + BH = 0$$

$$(25) \quad CE + DG = 0, \quad F + DH = I_q.$$

Pentru a afla M^{-1} trebuie să determinăm submatricele E, F, G, H . Înmulțim la stânga relațiile (24) cu A^{-1} și găsim

$$(26) \quad E = A^{-1} - A^{-1}BG, \quad F = -A^{-1}BH.$$

Din relația (28) rezultă că matricea $D - CA^{-1}B$ este inversabilă și

Din (27) deducem atunci:

Înlocuind H, G obținute în (26) găsim

ii) \Rightarrow i). Dacă $D - CA^{-1}B$ este inversabilă, se poate construi matricea $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$.

unde E, F, G, H sunt date de (31), (30) și (29). Se constată prin calcul direct că $MN = I_n$, deci $M \in GL_n(\mathbb{K})$.

2.4. Sisteme de ecuatii algebrice liniare

2.4.1. Sisteme de m ecuații cu n necunoscute.

Definiția 2.4.1. *Un sistem algebric liniar de m ecuații cu n necunoscute este un ansamblu de m relații de forma*

sau sub formă condensată:

unde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, sunt date, iar $x_j, j = \overline{1, n}$ sunt **necunoscutele** sistemului.

Matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se numește **matricea coeficienților sistemului** sau simplu, **matricea sistemului**, iar

se numește **matricea coloană a termenilor liberi**.

$$\begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$$

matricea coloană a necunoscutelor, sistemul (32) se scrie sub forma matriceală

Matricea $(A|B)$ se numește **matricea extinsă** a sistemului.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Două sisteme care au aceleași soluții se numesc **echivalente**.

Demonstrație. Arătăm că dacă se aplică pe rând o transformare elementară $T_i, i = 1, 2, 3$, liniilor matricei extinse $(A|B)$, sistemul atașat matricei transformate este echivalent cu sistemul (32).

[illegible]

Transformarea \mathbf{T}_2 schimbă două ecuații între ele, deci soluțiile sistemului inițial și al celui transformat coincid.

[illegible]

Este ușor de văzut că orice soluție a acestui sistem este și soluție a sistemului (32) și reciproc. \square

Fie $r = \text{rang} A$. Presupunem că $\det(a_{ij})_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0$. Prin transformări elementare asupra liniilor, matricea $(A|B)$ poate fi adusă la forma

$$(35) \quad (P|Q) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{1,r+1} & \dots & p_{1,n} & q_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{2,r+1} & \dots & p_{2,n} & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{r,r+1} & \dots & p_{r,n} & q_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_m \end{array} \right).$$

Din Teorema 2.4.3 rezultă că sistemul care are drept matrice extinsă matricea $(P|Q)$, este echivalent cu sistemul (32).

Dacă $r = m$ sistemul este compatibil. Pentru $r < m$ din (35) deducem următoarea teoremă de compatibilitate.

Teorema 2.4.4. *Sistemul (32) este compatibil dacă și numai dacă*

$$(36) \quad q_{r+1} = q_{r+2} = \dots = q_m = 0.$$

Dacă sistemul este compatibil și $r = n$ el are o singură soluție, adică este sistem compatibil determinat, iar dacă $r < n$ el admite ∞^{n-r} soluții, adică este compatibil nedeterminat.

Teorema 2.4.5. (Teorema lui Kronecker-Cappelli) *Sistemul (32) este compatibil dacă și numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, adică*

$$\text{rang } A = \text{rang } (A|B).$$

Teorema lui Kronecker-Cappelli ne oferă un mijloc simplu și rapid de a stabili dacă un sistem algebric liniar este compatibil sau nu, însă, în caz de compatibilitate, nu ne arată cum se calculează soluțiile sistemului. Un minor nenul de ordinul r al matricei A ($r = \text{rang}(A)$) se numește **minor principal**. Necunoscutele ai căror coeficienți intră în formarea acestui minor se numesc **necunoscute principale** iar ecuațiile din care s-a format acest minor se numesc **ecuații principale**. Necunoscutele și ecuațiile care nu sunt principale se numesc **necunoscute**, respectiv **ecuații secundare**. Minorii de ordinul $r + 1$ obținuți prin bordarea minorului principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi, precum și cu cele ale uneia dintre liniile corespunzătoare unei ecuații secundare se numesc **minori caracteristici**. Pentru un sistem de m ecuații, cu rangul matricei sistemului egal cu r , există minori caracteristici numai dacă $m > r$, iar numărul lor este $m - r$. Teorema precedentă se reformulează astfel:

Teorema 2.4.6. (Teorema lui Rouché-Frobenius) *Sistemul (32), cu $r < m$, este compatibil dacă și numai dacă toți minorii caracteristici sunt egali cu zero.* \square

În caz de compatibilitate, pentru rezolvarea sistemului se păstrează ecuațiile principale în care necunoscutele secundare se trec în membrul drept. Atribuim acestora din urmă valori arbitrare din \mathbb{K} , apoi rezolvăm sistemul anterior ales, obținând toate soluțiile sistemului (32).

Exemplul 2.4.7. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 8x_3 = -\frac{8}{5}. \end{cases}$$

Matricea sistemului și matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -8 & -\frac{8}{5} \end{array} \right).$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A | B) = 2$ deci sistemul este compatibil

$$d_{\text{pr}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

necunoscutele principale sunt x_1 și x_2 iar x_3 este necunoscută secundară. Notăm $x_3 = \alpha$. Sistemul format cu ecuațiile principale este:

$$(37) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 2\alpha \\ -x_1 + 3x_2 = 3 - 2\alpha \end{cases}$$

și are soluția

$$x_1 = \frac{10\alpha - 3}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

Aceste valori, împreună cu $x_3 = \alpha$ verifică ecuația secundară (a treia) și formează, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, mulțimea soluțiilor sistemului dat.

O altă metodă utilizează transformări elementare asupra matricei extinse pentru a o aduce la forma (35). Metoda aceasta se numește **metoda eliminării (Gauss-Jordan)** și o vom exemplifica în cele ce urmează.

Exemplul 2.4.8. Să se discute și, în caz de compatibilitate, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases},$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Cu ajutorul transformărilor elementare, matricea extinsă a sistemului devine succesiv:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 - m^2 & 1 - m & 1 - m^2 \\ 0 & 1 - m & m - 1 & m^2 - m \end{array} \right).$$

Se impun următoarele două cazuri:

1. $m = 1$. În acest caz obținem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Sistemul este compatibil nedeterminat iar soluțiile sale sunt:

$$(38) \quad \begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. $m \neq 1$. În acest caz matricea se transformă în continuare după cum urmează:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow \frac{1}{1-m}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{1-m}L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1+m & 1 & 1+m \\ 0 & 1 & -1 & -m \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 1+m & 1 & 1+m \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - mL_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - (1+m)L_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+m & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 2+m & (m+1)^2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Avem două posibilități:

2.1. Dacă $m = -2$ obținem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

și în acest caz sistemul este incompatibil.

2.2. Dacă $m \neq -2$ aplicăm în continuare transformările elementare și obținem:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+m & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 2+m & (m+1)^2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{2+m}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+m & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - (m+1)L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{m+1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Rezultă că sistemul este compatibil determinat iar soluția este:

$$(39) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{m+1}{m+2} \\ x_2 = \frac{1}{m+2} \\ x_3 = \frac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases}$$

În concluzie:

- a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul are soluție unică dată de (39),
- b) dacă $m = -2$ sistemul este incompatibil,
- c) dacă $m = -1$ sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sunt date de (38).

2.4.2. Sisteme Cramer.

Definiția 2.4.9. *Un sistem algebric liniar în care $r = m = n$ se numește sistem Cramer. Un astfel de sistem se scrie:*

$$(40) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n},$$

cu $\Delta = \det(A) \neq 0$.

Teorema 2.4.10. *Un sistem Cramer este compatibil determinat. Soluția sa este dată de formulele lui Cramer:*

$$(41) \quad x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = \overline{1, n},$$

unde matricea A_j se obține din matricea A prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi.

Demonstrație. Într-adevăr, deoarece $\det A \neq 0$, matricea A este inversabilă. Din (34), înmulțind la stânga cu A^{-1} , găsim

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)} A^* B.$$

Dacă avem în vedere definiția matricei A^* și formula (17) de dezvoltare a determinantului matricei A_j după coloana j rezultă:

$$x_j = \frac{1}{\det(A)} (b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj}) = \frac{1}{\det(A)} \det(A_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

□

Exemplul 2.4.11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases}$$

Calculăm determinantul sistemului $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 34 \neq 0$, deci sistemul este compatibil, unic determinat. Apoi calculăm următorii trei determinanți:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -2 \\ -10 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 68, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 34, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ -3 & 2 & -10 \end{vmatrix} = -68.$$

Soluția sistemului este $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 2$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -2$.

2.4.3. Sisteme omogene. Deși sistemele omogene de ecuații liniare reprezintă un caz particular al celor de m ecuații cu n necunoscute, totuși, dată fiind importanța lor, consacram studiului lor un paragraf special.

Definiția 2.4.12. *Un sistem liniar în care toți termenii liberi sunt nuli, $b_i = 0, \forall i = \overline{1, m}$, se numește **sistem omogen**.*

El este de forma

[illegible]

sau

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

sau, matriceal,

$$(43) \quad AX = 0.$$

După cum se observă direct n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ este soluție a sistemului numită **soluție banală**. Deci un sistem omogen este întotdeauna compatibil.

Utilizând rezultatele din paragrafele precedente putem formula următoarea teoremă:

Teorema 2.4.13. *Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem omogen de ecuații liniare să admită și soluții nebanale este ca $r < n$, adică rangul r al matricei sistemului să fie strict mai mic decât numărul n al necunoscutelor.*

Corolarul 2.4.14. *Dacă numărul necunoscutelor unui sistem liniar omogen este egal cu cel al ecuațiilor, atunci sistemul admite și soluții nebanale dacă și numai dacă $\det(A) = 0$.*

Observația 2.4.15. Dacă un sistem de ecuații liniare omogene are numărul ecuațiilor strict mai mic decât cel al necunoscutelor sistemul are soluții nenule.

Exemplul 2.4.16. Să se stabilească dacă sistemul de ecuații de mai jos admite soluții nebanale și în caz afirmativ să se determine aceste soluții:

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 0, \end{cases}$$

 $m \in \mathbb{R}.$

Folosind transformări elementare, ca și în Exemplul 2.4.8 matricea sistemului devine:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}.$$

1. Dacă $m = 1$ obținem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci sistemul admite și soluții nebanale:

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Dacă $m \neq 1$ continuăm aplicarea transformărilor elementare ca în Exemplul 2.4.8 și găsim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+m \end{pmatrix},$$

ceea ce impune discuția în alte două cazuri:

2.1. Dacă $m = -2$ se obține matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci sistemul admite și soluții nebanale: $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.2. Dacă $m \neq -2$ sistemul admite doar soluția nulă.

În concluzie:

a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul admite doar soluția banală,

b) dacă $m \in \{-2, 1\}$ sistemul admite soluții nebanale.

2.5. Probleme propuse

Problema 2.5.1. Să se determine matricea X din egalitatea:

$$-5 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.2. Să se calculeze produsele de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.3. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$ pentru

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$. Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ au loc

- a) $A^k - B^k = (A - B)(A^{k-1} + A^{k-2}B + \dots + AB^{k-2} + B^{k-1})$.
- b) $(A + B)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j A^j B^{k-j}$, unde $A^0 = I_n$.

Problema 2.5.5. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrice nenulă cu $\det(A) = 0$.

- a) Să se arate că există un număr complex r , astfel încât $A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3, \dots$.
- b) Să se calculeze $(A + I_2)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2.5.6. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **involutivă** dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește **idempotentă** dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

- a) Dacă B este idempotentă, atunci $2B - I_n$ este involutivă.
- b) Dacă A este involutivă, atunci $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

Problema 2.5.7. Pentru o matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ notăm

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

pe care o numim **urma matricei** A . Să se arate că:

- a) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
- b) $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
- c) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
- d) $\text{Tr}(UAU^{-1}) = \text{Tr}(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall U \in GL_n(\mathbb{C})$.

Problema 2.5.8. Să se arate că nu există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB - BA = I_n$.

Problema 2.5.9. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ pentru orice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $A = \alpha I_n$.

Problema 2.5.10. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = AB$. Demonstrați că $AB = BA$.

Problema 2.5.11. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = I_n$ și $A^2 = A^3$. Demonstrați că

- a) $AB = BA$,
- b) $I_n - AB$ și $I_n + AB$ sunt inversabile.

Problema 2.5.12. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ matrice nesarabilă. Să se arate că

$$(A^*)^* = (\det A)^{n-2} \cdot A.$$

Care sunt matricele nesarabile pentru care $(A^*)^* = A$?

Problema 2.5.13. Să se calculeze $\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]^{2008}$.

(Third Internet Mathematics Olympiad for Students, 2008)

Problema 2.5.14. Să se găsească valoarea maximă a elementelor matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^6.$$

(First Team Internet Mathematics Olympiad for Students, 2010)

Problema 2.5.15. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = (b_{ij})_{i,j=1,3}$ cu $b_{ij} = 1, \forall i, j = 1, 2, 3$. Se știe că $\det A = 1$, $\det(A + B) = 1$. Să se calculeze $\det(A + 2011B)$.

(Seventh Internet Mathematics Olympiad for Students, 2011)

Problema 2.5.16. Determinați rangurile matricelor:

$$\begin{aligned} a) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ c) \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -12 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \end{pmatrix}, \quad d) \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 & 1 \\ \alpha & 2\beta - 1 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & \beta + 3 & 2\beta - 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Problema 2.5.17. Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ două matrice al căror produs este $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Problema 2.5.18. Să se demonstreze următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} a) \quad (A^{-1})^{-1} &= A, \quad b) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \\ c) \quad (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}, \quad d) \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Problema 2.5.19. Să se determine inversele matricelor:

$$\begin{aligned} a) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}, \\ d) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad e) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Problema 2.5.20. Să se rezolve ecuațiile matriceale

$$a) \quad XA = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1 - i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$b) AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.21. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea ale cărei elemente sunt conjugatele elementelor matricei A . Să se demonstreze că

$$a) \det(\bar{A}) = \overline{\det(A)}, \quad b) \det(A \cdot \bar{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0.$$

Problema 2.5.22. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$. Să se demonstreze că $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Problema 2.5.23. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$. Demonstrați că

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

Problema 2.5.24. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci

$$(44) \quad \det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B)).$$

Reciproc, dacă $n \geq 2$ și pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc (44) atunci $n = 2$.

Problema 2.5.25. Să se calculeze următorii determinanți:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C},$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Problema 2.5.26. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Internet Mathematics Olympiad Team Contest, 2008)

Problema 2.5.27. Să se arate prin inducție matematică următoarea relație:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j),$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. (Determinant Vandermonde)

Problema 2.5.28. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ și matricele:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_n & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $\det(A)$, $\det(AV)$ și să se deducă formula de recurență pentru calculul determinantului Vandermonde $\det(V)$.

Problema 2.5.29. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ și matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că $\det(A) = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n)$, unde $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$ iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ sunt rădăcinile de ordin n ale unității (soluțiile ecuației $x^n = 1$).

Problema 2.5.30. Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice cu blocuri de forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

unde $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $p + q = n$. În ipoteza $D \in GL_q(\mathbb{K})$, să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:

- i) $M \in GL_n(\mathbb{K})$;
- ii) $A - BD^{-1}C \in GL_p(\mathbb{K})$.

Când M este inversabilă să se arate că:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} T & -TBD^{-1} \\ -D^{-1}CT & D^{-1}(I_q + CTBD^{-1}) \end{pmatrix}$$

unde $T = (A - BD^{-1}C)^{-1}$.

Problema 2.5.31. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nesingulară și $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}$ cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$. Să se arate că dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, atunci B este nesingulară și în acest caz să se determine B^{-1} în funcție de A^{-1} .

Problema 2.5.32. Folosind partiționarea în blocuri de tip $(2, 2)$ să se arate că următoarea matrice este inversabilă și să se determine inversa ei.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.33. Să se calculeze determinanții următoarelor matrice cu blocuri:

$$a) P = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}, \quad b) Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}, \quad A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

$$c) R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) \neq 0 \text{ sau } \det(D) \neq 0.$$

Problema 2.5.34. Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 11x_4 = 8, \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -20, \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -10. \end{cases}$$

Problema 2.5.35. Utilizând descompunerea în matrice bloc să se rezolve următorul sistem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -9 & 7 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.36. Să se discute după parametrii reali $m, n \in \mathbb{R}$ următoarele sisteme:

$$a) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = m, \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (m+1)x_1 + (n+1)x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2nx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Problema 2.5.37. Să se rezolve următoarele sisteme omogene:

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + mx_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.5.38. Să se determine toate soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Fourth Internet Mathematics Olympiad for Students, 2009)

CAPITOLUL 3

Spații vectoriale. Spații euclidiene

3.1. Definiție și exemple

Noțiunea de spațiu vectorial reprezintă una dintre cele mai importante structuri algebrice, cu numeroase aplicații în diferite ramuri ale matematicii.

Fie \mathbf{V} o mulțime nevidă și \mathbb{K} un corp comutativ, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definiția 3.1.1. O aplicație $\varphi: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definită prin $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) \in \mathbf{V}$, se numește **lege de compoziție (internă)** sau **operație algebrică pe \mathbf{V}** .

Definiția 3.1.2. O aplicație $f: \mathbb{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, definită prin $(\alpha, x) \rightarrow f(\alpha, x) \in \mathbf{V}$, se numește **lege de compoziție externă pe \mathbf{V}** .

Observația 3.1.3. De obicei, pentru legile de compoziție se utilizează notațiile $\oplus, \otimes, *, \circ, \perp, \top$, etc.

Definiția 3.1.4. O mulțime nevidă \mathbf{V} , înzestrată cu două legi de compoziție, una internă, $+: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ și alta externă $\cdot: \mathbb{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ se numește **spațiu vectorial peste \mathbb{K}** (pe scurt, \mathbb{K} -spațiu vectorial), dacă sunt îndeplinite axiomele:

- I. $(\mathbf{V}, +)$ este grup abelian, adică:
 - a) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbf{V}$;
 - b) $\exists 0_{\mathbf{V}} \in \mathbf{V}$ astfel încât $x + 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}} + x = x, \forall x \in \mathbf{V}$;
 - c) $\forall x \in \mathbf{V}, \exists (-x) \in \mathbf{V}$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = 0_{\mathbf{V}}$;
 - d) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbf{V}$;
- II.
 - a) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbf{V}$;
 - b) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{V}$;
 - c) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbf{V}$;
 - d) $1 \cdot x = x, \forall x \in \mathbf{V}, 1$ fiind elementul unitate din corpul \mathbb{K} .

Elementele corpului \mathbb{K} se numesc *scalari*, elementele din \mathbf{V} se numesc *vectori*, iar legea de compoziție externă se numește *înmulțirea scalarilor cu vectori*. În cazul în care $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, \mathbf{V} se numește spațiu vectorial *real*, iar dacă $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, atunci \mathbf{V} se numește spațiu vectorial *complex*.

Observația 3.1.5. A nu se face confuzie între notațiile „+” și „·” de pe \mathbf{V} cu notațiile „+” și „·” de pe \mathbb{K} .

Propoziția 3.1.6. Într-un \mathbb{K} -spațiu vectorial au loc proprietățile:

- 1) $(\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{V};$
- 2) $\alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot y, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{V};$
- 3) $0 \cdot x = 0_{\mathbb{V}}, \forall x \in \mathbb{V};$
- 4) $\alpha \cdot 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{K};$
- 5) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -\alpha \cdot x, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{V};$
- 6) dacă $\alpha \cdot x = 0_{\mathbb{V}}$, atunci $\alpha = 0$ sau $x = 0_{\mathbb{V}}$.

unde 0 din proprietatea 3 este elementul neutru din \mathbb{K} .

Demonstrație.

- 1) Avem $\alpha \cdot x = (\alpha - \beta + \beta) \cdot x = (\alpha - \beta) \cdot x + \beta \cdot x$, de unde rezultă $\alpha \cdot x - \beta \cdot x = (\alpha - \beta) \cdot x$.
- 2) Avem $\alpha \cdot x = \alpha \cdot (x - y + y) = \alpha \cdot (x - y) + \alpha \cdot y$, de unde rezultă $\alpha \cdot x - \alpha \cdot y = \alpha \cdot (x - y)$.
- 3) În 1), se consideră $\alpha = \beta$.
- 4) În 2), se ia $y = x$.
- 5) $(-\alpha) \cdot x = (0 - \alpha) \cdot x = 0 \cdot x - \alpha \cdot x = 0_{\mathbb{V}} - \alpha \cdot x = -\alpha \cdot x$. □

Exemplele 3.1.7. 1) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste el însuși cu operațiile corpului \mathbb{K} .

2) Mulțimea $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}\}$, unde \mathbb{K} este un corp comutativ, este un \mathbb{K} -spațiu vectorial, numit *spațiul aritmetic*, în raport cu legile de compoziție:

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathbb{K}^n, \quad x &= (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \\ +: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n); \\ \cdot: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \end{aligned}$$

3) Mulțimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ este un \mathbb{K} -spațiu vectorial în raport cu operațiile:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad \forall A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ \alpha \cdot A &= (\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}, \quad \forall A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

4) Mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq n\}$ este un \mathbb{R} -spațiu vectorial în raport cu operațiile de adunare a polinoamelor și înmulțire a polinoamelor cu scalari.

5) Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar și omogen formează un spațiu vectorial peste corpul \mathbb{K} al coeficienților acestui sistem. Soluțiile unui sistem de m ecuații și n necunoscute pot fi privite ca elemente din \mathbb{K}^n și se adună, respectiv se înmulțesc cu scalari respectând operațiile definite pe \mathbb{K}^n , iar rezultatele operațiilor sunt tot soluții ale sistemului.

3.2. Subspații vectoriale

Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ o submulțime nevidă.

Definiția 3.2.1. \mathbb{W} se numește **subspațiu vectorial** al lui \mathbb{V} dacă operațiile algebrice de pe \mathbb{V} induc pe \mathbb{W} o structură de \mathbb{K} -spațiu vectorial.

Propoziția 3.2.2. Dacă \mathbb{W} este o submulțime nevidă a \mathbb{K} -spațiului vectorial \mathbb{V} , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) \mathbb{W} este subspațiul vectorial în \mathbb{V} ;
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{W}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ rezultă $x + y \in \mathbb{W}$ și $\alpha \cdot x \in \mathbb{W}$;
- 3) $\forall x, y \in \mathbb{W}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ rezultă $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{W}$.

Demonstrație.

1) \Rightarrow 2) Evident.

2) \Rightarrow 3) Fie $x, y \in \mathbb{W}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Din 2), rezultă $\alpha \cdot x, \beta \cdot y \in \mathbb{W}$ și $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{W}$.

3) \Rightarrow 1) Se ia $\alpha = 1, \beta = -1$ în 3) și se obține $x - y \in \mathbb{W}$, deci \mathbb{W} este subgrup în $(\mathbb{V}, +)$.

Se ia $\beta = 0$ în 3) și se obține că pentru $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in \mathbb{W}$ avem $\alpha \cdot x \in \mathbb{W}$. Deci \mathbb{W} este subspațiu în \mathbb{V} . \square

Exemplele 3.2.3. 1) Mulțimea $\{0_{\mathbb{V}}\} \subset \mathbb{V}$ este un subspațiu în \mathbb{V} , numit subspațiul *nul* al lui \mathbb{V} . De asemenea \mathbb{V} este un subspațiu vectorial în \mathbb{V} ; $\{0_{\mathbb{V}}\}$ și \mathbb{V} se numesc *subspații improprii*. Orice alt subspațiu al lui \mathbb{V} se numește *subspațiu propriu*.

2) Mulțimea $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq n\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali.

3) Submulțimea $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 - 5x_2 = 0\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului aritmetic \mathbb{R}^2 .

4) Submulțimea $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \\ x+y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ este un subspațiu vectorial în \mathbb{R} -spațiul vectorial $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

5) În spațiul aritmetic \mathbb{R}^3 , dreptele și planele care conțin originea sunt subspații vectoriale.

6) Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial. Dacă \mathbb{W} este o submulțime a lui \mathbb{V} care nu conține vectorul nul $0_{\mathbb{V}}$, atunci \mathbb{W} nu poate fi subspațiu vectorial.

Definiția 3.2.4. Fie \mathbb{K} -spațiu vectorial \mathbb{V} și $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ două subspații vectoriale ale lui \mathbb{V} . Mulțimea $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{x \in \mathbb{V} \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in \mathbb{V}_1, x_2 \in \mathbb{V}_2\}$ se numește **suma subspațiilor** \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 .

Propoziția 3.2.5. Fie \mathbb{K} -spațiul vectorial \mathbb{V} și $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ două subspații vectoriale ale lui \mathbb{V} . Atunci:

- a) $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ este subspațiu în \mathbb{V} ;
- b) $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ este subspațiu în \mathbb{V} .

Demonstrație.

a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $x, y \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Atunci $x, y \in \mathbb{V}_1$ și $x, y \in \mathbb{V}_2$.

Cum \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 sunt subspații, rezultă că $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{V}_1$ și $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{V}_2$, deci $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

b) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $x, y \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Atunci există $x_1, y_1 \in \mathbb{V}_1$, $x_2, y_2 \in \mathbb{V}_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ și $y = y_1 + y_2$.

Astfel $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha \cdot (x_1 + x_2) + \beta \cdot (y_1 + y_2) = (\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2)$. Întrucât \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 sunt subspații, $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 \in \mathbb{V}_1$ și $\alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \in \mathbb{V}_2$. Așadar, $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, de unde rezultă că $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ este un subspațiu vectorial în \mathbb{V} . \square

Observația 3.2.6. Submulțimea $\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}$ nu este, în general, un subspațiu vectorial.

Propoziția 3.2.7. Fie \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 două subspații vectoriale ale \mathbb{K} -spațiului vectorial \mathbb{V} și $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Orice vector din \mathbb{V} se scrie în mod unic ca suma dintre un vector din \mathbb{V}_1 și un vector din \mathbb{V}_2 dacă și numai dacă $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Demonstrație. Presupunem că $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$, deci există $y \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$, $y \neq 0_{\mathbb{V}}$. Fie $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathbb{V}_1$, $x_2 \in \mathbb{V}_2$. Putem scrie și $x = (x_1 + y) + (x_2 - y)$, $x_1 + y \in \mathbb{V}_1$, $x_2 - y \in \mathbb{V}_2$, ceea ce contrazice unicitatea scrierii lui x , contradicție care provine din faptul că am presupus că $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Reciproc, presupunem că există un vector $x \in \mathbb{V}$ care admite două scrieri $x = x_1 + x_2$ și $x = x_3 + x_4$, $x_1, x_3 \in \mathbb{V}_1$, $x_2, x_4 \in \mathbb{V}_2$. Rezultă că $x_1 - x_3 = x_4 - x_2 \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$, de unde rezultă contradicția. \square

Pe baza acestei propoziții se introduce următoarea:

Definiția 3.2.8. Fie \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 două subspații vectoriale ale lui \mathbb{V} , $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Suma $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ se numește **sumă directă** și se notează $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

În plus, dacă $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$, atunci \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 se numesc **subspații suplementare**.

Exemplul 3.2.9. Orice funcție $f: (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ este suma dintre o funcție pară și una impară:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad \forall x \in (-a, a).$$

În plus, singura funcție pară și impară este funcția zero. Așadar, subspațiul funcțiilor pare și subspațiul funcțiilor impare sunt suplementare.

Definiția 3.2.10. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$ o submulțime nevidă a lui \mathbb{V} . Un vector de forma $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in S$, $i = \overline{1, n}$ se numește **combinație liniară finită de elemente din S** . Se notează cu $\text{Span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$ mulțimea tuturor combinațiilor liniare de vectori din S , cu coeficienți din \mathbb{K} .

Propoziția 3.2.11. $\text{Span}(S)$ este subspațiu vectorial în \mathbb{V} .

Demonstrație. Fie $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ și $x, y \in \text{Span}(S)$. Există $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ și $y = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot x_i$. Atunci $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) x_i$ și cum $\lambda \alpha_i + \mu \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, rezultă că $\text{Span}(S)$ este subspațiu în \mathbb{V} . \square

Definiția 3.2.12. $\text{Span}(S)$ se numește **subspațiul generat** de S sau **acoperirea liniară** a lui S .

Observațiile 3.2.13. 1) Dacă S este mulțimea vidă, atunci $\text{Span}(S) = \{0_{\mathbf{V}}\}$.

2) $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \text{Span}(\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2)$.

3) $\text{Span}(S)$ coincide cu intersecția tuturor subspațiilor lui \mathbf{V} ce conțin pe S .

4) Diferite submulțimi de vectori din \mathbf{V} pot genera același subspațiu vectorial. De exemplu, mulțimile

$$\{1, X, X^2, \dots, X^n\}, \quad \left\{1, \frac{X}{1!}, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^n}{n!}\right\}, \quad \{1, 1-X, (1-X)^2, \dots, (1-X)^n\}$$

generează spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n .

Exemplul 3.2.14. Se consideră subspațiile vectoriale \mathbf{V}_1 și \mathbf{V}_2 generate de vectorii $w_1 = (1; 5)$, $w_2 = (-1; -10)$, $w_3 = (3; 15)$, respectiv $u_1 = (-1; -4)$, $u_2 = (-1; 2)$, $u_3 = (2; 0)$. Să se determine subspațiile $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ și $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$.

Într-adevăr, deoarece $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \text{Span}(\mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2)$, rezultă că orice $v \in \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ se scrie sub forma $v = k_1 \cdot w_1 + k_2 \cdot w_2 + k_3 \cdot w_3 + k_4 \cdot u_1 + k_5 \cdot u_2 + k_6 \cdot u_3$. Subspațiul $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ este format din vectorii pentru care $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 + \alpha_3 \cdot w_3 = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \beta_3 \cdot u_3$, relație echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 15\alpha_3 = -4\beta_1 + 2\beta_2. \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului este 1, deci compatibilitatea este asigurată de anularea minorului caracteristic $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\beta_3 = 0$.

Se găsește $\beta_1 = -7\lambda + 10\mu$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Așadar, vectorii din $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ sunt de forma $(-7\lambda + 10\mu)u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = (6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu)$.

Fie \mathbf{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbf{V}$.

Definiția 3.2.15. 1) *Sistemul de vectori S se numește **liniar independent** sau **liber** dacă egalitatea $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0_{\mathbf{V}}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$ are loc numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.*

2) *Sistemul de vectori S se numește **liniar dependent** sau **legat** dacă există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0_{\mathbf{V}}$.*

Exemplele 3.2.16. 1) $S = \{0_{\mathbf{V}}\}$ este liniar dependent, deoarece există egalitatea $1 \cdot 0_{\mathbf{V}} = 0_{\mathbf{V}}$ și $1 \neq 0$.

2) $S = \{x\}$, $x \in \mathbf{V}$, $x \neq 0_{\mathbf{V}}$ este liniar independent deoarece din $\alpha \cdot x = 0_{\mathbf{V}}$, $x \neq 0_{\mathbf{V}}$ rezultă $\alpha = 0$.

3) În spațiul vectorial real aritmetic \mathbb{R}^n , mulțimea de vectori $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1; 0; 0; \dots; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$, \dots , $e_n = (0; 0; \dots; 0; 1)$ este liniar independentă.

Într-adevăr, din egalitatea

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n},$$

rezultă $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0; 0; \dots; 0)$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

4. Fie $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{-t}$ și $f_3(t) = \operatorname{sh} t$. Întrucât în spațiul vectorial al funcțiilor reale are loc egalitatea $f_1(t) - f_2(t) - 2f_3(t) = 0$, rezultă că mulțimea $\{f_1, f_2, f_3\}$ este liniar independentă.

Propoziția 3.2.17. Fie \mathbb{K} -spațiul vectorial \mathbb{V} și submulțimea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$.

- 1) Dacă $0_{\mathbb{V}} \in S$, atunci S este liniar dependent.
- 2) Dacă S este liniar independent, atunci $x_i \neq 0_{\mathbb{V}}$, $i = \overline{1, n}$.
- 3) Dacă S este liniar dependent, atunci oricare ar fi $S' \subset \mathbb{V}$, $S \subset S'$, rezultă că S' este liniar dependent.
- 4) Dacă S este liniar independent, atunci oricare ar fi $S'' \subset S$, S'' este liniar independent.

Demonstrație.

- 1) Fie $x_n = 0_{\mathbb{V}} \in S$. Are loc egalitatea $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}}$, care nu are toți coeficienții nuli, deci S este liniar dependent.
- 2) Dacă $x_i = 0_{\mathbb{V}} \in S$, atunci S e liniar dependent, contradicție.
- 3) S fiind liniar dependent, rezultă că există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, nu toți nuli astfel încât

$$(45) \quad \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0_{\mathbb{V}}.$$

Presupunem că $S' = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m\}$, $m \geq n$. Relația (45) poate fi scrisă sub forma $\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_n \cdot x_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 0 \cdot x_m = 0_{\mathbb{V}}$, care este o combinație liniară nulă, ce nu are toți coeficienții nuli. Deci S' este liniar dependent.

4) Presupunem prin reducere la absurd că S'' este liniar dependent. Din 3), rezultă că S este liniar dependent, contradicție. Prin urmare, S'' este liniar independent. \square

Observația 3.2.18. Dacă anularea unei combinații liniare finite, formată cu vectorii $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ permite exprimarea unui vector în funcție de ceilalți, atunci vectorii x_1, x_2, \dots, x_n sunt liniar dependenți. În caz contrar, vectorii sunt liniar independenți.

Definiția 3.2.19. Numărul maxim de vectori liniar independenți din S , $S \subset \mathbb{V}$, se numește dimensiunea sau rangul lui S .

Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$.

Definiția 3.2.20. S se numește sistem de generatori pentru \mathbb{V} dacă orice vector $x \in \mathbb{V}$ se exprimă ca o combinație liniară de vectori din S , adică există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$. În acest caz, spațiul vectorial \mathbb{V} se numește finit generat.

Observația 3.2.21. Dacă \mathbb{V} este generat de S , atunci $\mathbb{V} = \operatorname{Span}(S)$.

Exemple 3.2.22. 1) În \mathbb{R} -spațiul aritmetic \mathbb{R}^2 , mulțimea $S = \{(1; 1), (0; 1)\}$ este un sistem de generatori, deoarece orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2$ se scrie sub forma $x = \alpha \cdot (1; 1) + \beta \cdot (0; 1)$. Într-adevăr, ultima egalitate este echivalentă cu
$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha + \beta, \end{cases} \text{ unde } \begin{cases} \alpha = x_1 \\ \beta = x_2 - x_1. \end{cases}$$

2) În spațiul vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulțimea

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

este un sistem de generatori, deoarece orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se scrie sub forma

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Propoziția 3.2.23. Fie \mathbb{K} -spațiul vectorial \mathbb{V} și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{V}$ un sistem de generatori. Următoarele operații transformă sistemul S într-un nou sistem S' , care rămâne sistem de generatori pentru \mathbb{V} :

- 1) schimbarea ordinii vectorilor din S ;
- 2) înmulțirea unui vector din S cu un scalar nenul;
- 3) adăugarea la un vector din S a unui alt vector din S înmulțit cu un scalar nenul.

Teorema 3.2.24. (a schimbului) Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial, $S = \{u_1, \dots, u_s\}$ un sistem liniar independent din \mathbb{V} și $S' = \{v_1, \dots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru \mathbb{V} . Atunci:

- 1) $s \leq m$;
- 2) după o eventuală reindexare a vectorilor din S' , sistemul

$$S'' = \{u_1, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m\}$$

este tot un sistem de generatori pentru \mathbb{V} .

Demonstrație. Inducție matematică după s .

Dacă $s = 1$, atunci evident $1 \leq m$. Deoarece $\mathbb{V} = \text{Span}(S')$ rezultă că $\exists a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ astfel încât $u_1 = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m$. Cum $u_1 \neq 0_{\mathbb{V}}$, se poate alege $a_1 \neq 0$ și atunci $v_1 = a_1^{-1} \cdot u_1 - a_1^{-1}a_2 \cdot v_2 - \dots - a_1^{-1}a_m \cdot v_m$, deci $\mathbb{V} = \text{Span}(u_1, v_2, \dots, v_m)$.

Presupunând afirmația adevărată pentru $s-1$ și ținând cont că S este sistem liniar independent, rezultă că $s-1 \leq m$ și că există o renumerotare a vectorilor v_1, \dots, v_m astfel încât $\mathbb{V} = \text{Span}(u_1, \dots, u_{s-1}, v_s, v_{s+1}, \dots, v_m)$, deci există $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$u_s = b_1 \cdot u_1 + \dots + b_{s-1} \cdot u_{s-1} + b_s v_s + \dots + b_m \cdot v_m (*)$$

Dacă $s-1 = m$, atunci $u_s = b_1 \cdot u_1 + \dots + b_{s-1} \cdot u_{s-1}$, contradicție cu faptul că S este liniar independent. Deci $s-1 \leq m-1$, de unde $s \leq m$. Din (*) rezultă că se poate alege $b_s \neq 0$ și atunci avem

$$v_s = b_s^{-1} \cdot u_s - b_s^{-1}b_1 \cdot u_1 - \dots - b_s^{-1}b_{s-1} \cdot u_{s-1} - b_s^{-1}b_{s+1} \cdot v_{s+1} - \dots - b_s^{-1}b_m \cdot v_m$$

de unde rezultă că $\mathbb{V} = \text{Span}(u_1, \dots, u_s, v_{s+1}, \dots, v_m)$.

Observația 3.2.25. Conform afirmației 1), într-un spațiu vectorial finit generat, orice sistem de vectori liniar independent are mai puține elemente decât orice sistem de generatori. Conform afirmației 2), se pot înlocui în orice sistem de generatori unul sau mai mulți vectori cu alții, liniar independenți, fără ca proprietatea de a fi sistem de generatori a sistemului să fie afectată.

3.3. Bază și dimensiune

Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial.

Definiția 3.3.1. Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}$ se numește **bază** în \mathbb{V} dacă:

- 1) \mathcal{B} este liniar independent; 2) \mathcal{B} este sistem de generatori pentru \mathbb{V} .

Exemplele 3.3.2. 1) În spațiul aritmetic \mathbb{K}^n , mulțimea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1; 0; \dots; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; \dots; 0)$, \dots , $e_n = (0; 0; \dots; 0; 1)$ este o bază, numită **baza canonică**.

- 2) În spațiul real al polinoamelor de grad cel mult n , $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, mulțimea

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$$

este bază.

- 3) În spațiul vectorial al matricelor de tip (m, n) , $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, mulțimea

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\}$$

este o bază, unde $E_{ij} = (a_{kl})_{\substack{k=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,n}}}$ are elementele $a_{kl} = \begin{cases} 1, & (k, l) = (i, j) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

Definiția 3.3.3. Un spațiu vectorial \mathbb{V} se numește *finit dimensional* dacă admite o bază finită, în caz contrar se numește *infinit dimensional*.

Propoziția 3.3.4. Oricare două baze dintr-un \mathbb{K} -spațiu vectorial finit generat au același număr de elemente.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ și $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ două baze în \mathbb{V} . Se aplică de două ori teorema schimbului. \mathcal{B}_1 fiind liniar independent și \mathcal{B}_2 fiind sistem de generatori pentru \mathbb{V} , rezultă că $n \leq m$. Pe de altă parte, \mathcal{B}_1 este și sistem de generatori pentru \mathbb{V} , iar \mathcal{B}_2 este și sistem liniar independent, deci $n \geq m$. În final, $n = m$. \square

Definiția 3.3.5. Numărul de vectori dintr-o bază se numește *dimensiune a spațiului vectorial* și se notează cu $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

Exemplele 3.3.6. 1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leq n} = n + 1$.

2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$.

Propoziția 3.3.7. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial finit dimensional și $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o submulțime a sa. Atunci \mathcal{B} este o bază în \mathbb{V} dacă și numai dacă orice vector din \mathbb{V} are o exprimare unică ca o combinație liniară de vectori din \mathcal{B} .

Demonstrație. Dacă \mathcal{B} este o bază, atunci \mathcal{B} este sistem de generatori pentru \mathbb{V} . Rezultă că orice vector $x \in \mathbb{V}$ se scrie ca o combinație liniară a vectorilor din \mathcal{B} . Unicitatea reprezentării lui x se arată astfel: dacă $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ și $x = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot x_i$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, atunci $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \cdot x_i = 0$ și cum \mathcal{B} este sistem liniar independent, se obține $\alpha_i = \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Reciproc, din ipoteză, se deduce că \mathcal{B} este sistem de generatori pentru \mathbb{V} . Pentru a arăta că \mathcal{B} este liniar independent, se consideră combinația liniară

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n = 0_{\mathbb{V}}.$$

Dar $0_{\mathbb{V}} = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n$. Din unicitatea reprezentării vectorului $0_{\mathbb{V}}$, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Așadar, \mathcal{B} este bază. \square

Definiția 3.3.8. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial, $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ o bază în \mathbb{V} și $x \in \mathbb{V}$, $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_n \cdot x_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$. Scalarii unici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ se numesc **coordonatele vectorului x în baza \mathcal{B}** , iar funcția bijectivă $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n$, $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește **sistem de coordonate pe \mathbb{V}** .

Propoziția 3.3.9. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial de dimensiune n . Atunci:

- 1) orice sistem liniar independent are cel mult n vectori;
- 2) orice sistem liniar independent care are n vectori este bază în \mathbb{V} ;
- 3) orice sistem de generatori ai lui \mathbb{V} are cel puțin n vectori;
- 4) orice sistem de generatori ai lui \mathbb{V} care are n vectori este bază.

Teorema 3.3.10. (de existență a bazei unui spațiu) Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial de dimensiune n și $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $k \leq n$ o submulțime a sa, liniar independentă. Atunci există vectorii $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$ astfel încât mulțimea $\{x_1, \dots, x_{k+p}\}$ să formeze o bază, $k + p = n$.

Altfel reformulat: O mulțime de vectori liniar independenți ai unui spațiu vectorial poate fi completată până la o bază a spațiului.

Demonstrație. Există două cazuri referitoare la sistemul de vectori liniar independenți $S = \{x_1, \dots, x_k\}$.

CAZUL 1. S este un sistem de generatori ai spațiului. Atunci $\text{Span}(S) = \mathbb{V}$ și rezultă că S formează o bază.

CAZUL 2. S nu este un sistem de generatori. Atunci există $x_{k+1} \in \mathbb{V} \setminus S$ astfel încât x_{k+1} nu poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor din S . Rezultă că $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ este liniar independentă.

\mathcal{B} se poate afla în unul dintre cazurile precedente; continuând procedeul, după un număr finit de pași, se ajunge la baza $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$, $k + p = n$. \square

Teorema 3.3.11. (dimensiunii a lui Grassmann) Dacă \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 sunt două subspații vectoriale ale \mathbb{K} -spațiului vectorial finit dimensional \mathbb{V} , atunci

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2).$$

Demonstrație. Notăm $\dim(\mathbb{V}_1) = r_1$ și $\dim(\mathbb{V}_2) = r_2$.

Se consideră bază $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ a subspațiului $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Acești vectori sunt liniar independenți și, în plus, $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}_1$. Folosind teorema de existență a bazei, ei pot fi completați până la o bază a subspațiului \mathbb{V}_1 , deci există $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{V}_1$ astfel încât $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m\}$ să fie o bază în \mathbb{V}_1 .

Dar $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}_2$, deci există $\{z_1, \dots, z_p\} \subset \mathbb{V}_2$ astfel încât $\{z_1, \dots, z_p, e_1, \dots, e_m\}$ să fie o bază în \mathbb{V}_2 . Cu notațiile precedente, avem $r_1 = k + m$ și $r_2 = p + m$.

Mai rămâne de arătat că $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m, z_1, \dots, z_p\}$ este o bază a subspațiului $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.

Fie combinația $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_p z_p = 0$. Avem $z = \beta_1 \cdot z_1 + \dots + \beta_p \cdot z_p \in \mathbb{V}_2$, $t = \alpha_1 \cdot y_1 + \dots + \alpha_k \cdot y_k + \gamma_1 \cdot e_1 + \dots + \gamma_m \cdot e_m \in \mathbb{V}_1$, deci $z \in \mathbb{V}_1$, $z \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ și $t + z \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Atunci $z = \delta_1 \cdot e_1 + \dots + \delta_m \cdot e_m$, $\delta_i \in \mathbb{K}$. Dar $z = \beta_1 \cdot z_1 + \dots + \beta_p \cdot z_p$ și se obține $\delta_1 \cdot e_1 + \dots + \delta_m \cdot e_m + (-\beta_1) \cdot z_1 + \dots + (-\beta_p) \cdot z_p = 0$, de unde $\delta_1 = \dots = \delta_m = \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$, deoarece vectorii $\{e_1, \dots, e_m, z_1, \dots, z_p\}$ formează o bază în \mathbb{V}_2 . În plus, $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m\}$ sunt vectori liniar independenți, deci rezultă că $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. Orice vector din subspațiile \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 se exprimă liniar în raport cu vectorii bazei corespunzătoare și, mai mult, în raport cu vectorii $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m, z_1, \dots, z_p\}$. \square

În continuare se va lua în discuție modificarea coordonatelor unui vector la o schimbare de baze. Pentru aceasta, se consideră \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial de dimensiune n și $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baze în \mathbb{V} . Orice vector din \mathcal{B}_2 se exprimă în mod unic în funcție de vectorii bazei \mathcal{B}_1 , conform relațiilor $v_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} \cdot u_j$, $\forall i = \overline{1, n}$. Acest sistem definește o matrice pătratică de ordin n , $M = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce reprezintă transpusa matricei coeficienților.

Notând $\bar{\mathcal{B}}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\bar{\mathcal{B}}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, relația de legătură dintre vectorii celor două baze se reprezintă matriceal sub forma $\bar{\mathcal{B}}_2 = M^T \cdot \bar{\mathcal{B}}_1$.

Definiția 3.3.12. Matricea M , astfel determinată, se numește **matricea de trecere de la baza \mathcal{B}_1 la baza \mathcal{B}_2** .

Teorema 3.3.13. (de schimbare a bazei) Dacă M este matricea de trecere de la baza \mathcal{B}_1 la baza \mathcal{B}_2 , iar $X_{\mathcal{B}_1}$, $X_{\mathcal{B}_2}$ sunt vectorii coloană ai coordonatelor unui vector $x \in \mathbb{V}$ în bazele \mathcal{B}_1 , respectiv \mathcal{B}_2 , atunci $X_{\mathcal{B}_2} = M^{-1} X_{\mathcal{B}_1}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ cele două baze. Vectorul $x \in \mathbb{V}$ admite următoarele reprezentări în cele două baze: $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot u_j$, respectiv $x = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot v_i$.

Atunci $x = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} \cdot u_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \beta_i c_{ji} \right) \cdot u_j$. Ținând cont că reprezentarea lui x în baza \mathcal{B}_1 este unică, se poate scrie $\alpha_j = \sum_{i=1}^n \beta_i c_{ji}$, $i = \overline{1, n}$, sau sub formă matriceală $X_{\mathcal{B}_1} = M X_{\mathcal{B}_2}$, de unde $X_{\mathcal{B}_2} = M^{-1} X_{\mathcal{B}_1}$. \square

Observația 3.3.14. Matricea de trecere M este inversabilă.

Într-adevăr, \mathcal{B}_2 este sistem liniar independent, deci, din combinația liniară $\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0_{\mathbf{V}}$, rezultă $\alpha_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Această implicație se poate reformula $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_{ji} \cdot u_j \right) = 0_{\mathbf{V}}$, care este echivalentă cu $\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i c_{ji} \right) \cdot u_j = 0_{\mathbf{V}}$ și cum \mathcal{B}_1 este liniar independent, rezultă sistemul $\sum_{i=1}^n \alpha_i c_{ji} = 0, \forall i = \overline{1, n}$. Acest sistem omogen admite numai soluția banală, deci trebuie ca determinantul sistemului să fie nenul. Așadar, matricea M este inversabilă.

3.4. Spații euclidiene reale. Produs scalar

În acest paragraf, spațiul vectorial \mathbb{E} va fi considerat peste corpul numerelor reale, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, așadar definițiile și propozițiile din paragraful precedent rămân valabile.

Definiția 3.4.1. O aplicație $g: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ cu proprietățile:

- I. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{E}$;
- II. $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle, \forall x, x' \in \mathbb{E}$;
- III. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathbb{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- IV. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{E}$

se numește **produs scalar** pe spațiul vectorial \mathbb{E} .

Definiția 3.4.2. Spațiul vectorial real \mathbb{E} pe care s-a definit un produs scalar se numește **spațiu vectorial euclidian**.

Propoziția 3.4.3. (Inegalitatea lui Cauchy-Schwarz-Buniakowski) Dacă \mathbb{E} este un spațiu vectorial euclidian, atunci are loc inegalitatea

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}, \forall x, y \in \mathbb{E}$$

Demonstrație. Fie $x, y \in \mathbb{E}$ și $\lambda \in \mathbb{R}$.

Din proprietățile produsului scalar rezultă că $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ sau, echivalent,

$$(46) \quad \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se deosebesc două cazuri:

CAZUL 1. $\langle x, x \rangle = 0$.

Relația (46) este echivalentă cu $2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, de unde rezultă $\langle x, y \rangle = 0$ și atunci $|\langle x, y \rangle| = 0 \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}, \forall x, y \in \mathbb{E}$.

CAZUL 2. $\langle x, x \rangle \neq 0$.

Relația (46) afirmă că polinomul de gradul doi în λ din membrul stâng are semnul lui $\langle x, x \rangle$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, deci discriminantul $\Delta \leq 0$, inegalitate echivalentă cu $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}, \forall x, y \in \mathbb{E}$. \square

Observația 3.4.4. Fie \mathbb{E} un spațiu vectorial euclidian. Pentru orice pereche ordonată de vectori $(x, y) \in \mathbb{E} \setminus \{0_{\mathbb{E}}\}$ inegalitatea Cauchy - Schwarz - Buniakowski poate fi scrisă de forma:

$$\frac{|\langle x, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1.$$

Definiția 3.4.5. Fie \mathbb{E} un spațiu liniar euclidian. Soluția unică în intervalul $[0, \pi]$, notată $\widehat{(x, y)}$, a ecuației

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

se numește **unghiul neorientat** al perechii ordonate $(x, y) \in \mathbb{E} \setminus \{0_{\mathbb{E}}\}$.

Definiția 3.4.6. Se numește **normă** a unui vector x din spațiul euclidian \mathbb{E} , numărul real pozitiv $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Din modul de definire a produsului scalar, rezultă că norma unui vector are următoarele proprietăți:

- a) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall x \in \mathbb{E}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{E}}$;
- c) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{E}$ (**inegalitatea lui Schwartz**);
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{E}$ (**inegalitatea lui Minkowski**);
- e) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{E}$;
- f) $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{E}$.

Definiția 3.4.7. Se numește **distanță** pe spațiul vectorial real \mathbb{E} , orice aplicație $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, care are proprietățile:

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- b) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{E}$;
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{E}$.

Observația 3.4.8. Dacă \mathbb{E} este un spațiu euclidian, atunci aplicația $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin $d(x, y) = \|x - y\|$ este o distanță, numită distanță asociată normei lui \mathbb{E} sau distanța euclidiană.

Definiția 3.4.9. Doi vectori x, y din spațiul euclidian \mathbb{E} se numesc **ortogonali** dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

Observația 3.4.10. În plan sau în spațiu noțiunea de vectori ortogonali coincide cu cea de vectori perpendiculari.

Din egalitatea $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$, rezultă: condiția necesară și suficientă ca doi vectori $x, y \in \mathbb{E}$ să fie ortogonali este

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definiția 3.4.11. Fie \mathbb{E} un spațiu euclidian de dimensiune finită $n \geq 2$. O bază \mathcal{B} a lui \mathbb{E} , ai cărei vectori sunt ortogonali doi câte doi se numește **bază ortogonală** a lui \mathbb{E} .

Așadar, baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui \mathbb{E} este ortogonală dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

Definiția 3.4.12. Fie \mathbb{E} un spațiu euclidian de dimensiune finită $n \geq 2$. O bază ortogonală \mathcal{B} a lui \mathbb{E} , ai cărei vectori au toți norma egală cu 1, se numește **bază ortonormată** a lui \mathbb{E} .

Așadar, baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui \mathbb{E} este ortonormată dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, $\forall 1 \leq i < j \leq n$ și $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

Se notează $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Observația 3.4.13. Dacă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortogonală a lui \mathbb{E} , atunci $\mathcal{B}' = \left\{ \frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\}$ este o bază ortonormată a lui \mathbb{E} .

Propoziția 3.4.14. În spațiul euclidian \mathbb{E} , de dimensiune finită n , orice sistem de vectori nenuli, ortogonali doi câte doi, este liniar independent.

Demonstrație. Fie $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{E}$ un sistem de vectori nenuli, ortogonali, adică $\langle x_i, x_j \rangle = 0$, $\forall i \neq j$. Considerând combinația liniară nulă a vectorilor din S : $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_{\mathbb{E}}$ și înmulțind-o scalar, succesiv, cu x_1, x_2, \dots, x_n se obține $\langle \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, x_i \rangle = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, adică $\alpha_i \langle x_i, x_i \rangle = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, deci $\alpha_i = 0$, $\forall i = \overline{1, n}$, ceea ce demonstrează că S este sistem de vectori liniar independent. \square

Definiția 3.4.15. Fie \mathbb{E} un spațiu vectorial și L_1, L_2 două submulțimi ale lui \mathbb{E} . L_1, L_2 se numesc **ortogonale** dacă orice vector din L_1 este ortogonal pe orice vector din L_2 . Se notează $L_1 \perp L_2$.

În particular, dacă $L_1 = \{x\}$, $x \neq 0_{\mathbb{E}}$, atunci $x \perp L_2$ dacă x este ortogonal pe orice vector din L_2 .

Propoziția 3.4.16. Fie \mathbb{E} un spațiu vectorial real. Fie \mathbb{L} un subspațiu vectorial în \mathbb{E} și $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}$ o bază a subspațiului. Atunci $x \perp \mathbb{L} \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{y_1, \dots, y_k\}$ bază în \mathbb{L} . Dacă $x \perp \mathbb{L}$, atunci $\langle x, y_i \rangle = 0$, $\forall 1 \leq i \leq k$. Pentru un vector oarecare $z \in \mathbb{L}$, $z = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$ și $\langle x, z \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i \rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle x, y_i \rangle = 0$, deci $x \perp \mathbb{L}$. \square

Corolarul 3.4.17. Fie \mathbb{E} un spațiu vectorial și L_1, L_2 două subspații ortogonale. Orice vector al unei baze din subspațiul L_1 este ortogonal pe orice bază a subspațiului L_2 .

Definiția 3.4.18. Fie \mathbb{E} un spațiu euclidian și $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \dots, \mathbb{L}_m \subset \mathbb{E}$ subspații vectoriale. Fie $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \dots + \mathbb{L}_m$. \mathbb{L} se numește **sumă ortogonală de subspații** dacă $\mathbb{L}_i \perp \mathbb{L}_j$, $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$.

Teorema 3.4.19. O sumă ortogonală de subspații nenule este întotdeauna sumă directă și se notează $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{L}_m$.

Demonstrație. Alegem în fiecare subspațiu \mathbb{L}_i o bază ortonormată și considerăm sistemul de vectori formați din reuniunea bazelor subspațiilor \mathbb{L}_i , $i = \overline{1, m}$.

Orice $x \in \mathbb{L}$ se exprimă ca o combinație liniară a acestor vectori. Ei sunt liniar independenți, fiind vectori nenuli ortogonali (Propoziția 3.4.14).

În continuare, teorema rezultă pe baza faptului că reuniunea bazelor subspațiilor \mathbb{L}_i este o bază a spațiului \mathbb{L} . \square

Observația 3.4.20. Dacă $\mathbb{E} = \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_m$, atunci pentru $x, y \in \mathbb{E}$, rezultă $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, $x_i \in \mathbb{L}_i$ și $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, $y_i \in \mathbb{L}_i$. Atunci produsul scalar ia forma $\langle x, y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + \cdots + \langle x_m, y_m \rangle$.

Definiția 3.4.21. Fie L o submulțime nevidă a unui spațiu euclidian \mathbb{E} . Mulțimea $\{x \in \mathbb{E} \mid x \perp L\}$ se numește **complementul ortogonal** al lui L și se notează cu L^\perp .

Definiția 3.4.22. Fie $\mathbb{L} \subset \mathbb{E}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_s\} \subset \mathbb{L}$ o bază a subspațiului \mathbb{L} și $x \in \mathbb{E}$. Vectorul $y = \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle e_i$ se numește **proiecția** lui x pe subspațiul \mathbb{L} și se notează $\text{pr}_{\mathbb{L}} x$.

Teorema 3.4.23. Un spațiu euclidian \mathbb{E} este o sumă directă dintre un subspațiu vectorial al său \mathbb{L} și complementul ortogonal al acestuia \mathbb{L}^\perp , adică $\mathbb{E} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^\perp$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_s\} \subset \mathbb{L}$ o bază ortonormată a subspațiului \mathbb{L} , $x \in \mathbb{E}$ și $y = \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle e_i$ proiecția lui x pe \mathbb{L} . Fie $z = x - y$. Deoarece

$$\begin{aligned} \langle z, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle e_i \rangle \\ &\quad - \langle \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^s \langle x, e_j \rangle e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle^2 - \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle^2 - \sum_{i=1}^s \langle x, e_i \rangle^2 = 0, \end{aligned}$$

rezultă că $z \in \mathbb{L}^\perp$.

Exprimarea unică $x = y + z$ arată că $\mathbb{E} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^\perp$. \square

Teorema 3.4.24. (de ortonormalizare a lui Gram-Schmidt) Fie o bază $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ în spațiul euclidian \mathbb{E} , de dimensiune n . Există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui \mathbb{E} astfel încât sistemele de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ și $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ generează același subspațiu $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$, $\forall p = \overline{1, n}$.

Demonstrație. Mai întâi se construiește o mulțime ortogonală $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ și apoi normăm fiecare element. Se definesc vectorii

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1; \\ y_j &= x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle x_j, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i, \quad \forall j = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Vectorii y_1, y_2, \dots, y_n astfel definiți, sunt ortogonali doi câte doi, deci, conform propoziției anterioare, sunt liniar independenți.

Definim vectorii $e_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$, $\forall i = \overline{1, n}$ și rezultă că mulțimea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ reprezintă o bază ortonormată în \mathbb{E} .

Întrucât vectorii e_1, e_2, \dots, e_p se exprimă în funcție de x_1, x_2, \dots, x_p , iar aceste subsisteme sunt liniar independente, rezultă $\text{Span}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{Span}(x_1, x_2, \dots, x_p)$. \square

Corolarul 3.4.25. *Orice spațiu vectorial euclidian admite o bază ortonormată.*

Observațiile 3.4.26. 1) Fie $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată în \mathbb{E} și $x, y \in \mathbb{E}$.

Atunci $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, de unde rezultă expresia produsului scalar într-o bază ortonormată

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

2) Fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ două baze ortonormate în spațiul euclidian \mathbb{E} . Relațiile între elementele celor două baze sunt date de $f_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$, $\forall j = \overline{1, n}$. Dar \mathcal{B}_2 este ortonormată, deci

$$\delta_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n a_{ki} a_{hj} \langle e_k, e_h \rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj},$$

relație echivalentă cu scrierea matriceală $A^T A = I_n$.

Prin urmare, dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este matricea de trecere de la baza ortonormată \mathcal{B}_1 la baza ortonormată \mathcal{B}_2 , atunci $A^T A = I_n$, adică A este o matrice ortogonală.

Exemplul 3.4.27. Se consideră $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ spațiul euclidian canonic și baza

$$\mathcal{B} = \{x_1 = (1; 1; -1), x_2 = (3; -1; -1), x_3 = (0; -1; 1)\}.$$

Să se determine baza ortonormată asociată.

Utilizând procedeul Gram-Schmidt, se construiește mai întâi o mulțime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3\}$ formată din vectorii nenuli

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 = (1; 1; -1); \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 = (3; -1; -1) - \frac{3}{3}(1; 1; -1) = (2; -2; 0); \\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \\ &= (0; 1; -1) - \frac{-2}{3}(1; 1; -1) - \frac{2}{8}(2; -2; 0) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Vectorii

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \\ e_3 &= \frac{y_3}{\|y_3\|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \end{aligned}$$

formează o bază ortonormată.

3.5. Probleme propuse

Problema 3.5.1. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se stabilească dacă legile de compoziție

$$\begin{aligned}\oplus: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \oplus y = x + y - a; \\ \odot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha \odot x = \alpha x + (1 - \alpha)a,\end{aligned}$$

determină o structură de spațiu vectorial real pe mulțimea \mathbb{R} .

Problema 3.5.2. Să se arate că mulțimea $(0, \infty)$ este un spațiu vectorial real în raport cu legile de compoziție

$$\begin{aligned}\oplus: (0, \infty) \times (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty), \quad x \oplus y = xy; \\ \odot: \mathbb{R} \times (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty), \quad \alpha \odot x = x^\alpha.\end{aligned}$$

Problema 3.5.3. Să se arate că mulțimea $S = \{(\alpha - 2\beta; \alpha + 3\beta; \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial real \mathbb{R}^3 . Determinați o bază în S , precum și $\dim_{\mathbb{R}} S$.

Problema 3.5.4. Se consideră mulțimea

$$L = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, u, z \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}$$

- Să se arate că L este un subspațiu vectorial al lui $M_{2,3}(\mathbb{R})$.
- Determinați o bază în L , precum și $\dim_{\mathbb{R}} L$.

Problema 3.5.5. Se consideră sistemul omogen

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemul. Să se arate că mulțimea soluțiilor sistemului este un subspațiu vectorial în \mathbb{R}_4 . Determinați o bază în subspațiul soluțiilor sistemului.

Problema 3.5.6. În spațiul vectorial real $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ se consideră mulțimea $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, unde $f_i(x) = e^{a_i x}$, $i = \overline{1, n}$, $a_i \in \mathbb{R}$, distincte. Să se arate că S este liniar independentă.

Problema 3.5.7. Fie $f \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ un polinom de grad n . Să se arate că mulțimea

$$S = \{f, f', \dots, f^{(n)}\},$$

unde $f^{(k)}$ este derivata de ordinul k a polinomului f , este liniar independentă în spațiul vectorial $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{h \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } h \leq n\}$.

Problema 3.5.8. Să se arate că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ din spațiul vectorial real \mathbb{R}^3 , unde $v_1 = (1; 1; 0)$, $v_2 = (1; 0; 1)$, $v_3 = (0; 1; 1)$ și $v_4 = (1; 1; 1)$ este liniar dependent.

Problema 3.5.9. În spațiul vectorial real \mathbb{R}^3 se consideră vectorii $v_1 = (1; 2; 3)$, $v_2 = (2; 3; 1)$, $v_3 = (\alpha + 3; \alpha + 1; \alpha + 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Știind că vectorii v_1 , v_2 și v_3 sunt liniar dependenți, să se determine α .

Problema 3.5.10. Să se stabilească dacă vectorul $v = (4; -2; 0; 3)$ din spațiul vectorial real \mathbb{R}^4 este o combinație liniară a vectorilor $v_1 = (3; 9; -4; -2)$, $v_2 = (2; 3; 0; -1)$ și $v_3 = (2; -1; 2; 1)$.

Problema 3.5.11. Să se determine baza din spațiul vectorial \mathbb{R}^3 în raport cu care vectorii $u_1 = (1; 0; 0)$, $u_2 = (1; 1; 0)$, $u_3 = (1; 1; 1)$ au respectiv componentele u_3 , u_2 , u_1 .

Problema 3.5.12. În $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, spațiul vectorial al polinoamelor reale de grad cel mult 2, să se găsească coordonatele polinomului $p(x) = 3x^2 - x + 4$ în raport cu baza $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, unde $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + 3$.

Problema 3.5.13. În spațiul vectorial real \mathbb{R}^3 se consideră baza canonică

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\}$$

și o altă bază $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1; 2; 1), u_2 = (1; -1; 0), u_3 = (3; 1; -2)\}$. Să se determine matricea de trecere de la baza \mathcal{B} la baza \mathcal{B}' , precum și coordonatele vectorului $v = (2; 3; -5)$ în baza \mathcal{B}' .

Problema 3.5.14. În $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, spațiul vectorial al polinoamelor reale de grad cel mult n , se consideră $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}[X]_{\leq n} \times \mathbb{R}[X]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin $\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^n (k!)^2 a_k b_k$, pentru orice polinoame

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad \forall i, j = \overline{0, n}.$$

Să se verifice că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar și să se calculeze $\|h\|$, unde $h(x) = 1 + 5x - 4x^2 + 6x^3$.

Problema 3.5.15. Fie spațiul vectorial $C^0([1; e]) = \{f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } [1; e]\}$. Se definește aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle: C^0([1; e]) \times C^0([1; e]) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin

$$\langle f, g \rangle = \int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx.$$

- Să se arate că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar.
- Să se calculeze $\|h\|$, dacă $h(x) = \sqrt{x}$.
- Să se determine funcția $g \in C^0([1, e])$, $g(x) = ax + b$, ortogonală funcției $f(x) = 5$, $\forall x \in [1, e]$.

Problema 3.5.16. În spațiul $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ se consideră vectorii:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= 3x^2 + 2x + 1; & p_2(x) &= -x^2 + 2x + 1; \\ p_3(x) &= 3x^2 + 2x + 5; & p_4(x) &= 3x^2 + 5x + 2. \end{aligned}$$

Să se determine un polinom $p(x)$ echidistant vectorilor p_1 , p_2 , p_3 și p_4 în raport cu distanța euclidiană.

Problema 3.5.17. În \mathbb{R}^4 se consideră vectorii ortogonali $x = (1; 0; 1; 3)$ și $y = (-1; 1; 1; 0)$. Să se completeze acești vectori până la o bază ortogonală.

Problema 3.5.18. În spațiul euclidian \mathbb{R}^3 se consideră

$$S = \{x \in \mathbb{R}_3 \mid x = (x_1, x_2, x_3), \quad x_1 + x_2 = 0\}.$$

- a) Să se determine complementul său ortogonal S^\perp .
- b) Să se descompună vectorul $v = (1, 4, 5)$ după cele două subspații.

Problema 3.5.19. În spațiul euclidian \mathbb{R}^4 se consideră vectorii $x_1 = (1; 3; 0; 2)$, $x_2 = (3; 7; -1; 2)$ și $x_3 = (2; 4; -1; 0)$. Să se afle complementul ortogonal al subspațiului generat de acești vectori.

Problema 3.5.20. Se consideră vectorul $v = (1; 0; 1; 1) \in \mathbb{R}^4$ și $S = \text{Span}(\{x_1, x_2, x_3\})$, unde $x_1 = (1; 1; 2; 1)$, $x_2 = (-1; 0; 2; 3)$ și $x_3 = (1; 2; -1; -3)$. Să se determine proiecția ortogonală a lui v pe S , precum și complementul ortogonal al lui v relativ la S .

CAPITOLUL 4

Transformări liniare

Algebra liniară constituie cadrul matematic abstract pentru rezolvarea problemelor liniare din diverse ramuri. Noțiunile de bază sunt: spațiul vectorial și transformarea (operatorul, aplicația) liniară. Transformările liniare definite în acest capitol sunt funcții care au domeniul de definiție și codomeniul spații vectoriale, deci sunt "purtătoare" de informație de la un spațiu vectorial la altul.

În secțiunea 4.1 definim conceptul de transformare liniară pe spații vectoriale finit dimensionale, apoi introducem noțiunile de monomorfism, epimorfism, izomorfism și endomorfism. Secțiunea 4.2 este dedicată operațiilor cu transformări liniare, în secțiunea 4.3 ne ocupăm de proprietățile acestora, iar în secțiunea 4.4 introducem noțiunile de nucleu și imagine pentru transformări liniare. Aceste noțiuni ne permit caracterizarea injectivității și surjectivității unei transformări liniare. Izomorfismele de spații vectoriale sunt studiate în secțiunea 4.5. În secțiunea 4.6 atașăm unei transformări liniare o matrice în raport cu perechea de baze din cele două spații vectoriale pe care este definită și respectiv în care ia valori. Tipuri speciale de transformări liniare, tipuri de endomorfisme pe spații euclidiene, sunt studiate în secțiunea 4.7. În finalul capitolului propunem un set de probleme, aplicații la întregul material teoretic prezentat anterior.

4.1. Definiția transformării liniare

În acest capitol vom introduce funcții ale căror variabile sunt elemente ale unui spațiu vectorial de dimensiune finită, iar valorile lor sunt elemente ale unui alt spațiu vectorial finit dimensional.

Fie \mathbf{V} și \mathbf{W} două liniare spații vectoriale finit dimensionale, definite peste același corp comutativ \mathbf{K} .

Definiția 4.1.1. O aplicație $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ se numește **transformare liniară (operator liniar, aplicație liniară sau morfism de spații liniare)** dacă satisface:

a) proprietatea de **aditivitate**

$$(47) \quad \forall u, v \in \mathbf{V} : T(u + v) = T(u) + T(v);$$

b) proprietatea de **omogeneitate**

$$(48) \quad \forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall u \in \mathbf{V} : T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Definiția 4.1.2. O transformare liniară T se numește **monomorfism, epimorfism sau izomorfism** dacă T este respectiv injectivă, surjectivă sau bijectivă.

Dacă $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ atunci transformarea liniară T se numește **endomorfism**. Un endomorfism bijectiv se numește **automorfism**.

Observația 4.1.3. Dacă în Definiția 4.1.1, a), înlocuim $u = 0_{\mathbb{V}}$ și $v = 0_{\mathbb{W}}$ rezultă că

$$(49) \quad T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}},$$

unde $0_{\mathbb{V}}$ și respectiv $0_{\mathbb{W}}$ sunt vectorii nuli din \mathbb{K} -spațiile vectoriale \mathbb{V} și respectiv \mathbb{W} . Condiția (49) este doar o condiție necesară ca o transformare să fie liniară. De aici rezultă că dacă $T(0_{\mathbb{V}}) \neq 0_{\mathbb{W}}$ atunci T nu este liniară.

Prezentăm teorema de caracterizare a transformărilor liniare.

Teorema 4.1.4. Condiția necesară și suficientă ca o transformare să fie liniară este:

$$(50) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v).$$

Demonstrație. *Necesitatea.* Presupunem că T este o transformare liniară. Conform Definiției 4.1.1

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = T(\alpha u) + T(v) = \alpha T(u) + T(v).$$

Suficiența. Considerăm în (50) $\alpha = 1$ și rezultă (47). Considerăm în (50) $v = 0_{\mathbb{V}}$ și folosind Observația 4.1.3 rezultă (48). \square

Cu ajutorul inducției matematice demonstrăm că dacă T este transformare liniară atunci oricare ar fi $u_i \in \mathbb{V}$ și oricare ar fi $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, are loc relația

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i).$$

Exemplele 4.1.5. 1. Fie $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult doi. Demonstrăm că aplicația $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x)$ pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ este o transformare liniară. Verificăm condiția (50). Într-adevăr, pentru $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\forall x \in \mathbb{R} : [T(\alpha p + q)](x) = x(\alpha p + q)'(x) = x(\alpha p' + q')(x) = \alpha xp'(x) + xq'(x) = \alpha [Tp](x) + [Tq](x)$.

2. Aplicația $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin $T(X) = (x_1 + 1, x_2, x_1 + x_2)$, $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nu este o transformare liniară deoarece $T(0_{\mathbb{R}^2}) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $0_{\mathbb{R}^2} = (0; 0)$, conform Observației 4.1.3.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o matrice fixată. Dacă $X \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ definim

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, T(X) = \left(\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \right).$$

T este o transformare liniară asociată matricei A .

De exemplu, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definită prin $T(X) = (x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_2)$, $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ este transformarea liniară asociată matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $\lambda \in \mathbb{K}$, λ fixat. Definim funcția

$$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \forall u \in \mathbb{V} : T(u) = \lambda u.$$

Atunci $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = \lambda(\alpha u + v) = \alpha(\lambda u) + \lambda v = \alpha T(u) + T(v)$.

Pentru $\lambda = 0$ obținem $T = 0_{\mathcal{L}(\mathbf{V})}$ numită **transformarea nulă** a lui \mathbf{V} .

Pentru $\lambda = 1$ obținem $T = id_{\mathcal{L}(\mathbf{V})}$ numită **transformarea identitate** a lui \mathbf{V} .

Pentru $\lambda \in \mathbb{K}$ endomorfismele T definite mai sus se numesc **omotetii de raport λ ale lui \mathbf{V}** .

5. Fie \mathbf{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial și $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ două subspații vectoriale ale lui \mathbf{V} astfel încât $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$. Atunci orice vector $u \in \mathbf{V}$ se descompune în mod unic sub forma $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \mathbf{V}_1, u_2 \in \mathbf{V}_2$, conform Propoziției 3.2.7. Definim funcțiile

$$\Pi_1 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_1, \forall u \in \mathbf{V} : \Pi_1(u) = u_1$$

și

$$\Pi_2 : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_2, \forall u \in \mathbf{V} : \Pi_2(u) = u_2.$$

Demonstrăm că $\Pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_1), \Pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}_2)$. Fie $u, v \in \mathbf{V}$, u, v admit descompunerea unică $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2, u_1, v_1 \in \mathbf{V}_1, u_2, v_2 \in \mathbf{V}_2$. Atunci pentru $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \Pi_i(\alpha u + v) = \alpha u_i + v_i = \alpha \Pi_i(u) + \Pi_i(v), i = 1, 2$.

Transformările liniare Π_1 și Π_2 definite mai sus, se numesc: Π_1 **proiecția spațiului \mathbf{V} pe \mathbf{V}_1 paralelă cu \mathbf{V}_2** și respectiv Π_2 **proiecția spațiului \mathbf{V} pe \mathbf{V}_2 paralelă cu \mathbf{V}_1** .

Vom nota $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \{T \mid T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}, T \text{ transformare liniară}\}$. În cazul particular al endomorfismelor ($\mathbf{W} = \mathbf{V}$), vom nota $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \mathcal{L}(\mathbf{V})$.

Definiția 4.1.6. *Spațiul liniar $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbb{K}) = \mathbf{V}^\#$ se numește **dualul algebric** al spațiului liniar \mathbf{V} peste corpul comutativ \mathbb{K} . Dacă $L \in \mathbf{V}^\#$ atunci L este numită **formă liniară**.*

4.2. Operații cu transformări liniare

Teorema 4.2.1. $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ este un spațiu vectorial peste corpul comutativ \mathbb{K} .

Demonstrație. Introducem legea internă din $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Definim suma a două transformări liniare astfel : $\forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) : (T + S)(u) = T(u) + S(u), \forall u \in \mathbf{V}$.

Folosind definiția sumei a două funcții, liniaritatea și Teorema 4.1.4 obținem:

$$\begin{aligned} \forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) : (T + S)(\alpha u + v) &= T(\alpha u + v) + S(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) + \alpha S(u) + S(v) \\ &= \alpha(T(u) + S(u)) + (T(v) + S(v)) = \alpha(T + S)(u) + (T + S)(v), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbf{V}, \text{ adică} \\ &T + S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}). \end{aligned}$$

Introducem legea externă din $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$. Definim produsul dintre un scalar și o transformare liniară astfel: $\forall T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda T)(u) = \lambda T(u), \forall u \in \mathbf{V}$.

Folosind definiția produsului dintre un scalar și o aplicație, liniaritatea ei și Teorema 4.1.4 obținem:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) : (\lambda T)(\alpha u + v) &= \lambda T(\alpha u + v) = \lambda(\alpha T(u) + T(v)) = \alpha(\lambda T(u)) + \lambda T(v) = \\ &= \alpha(\lambda T)(u) + (\lambda T)(v), \forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbf{V}, \text{ adică } \lambda T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}). \end{aligned}$$

Având definite aceste operații se verifică ușor că $(\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), +)$ este grup comutativ și sunt satisfăcute axiomele spațiului vectorial. \square

Teorema 4.2.2. *Fie \mathbf{V}, \mathbf{W} și \mathbf{U} trei spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} și $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}), S \in \mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{U})$. Atunci $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{U})$ (compunerea a două transformări liniare*

este o transformare liniară), unde $(S \circ T)(u) = S(T(u)), \forall u \in \mathbb{V}$. Mai mult, dacă T și S sunt izomorfisme, atunci $S \circ T$ este izomorfism.

Pentru orice izomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, funcția inversă este o transformare liniară, adică $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ (inversul unui izomorfism liniar este un izomorfism liniar).

Demonstrație. Din liniaritatea lui T și S rezultă din

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{V} : (S \circ T)(\alpha u + v) = S(T(\alpha u + v)) = S(\alpha T(u) + T(v)) = \alpha S(T(u)) + S(T(v)) = \alpha(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v) \Rightarrow S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{U}).$$

Deoarece compunerea a două funcții bijective este o funcție bijectivă rezultă că $S \circ T$ este bijectivă, deci este izomorfism.

Deoarece inversa unei funcții bijective este o funcție bijectivă este suficient să demonstrăm că T^{-1} este o transformare liniară.

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, w_1, w_2 \in \mathbb{W} \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in \mathbb{V} : T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2 : T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = T^{-1}(\alpha T(v_1) + T(v_2)) = T^{-1}(T(\alpha v_1 + v_2)) = (T^{-1} \circ T)(\alpha v_1 + v_2) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$, deci $T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$. \square

Observația 4.2.3. Pentru orice $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ are loc relația $T(-v) = -T(v), \forall v \in \mathbb{V}$. Afirmatia rezultă din condiția (48) în care $\alpha = -1$.

4.3. Proprietăți ale transformărilor liniare

Teorema 4.3.1. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

a) Dacă \mathbb{V}_1 este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} , atunci $T(\mathbb{V}_1)$ este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{W} .

b) Dacă \mathbb{W}_1 este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{W} , atunci $T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) \in \mathbb{W}_1\}$ este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} .

Demonstrație. a) Fie $\alpha \in \mathbb{K}, w_1, w_2 \in T(\mathbb{V}_1) \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in \mathbb{V}_1 : T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2 \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 = \alpha T(v_1) + T(v_2) = T(\alpha v_1 + v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 \in T(\mathbb{V}_1) \Rightarrow T(\mathbb{V}_1)$ subspațiu liniar.

b) Observăm că $T^{-1}(\mathbb{W}_1) \neq \emptyset$ deoarece $T^{-1}(0_{\mathbb{W}}) = 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}_1$. Fie $\alpha \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in T^{-1}(\mathbb{W}_1) \Rightarrow T(v_1) \in \mathbb{W}_1, T(v_2) \in \mathbb{W}_1, \mathbb{W}_1$ subspațiu vectorial al lui $\mathbb{W} \Rightarrow \alpha T(v_1) + T(v_2) = T(\alpha v_1 + v_2) \in \mathbb{W}_1 \Rightarrow \alpha v_1 + v_2 \in T^{-1}(\mathbb{W}_1)$, deci $T^{-1}(\mathbb{W}_1)$ subspațiu liniar. \square

Teorema 4.3.2. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

a) Dacă mulțimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar dependentă în \mathbb{V} , atunci și mulțimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar dependentă în \mathbb{W} .

b) Dacă T este injectivă și mulțimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în \mathbb{V} , atunci și mulțimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în \mathbb{W} .

c) Dacă T este surjectivă și mulțimea de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru \mathbb{V} , atunci și mulțimea de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru \mathbb{W} .

d) Dacă T este bijectivă atunci $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}$.

Demonstrație. a) Fie mulțimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ liniar dependentă în \mathbb{V} . Rezultă că $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$. Dar $T(\alpha_1 v_1 +$

$\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = T(0_{\mathbf{V}}) \Rightarrow \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0_{\mathbf{W}}$ cu $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbf{K}^n}$, deci mulțimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar dependentă în \mathbf{W} .

b) Fie mulțimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ liniar independentă în \mathbf{V} și $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$, astfel încât $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = 0_{\mathbf{W}} \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = 0_{\mathbf{W}}$. Deoarece T este transformare liniară injectivă are loc egalitatea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbf{V}}$. Dar $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în \mathbf{V} , rezultă că $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, deci mulțimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în \mathbf{W} .

c) Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ un sistem de generatori pentru \mathbf{V} și T transformare liniară surjectivă. Fie $w \in \mathbf{W}$ arbitrar. Deoarece T este transformare liniară surjectivă există $v \in \mathbf{V}$ astfel încât $T(v) = w$. Dar $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este un sistem de generatori pentru \mathbf{V} rezultă că $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$. Rezultă că $w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$, deci $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru \mathbf{W} .

d) Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în \mathbf{V} . Deoarece T este bijectivă, folosind rezultatele de la punctele b) și c), rezultă că $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este o mulțime ordonată de vectori liniar independenți și sistem de generatori, deci o bază în \mathbf{W} . Rezultă că dimensiunile celor două spații vectoriale coincid. \square

Teorema 4.3.3. *Dacă $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază în \mathbf{V} și $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sunt n vectori oarecare în \mathbf{W} atunci există și este unică o transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ astfel încât $T(v_i) = w_i, i = \overline{1, n}$.*

Demonstrație. Dacă $v \in \mathbf{V}$ și $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază în \mathbf{V} atunci există și sunt unici $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ astfel încât $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Definim $T(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.

Unicitatea lui T rezultă din faptul că \mathcal{B} este bază.

Demonstrăm că T este o transformare liniară. Fie $u_1, u_2 \in \mathbf{V}$, există și sunt unici $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n, (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbf{K}^n$, astfel încât $u_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, u_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Conform Definiției, $T(u_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i, T(u_2) = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i$. Pentru orice $\lambda \in \mathbf{K}, \lambda u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) v_i$. Dar $T(\lambda u_1 + u_2) = \sum_{i=1}^n (\lambda \alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i = \lambda T(u_1) + T(u_2)$. \square

Teorema 4.3.4. *Spațiul dual $\mathbf{V}^\#$ al unui spațiu vectorial finit dimensional are aceeași dimensiune cu \mathbf{V} .*

Demonstrație. Fie $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{V} = n$ și $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în \mathbf{V} . Pornind de la această bază a spațiului vectorial \mathbf{V} , vom construi o bază în spațiul dual, care se va numi duala bazei \mathcal{B} . Pentru $v \in \mathbf{V}$ avem $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Introducem n forme liniare (vezi Definiția 4.1.6) care iau în v valori egale cu coordonatele vectorului în baza \mathcal{B} ,

$$L_1(v) = \alpha_1, L_2(v) = \alpha_2, \dots, L_n(v) = \alpha_n.$$

Formele liniare astfel definite sunt unice, conform Teoremei 4.3.3. Observăm că

$$L_j(v_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}.$$

Demonstrăm că $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ formează o bază în $\mathbf{V}^\#$.

Justificăm că vectorii $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ sunt liniar independenți. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ astfel încât $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbf{V}^\#}$. Rezultă că $\forall v \in \mathbf{V}$ avem $(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n)(v) =$

$0_{\mathbb{K}}$. În particular dacă $v = v_i, i = \overline{1, n}$ $(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n)(v_i) = \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$. Deci $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ sunt liniar independenți.

Demonstrăm că $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{V}^\#$. Fie $L \in \mathbb{V}^\#$ și $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Atunci

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i L(v_i) = \sum_{i=1}^n L_i(v) L(v_i).$$

Rezultă că $\mathcal{B}^\# = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ este o bază în $\mathbb{V}^\#$, duala bazei \mathcal{B} . \square

Observația 4.3.5. Din Teorema 4.3.4 rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}^\# = n$, deci $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^\#$ adică spațiile sunt izomorfe.

4.4. Rangul și defectul unei transformări liniare

Definiția 4.4.1. Mulțimea $\text{Ker}(T) = \{v \mid v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$ se numește **nucleul transformării liniare** T .

Mulțimea $\text{Im}(T) = \{w \mid w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V}, T(v) = w\}$ se numește **imaginea transformării liniare** T .

Teorema 4.4.2. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Nucleul lui T este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} ; imaginea lui T este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{W} .

Demonstrație. Observăm că $\text{Ker}(T) \neq \emptyset$ deoarece $0_{\mathbb{V}} \in \text{Ker}(T)$, conform relației (49).

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \text{Ker}(T) \Rightarrow T(u) = 0_{\mathbb{W}}, T(v) = 0_{\mathbb{W}}; T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) = \alpha 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow \alpha u + v \in \text{Ker}(T)$.

Observăm că $\text{Im}(T) \neq \emptyset$ deoarece $0_{\mathbb{W}} \in \text{Im}(T)$, conform relației (49).

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \mathbb{W} : T(u) = w_1, T(v) = w_2; \alpha w_1 + w_2 = \alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v) \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 \in \text{Im}(T)$. \square

Dăm o caracterizare a injectivității unei transformări liniare cu ajutorul nucleului ei.

Teorema 4.4.3. O transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ este injectivă dacă și numai dacă $\text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Demonstrație. *Necesitatea.* Presupunem că T este injectivă și fie $v \in \text{Ker}(T) \Rightarrow T(v) = 0_{\mathbb{W}}$. Dar $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$, adică $\text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.

Suficiența. Presupunem că $\text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ și fie $T(u) = T(v)$. Rezultă $T(u - v) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow u - v \in \text{Ker}(T) \Rightarrow u = v$, adică T injectivă. \square

Dăm o caracterizare a surjectivității unei transformări liniare cu ajutorul imaginii ei.

Teorema 4.4.4. O transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ este surjectivă dacă și numai dacă $\text{Im}(T) = \mathbb{W}$.

Demonstrație. Rezultă din definiția surjectivității. \square

Observația 4.4.5. Dacă \mathbb{V} și \mathbb{W} spații vectoriale finit dimensionale peste același corp comutativ \mathbb{K} , rezultă că nucleul și imaginea unei transformări liniare, care sunt subspații liniare (Teorema 4.2.2), sunt finit dimensionale și $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T)) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}, \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T)) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}$.

Definiția 4.4.6. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Se numește **rangul** lui T și se notează $\text{rang}(T)$, dimensiunea subspațiului $\text{Im}(T)$, $\text{rang}(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T))$. Se numește **defectul** lui T și se notează $\text{def}(T)$, dimensiunea subspațiului $\text{Ker}(T)$, $\text{def}(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T))$.

Teorema 4.4.7. (Teorema rang-defect) Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Atunci

$$\text{rang}(T) + \text{def}(T) = n.$$

Demonstrație. Presupunem că $n \geq 1$, cazul $n = 0$ fiind banal. Fie $\text{def}(T) = r \leq n$ și fie $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_r\}$ o bază în $\text{Ker}(T)$, dacă $\text{Ker}(T) \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$. Completăm mulțimea de vectori liniar independentă \mathcal{B}' până la o bază $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ în \mathbb{V} . Demonstrăm că $\mathcal{B}'' = \{T(v_{r+1}), \dots, T(v_n)\}$ este o bază în $\text{Im}(T)$. Pentru aceasta arătăm că vectorii mulțimii \mathcal{B}'' sunt liniar independenți și formează un sistem de generatori pentru $\text{Im}(T)$.

Fie $w \in \text{Im}(T) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V} : T(v) = w$. Dar $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow w = T(v) = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) \Rightarrow w = \sum_{i=r+1}^n \alpha_i T(v_i)$, deoarece $v_i \in \text{Ker}(T), i = \overline{1, r}$. Rezultă că $w \in \text{Span}(\mathcal{B}'')$, adică orice vector din $\text{Im}(T)$ se poate scrie ca o combinație liniară de vectori din \mathcal{B}'' .

Fie $\sum_{i=r+1}^n \alpha_i T(v_i) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i \in \text{Ker}(T) \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i \Rightarrow \sum_{i=r+1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^r \beta_i v_i = 0_{\mathbb{V}}$.

Deoarece \mathcal{B} este o mulțime de vectori liniar independentă, rezultă $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$, deci mulțimea de vectori \mathcal{B}'' este liniar independentă.

Rezultă că \mathcal{B}'' este o bază în $\text{Im}(T)$, deci $\text{rang}(T) = n - r \Rightarrow \text{rang}(T) + \text{def}(T) = n$. \square

Exemplul 4.4.8. Considerăm transformarea liniară din Exemplul 4.1.5,

$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Determinăm nucleul și imaginea lui T și verificăm teorema rangului. Conform definiției,

$$\text{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : xp'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\} = \{c : c \in \mathbb{R}\}, \text{ deci } \text{def}(T) = 1.$$

$\text{Im}(T) = \{q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : \exists p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, Tp = q\}$. Fie $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, p(x) = a + bx + cx^2, xp'(x) = bx + 2cx^2$, deci $\text{Im}(T) = \{q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, q(x) = dx + fx^2\}$. Evident $\text{rang}(T) = 2$, o bază în $\text{Im}(T)$ este, de exemplu, $\{x, x^2\}$. De aici rezultă că $\text{rang}(T) + \text{def}(T) = 2 + 1 = 3$.

Teorema 4.4.9. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Atunci au loc afirmațiile:

- T este transformare liniară injectivă dacă și numai dacă $\text{rang}(T) = n, n \leq m$.
- T este transformare liniară surjectivă dacă și numai dacă $\text{rang}(T) = m, m \leq n$.
- T este transformare liniară bijectivă dacă și numai dacă $\text{rang}(T) = n, n = m$.

Demonstrație. Justificăm afirmația a): T injectivă $\Leftrightarrow \text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\} \Leftrightarrow \text{def}(T) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(T) = n$ (Teorema 4.4.7) și, deoarece $\text{Im}(T)$ este subspațiu vectorial al lui \mathbb{W} (Teorema 4.4.2), rezultă că $n = \text{rang}(T) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$.

Demonstrăm afirmația b): T surjectivă $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = \mathbb{W} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} \Leftrightarrow \text{rang}(T) = m$ și deoarece $\text{rang}(T) + \text{def}(T) = n, \text{def}(T) \geq 0 \Rightarrow \text{rang}(T) = m \leq n$.

Afirmația c) este o consecință imediată a afirmațiilor a) și b). \square

Teorema 4.4.10. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = n$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Atunci afirmațiile următoare sunt echivalente:

- a) T este o transformare liniară injectivă.
- b) T este o transformare liniară surjectivă.
- c) T este o transformare liniară bijectivă.

Demonstrație. Demonstrațiile rezultă utilizând Teorema 4.4.9. \square

Teorema 4.4.11. Fie \mathbb{U}, \mathbb{V} și \mathbb{W} trei spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{V}), S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Atunci

- a) $\text{rang}(S \circ T) \leq \min \{\text{rang}(S), \text{rang}(T)\}$
- b) dacă S este izomorfism atunci $\text{rang}(S \circ T) = \text{rang}(T)$,
- c) dacă T este izomorfism atunci $\text{rang}(S \circ T) = \text{rang}(S)$.

Demonstrație. a) Dacă demonstrăm că $\text{Im}(S \circ T) \subseteq \text{Im}(S)$ rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(S \circ T) \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(S)$ adică $\text{rang}(S \circ T) \leq \text{rang}(S)$.

Dar $T(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$ conform Teoremei 4.3.1, $S(T(\mathbb{U})) \subseteq S(\mathbb{V}) \Rightarrow \text{Im}(S \circ T) \subseteq \text{Im}(S)$.

Dacă demonstrăm că $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$ rezultă că $\text{def}(T) \leq \text{def}(S \circ T)$. Dar $\text{def}(T) + \text{rang}(T) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{U}$, $\text{def}(S \circ T) + \text{rang}(S \circ T) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{U}$, deci $\text{rang}(S \circ T) \leq \text{rang}(T)$.

Fie $u \in \ker(T) \Rightarrow T(u) = 0_{\mathbb{V}}, S(T(u)) = S(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$, deci $u \in \ker(S \circ T)$.

b) $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, S izomorfism, rezultă că $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ și este izomorfism. Scriem $T = S^{-1} \circ (S \circ T)$ și conform punctului a) și b), $\text{rang}(T) \leq \min \{\text{rang}(S \circ T), \text{rang}(S^{-1})\} \leq \text{rang}(S \circ T) \leq \min \{\text{rang}(S), \text{rang}(T)\} \leq \text{rang}(T)$.

c) Scriem $S = (S \circ T) \circ T^{-1}$ și facem un raționament analog cu cel de la punctul b). \square

4.5. Spații vectoriale izomorfe

Definiția 4.5.1. Două spații vectoriale \mathbb{V} și \mathbb{W} , peste același corp comutativ \mathbb{K} , se numesc **spații vectoriale izomorfe** dacă există un izomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Vom nota $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$.

În cele ce urmează vom utiliza notația

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.5.2. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$. Atunci au loc afirmațiile:

- a) $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^n$.
- b) Dacă \mathbb{W} și \mathbb{Z} sunt două \mathbb{K} -spații vectoriale, atunci $\mathbb{W} \cong \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z}$.

Demonstrație. a) Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază în \mathbb{V} . Definim aplicația

$$T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}^n, \forall u \in \mathbb{V}, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \text{ unici astfel încât } u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} :$$

$$T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Demonstrăm că T astfel definită este o transformare liniară bijectivă. Liniaritatea:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{V}, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \text{ unici astfel încât } u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

$$\exists (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n : v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \lambda u + v = (\lambda \alpha_1 + \beta_1, \dots, \lambda \alpha_n + \beta_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$T(\lambda u + v) = (\lambda \alpha_1 + \beta_1, \dots, \lambda \alpha_n + \beta_n) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \lambda T(u) + T(v).$$

Pentru bijectivitate este suficient să demonstrăm că T este injectivă (Teorema 4.4.10).

$$\text{Fie } u, v \in \mathbb{V}, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n : u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, v =$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \text{ Din } T(u) = T(v) \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i, i = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$u = v, \text{ rezultă că } T \text{ este injectivă.}$$

b) *Necesitatea.* Presupunem $\mathbb{W} \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$ T bijectivă. Conform Teoremei 4.3.2, punctul d), rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z}$.

Suficiența. Presupunem că $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z} = m$. Conform afirmației a) din $\mathbb{W} \cong \mathbb{K}^m \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{K}^m) : T$ bijectivă; analog $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{K}^m \Rightarrow \exists S \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{K}^m) : S$ bijectivă. Din $S \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}, \mathbb{K}^m)$ și S bijectivă $\Rightarrow \exists S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{Z})$ și S^{-1} bijectivă (Teorema 4.2.2). Conform Teoremei 4.2.2, $S^{-1} \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$, $S^{-1} \circ T$ bijectivă $\Rightarrow \mathbb{W} \simeq \mathbb{Z}$. \square

Teorema 4.5.3. *Relația de izomorfism a spațiilor vectoriale definite peste același corp comutativ este o relație de echivalență.*

Demonstrație. Verificăm proprietățile de reflexivitate, simetrie și tranzitivitate.

Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial peste corpul comutativ \mathbb{K} . Are loc $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}$ deoarece putem defini $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $T(v) = v, \forall v \in \mathbb{V}$, T bijectivă.

Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale. $\mathbb{V} \simeq \mathbb{W} \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, T bijectivă. Dar $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$, T^{-1} bijectivă conform Teoremei 4.2.2, rezultă $\mathbb{W} \simeq \mathbb{V}$.

Fie \mathbb{V}, \mathbb{W} și \mathbb{Z} trei \mathbb{K} -spații vectoriale, $\mathbb{V} \simeq \mathbb{W}$, $\mathbb{W} \simeq \mathbb{Z} \Rightarrow \exists T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, T bijectivă și $\exists S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$, S bijectivă, atunci, conform Teoremei 4.2.2, $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{Z})$ și $S \circ T$ este bijectivă, deci $\mathbb{V} \simeq \mathbb{Z}$. \square

4.6. Matricea unei transformări liniare

Teorema 4.6.1. *Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Dacă $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ este o bază în \mathbb{V} și $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ o bază în \mathbb{W} , atunci*

există o matrice unică $P \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $P = (p_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ astfel încât

$$(51) \quad \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Dacă $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ are imaginea $T(v) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$, atunci

$$(52) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Demonstrăm existența și unicitatea matricei P .

Existența: dacă $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ este o bază în \mathbb{V} , vectorii $T(v_i) \in \mathbb{W}$, $i = \overline{1, n}$ au descompunerile în raport cu baza \mathcal{B}_2 de forma:

$$T(v_i) = (p_{1i}, \dots, p_{mi}) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, i = \overline{1, n}, p_{ji} \in \mathbb{K}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m},$$

echivalentă cu scrierea matriceală

$$(53) \quad \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

ceea ce reprezintă relația (51).

Unicitatea: matricea P este unică datorită unicității descompunerii unui vector după vectorii bazei (Teorema de caracterizare a bazelor).

Demonstrăm relația (52). Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ și $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Atunci

$$T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}. \text{ Utilizând relația (53) rezultă:}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T = (\beta_1, \dots, \beta_m).$$

Prin transpunere rezultă relația (52). □

Exemplul 4.6.2. Considerăm transformarea liniară din Exemplul 4.1.5,

$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Determinați matricea transformării liniare T în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$, matricea transformării liniare T în raport cu baza $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ din $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ și matricea transformării liniare T în raport cu bazele $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Considerăm baza canonică $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$ și determinăm $[Tp_1](x) = 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$, $[Tp_2](x) = x = 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$, $[Tp_3](x) = 2x^2 = 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 2 \cdot p_3(x)$.

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notăm $q_1(x) = 1, q_2(x) = 1 + x, q_3(x) = (1 + x)^2$ și determinăm

$$[Tq_1](x) = 0 = 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x),$$

$$[Tq_2](x) = x = -1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x),$$

$$[Tp_2](x) = 2x + 2x^2 = 0 \cdot q_1(x) + (-2) \cdot q_3(x) + 2 \cdot q_3(x).$$

$${}_{\mathcal{B}_2}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$[Tp_1](x) = 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x),$$

$$[Tp_2](x) = x = -1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x)^2,$$

$$[Tp_3](x) = 2x^2 = 2 \cdot q_1(x) - 4 \cdot q_2(x) + 2 \cdot q_3(x)$$

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definiția 4.6.3. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m, \mathcal{B}_1 = \{v_j\}_{j=\overline{1,n}}, \mathcal{B}_2 = \{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ două baze în \mathbb{V} și respectiv \mathbb{W} iar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Matricea $P \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $T(v_j), j = \overline{1, n}$ în baza \mathcal{B}_2 , se numește **matricea asociată transformării liniare T în raport cu perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$** .

Folosim notația $P = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}$.

Observația 4.6.4. Relația (52) scrisă sub forma

$$(54) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

se numește **ecuația matriceală** a transformării liniare T .

Teorema 4.6.5. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m, \mathcal{B}_1 = \{v_j\}_{j=\overline{1,n}}, \mathcal{B}_2 = \{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ două baze în \mathbb{V} și respectiv \mathbb{W} , $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ și $P \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ matricea asociată transformării liniare T în raport cu perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. Atunci $\text{rang}(T) = \text{rang}(P)$ oricare ar fi perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Demonstrație. Un vector $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ aparține lui $\text{Ker}(T)$ dacă

$T(v) = 0_{\mathbb{W}}$. Dar

$$T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{W}}.$$

Rezultă

$$(55) \quad P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0_{n \times 1}.$$

Relația (55) reprezintă un sistem liniar omogen de m ecuații cu n necunoscute. Matricea sistemului este P . Dacă $\text{rang}(P) = r$, mulțimea soluțiilor sistemului este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{K}^n de dimensiune $n - r$. Deci $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T)) = n - r$. Rezultă că rangul transformării liniare T este r , $\text{rang}(T) = n - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T)) = n - (n - r) = r$. \square

Teorema 4.6.6. $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \simeq M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_j\}_{j=\overline{1,n}}$ o bază în \mathbf{V} și $\mathcal{B}_2 = \{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ o bază în \mathbf{W} . Definim funcția $H : \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\forall T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) : H(T) = {}_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2}$.

Demonstrăm că H este o transformare liniară bijectivă.

Demonstrăm liniaritatea. Fie $\lambda \in \mathbb{K}, T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $H(T) = {}_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} = P$, $H(S) = {}_{\mathcal{B}_1} (S)_{\mathcal{B}_2} = Q$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (\lambda T + S)(v_1) \\ \vdots \\ (\lambda T + S)(v_n) \end{pmatrix} &= {}_{\mathcal{B}_1} (\lambda T + S)_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (\lambda T + S)(v_1) \\ \vdots \\ (\lambda T + S)(v_n) \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S(v_1) \\ \vdots \\ S(v_n) \end{pmatrix} = (\lambda P + Q)^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow {}_{\mathcal{B}_1} (\lambda T + S)_{\mathcal{B}_2} = \lambda P + Q. \end{aligned}$$

$$H(\lambda T + S) = {}_{\mathcal{B}_1} (\lambda T + S)_{\mathcal{B}_2} = \lambda P + Q = \lambda {}_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} + {}_{\mathcal{B}_1} (S)_{\mathcal{B}_2} = \lambda H(T) + H(S).$$

Demonstrăm injectivitatea lui H . Fie $T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $H(T) = H(S)$ (T, S au aceeași matrice în raport cu perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$) $\Rightarrow T = S$.

$$H(T) = {}_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} = P, H(S) = {}_{\mathcal{B}_1} (S)_{\mathcal{B}_2} = Q, P = Q \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S(v_1) \\ \vdots \\ S(v_n) \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_j) = S(v_j), j = \overline{1, n}. \text{ Rezultă}$$

$$\forall v \in \mathbf{V} : T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} S(v_1) \\ \vdots \\ S(v_n) \end{pmatrix} = S(v) \Rightarrow T = S.$$

Demonstrăm surjectivitatea. Fie $P \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ și definim funcția $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$,

$$\forall v \in \mathbf{V}, v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, T(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Se demonstrează imediat că T astfel definită este o transformare liniară.

Rezultă că T este bijectivă, deci există un izomorfism între $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ și $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. \square

Observațiile 4.6.7. 1. Izomorfismul H depinde de bazele considerate în cele două spații vectoriale.

$$2. \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n.$$

Proprietățile transformării liniare sunt reflectate în proprietățile matricelor asociate în diferite baze.

Teorema 4.6.8. Fie \mathbb{V}, \mathbb{W} și \mathbb{Z} trei \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z} = p$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$. Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_i\}_{i=1, \dots, m}$, $\mathcal{B}_3 = \{z_i\}_{i=1, \dots, p}$ baze în \mathbb{V} , \mathbb{W} și respectiv în \mathbb{Z} . Atunci are loc relația:

$$(56) \quad {}_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = {}_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}.$$

Demonstrație. Fie $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $T(v) = w \in \mathbb{W}$,

$$w = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, S(w) = z \in \mathbb{Z}, z = (\gamma_1, \dots, \gamma_p) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}.$$

Fie ${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = P \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Are loc relația: $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$

Fie ${}_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} = Q \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$. Are loc relația: $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$

Atunci $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} = QP \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, adică ${}_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = QP$ care reprezintă relația (56). \square

Teorema 4.6.9. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = n$ și fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, T izomorfism. Fie \mathcal{B}_1 și \mathcal{B}_2 două baze în \mathbb{V} și respectiv \mathbb{W} . Atunci are loc relația:

$$(57) \quad {}_{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1} = ({}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2})^{-1}.$$

Demonstrație. Deoarece $T \circ T^{-1} = id_{\mathbb{W}}$ și $T^{-1} \circ T = id_{\mathbb{V}}$, ținând seama de Teorema 4.6.8 și de faptul că matricea aplicației identitate este matricea unitate, rezultă:

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} \cdot {}_{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1} = {}_{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1} \cdot {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = I_n \Rightarrow ({}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2})^{-1} = {}_{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1}. \quad \square$$

Propoziția 4.6.10. Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{p \times m}(\mathbb{K})$ și $B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Atunci: $\text{rang}(AB) \leq \min \{ \text{rang}(A), \text{rang}(B) \}.$

Demonstrație. Fie $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, și $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ bazele canonice din $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ și respectiv \mathbb{K}^p , ${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = B$ și fie $S : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^p$, ${}_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} = A$. Considerăm compunerea $S \circ T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^p$. Dar ${}_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = {}_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} \cdot {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = AB$.

Avem $\text{rang}(AB) = \text{rang}(S \circ T) \leq \min \{\text{rang}(S), \text{rang}(T)\} \leq \min \{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$, folosind Teoremele 4.4.11 și 4.6.5. \square

Propoziția 4.6.11. *Dacă $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ și $B \in GL_m(\mathbb{K}), C \in GL_n(\mathbb{K})$, atunci $\text{rang}(BA) = \text{rang}(A) = \text{rang}(AC)$.*

Demonstrație. Avem $\text{rang}(BA) \leq \min \{\text{rang}(B), \text{rang}(A)\} \leq \text{rang}(A)$. Putem scrie $A = B^{-1}(BA)$ de unde rezultă că $\text{rang}(A) \leq \min \{\text{rang}(B^{-1}), \text{rang}(BA)\} \leq \text{rang}(BA)$, folosind Teorema 4.6.10. Deducem că $\text{rang}(BA) = \text{rang}(A)$. Analog se demonstrează cea de a doua relație. \square

4.6.1. Schimbarea matricei unei transformări liniare la schimbarea bazelor.

Teorema 4.6.12. *Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_i\}_{i=1, \overline{n}}, \overline{\mathcal{B}}_1 = \{\overline{v}_i\}_{i=1, \overline{n}}$ două baze în \mathbb{V} și $\mathcal{B}_2 = \{w_i\}_{i=1, \overline{m}}, \overline{\mathcal{B}}_2 = \{\overline{w}_i\}_{i=1, \overline{m}}$ două baze în \mathbb{W} , $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{A} \overline{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_2 \xrightarrow{B} \overline{\mathcal{B}}_2$. Atunci are loc relația:*

$$(58) \quad \overline{\mathcal{B}}_1(T)_{\overline{\mathcal{B}}_2} = B^{-1} \cdot {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} \cdot A.$$

Demonstrație. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ și $v \in \mathbb{V}, v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Atunci $T(v) = (\beta_1, \dots, \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$. Folosim ecuația matriceală a transformării liniare T în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, (54):

$$(59) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, P = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}.$$

Descompunem v și $T(v)$ după bazele $\overline{\mathcal{B}}_1$ și respectiv $\overline{\mathcal{B}}_2$:

$$v = (\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n) \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \vdots \\ \overline{v}_n \end{pmatrix}, T(v) = (\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_m) \begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_m \end{pmatrix}.$$

Folosim ecuația matriceală a transformării liniare T în perechea de baze $(\overline{\mathcal{B}}_1, \overline{\mathcal{B}}_2)$

$$(60) \quad \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_m \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}, Q = {}_{\overline{\mathcal{B}}_1}(T)_{\overline{\mathcal{B}}_2}.$$

Folosind formula de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, rezultă

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \overline{\alpha}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \\ \vdots \\ \overline{\beta}_m \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în (59), rezultă:

$$B \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = PA \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = B^{-1}PA \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Din această relație și din (60) rezultă relația (58).

Exemplificăm conținutul teoremei prin următoarea schemă:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{\mathcal{B}_1} & \xrightarrow{\mathcal{B}_1 T_{\mathcal{B}_2}} & \mathbb{W}_{\mathcal{B}_2} \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ \mathbb{V}_{\overline{\mathcal{B}_1}} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{B}_1} T_{\overline{\mathcal{B}_2}}} & \mathbb{W}_{\overline{\mathcal{B}_2}} \end{array}$$

□

Teorema 4.6.13. Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$ și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Dacă $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}$ sunt două baze în \mathbb{V} , $\mathcal{B} \xrightarrow{A} \overline{\mathcal{B}}$, atunci are loc relația

$$(61) \quad \overline{\mathcal{B}}(T)_{\overline{\mathcal{B}}} = A^{-1} \cdot \mathcal{B}(T)_{\mathcal{B}} \cdot A.$$

Observația 4.6.14. Formula (58) se numește **formula de schimbare a matricei unei transformări liniare** $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ la schimbarea bazelor în cele două \mathbb{K} -spații vectoriale \mathbb{V} și \mathbb{W} .

Reamintim că am notat, în Capitolul 2, cu $GL_n(\mathbb{K})$ n -grupul liniar general real, adică mulțimea matricelor pătratice, cu elemente reale, de ordin n , inversabile.

Definiția 4.6.15. Două matrice $P, \overline{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se numesc **matrice asemenea** dacă există o matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ astfel încât:

$$(62) \quad \overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A.$$

Notăm relația de asemănare prin “ \sim ”, $P \sim \overline{P}$.

Teorema 4.6.16. Relația de asemănare a matricelor pătratice de un ordin dat este o relație de echivalență.

Demonstrație. a) $\forall P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \sim P$, deoarece $P = I_n^{-1} \cdot P \cdot I_n$ (relația de asemănare este reflexivă)

b) $\forall P, \overline{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \overline{P} \sim P$ (relația de asemănare este simetrică).

Într-adevăr, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A \Rightarrow P = A \cdot \overline{P} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot \overline{P} \cdot A^{-1} \Rightarrow \overline{P} \sim P$.

c) $\forall P, \overline{P}, \overline{\overline{P}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $P \sim \overline{P}, \overline{P} \sim \overline{\overline{P}} \Rightarrow P \sim \overline{\overline{P}}$ (relația de asemănare este tranzitivă).

Într-adevăr, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A$; $\overline{P} \sim \overline{\overline{P}} \Rightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{\overline{P}} = B^{-1} \cdot \overline{P} \cdot B \Rightarrow \overline{\overline{P}} = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P \cdot A \cdot B = (A \cdot B)^{-1} \cdot P \cdot (A \cdot B) \Rightarrow P \sim \overline{\overline{P}}$. □

Observațiile 4.6.17. 1. Folosind Teorema 4.6.11 rezultă că două matrice asemenea au același rang.

2. Din relația (62) rezultă că matricele asociate unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ în două baze diferite ale lui \mathbb{V} sunt matrice asemenea. Are loc și afirmația reciprocă, care reprezintă teorema următoare:

Teorema 4.6.18. *Fie \mathbb{V} un \mathbb{K} -spațiu vectorial, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ două matrice asemenea. Atunci ele reprezintă matricele aceluiași endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ în două baze convenabil alese.*

Demonstrație. Fie $P \sim Q \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K})$ astfel încât $Q = A^{-1} \cdot P \cdot A$. Fie $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ o bază în \mathbb{V} . Considerăm baza $\bar{\mathcal{B}}$ astfel încât $\mathcal{B} \xrightarrow{A} \bar{\mathcal{B}}$. Atunci, conform Teoremei 4.6.13, rezultă că ${}_{\bar{\mathcal{B}}}(T)_{\bar{\mathcal{B}}} = A^{-1} \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot A$. \square

Observația 4.6.19. Din Teoremele 4.6.13, 4.6.16 și 4.6.18 rezultă că relația de asemănare împarte mulțimea matricelor pătratice de ordin n în clase de echivalență, fiecare clasă de echivalență corespunzând unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$.

4.7. Endomorfisme speciale pe spații euclidiene

4.7.1. Endomorfism adjunct.

Definiția 4.7.1. *Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Endomorfismul T^* , $T^* : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ se numește **endomorfism adjunct** al endomorfismului T dacă*

$$(63) \quad \forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle.$$

Teorema 4.7.2. *Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Dacă există endomorfismul T^* cu proprietatea (63) atunci el este unic.*

Demonstrație. Presupunem că există și T^0 cu proprietatea (63). Atunci

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^0(v) \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \forall u, v \in \mathbb{V}$$

$$\Rightarrow \langle u, T^0(v) - T^*(v) \rangle = 0, \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

$$\text{Fie } u = T^0(v) - T^*(v) \Rightarrow \|T^0(v) - T^*(v)\| = 0 \Rightarrow T^0(v) = T^*(v), \forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow T^0 = T^*. \quad \square$$

Teorema 4.7.3. Proprietăți ale endomorfismelor adjunkte

$$i) \forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T + S)^* = T^* + S^*,$$

$$ii) \forall \alpha \in \mathbb{V}, \forall S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (\alpha T)^* = \alpha T^*,$$

$$iii) \forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T \circ S)^* = S^* \circ T^*,$$

$$iv) \forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T^*)^* = T,$$

$$v) (id_{\mathbb{V}})^* = id_{\mathbb{V}}, 0_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}^* = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}. (0_{\mathcal{L}(\mathbb{V})} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \forall v \in \mathbb{V} : 0_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}(v) = 0_{\mathbb{V}}).$$

Demonstrație. Demonstrăm relația *iii*), pentru celelalte se procedează analog. Fie

$$u, v \in \mathbb{V}, \langle (T \circ S)(u), v \rangle = \langle T(S(u)), v \rangle = \langle S(u), T^*(v) \rangle = \langle u, S^*(T^*(v)) \rangle.$$

Dar $\langle (T \circ S)(u), v \rangle = \langle u, (T \circ S)^*(v) \rangle$. Din aceste două relații și din unicitatea endomorfismului adjunct rezultă relația *iii*).

Analog se demonstrează celelalte relații. \square

Teorema 4.7.4. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu liniar euclidian finit dimensional, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ și $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1, \overline{n}}$ o bază ortonormată în \mathbb{V} , $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$. Matricea atașată lui T^* în raport cu aceeași bază ortonormată în \mathbb{V} este P^T .

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1, \overline{n}}$ o bază ortonormată în \mathbb{V} și fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

$$\text{Fie } u, v \in \mathbb{V}, u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, T(u) = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$$v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, T(v) = (\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fie } \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

relații date de ecuația matriceală a aplicației liniare T .

Atunci

$$\langle T(u), v \rangle = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fie } Q =_{\mathcal{B}} (T^*)_{\mathcal{B}}, T^*(v) = (\beta_1^* \dots \beta_n^*) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

atunci

$$\langle u, T^*(v) \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \text{ dar } \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle,$$

$$\forall u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow Q = P^T. \quad \square$$

4.7.2. Endomorfism autoadjunct.

Definiția 4.7.5. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Endomorfismul T se numește **endomorfism autoadjunct** dacă

$$\forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle.$$

Observația 4.7.6. Observăm că dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este autoadjunct, atunci $T = T^*$.

Teorema 4.7.7. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian finit dimensional, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ și $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1, \overline{n}}$ o bază ortonormată în \mathbb{V} , $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$. Dacă T este un endomorfism autoadjunct, atunci $P = P^T$. Reciproc, dacă $P = P^T$ atunci endomorfismul T este autoadjunct.

Demonstrație. *Necesitatea.* Dacă $Q =_{\mathcal{B}} (T^*)_{\mathcal{B}}$, $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$ iar $T = T^* \Rightarrow Q = P^T, Q = P \Rightarrow P = P^T$.

Suficiența. Dacă $_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = P = P^T$,

$$u, v \in \mathbb{V}, u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$$T(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$T(v) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\langle T(u), v \rangle = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, T(v) \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Dar $P = P^T \Rightarrow \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \forall u, v \in \mathbb{V}$. □

4.7.3. Endomorfism ortogonal.

Definiția 4.7.8. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Endomorfismul T se numește **endomorfism ortogonal** dacă păstrează produsul scalar,

$$(64) \quad \forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Exemplul 4.7.9. Funcția identitate, $id_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \forall u \in \mathbb{V}, id_{\mathbb{V}}(u) = u$, este un endomorfism ortogonal deoarece:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{V}^2 : \langle id_{\mathbb{V}}(u), id_{\mathbb{V}}(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Teorema 4.7.10. (Teorema de caracterizare a endomorfismelor ortogonale) Dacă $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu euclidian și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, atunci T este ortogonal dacă și numai dacă păstrează norma vectorilor din \mathbb{V} :

$$(65) \quad \forall v \in \mathbb{V} : \|T(v)\| = \|v\|.$$

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem T ortogonal, atunci

$$\forall v \in \mathbb{V} : \|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2 \Rightarrow \|T(v)\| = \|v\|.$$

Suficiența. Presupunem relația (65) adevărată. Demonstrăm relația

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} \{ \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \},$$

care rezultă din

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Aplicăm această relație vectorilor $T(u)$ și $T(v)$:

$$\forall (u, v) \in \mathbb{V}^2 : \langle T(u), T(v) \rangle = \frac{1}{2} \{ \|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2 \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \} = \langle u, v \rangle,$$

ceea ce trebuia demonstrat. \square

Propoziția 4.7.11. *Dacă $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu euclidian finit dimensional și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, T este ortogonal, atunci T este bijectiv.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm $\text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. (Teoremele 4.4.3 și 4.4.10). Dacă $u \in \text{Ker}(T) \Rightarrow T(u) = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \|T(u)\| = \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. \square

Teorema 4.7.12. *Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian finit dimensional. În raport cu operațiile de compunere, endomorfismele ortogonale ale spațiului euclidian \mathbb{V} formează un grup $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$ numit **grupul ortogonal** al spațiului euclidian \mathbb{V} , subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$ (grupul general liniar al lui \mathbb{V}).*

Demonstrație. Observăm că $\mathcal{O}(\mathbb{V}) \neq \emptyset$, deoarece $id_{\mathbb{V}} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ (Exemplul 4.7.9). Fie $T, S \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Știm că $T \circ S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ și

$$\forall u \in \mathbb{V} : \| (T \circ S)(u) \| = \| T(S(u)) \| = \| S(u) \| = \| u \| \Rightarrow T \circ S \in \mathcal{O}(\mathbb{V}).$$

Fie $T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Conform Teoremelor 4.7.11 și 4.2.2 rezultă că există $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Demonstrăm că $T^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Pentru $u \in \mathbb{V} : T^{-1}(u) = v \Leftrightarrow T(v) = u$. Dar $\|T(v)\| = \|v\| \Leftrightarrow \|v\| = \|u\| \Leftrightarrow \|T^{-1}(u)\| = \|u\| \Leftrightarrow T^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Rezultă că $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$ are structură de grup. \square

Teorema 4.7.13. *Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian finit dimensional, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$. $T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ dacă și numai dacă matricea lui T în raport cu o bază ortonormată în \mathbb{V} este ortogonală.*

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ o bază ortonormată în \mathbb{V} și fie $T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Rezultă că T păstrează produsul scalar.

$$\text{Fie } u \in \mathbb{V}, u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$T(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fie } \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ ecuația matriceală a transformării liniare } T.$$

Notăm cu $P = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Atunci

$$\langle T(u), T(u) \rangle = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \cdot P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\langle u, u \rangle = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^T \cdot P = I_n \Rightarrow P^{-1} = P^T \Rightarrow P \text{ matrice ortogonală.}$$

Suficiența. Presupunem că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $P = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ este o matrice ortogonală, $P^T \cdot P = I_n$.

$$\text{Fie } u \in \mathbb{V}, u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, T(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Fie } \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\langle T(u), T(u) \rangle = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) P^T \cdot P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$\langle u, u \rangle$$

$$\Rightarrow \|T(u)\| = \|u\| \Rightarrow T \in \mathcal{O}(\mathbb{V}).$$

Observația 4.7.14. Știm că dacă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, atunci avem $\det(P) = \pm 1$.

Notăm $\mathcal{O}^+(V) = \{T \in \mathcal{O}(\mathbb{V}), \det(P) = 1, P = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \text{ bază ortonormată în } \mathbb{V}\}$.

Un element $T \in \mathcal{O}^+(\mathbb{V})$ se numește **endomorfism ortogonal de specia a I-a sau rotație**. Rezultă imediat că $(\mathcal{O}^+(\mathbb{V}), \circ)$ este un subgrup al lui $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$, numit **grupul rotațiilor sau grupul ortogonal special**.

Analog notăm $\mathcal{O}^-(\mathbb{V}) = \{T \in \mathcal{O}(\mathbb{V}), \det(P) = -1, P = {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \text{ bază ortonormată în } \mathbb{V}\}$.

Un element $T \in \mathcal{O}^-(\mathbb{V})$ se numește **endomorfism ortogonal de specia a II-a**. Remarcăm că $(\mathcal{O}^-(\mathbb{V}), \circ)$ nu este un subgrup al lui $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$, deoarece dacă $T, S \in \mathcal{O}^-(\mathbb{V})$ atunci $T \circ S \in \mathcal{O}^+(\mathbb{V})$.

4.7.4. Proiecții ortogonale. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și \mathbb{W} un subspațiu al lui \mathbb{V} . Conform Teoremei 3.4.23, $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$. Orice vector $u \in \mathbb{V} : u = u' + u'', u' \in \mathbb{W}, u'' \in \mathbb{W}^\perp$. Conform Exemplului 4.1.5, aplicațiile

$$(66) \quad \Pi_1 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$$

și

$$(67) \quad \Pi_2 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}^\perp$$

definite prin $\forall u \in \mathbb{V} : \Pi_1(u) = u', \Pi_2(u) = u''$ sunt transformări liniare numite **proiecții**.

Definiția 4.7.15. Transformările liniare Π_1 și Π_2 definite prin relațiile (66) și (67) se numesc **proiecții ortogonale ale spațiului euclidian \mathbb{V} pe \mathbb{W} și \mathbb{W}^\perp , respectiv**.

Exemplele 4.7.16. 1. Din proprietățile transformărilor liniare rezultă că aplicațiile:

$$\Sigma' : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \Sigma' = 2\Pi_1 - id_{\mathbb{V}}, \text{ și } \Sigma'' : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \Sigma'' = 2\Pi_2 - id_{\mathbb{V}}$$

sunt endomorfisme ale lui \mathbb{V} și se numesc **simetriile ortogonale** ale lui \mathbb{V} față de subspațiile \mathbb{W} și \mathbb{W}^\perp , respectiv. Observăm că $\forall u \in \mathbb{V} : u = u' + u'', u' \in \mathbb{W}, u'' \in \mathbb{W}^\perp$,

$$\Sigma'(u) = 2 \Pi_1(u) - id_{\mathbb{V}}(u) = 2u' - (u' + u'') = u' - u'',$$

$$\Sigma''(u) = 2 \Pi_2(u) - id_{\mathbb{V}}(u) = 2u'' - (u' + u'') = -u' + u''.$$

2. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian și \mathbb{W} un subspațiu al spațiului \mathbb{V} , $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^\perp$.

Simetriile ortogonale, definite în exercițiul anterior, sunt endomorfisme ortogonale. Într-adevăr, $\forall u, v \in \mathbb{V} : u = u' + u'', v = v' + v'', u', v' \in \mathbb{W}, u'', v'' \in \mathbb{W}^\perp$, $\langle \Sigma'(u), \Sigma'(v) \rangle = \langle u' - u'', v' - v'' \rangle = \langle u', v' \rangle + \langle u'', v'' \rangle = \langle u, v \rangle$. Analog rezultă $\langle \Sigma''(u), \Sigma''(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

4.8. Probleme propuse

Problema 4.8.1. Fie $T : C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, T(f) = \int_a^b f(x)dx, \forall f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Demonstrați că T este transformare liniară.

Problema 4.8.2. Fie $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, T(X) = x_k, k$ fixat, unde $X \in \mathbb{K}^n, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Demonstrați că T este transformare liniară. Ea poartă denumirea de proiecție de ordin k .

Problema 4.8.3. Fie $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, T(z) = \bar{z}$.

a) Demonstrați că T este transformare liniară dacă \mathbb{C} este considerat ca spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

b) Demonstrați că T nu este transformare liniară dacă \mathbb{C} este considerat ca spațiu vectorial peste \mathbb{C} .

Problema 4.8.4. În \mathbb{R}^4 se iau vectorii $u = (3; 2; -1; 1), v = (2; 5; 0; -1)$. Să se afle, în baza standard, matricea proiecției ortogonale pe subspațiul generat de u și v .

Problema 4.8.5. Fie $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o transformare liniară cu proprietatea că pentru $x = (1; 2), T(x) = (1; 0; 0)$ iar pentru $y = (-1; -1), T(y) = (1; 1; 1)$. Calculați $T(z)$, unde $z = (-1; 1)$.

Problema 4.8.6. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ și $x \in \mathbb{V}$ astfel încât $T^m x = 0, T^{m-1}x \neq 0_{\mathbb{V}}$ pentru un m fixat, $m \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $\{x, Tx, T^2x, \dots, T^{m-1}x\}$ este un sistem de vectori liniar independenți.

Problema 4.8.7. Fie $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1, n}}$ o bază în \mathbb{V} și $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i=\overline{1, n}}$ sunt n vectori oarecare în \mathbb{W} . Conform Teoremei 4.3.3 există și este unică o transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ astfel încât $T(v_i) = w_i, i = \overline{1, n}$. Demonstrați că T este injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă) dacă și numai dacă $\{w_i\}_{i=\overline{1, n}}$ este un sistem liniar independent (respectiv sistem de generatori, bază) în \mathbb{W} .

Problema 4.8.8. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ și $\{u_1, u_2, \dots, u_p\} \in \mathbb{V} \setminus \text{Ker}(T)$ este un sistem de vectori liniar independent. Demonstrați că $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_p)\}$ este o mulțime de vectori liniar independenți.

Problema 4.8.9. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} și $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ o transformare liniară. Dacă $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ demonstrați că $T(\text{Span}(\mathbb{V}_1)) = \text{Span}(T(\mathbb{V}_1))$.

Problema 4.8.10. Fie transformarea liniară $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin

$$T(x) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \text{ Verificați teorema rang-defect.}$$

Problema 4.8.11. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , fie \mathbb{W}_1 un subspațiu vectorial al lui \mathbb{W} și $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Demonstrați că dimensiunea lui $T^{-1}(\mathbb{W}_1)$ este cel puțin $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1$.

Problema 4.8.12. Fie $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ spațiul liniar al polinoamelor, cu coeficienți din \mathbb{K} , de grad mai mic sau egal cu n . Demonstrați că aplicația $\mathbf{d} : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ definită prin $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'$, $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ care duce fiecare polinom de grad cel mult n în derivata sa, este o transformare liniară pe $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Determinați matricea lui \mathbf{d} în baza $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Problema 4.8.13. Fie transformarea liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ definită prin

$$T(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Determinați matricea lui T în bazele $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1; 1; -1), u_2 = (1; -1; 1), u_3 = (-1; 1; 1)\}$ și respectiv $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (0; 1; 1; 1), v_2 = (1; 0; 1; 1), v_3 = (1; 1; 0; 1), v_4 = (1; 1; 1; 0)\}$.

Problema 4.8.14. Fie $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienți reali. Pentru $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $q \neq 0$ fixat definim aplicația $T : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$, $T(p) = c$, unde c este câtul împărțirii cu rest al lui p la q .

a) Arătați că T este o transformare liniară.

b) Determinați $\text{def}(T)$.

c) Pentru $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ și $q(x) = x^2 + x + 1$ scrieți matricea lui T în baza $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Problema 4.8.15. Fie $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ un subspațiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{W} = k$, $1 \leq k \leq n - 1$. Fie $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{W}\}$. Arătați că \mathcal{F} este spațiu vectorial real, să se determine dimensiunea sa și să se indice o bază în acest spațiu.

Problema 4.8.16. Fie \mathbb{V} spațiul vectorial al funcțiilor reale cu baza

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

și transformarea liniară $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definită prin $T(f)(x) = 4 \int_0^{2\pi} \sin^3(x+y) f(y) dy$. Determinați subspațiile $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$.

Problema 4.8.17. Fie \mathbb{V} spațiul liniar al funcțiilor reale continue pe $[-\pi, \pi]$ și aplicația $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ definită prin $T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \sin(t-x)] f(t) dt$.

a) Demonstrați că T este aplicație liniară și calculați $T(f)$ pentru $f(x) = \sin x$ și respectiv $f(x) = \cos x$.

b) Arătați că subspațiul $\text{Im}(T)$ este finit dimensional și determinați o bază în acest subspațiu. Determinați $\text{ker}(T)$ și arătați că este infinit dimensional.

Problema 4.8.18. Fie \mathbb{V}, \mathbb{W} două spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} . Demonstrați că $\text{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) \subseteq \alpha \text{Im}(T_1) + \beta \text{Im}(T_2)$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Dați un exemplu pentru care incluziunea anterioară este strictă.

Problema 4.8.19. Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial finit dimensional, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T^2) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T)$, demonstrați că $\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ și deduceți că $\text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = \mathbb{V}$.

Problema 4.8.20. (Inegalitatea lui Sylvester) Fie \mathbb{V}_i , $i = 1, 2, 3$ trei spații vectoriale, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = n$, atunci

$$(68) \quad \text{rang}(S \circ T) \geq \text{rang}(T) + \text{rang}(S) - n.$$

Problema 4.8.21. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $AB = 0_n$, atunci $\text{rang}(A) + \text{rang}(B) \leq n$.

Problema 4.8.22. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$, o transformare liniară, \mathbb{V}_1 subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} . Atunci

$$(69) \quad \text{rang}(T) - \text{rang}(T|_{\mathbb{V}_1}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1.$$

Problema 4.8.23. (Inegalitatea lui Frobenius) Fie \mathbb{V}_i , $i = 1, 2, 3, 4$ patru spații vectoriale peste același corp comutativ \mathbb{K} , $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$, $P \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_3, \mathbb{V}_4)$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = n$, atunci

$$(70) \quad \text{rang}(P \circ S) + \text{rang}(S \circ T) \leq \text{rang}(S) + \text{rang}(P \circ S \circ T).$$

Problema 4.8.24. Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ și \mathbb{V}_3 trei spații vectoriale finit dimensionale peste același corp comutativ \mathbb{K} și $T_1 : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, $T_2 : \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_3$ două transformări liniare. Arătați că $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T_2 \circ T_1) \leq \text{def}(T_1) + \text{def}(T_2)$.

Problema 4.8.25. (Teorema lui Sylvester) Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ și \mathbb{V}_3 \mathbb{K} -spații vectoriale finit dimensionale iar $T_1 : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$, $T_2 : \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{V}_3$ transformări liniare. Demonstrați că $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T_2 \circ T_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2))$.

Problema 4.8.26. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.

Problema 4.8.27. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă există $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $AB = aA + bB$ atunci

- a) $\text{rang}(A - bI_n) = \text{rang}(B - aI_n) = n$,
- b) $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Problema 4.8.28. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstrați că $\text{rang}(A^T A) = \text{rang}(A)$.

Problema 4.8.29. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că

- a) Dacă $A + B = AB$ atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.
- b) Dacă $\text{rang}(A) = n - 1$ atunci există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C \neq 0_n$ astfel încât $(A + C)^p = A^p + C^p, \forall p \in \mathbb{N}$.

Problema 4.8.30. Fie aplicația $\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Demonstrați că $\text{def}(\text{Tr}) = n^2 - 1$.

Problema 4.8.31. Fie S subspațiul matricelor $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ generat de matricele de forma $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstrați că

- (a) $\dim_{\mathbb{R}}(S) \leq n^2 - 1$; (b) $\dim_{\mathbb{R}}(S) = n^2 - 1$.

Problema 4.8.32. În spațiul vectorial \mathbb{R}^3 se consideră subspațiile liniare S_1 și S_2 , date de ecuațiile $S_1 : x + y - z = 0$, $S_2 : 3x - 4y - 2z = 0$.

a) Notăm $s = (-v, u + v, u)$ și $y = (2u, u - v, u + 2v)$. Să se arate că aplicația $T(s) = y$ este un izomorfism între S_1 și S_2 .

b) Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc punctele lui S_1 cu imaginile lor prin transformarea T din S_2 .

c) Să se determine acele izomorfisme liniare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ care coincid cu T pe subspațiul S_1 .

Problema 4.8.33. Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ o bază ortonormată în spațiul euclidian \mathbb{R}^3 și să presupunem că în baza formată din vectorii $f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_3 = e_1 + e_2$ transformarea liniară T are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Să se afle matricea transformării adjunkte T^* în aceeași bază.

Problema 4.8.34. Determinați adjunctul endomorfismelor de mai jos relativ la produsul scalar canonic.

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, T_1(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3),$$

$$T_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, T_2(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1).$$

Problema 4.8.35. Se consideră spațiul vectorial $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ al polinoamelor de grad cel mult doi în variabila x pe care se definește produsul scalar

$$\forall p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Determinați endomorfismul adjunct endomorfismului $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, T(p) = 2p' - 3p$.

Problema 4.8.36. Demonstrați că

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, T(x) = (x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi)$$

este un endomorfism ortogonal.

Problema 4.8.37. Fie $u \neq 0$ un vector fixat în spațiul euclidian real \mathbb{V} și fie $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, $T(x) = x - a \langle x, u \rangle u$ (a constantă reală) o transformare liniară.

(a) Să se afle $a \in \mathbb{R}$, astfel încât T să fie o transformare ortogonală și să se arate că pentru valoarea $a_0 \neq 0$ găsită, avem

$$\underbrace{T \circ T \circ T \cdots \circ T}_{n \text{ ori}} = \begin{cases} T, & n = \text{impar} \\ I, & n = \text{par} \end{cases}.$$

Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3, u = 2e_1 + 2e_2 + e_3, a = a_0$ și $\{e_i, i = \overline{1, 3}\}$ baza canonică (standard) în \mathbb{R}^3 .

(b) Să se scrie matricea transformării liniare T în baza standard.

CAPITOLUL 5

Vectori și valori proprii

În tot acest capitol, \mathbb{K} este un corp comutativ, iar $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \dots$ sunt \mathbb{K} -spații vectoriale de dimensiune finită.

5.1. Endomorfisme și subspații invariante

5.1.1. Matricea asociată unui morfism: câteva precizări. Să notăm cu \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 două \mathbb{K} -spații vectoriale de dimensiune finită și fie $T : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ o transformare liniară. De îndată ce fixăm o bază în \mathbb{V}_1 și o (altă) bază în \mathbb{V}_2 , putem descrie T prin matricea asociată în aceste baze. Alegerea *separată* a celor două baze este suficient de permisivă: putem alege bazele astfel încât matricea asociată transformării liniare T în aceste baze să aibă forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(toate elementele neprecizate sunt egale cu 0). O astfel de matrice, de formă diagonală, ne permite să obținem imediat diverse informații despre transformarea liniară T . De exemplu, dacă pe diagonala principală a matricei nu apare niciun 0, atunci T este morfism injectiv, dacă $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$, respectiv este morfism surjectiv dacă $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$ (conform 4.4.9).

În acest capitol, suntem însă interesați de **endomorfisme** de spații vectoriale. Altfel spus, spre deosebire de situația generală descrisă mai sus, vom presupune că $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$.

Fie deci $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ un endomorfism liniar. Am văzut în capitolul anterior că, în acest caz, în loc să alegem două baze (una pentru domeniu și alta pentru codomeniu), este mai util să considerăm pentru cele două spații vectoriale *o aceeași bază*. De ce? Pentru că, în acest fel, putem înlocui adunarea sau compunerea endomorfismelor lui \mathbb{V} cu adunarea, respectiv cu înmulțirea matricelor. Altfel spus:

Teorema 5.1.1. *Odată fixată o bază în spațiul vectorial \mathbb{V} , obținem un izomorfism canonic între inelul $(\mathcal{L}(\mathbb{V}), +, \circ)$ și inelul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, unde $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.*

Noua situație conduce în mod natural la întrebarea:

Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ este un endomorfism fixat, mai este oare posibil să alegem o bază a lui \mathbf{V} , astfel încât matricea asociată lui T în această bază să fie o matrice diagonală?

Din păcate, răspunsul la această întrebare poate fi negativ.

Exemplul 5.1.2. Să notăm cu $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult 2. Fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare, prin care unui polinom P îi corespunde polinomul derivat P' . Vom arăta că nu există o bază a lui $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, pentru care matricea asociată lui \mathbf{d} să fie matrice diagonală. Să presupunem contrariul: ar exista deci o bază $\{F_1, F_2, F_3\}$ în $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ și scalarii $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care

$$F'_1 = a \cdot F_1, \quad F'_2 = b \cdot F_2, \quad F'_3 = c \cdot F_3.$$

Deducem că F_1, F_2, F_3 sunt polinoame de grad 0, ceea ce contrazice faptul că ele formează o bază. \square

Exemplul 5.1.2 ne arată că întrebarea de mai sus trebuie nuanțată. Pare mai natural să ne întrebăm:

Cum am putea alege o bază a lui \mathbf{V} , astfel încât matricea asociată endomorfismului T în această bază să fie cât mai simplă?

Desigur, întrebarea este neclară: nu am precizat încă ce ar putea însemna faptul că o matrice este "mai simplă" decât alta! Vom explica acest lucru în secțiunile următoare.

5.1.2. Reformularea algebrică. Întrebările de mai sus se referă la endomorfismele unui spațiu vectorial și la matricea asociată acestuia într-o bază dată. Vom reformula aceste întrebări, într-un context aparent diferit. Reamintim următoarea definiție (4.6.15).

Definiția 5.1.3. Spunem că matricele A și B din $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sunt **asemenea** dacă există o matrice inversabilă $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ astfel încât

$$(71) \quad B = U^{-1}AU.$$

Relația de asemănare a matricelor are legătură cu problematica anterioară: să ne amintim (4.6.13) că, la schimbarea bazei, matricea endomorfismului T se schimbă după regula (71), unde U este matricea de trecere între baze.

Este ușor de demonstrat următoarea proprietate (vezi 4.6.16):

Lema 5.1.4. Asemănarea este o relație de echivalență pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. \square

În acest nou context, întrebarea 5.1.1 poate fi reformulată astfel:

Dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cum putem determina o matrice inversabilă $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ pentru care matricea $U^{-1}AU$ este cât mai simplă?

Reformularea algebrică ne va permite ca, în continuare, să ne referim sau la endomorfisme sau la matrice: comentariul de mai sus arată că această alternanță nu schimbă problema.

5.1.3. Subspații invariante ale unui endomorfism. Pentru a calcula produsul dintre două matrice pătratice de ordin n , sunt necesare n^4 înmulțiri și $n^2(n-1)$ adunări. Așadar, când calculăm produsul a două matrice pătratice, efectuăm un număr mare de operații aritmetice. Evident, numărul acestor operații se micșorează dacă cei doi factori au unele elemente nule. De aceea, ar fi util ca în operațiile cu matrice să avem factori cu cât mai multe zerouri.

Uneori, putem *să alegem* forma matricelor cu care lucrăm. Să considerăm, de exemplu, $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, două endomorfisme ale \mathbb{K} -spațiului vectorial \mathbb{V} . Compunerea $T \circ S$ poate fi exprimată prin produsul matricelor asociate acestor endomorfisme, într-o bază dată. Putem spera ca, alegând convenabil această bază, matricele asociate să aibă cât mai multe zerouri.

Cum putem face însă o astfel de alegere? O posibilitate: identificăm subspații vectoriale cu anumite proprietăți.

Definiția 5.1.5. *Subspațiul $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ este subspațiu invariant de T (sau este subspațiu invariant pentru T) dacă:*

$$\forall w \in \mathbb{W} : T(w) \in \mathbb{W}.$$

Exemple 5.1.6. (1) Pentru orice $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, subspațiile triviale \mathbb{V} și $\{0\}$, precum și $\text{Ker}(T)$ și $\text{Im}(T)$, sunt subspații invariante de T .

(2) Fie $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult n și fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare. Pentru orice număr $k \leq n$, subspațiul $\mathbb{R}[X]_{\leq k}$, al polinoamelor de grad $\leq k$, este subspațiu invariant de \mathbf{d} . \square

Vom arăta în continuare în ce mod subspațiile invariante conduc la matrice mai simple.

Să presupunem că am reușit să identificăm două subspații \mathbb{W}_1 și \mathbb{W}_2 ale lui \mathbb{V} , invariante de T , astfel încât $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Alegem (la întâmplare!) baza \mathcal{B}_1 în \mathbb{W}_1 și baza \mathcal{B}_2 în \mathbb{W}_2 și fie $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Lema 5.1.7. *În condițiile și cu notațiile de mai sus:*

- (1) \mathcal{B} este o bază a lui \mathbb{V} ;
- (2) matricea asociată endomorfismului T în această bază are forma:

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

unde A și C sunt matrice pătratice, iar $\mathbf{0}$ este o notație generală pentru matricele nule.

Demonstrație.

- (1) Rezultă din definiția și proprietățile sumei directe de subspații (3.2.8).
- (2) Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ și $\mathcal{B}_2 = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_n\}$. Deoarece \mathbb{W}_1 este subspațiu invariant de T , avem $T(v_i) \in \mathbb{W}_1$ pentru $i \in \overline{1, m}$; de aceea

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j.$$

Altfel spus: pe primele m coloane ale matricei asociate lui T în baza \mathcal{B} , apar elemente nenule doar în primele m linii. Analog, pe ultimele $n - m$ coloane ale matricei asociate lui T , toate elementele din primele m linii sunt nule. \square

Așadar, dacă descompunem \mathbb{V} ca sumă directă de subspații invariante, matricea asociată lui T într-o anumită bază se reprezintă ca matrice cu blocuri, în care blocurile de pe diagonală sunt pătratice, iar elementele din afara acestor blocuri sunt nule. O astfel de structurare permite ca operațiile efectuate cu matricea respectivă (de exemplu, ridicarea la putere a matricei) să necesite mai puține operații aritmetice. De aceea, descompunerea lui \mathbb{V} ca sumă directă de subspații invariante, de dimensiune cât mai mică, poate fi utilă în calcule. Pentru aplicațiile efective, ne rămâne totuși să răspundem la câteva întrebări:

Cum determinăm subspații invariante de un endomorfism dat? Cum descompunem \mathbb{V} ca sumă directă de subspații invariante?

5.2. Subspații invariante de dimensiune 1

5.2.1. Vectori proprii. Valori proprii. Să determinăm mai întâi subspațiile invariante de dimensiune 1. Fie \mathbb{W} un astfel de subspațiu și fie w un generator al său. Deoarece $T(w) \in \mathbb{W}$, există un scalar $\alpha \in \mathbb{K}$ pentru care $T(w) = \alpha \cdot w$.

Definiția 5.2.1. *Un vector nenul $v \in \mathbb{V}^*$ este **vector propriu** pentru endomorfismul T dacă există un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât*

$$T(v) = \lambda v.$$

*Scalarul λ cu proprietatea de mai sus se numește **valoare proprie** a lui T , corespunzătoare vectorului propriu v .*

Exemplele 5.2.2. Fie \mathbb{V} spațiul vectorial al vectorilor din plan.

(1) Dacă T este simetria față de o dreaptă d , atunci orice vector nenul, având ca direcție dreapta d , este vector propriu corespunzător valorii proprii $+1$, iar orice vector nenul, perpendicular pe dreapta d , este vector propriu corespunzător valorii proprii -1 .

(2) Dacă T este rotația cu 90° în jurul punctului O , nu există vectori proprii pentru T . \square

Observația 5.2.3. Simetria față de o dreaptă și rotația în jurul unui punct sunt izometrii ale planului: prin aceste aplicații, un segment se transformă într-un segment congruent, deci un vector se transformă într-un vector de același modul. De aceea, valorile proprii ale endomorfismelor din Exemplul 5.2.2 nu ar putea fi decât $+1$ sau -1 .

Câteva proprietăți ale vectorilor proprii ai unui endomorfism sunt demonstrate în continuare.

Propoziția 5.2.4. *Fie v_1 și v_2 vectori proprii ai endomorfismului T , corespunzători valorilor proprii α_1 și α_2 .*

- (1) *Pentru orice $a \in \mathbb{K}^*$, vectorul av este vector propriu al lui T , corespunzător aceleiași valori proprii α_1 ;*
- (2) *Dacă $\alpha_1 = \alpha_2$, atunci vectorul nenul $a_1v_1 + a_2v_2$ este vector propriu al lui T (unde $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$);*

(3) Dacă $\alpha_1 \neq \alpha_2$, atunci v_1 și v_2 sunt vectori liniar independenți.

Demonstrație.

(1) Observăm că $av_1 \neq 0$ și că

$$T(av_1) = aT(v_1) = a(\alpha_1 v_1) = \alpha_1(av_1).$$

(2) Calculăm

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) = \dots = \alpha_1(a_1 v_1 + a_2 v_2).$$

(3) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ pentru care $x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$; vom arăta că $x_1 = x_2 = 0$. Din relația

$$0 = T(0) = T(x_1 v_1 + x_2 v_2) = \dots = \alpha_1 x_1 v_1 + \alpha_2 x_2 v_2,$$

obținem imediat că

$$x_1(\alpha_1 - \alpha_2)v_1 = 0 \text{ și } x_2(\alpha_1 - \alpha_2)v_2 = 0.$$

Deoarece $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$, deducem că $x_1 = x_2 = 0$. □

Putem interpreta Propoziția 5.2.4 astfel:

Pentru fiecare valoare proprie α , definim mulțimea

$$(72) \quad \mathbb{V}(\alpha) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = \alpha v\}.$$

Mulțimea $\mathbb{V}(\alpha)$ conține deci vectorul nul și toți vectorii proprii ai lui T , corespunzători valorii proprii α . Propoziția 5.2.4 afirmă de fapt că $\mathbb{V}(\alpha)$ este subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} și că $\mathbb{V}(\alpha) \cap \mathbb{V}(\beta) = \{0\}$ dacă $\alpha \neq \beta$.

Exemplul 5.2.5. Dacă $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ și dacă $T = \mathbf{d}$ este morfismul de derivare, atunci 0 este valoare proprie a lui T , iar $\mathbb{V}(0) = \mathbb{R}[X]_{\leq 0}$ este mulțimea polinoamelor constante. □

5.2.2. Polinomul caracteristic al unui endomorfism. Polinomul caracteristic al unei matrice. Vom exprima în coordonate condiția ca un vector să fie vector propriu al endomorfismului T .

Să fixăm o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a lui \mathbb{V} și fie

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\overline{n}}$$

matricea endomorfismului T în această bază. Condiția ca vectorul nenul

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

să fie vector propriu pentru T se exprimă în baza dată astfel: există un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ pentru care

$$(73) \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Egalitatea (73) reprezintă un sistem omogen de ecuații liniare, în care x_1, x_2, \dots, x_n sunt necunoscutele, iar λ este un parametru. Sistemul (73) are soluție nenulă (deci vectorul propriu

v există, iar λ este valoare proprie) dacă și numai dacă determinantul matricei sistemului este nul. Am demonstrat astfel rezultatul care urmează.

Propoziția 5.2.6. *Un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ este valoare proprie a endomorfismului T dacă și numai dacă λ este soluție a ecuației*

$$\det(xI_n - A) = 0,$$

unde A este matricea asociată endomorfismului într-o bază dată. \square

Definiția 5.2.7. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este matricea asociată endomorfismului T în baza \mathcal{B} , atunci polinomul*

$$P_T(X) = \det(XI_n - A)$$

este **polinomul caracteristic** al endomorfismului T . Ecuația polinomială $P_T(X) = 0$ se numește **ecuația caracteristică** a endomorfismului dat.

Definiția 5.2.7 are o lacună: polinomul caracteristic pare să depindă nu doar de endomorfismul T , ci și de baza \mathcal{B} . Altfel spus, este posibil ca, alegând o altă bază a spațiului vectorial \mathbb{V} , deci asociind o altă matrice endomorfismului T , să obținem un alt polinom.

Vom demonstra în continuare că, de fapt, această ambiguitate nu există.

Lema 5.2.8. *Polinomul caracteristic al unui endomorfism este independent de baza aleasă.*

Demonstrație. Fie \mathcal{B}_1 și \mathcal{B}_2 două baze ale spațiului vectorial \mathbb{V} și fie A_1 și A_2 matricele asociate endomorfismului T în aceste baze. Atunci există o matrice inversabilă U astfel încât

$$A_2 = U^{-1}A_1U.$$

Folosind proprietatea multiplicativă a determinantului (2.2.23), obținem

$$\begin{aligned} \det(XI_n - A_2) &= \det(XI_n - U^{-1}A_1U) = \det(U^{-1}(XI_n - A_1)U) = \\ &= \det(U^{-1}) \det(XI_n - A_1) \det(U) = \det(U^{-1}) \det(U) \det(XI_n - A_1) = \det(XI_n - A_1). \end{aligned}$$

Altfel spus: polinomul caracteristic asociat lui T în baza \mathcal{B}_1 coincide cu polinomul caracteristic asociat lui T în baza \mathcal{B}_2 . \square

Exemplul 5.2.9. Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult 2 și fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare.

Dacă fixăm baza $\{1, X, X^2\}$ în \mathbb{V} , matricea asociată lui \mathbf{d} în această bază este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

deci polinomul caracteristic al lui \mathbf{d} este

$$P_{\mathbf{d}}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} = X^3.$$

Considerăm acum baza $\{X(X-1), (X-1)(X-2), X(X-2)\}$; obținem

$$P_d(X) = \begin{vmatrix} X-1,5 & -0,5 & -1 \\ 0,5 & X+1,5 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3.$$

Am verificat astfel, pe un exemplu, rezultatul demonstrat în Lema 5.2.8. \square

Am definit mai sus polinomul caracteristic asociat unui endomorfism. Aceeași definiție ne conduce la **polinomul caracteristic al unei matrice**: Teorema 5.1.1 ne arată că, de fapt, endomorfismele și matricele reprezintă aceleași "obiecte" matematice. În noul context, al matricelor, Lema 5.2.8 poate fi reformulată astfel:

Lema 5.2.10. *Matricele asemenea au același polinom caracteristic.* \square

5.2.3. Descrierea polinomului caracteristic. Este evident din definiție că polinomul caracteristic al unui endomorfism (sau al unei matrice) este polinom monic, de grad egal cu $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})$ (sau cu ordinul matricei).

Să fixăm o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, al cărei polinom caracteristic este:

$$(74) \quad P_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

Propoziția 5.2.11. *Coeфициentul σ_k din polinomul caracteristic este egal cu suma minorilor diagonali de ordinul k din matricea A . (Reamintim că un minor este diagonal dacă este format din linii și coloane cu aceiași indici.) În particular,*

$$\sigma_1 = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \text{ iar } \sigma_n = \det(A).$$

Demonstrație. Să notăm cu $s_k(A)$ suma minorilor diagonali de ordinul k din matricea A . Trebuie să demonstrăm deci egalitatea

$$s_k(A) = \sigma_k, \text{ pentru orice } k = \overline{1,n}.$$

Vom demonstra această egalitate prin inducție după n . Rezultatul din enunț este evident adevărat pentru matricele de ordin 1. Pentru a justifica pasul de inducție, este nevoie să facem mai întâi următoarea precizare.

Fie $M = (f_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice ale cărei elemente sunt funcții derivabile. Atunci determinantul $d(x)$ al acestei matrice este tot o funcție derivabilă. Folosind formula de calcul al unui determinant și regulile uzuale de derivare, obținem imediat egalitatea:

$$d'(x) = \sum_{k=1}^n \det(M_k),$$

unde M_k este matricea obținută din M prin derivarea liniei de pe locul k , adică prin înlocuirea acestei linii cu

$$(f'_{k1}(x); f'_{k2}(x); \dots; f'_{kn}(x)).$$

Vom aplica această formulă de derivare pentru matricea $M = xI_n - A$, al cărei determinant este funcția polinomială asociată polinomului caracteristic al lui A . În acest caz, prin derivare, linia de pe locul k a matricei M se înlocuiește cu linia $e_k = (0; 0; \dots; 1; \dots; 0)$ (în care apare

un singur 1, pe locul k). Folosind dezvoltarea determinantilor obținuți după liniile înlocuite, obținem egalitatea

$$P'_A(x) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(x),$$

unde A_k este matricea obținută din A prin tăierea liniei și coloanei de pe locul k . Aceste noi matrice A_k sunt însă de ordin $n - 1$; conform ipotezei de inducție, știm că toți coeficienții polinoamelor $P_{A_k}(x)$ sunt sume de minori principali ai matricelor A_k .

Un minor diagonal al matricei A_k este însă minor diagonal și pentru matricea A . Reciproc, orice minor diagonal de ordin r (cu $r \neq n$) din matricea A , apare ca minor diagonal în exact $n - r$ matrice A_k . De aceea

$$P'_A(x) = nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1x^{n-2} + (n-2)\sigma_2x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}.$$

Deoarece, în mod evident, $P_A(0) = (-1)^n\sigma_n$, enunțul propoziției rezultă prin integrare. \square

Observația 5.2.12. Aparent, demonstrația anterioară funcționează doar în cazul corpului numerelor reale. O analiză a tehnicilor folosite arată însă că demonstrația poate fi adaptată pentru orice corp comutativ.

Exemplul 5.2.13. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

o matrice de ordinul 2. Atunci polinomul său caracteristic are forma

$$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc).$$

\square

Exemplul 5.2.14. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice antisimetrică (adică o matrice cu proprietatea $A^T = -A$). Atunci coeficienții $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \dots$ ai polinomului caracteristic $P_A(X)$ sunt nuli, deoarece determinantul unei matrice antisimetrice de ordin impar este 0. De exemplu, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

polinomul caracteristic este $P_A(X) = X^3 + 14X$. \square

5.2.4. Multiplicitate algebrică. Multiplicitate geometrică. Să fixăm un endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ și o valoare proprie λ a acestui endomorfism. Am văzut că, pe de o parte, λ este rădăcină a polinomului caracteristic $P_T(X)$ și că, pe de altă parte, îi putem asocia lui λ un subspațiu $\mathbb{V}(\lambda) \subseteq \mathbb{V}$. De aceea, valorii proprii λ i se pot asocia două numere naturale.

Definiția 5.2.15. Fie T un endomorfism al spațiului vectorial \mathbb{V} și fie λ o valoare proprie a lui T .

- (1) **Multiplicitatea algebrică** a valorii proprii λ (notată $m_a(\lambda)$) este multiplicitatea rădăcinii λ în polinomul caracteristic $P_T(X)$.

- (2) **Multiplicitatea geometrică** a valorii proprii λ (notată $m_g(\lambda)$) este dimensiunea \mathbb{K} -spațiului vectorial $\mathbb{V}(\lambda)$.

Exemplele 5.2.16. (1) Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad ≤ 2 și fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare. Am văzut că $P_{\mathbf{d}}(X) = X^3$ și că $\mathbb{V}(0)$ (subspațiul corespunzător valorii proprii 0) este mulțimea polinoamelor constante. De aceea $m_a(0) = 3$, iar $m_g(0) = 1$.

(2) Fie \mathbb{V} spațiul vectorial al vectorilor din plan, iar T simetria față de dreapta d . Polinomul caracteristic al endomorfismului T este $P(X) = X^2 - 1$. Considerăm valoarea proprie $\lambda = 1$: atunci $m_a(1) = m_g(1) = 1$. \square

În exemplul 5.2.16 am obținut de fiecare dată inegalitatea $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$; această inegalitate este valabilă nu doar pentru exemplele studiate, așa cum vom vedea în rezultatul general care urmează.

Propoziția 5.2.17. Pentru orice valoare proprie λ a unui endomorfism de spații vectoriale, este adevărată inegalitatea

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda).$$

Demonstrație. Fie $r = m_g(\lambda)$ multiplicitatea geometrică a unei valori proprii a endomorfismului $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$; știm deci că $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}(\lambda)) = r$.

Alegem baza $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ a lui $\mathbb{V}(\lambda)$, pe care o completăm la o bază \mathcal{B} a lui \mathbb{V} . Vom folosi această bază pentru a calcula polinomul caracteristic al lui T .

Deoarece, din definiție, vectorii v_1, v_2, \dots, v_r sunt vectori proprii ai lui T , corespunzători valorii proprii λ , matricea asociată endomorfismului T în baza \mathcal{B} este o matrice structurată în blocuri de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot I_r & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

(unde I_r este matricea unitate de ordinul r). De aceea

$$P_T(X) = \det \left(XI_n - \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_r & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \right) = (X - \lambda)^r P_C(X)$$

(Ultima egalitate rezultă prin dezvoltarea determinantului după primele r coloane.) Deducem imediat, din definiție, că multiplicitatea rădăcinii λ în polinomul $P_T(X)$ este cel puțin egală cu r . Altfel spus: $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. \square

5.2.5. Teorema Cayley - Hamilton: o demonstrație. Fie A o matrice de ordinul n , cu coeficienți în corpul comutativ \mathbb{K} . Este ușor de văzut că matricea A verifică o ecuație polinomială cu coeficienți în \mathbb{K} . Într-adevăr, matricele $I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ nu pot fi liniar independente, deoarece $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$, iar o combinație liniară netrivială a lor determină o ecuație polinomială verificată de A .

Observația de mai sus are doar o natură *calitativă*: am arătat că *există* o astfel de ecuație polinomială, fără a indica o modalitate *efectivă* de aflare a acesteia. Pentru aplicațiile numerice, ar fi mult mai util să răspundem la următoarea întrebare:

Cum am putea oare explicita un astfel de polinom?

Analizăm mai întâi câteva cazuri particulare. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

o matrice de ordinul 2. Un calcul direct ne arată că

$$(75) \quad A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0_2.$$

O relație asemănătoare (desigur, mai complicată) este verificată și de matricele de ordinul 3. Aceste egalități matriceale, observate pentru prima dată de către Arthur Cayley (1821-1895) și William Rowan Hamilton (1805-1865), au făcut posibilă formularea următorului rezultat general, demonstrat de către Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917).

Teorema 5.2.18. (Teorema Cayley - Hamilton) *Fie A o matrice de ordinul n și fie $P_A(X)$ polinomul său caracteristic. Atunci*

$$P_A(A) = 0_n.$$

Demonstrație.

O "demonstrație" a teoremei 5.2.18 ar părea să fie următoarea:

Deoarece $P_A(X) = \det(XI_n - A)$, avem

$$P_A(A) = \det(AI_n - A) = \det(0_n) = 0.$$

Nu vă lăsați înșelați de simplitatea "demonstrației": este falsă!! Putem vedea, de exemplu, că rezultatul obținut de noi este *un număr*, pe când $P_A(A)$ ar trebui să fie *o matrice*.

Indicăm în continuare o **demonstrație corectă** a teoremei. Fie

$$M = XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

matricea caracteristică a lui A : determinantul acestei matrice este polinomul caracteristic $P_A(X)$. Considerăm matricea M^* , adjuncta matricei M . Este evident (din modul de definire a matricei adjuncte) că $M^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ (adică este o matrice ale cărei elemente sunt polinoame cu coeficienți în \mathbb{K}) și că toate elementele acestei matrice au gradul $\leq n - 1$.

Vom folosi în continuare egalitatea

$$M \cdot M^* = \det(M) \cdot I_n.$$

Această egalitate a fost demonstrată în Capitolul 2 (vezi 2.3.16) pentru matrice pătratice cu coeficienți într-un corp comutativ; egalitatea rămâne însă adevărată și pentru matrice pătratice cu coeficienți într-un inel comutativ, demonstrația fiind, practic, aceeași. (În cazul nostru, matricea M este o matrice pătratică cu coeficienți în inelul comutativ $\mathbb{K}[X]$.)

Pentru orice matrice F cu elemente polinoame, există o unică scriere de forma

$$(76) \quad F = F_0 + X \cdot F_1 + \cdots + X^p \cdot F_p,$$

unde p este gradul maxim al polinoamelor ce apar în scrierea lui F , iar F_i sunt matrice "scalare", cu coeficienți din \mathbb{K} . În particular, pentru matricea M^* , există o scriere de forma:

$$(77) \quad M^* = X^{n-1} \cdot B_{n-1} + X^{n-2} \cdot B_{n-2} + \cdots + X \cdot B_1 + B_0,$$

unde $B_0, B_1, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Folosind notația din (74) pentru polinomul caracteristic $P_A(X)$, obținem egalitatea

$$(XI_n - A)(X^{n-1} \cdot B_{n-1} + X^{n-2} \cdot B_{n-2} + \dots + B_0) = (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n) \cdot I_n.$$

Egalitatea anterioară are loc într-un inel atipic - este vorba despre inelul de polinoame la stânga cu coeficienți în inelul de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nu avem însă neapărată nevoie de această formalizare: deoarece scrierea unei matrice ca în (76) este *unică*, identificăm în egalitatea de mai sus coeficienții diverselor monoame de tip X^k și obținem următorul sistem de ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -AB_0 & = & (-1)^n \sigma_n I_n \\ B_0 - AB_1 & = & (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} I_n \\ B_1 - AB_2 & = & (-1)^{n-2} \sigma_{n-2} I_n \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n-2} - AB_{n-1} & = & -\sigma_1 I_n \\ B_{n-1} & = & I_n \end{array} \right.$$

Deși nu este de tip numeric, interpretăm sistemul de mai sus ca un sistem liniar, în care matricele B_0, B_1, \dots, B_{n-1} sunt necunoscutele. Observăm că avem un sistem de tip Gauss, deoarece fiecare ecuație conține cu o necunoscută mai mult decât precedentele. Efectuând, de exemplu, înlocuiri succesive ale necunoscutelor, de la sfârșit spre început (sau înmulțind la stânga ultima ecuație cu A , penultima ecuație cu A^2, \dots , prima ecuație cu A^n și adunând ecuațiile obținute), ajungem imediat la egalitatea

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} A + (-1)^n \sigma_n I_n = \mathbf{0}_n.$$

Altfel spus: $P_A(A) = \mathbf{0}_n$. □

Observația 5.2.19. Putem explica acum egalitatea (75): polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2$$

(notațiile sunt cele din (75)).

Teorema 5.2.18 este valabilă și pentru endomorfisme: pentru a o putea enunța în acest caz, avem nevoie de câteva precizări.

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Vom nota $T^2 = T \circ T$ și, mai general, $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{\text{de } k \text{ ori}}$. (Prin convenție, $T^0 = \text{id}_{\mathbb{V}}$.) De aceea, are sens să vorbim despre endomorfismul $F(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, unde F este un polinom fixat din $\mathbb{K}[X]$. Cu aceste notații, Teorema Cayley - Hamilton poate fi reformulată astfel:

Teorema 5.2.20. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism și fie $P_T(X)$ polinomul său caracteristic. Atunci

$$P_T(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}},$$

(unde $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ este endomorfismul nul). □

Exemplul 5.2.21. Fie $\mathbf{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spațiul vectorial al polinoamelor cu coeficienți reali, de grad ≤ 2 și fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare (care duce un polinom F în polinomul derivat F'). În exemplul 5.2.13, am văzut că polinomul caracteristic al endomorfismului \mathbf{d} este $P_{\mathbf{d}}(X) = X^3$.

Teorema Cayley-Hamilton afirmă că $\mathbf{d}^3 = 0$; vom verifica această egalitate și printr-un calcul direct. Într-adevăr, endomorfismul \mathbf{d}^3 duce un vector F (F este, de fapt, un polinom!), în $F^{(3)}$. Cum $\text{grad}(F) \leq 2$, este evident că $F^{(3)} = 0$. Așadar, endomorfismul \mathbf{d}^3 duce orice vector din \mathbf{V} în vectorul nul: deci \mathbf{d}^3 este endomorfismul nul. \square

5.2.6. Polinomul minimal al unei matrice. Polinomul minimal al unui endomorfism. Comentariile de la începutul secțiunii 5.2.5 și teorema 5.2.18 evidențiază două aspecte interesante privind legătura dintre polinoame și matrice.

Pe de o parte, știm că orice matrice de ordin n verifică, în inelul $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, o ecuație polinomială de grad $\leq n^2$. Pe de altă parte, odată fixată o matrice de ordinul n , există o ecuație polinomială de grad n (ecuația caracteristică) verificată de matricea dată. "Distanța" dintre gradul "anticipat" (n^2) și cel "efectiv" (n) face ca următoarea întrebare să devină foarte naturală:

Poate fi oare îmbunătățit rezultatul din teorema Cayley - Hamilton? Altfel spus, putem micșora și mai mult gradul polinomului F pentru care $F(A) = \mathbf{0}_n$?

Pentru a răspunde, vom analiza în continuare câteva exemple.

Exemplele 5.2.22. (1) Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simplu ne arată că

$$A^2 - I_3 = \mathbf{0}_3.$$

Așadar, în acest caz, matricea A verifică o ecuație polinomială de grad mai mic decât ordinul său.

(2) Fie

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folosind doar definiția, putem deduce că matricele

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sunt liniar independente în \mathbb{R} -spațiul vectorial $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Aceasta arată că matricea B nu poate verifica o ecuație polinomială netrivială de grad ≤ 2 . De aceea, în cazul matricei B , teorema 5.2.18 oferă cel mai bun rezultat posibil. \square

Am văzut în exemplele anterioare că, dată o matrice pătratică A de ordinul n , putem găsi uneori polinoame F de grad mai mic decât n cu proprietatea că $F(A) = \mathbf{0}_n$. Pentru comoditatea calculelor, am fi interesați să identificăm astfel de polinoame cu grad cât mai mic posibil.

Definiția 5.2.23. Polinomul minimal al unei matrice fixate $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este acel polinom monic $\mu_A(X) \in \mathbb{K}[X]^*$, de grad minim posibil, care verifică condiția

$$\mu_A(A) = \mathbf{0}_n.$$

Din definiție rezultă imediat următoarea proprietate.

Lema 5.2.24. Polinomul minimal al unei matrice este unic determinat. \square

Vom arăta acum în ce mod putem extinde această noțiune și pentru endomorfisme de spații vectoriale. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ un endomorfism și fie A matricea asociată lui T într-o bază oarecare. Vom defini **polinomul minimal al lui T** (notat $\mu_T(X)$) ca fiind polinomul minimal al matricei A . Deoarece inelele $(\mathcal{L}(\mathbf{V}), +, \circ)$ și $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ sunt izomorfe, polinomul minimal al endomorfismului T verifică relația

$$\mu_T(T) = \mathbf{0}_V.$$

Definiția de mai sus are însă o lacună: nu este clar dacă polinomul $\mu_T(X)$ nu depinde și de baza aleasă, față de care scriem matricea endomorfismului T . Pentru a fi completă, definiția necesită demonstrarea următorului rezultat.

Lema 5.2.25. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ două matrice asemenea (conform Definiției 5.1.3). Atunci

$$\mu_A(X) = \mu_B(X).$$

Demonstrație. Deoarece matricele A și B sunt asemenea, există o matrice inversabilă $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ astfel încât

$$B = U^{-1}AU.$$

Să observăm că matricele A^2 și B^2 sunt și ele asemenea; întradevăr

$$B^2 = (U^{-1}AU)(U^{-1}AU) = U^{-1}A^2U.$$

Analog, se demonstrează că matricele A^k și B^k sunt asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Mai general, dacă F este un polinom oarecare din $\mathbb{K}[X]$, atunci matricile $F(A)$ și $F(B)$ sunt asemenea. (În demonstrație, folosim exprimarea matricei $F(B)$ ca sumă de "monoame" de forma αB^k .)

Calculăm

$$\mu_A(B) = \mu_A(U^{-1}AU) = U^{-1}\mu_A(A)U = \mathbf{0}_n,$$

deci $\mu_A(B) = \mathbf{0}_n$. Din definiția polinomului minimal, avem că

$$\text{grad}(\mu_B(X)) \leq \text{grad}(\mu_A(X)).$$

Relația de asemănare a matricelor este însă o relație simetrică: procedând analog, deducem că $\text{grad}(\mu_B(X)) \geq \text{grad}(\mu_A(X))$, adică cele două polinoame minimale au același grad. În plus, ele sunt polinoame monice și ambele se anulează atunci când înlocuim variabila X cu matricea B . De aici, rezultă că cele două polinoame sunt egale. \square

Lema 5.2.24 și Teorema 5.1.1 ne permit să ne referim sau la polinomul minimal al unei matrice, sau la polinomul minimal al unui endomorfism: rezultatele demonstrate în unul din

aceste cazuri rămân valabile și în celălalt caz. Pentru simplitatea expunerii, în această secțiune ne vom referi doar la cazul matricelor.

Lema 5.2.26. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice fixată și fie $\mu_A(X)$ polinomul său minimal. Dacă $F \in \mathbb{K}[X]$ și $F(A) = \mathbf{0}_n$, atunci $\mu_A(X)$ divide $F(X)$.*

Demonstrație. În inelul $\mathbb{K}[X]$ aplicăm teorema împărțirii cu rest pentru polinoamele $F(X)$ și $\mu_A(X)$ (1.3.3): există deci $C(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât

$$F(X) = \mu_A(X)C(X) + R(X)$$

și $\text{grad}(R(X)) < \text{grad}(\mu_A(X))$. Deducem că

$$R(A) = F(A) - \mu_A(A)C(A) = \mathbf{0}_n.$$

Deoarece polinomul $R(X)$ are gradul mai mic decât polinomul minimal $\mu_A(X)$ și $R(A) = \mathbf{0}_n$, deducem că $R(X)$ trebuie să fie polinomul nul: în caz contrar, contrazicem Definiția 5.2.23. Altfel spus: $\mu_A(X)$ divide $F(X)$. \square

Corolarul 5.2.27. *Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.* \square

Corolarul (5.2.27) indică o posibilă metodă de calcul al polinomului minimal al unei matrice. Putem proceda astfel:

- (1) Calculăm polinomul caracteristic al matricei;
- (2) Descompunem polinomul caracteristic în factori ireductibili în $\mathbb{K}[X]$;
- (3) Determinăm toți divizorii monici ai polinomului caracteristic;
- (4) Unul din acești divizori este polinomul minimal al matricei date.

Exemplul 5.2.28. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^2(X - 3).$$

De aceea, polinomul minimal al lui A poate fi unul din următoarele polinoame:

$$1, X, X - 3, X^2, X(X - 3), X^2(X - 3).$$

Pentru a determina efectiv care este polinomul minimal, avem de efectuat câteva calcule cu matricea A . Folosind (5.2.26), în funcție de rezultatele deja obținute, putem evita unele din aceste calcule. De exemplu, dacă am găsit că $A(A - 3I) = \mathbf{0}$, atunci polinomul minimal al matricei A nu are cum să fie egal cu X^2 , deoarece acest polinom nu divide $X(X - 3)$. (De fapt, pentru exemplul analizat, polinomul minimal este chiar $X(X - 3)$.) \square

Deși ne poate conduce la rezultat, algoritmul indicat mai sus are o restricție de care ar trebui să ținem cont în aplicațiile practice: polinomul caracteristic poate avea mulți divizori monici, ceea ce ar putea conduce la calcule complicate. Rezultatul care urmează, demonstrat

de către Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), oferă o modalitate practică de simplificare a acestor calcule.

Teorema 5.2.29. *Polinomul caracteristic și polinomul minimal ale unei matrice au aceiași factori ireductibili în $\mathbb{K}[X]$.*

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi teorema în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Fie deci $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente numere complexe și fie $P_A(X)$ și $\mu_A(X)$ polinomul caracteristic, respectiv polinomul minimal ale acestei matrice. Deoarece polinoamele ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul 1, este suficient să demonstrăm următorul enunț:

Orice rădăcină a polinomului caracteristic $P_A(X)$, este rădăcină și pentru polinomul minimal $\mu_A(X)$.

Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic: există deci un vector propriu (nenul) asociat acestei valori proprii. Altfel spus, există o matrice coloană $v = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ pentru care

$$Av = \lambda v.$$

Este ușor de văzut că $A^2v = \lambda^2v$ și că, în general, pentru orice polinom $F \in \mathbb{C}[X]$,

$$F(A)v = F(\lambda)v.$$

În particular, considerând $F = \mu_A$, obținem

$$0 = \mu_A(A)v = \mu_A(\lambda)v,$$

de unde deducem imediat că

$$\mu_A(\lambda) = 0.$$

Această demonstrație nu mai este valabilă peste un corp comutativ arbitrar \mathbb{K} , deoarece polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ pot avea grade > 1 . Pentru cazul general, avem nevoie de următorul rezultat (1.4.8):

Lema 5.2.30. *Fie $F \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad ≥ 1 . Există atunci o extindere \mathbb{K}_1 a corpului comutativ \mathbb{K} , în care F are (cel puțin) o rădăcină.* \square

Fie deci $F(X)$ un factor ireductibil peste \mathbb{K} al polinomului caracteristic $P_A(X)$: vrem să demonstrăm că $F(X) \mid \mu_A(X)$. Considerăm extinderea de corpuri $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1$, cu proprietatea că polinomul F are o rădăcină λ în \mathbb{K}_1 . Folosind același argument ca în demonstrația de mai sus, deducem că

$$\mu_A(\lambda) = 0.$$

Aplicând teorema împărțirii cu rest în inelul $\mathbb{K}[X]$ (1.3.3), putem scrie

$$\mu_A(X) = F(X) \cdot C(X) + R(X),$$

unde $C(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$ și $\text{grad}(R) < \text{grad}(\mu_A)$. Atribuind variabilei X valoarea λ , obținem $R(\lambda) = 0$. Să presupunem, prin absurd, că $R \neq 0$: deoarece polinomul F este ireductibil, iar

$\text{grad}(R) < \text{grad}(F)$, polinoamele F și R trebuie să fie prime între ele. Există deci polinoamele $G(X), H(X) \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea

$$(78) \quad F(X)G(X) + R(X)H(X) = 1.$$

Dacă atribuim în (83) valoarea λ variabilei X , obținem $0 = 1$, ceea ce constituie evident o contradicție. Deducem că $R(X) = 0$, deci că $F(X)$ divide $\mu_A(X)$. \square

5.3. Subspații invariante de dimensiuni arbitrare

5.3.1. Forma triangulară a unei matrice. *Atenție! Tehnica folosită în demonstrarea rezultatelor care urmează depășește nivelul de până acum al acestui curs: de aceea, această secțiune poate fi ignorată la o primă lectură.*

În secțiunile anterioare, am studiat subspațiile 1-dimensionale invariante de un endomorfism fixat $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Am ajuns astfel să definim câteva noțiuni importante pentru studiul endomorfismelor (sau al matricelor), cum ar fi, de exemplu, polinomul caracteristic sau polinomul minimal.

În această secțiune, suntem interesați de subspații de dimensiuni arbitrare, invariante de T . Vom porni de la următoarea întrebare naturală:

Există oare subspații invariante de T , de orice dimensiune posibilă?

După cum am văzut în Exemplul 5.2.2, există situații în care un endomorfism nu are valori proprii, deci nu are subspații invariante de dimensiune 1: cu atât mai mult, e posibil ca endomorfismul să nu aibă subspații invariante de dimensiuni mai mari decât 1.

Să analizăm cu mai mare atenție aceste situații. Valorile proprii ale endomorfismului dat sunt rădăcinile din corpul \mathbb{K} ale polinomului caracteristic. Pentru a fi siguri de existența în \mathbb{K} a acestor rădăcini, este suficient să presupunem că lucrăm peste un corp *algebric închis*, de exemplu peste corpul \mathbb{C} al numerelor complexe. Cu această ipoteză suplimentară, vom demonstra că răspunsul la întrebarea de mai sus este afirmativ.

Teorema 5.3.1. *Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial definit peste corpul numerelor complexe și fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există un șir de subspații invariante de T*

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_n \supset \mathbb{V}_{n-1} \supset \mathbb{V}_{n-2} \supset \cdots \supset \mathbb{V}_1 \supset \mathbb{V}_0,$$

unde $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_p) = p$, pentru orice $p \in \overline{1, n}$.

În particular, există subspații invariante de T , de orice dimensiune posibilă.

Demonstrație. Pentru a demonstra teorema, este suficient să justificăm următorul rezultat mai simplu:

(**) *Dacă \mathbb{V} este un \mathbb{C} -spațiu vectorial de dimensiune n , iar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism fixat, atunci există în \mathbb{V} un subspațiu invariant de T , de dimensiune $n - 1$.*

Vom demonstra afirmația (**) prin inducție după n .

Pentru $n = 1$, afirmația este evidentă: subspațiul nul este invariabil de T și are dimensiunea 0 ($= n - 1$).

Să presupunem acum că afirmația (***) este adevărată pentru orice spațiu vectorial de dimensiune $\leq k$: vom demonstra că are loc și pentru spațiile vectoriale de dimensiune $k + 1$.

Deoarece lucrăm peste corpul numerelor complexe \mathbb{C} , endomorfismul T are (cel puțin) o valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$. Fie v un vector propriu corespunzător valorii proprii λ și fie

$$\mathbb{W} = \mathbb{V}/\mathbb{C}v$$

spațiul vectorial obținut prin factorizarea lui \mathbb{V} la subspațiul propriu $\mathbb{C}v$, generat de v . Din diagrama de transformări liniare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{T} & \mathbb{V} \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ \mathbb{W} & & \mathbb{W} \end{array}$$

(unde p este morfismul canonic de trecere la clase $x \mapsto x + \mathbb{C}v$), deducem că există o transformare liniară indusă

$$\mathbb{W} \xrightarrow{S} \mathbb{W},$$

descrișă prin

$$S(x + \mathbb{C}v) = T(x) + \mathbb{C}v.$$

Deoarece $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{W}) = k$, iar S este un endomorfism al lui \mathbb{W} , conform ipotezei de inducție există un subspațiu $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{W}$, invariabil de S , de dimensiune $k - 1$. Fie $\mathbb{E} = p^{-1}(\mathbb{U})$ preimaginea subspațiului \mathbb{U} prin morfismul canonic p . \mathbb{E} este un subspațiu vectorial al lui \mathbb{V} , de dimensiune k . În plus, dacă $y \in \mathbb{E}$ este un vector arbitrar, atunci

$$p(T(y)) = S(p(y)) \in \mathbb{U},$$

deci

$$T(y) \in \mathbb{E}.$$

Deducem că \mathbb{E} este subspațiul căutat. □

Corolarul 5.3.2. *Fie \mathbb{V} este un spațiu vectorial de dimensiune n , definit peste corpul numerelor complexe și fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există o bază $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a lui \mathbb{V} cu proprietatea că subspațiul generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ este subspațiu invariabil de T , pentru orice $p \in \overline{1, n}$.*

Demonstrație. În condițiile teoremei anterioare, alegem succesiv vectorii $(v_i)_i$ astfel încât subspațiul generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ să fie egal cu \mathbb{V}_p . □

Corolarul 5.3.3. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există o bază a lui \mathbb{V} în care matricea lui T este inferior diagonală, adică are forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde λ_i (numerele de pe diagonala matricei) sunt valorile proprii ale lui T .

Demonstrație. Scriem matricea asociată lui T în baza $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ descrisă în Corolarul 5.3.1: din modul de alegere a acestei baze, știm că

$$T(v_i) \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_i\}, \text{ pentru orice } i \in \overline{1, n}.$$

De aceea, pe coloana i a matricei asociate, toate elementele de pe pozițiile $i + 1, i + 2, \dots, n$ sunt nule. Pentru a justifica ultima afirmație din enunț, este suficient să calculăm polinomul caracteristic al endomorfismului T , folosind matricea găsită. \square

Observația 5.3.4. Corolarul 5.3.3 reprezintă o variantă a Teoremei de descompunere, demonstrată de către Issai Schur (1875-1941). Vom arăta în continuare cum putem obține o demonstrație a Teoremei Cayley - Hamilton (5.2.18), folosind doar acest corolar.

Fie $S = P_T(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$; vrem să demonstrăm că $S = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Notăm de asemenea $f_i = T - \lambda_i \cdot id_{\mathbb{V}}$. Vom folosi în continuare egalitatea

$$(79) \quad S = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n.$$

(În compunerea endomorfismelor de mai sus, ordinea factorilor poate fi schimbată, deoarece endomorfismele f_i și f_j comută.)

Alegem unul din vectorii v_i ai bazei descrise în Corolarul 5.3.3 și calculăm $S(v_i)$. Deoarece

$$f_i(v_i) = T(v_i) - \lambda_i v_i \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\},$$

deducem că pentru orice $i \in \overline{1, n}$:

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_i(v_i) = 0.$$

De aceea $S(v_i) = 0$, pentru orice i , deci $S = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. \square

5.3.2. Descompunerea în sumă directă de subspații invariante. Să ne întoarcem acum la întrebarea formulată la sfârșitul secțiunii (5.1.3): *Cum putem descompune \mathbb{V} ca sumă directă de subspații invariante?*

Întrebarea are, în continuare, sens: chiar dacă am fi determinat deja diferite subspații invariante de endomorfismul T , nu este clar că \mathbb{V} poate fi exprimat ca suma directă a acestora! Este necesar deci să dezvoltăm noi tehnici prin care putem defini și putem determina efectiv subspații invariante.

Pornim de la următoarea constatare. Dacă $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, unde \mathbb{V}_1 și \mathbb{V}_2 sunt subspații invariante de T și dacă S_i este restricția lui T la \mathbb{V}_i , atunci

$$P_T(X) = P_{S_1}(X) \cdot P_{S_2}(X).$$

Așadar, o descompunere a lui \mathbb{V} ca sumă directă de subspații invariante determină o descompunere în factori a polinomului caracteristic P_T . Vom arăta că, în anumite condiții, este valabilă și reciproca.

Fie

$$P_T(X) = F(X) \cdot G(X),$$

o descompunere a polinomului caracteristic, unde F și G sunt polinoame *relativ prime între ele* din $\mathbb{K}[X]$. Definim endomorfismele f și g ale lui \mathbb{V} , descrise astfel:

$$f = F(T), \quad g = G(T).$$

Următoarele proprietăți rezultă imediat din definiții și din Teorema 5.2.18:

$$(80) \quad f \circ T = T \circ f \text{ și } f \circ g = g \circ f = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}.$$

Să notăm

$$\mathbb{V}_F = \text{Ker}(f) \text{ și } \mathbb{V}_G = \text{Ker}(g);$$

evident, acestea sunt două subspații vectoriale ale lui \mathbb{V} . Vom demonstra că obținem astfel descompunerea dorită.

Teorema 5.3.5. *Următoarele proprietăți se referă la subspațiile definite mai sus.*

- (1) \mathbb{V}_F și \mathbb{V}_G sunt subspații invariante de T .
- (2) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_F \oplus \mathbb{V}_G$;
- (3) $\mathbb{V}_F = \text{Im}(g)$, $\mathbb{V}_G = \text{Im}(f)$;
- (4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_F) = \text{grad}(F)$.

Demonstrație. (1) Fie $v \in \mathbb{V}_F$ un vector arbitrar; vom demonstra că $T(v) \in \mathbb{V}_F$. Aplicând (80), avem

$$f(T(v)) = f \circ T(v) = T \circ f(v) = T(0) = 0,$$

de unde deducem că

$$T(v) \in \text{Ker}(f) = \mathbb{V}_F.$$

(2) Deoarece polinoamele F și G sunt prime între ele în inelul $\mathbb{K}[X]$, există polinoamele $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea

$$FQ + GR = 1.$$

Înlocuind variabila X cu T , obținem în inelul $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ egalitatea

$$(81) \quad f \circ Q(T) + g \circ R(T) = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}.$$

Fie $w \in \mathbb{V}$ un vector arbitrar și fie

$$w_1 = g \circ R(T)(w), \quad w_2 = f \circ Q(T)(w).$$

Folosind (81), obținem imediat egalitatea

$$w = w_1 + w_2.$$

Vom demonstra că $w_1 \in \mathbb{V}_F$ și $w_2 \in \mathbb{V}_G$; într-adevăr

$$f(w_1) = f \circ g \circ R(T)(w_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}(R(T)(w_1)) = 0.$$

Am obținut deci egalitatea

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_F + \mathbf{V}_G.$$

Pentru a arăta că descompunerea de mai sus este o sumă directă, verificăm dacă

$$\mathbf{V}_F \cap \mathbf{V}_G = \{0\}.$$

Fie $t \in \mathbf{V}_F \cap \mathbf{V}_G$ un vector arbitrar; deoarece $f(t) = g(t) = 0$, din egalitatea (81) obținem

$$t = (Q(T) \circ f)(t) + (R(T) \circ g)(t) = 0.$$

(3) Pentru demonstrarea egalităților din enunț, se folosește descompunerea (81): lăsăm detaliile pe seama cititorului.

(4) Fie S restricția endomorfismului T la subspațiul \mathbf{V}_F : așadar, $S \in \mathcal{L}(\mathbf{V}_F)$. Deoarece $F(S)$ este restricția endomorfismului $f(= F(T))$ la \mathbf{V}_F , din definiția subspațiului \mathbf{V}_F obținem că $F(S) = \mathbf{0}_{\mathbf{V}_F}$; de aceea,

$$\mu_S(X) \mid F(X),$$

unde μ_S este polinomul minimal al endomorfismului S .

Pe de altă parte, polinomul caracteristic $P_S(X)$ al endomorfismului S divide polinomul caracteristic $P_T(X)$: afirmația rezultă din scrierea lui \mathbf{V} ca sumă directă și din definiția polinomului caracteristic.

Toate aceste observații, precum și Teorema 5.2.29, ne conduc la concluzia

$$P_S(X) \text{ divide } F(X).$$

Din divizibilitatea de mai sus, reținem doar că $\text{grad}(P_S(X)) \leq \text{grad}(F(X))$ deci că

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}_F) \leq \text{grad}(F).$$

Analog,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}_G) \leq \text{grad}(G).$$

Cum

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}_F) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}_G) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}) = \text{grad}(P_T(X)) = \text{grad}(F(X)) + \text{grad}(G(X)),$$

în inegalitățile anterioare trebuie să avem egalitate. □

Observațiile 5.3.6. (1) Teorema 5.3.5 rămâne adevărată și în cazul în care polinomul caracteristic $P_T(X)$ a fost descompus ca produs de trei sau mai mulți factori relativ primi: obținem astfel scrierea lui \mathbf{V} ca sumă directă de mai multe subspații invariante, numărul sumanzilor fiind egal cu numărul de factori din descompunere. Demonstrația de mai sus poate fi ușor adaptată și pentru acest caz.

(2) Cu excepția ultimei afirmații din Teorma 5.3.5, toate celelalte afirmații rămân valabile dacă, în locul polinomul caracteristic $P_T(X)$, descompunem polinomul minimal ca produs de factori relativ primi: o analiză atentă a demonstrației teoremei arată că în prima parte am folosit doar faptul că $FG(T) = \mathbf{0}_{\mathbf{V}}$.

5.4. Forma canonică Jordan

Am definit în (5.1.3) relația de asemănare a matricelor pătratice. Pentru aplicațiile numerice, este util să identificăm un *sistem complet de reprezentanți* pentru această relație de echivalență: altfel spus, este util să determinăm un anumit tip de matrice, cu proprietatea că orice matrice pătratică este asemenea cu o *unică* matrice de tipul dat. Din considerente pe care le vom explica ulterior, vom studia această problemă doar pentru matrice definite peste corpul \mathbb{C} al numerelor complexe.

Am văzut de asemenea că orice matrice cu elemente numere complexe este asemenea cu o matrice inferior triunghiulară, care are pe diagonală valorile proprii ale matricei date: nu ar putea fi oare acesta tipul de matrice căutat? Din păcate, demonstrația Teoremei 5.3.1 și demonstrația Corolarului 5.3.3 arată că pot exista matrice inferior triunghiulare, cu aceleași elemente pe diagonală principală, care nu sunt asemenea. Așadar, matricele inferior triunghiulare nu ne rezolvă problema!

Matricele diagonale reprezintă un alt "candidat" posibil. Acestea îndeplinesc proprietatea de unicitate, deoarece două matrice diagonale sunt asemenea dacă și numai dacă au aceleași intrări pe diagonală (nu neapărat în aceeași ordine). Din păcate, așa cum am văzut în Exemplul 73, nu orice matrice este asemenea cu o matrice diagonală. Din nou am dat greș!

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922) a reușit să identifice o clasă de matrice "aproape diagonale", numite matrice Jordan, care îndeplinesc proprietățile dorite. Mai precis, orice matrice pătratică cu elemente din \mathbb{C} este asemenea cu o anumită matrice Jordan și aceasta este, în mod esențial, unic determinată. O matrice Jordan asemenea cu o matrice dată se numește **forma canonică Jordan** a matricei respective.

Să explicăm ce este o matrice Jordan.

Definiția 5.4.1. *Un bloc Jordan corespunzător numărului complex λ este o matrice pătrată de forma*

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Pe diagonală principală apare de p ori numărul λ , iar pe diagonală imediat de sub diagonală principală apare de $p - 1$ ori numărul 1. Toate celelalte intrări ale matricei sunt egale cu 0.)

O **matrice Jordan** este o matrice pătratică, formată din blocuri Jordan așezate pe diagonală principală, toate celelalte intrări fiind egale cu 0:

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Blocurile Jordan care apar pe diagonală nu sunt neapărat diferite între ele.

Scopul acestui capitol este demonstrarea următoarei teoreme.

Teorema 5.4.2. (Teorema lui Jordan) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de numere complexe. Există atunci o matrice inversabilă $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ astfel ca

$$A = U \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix} U^{-1},$$

unde $p_1 + p_2 + \dots + p_t = n$.

Enunț echivalent: Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism dat, atunci există o bază a spațiului vectorial n -dimensional \mathbb{V} în care matricea lui T este o matrice Jordan.

Matricea Jordan a lui A (sau a lui T) este unică până la o permutare a blocurilor Jordan de pe diagonală.

Vom demonstra în cele ce urmează Teorema lui Jordan, pornind de la cazurile cele mai simple spre cazul general.

5.4.1. Endomorfisme nilpotente. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism nilpotent, adică un endomorfism pentru care există $r \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$T^r = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}.$$

Echivalent: polinomul caracteristic al lui T este $P_T(X) = X^n$, unde $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Vom folosi în continuare următoarea definiție.

Definiția 5.4.3. Un vector propriu generalizat al endomorfismului nilpotent T este un șir de vectori nenuli, de forma

$$\mathbf{v} = \{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{m-1}(v)\},$$

unde $T^m(v) = 0$. v este **rădăcina** vectorului propriu generalizat, iar m este **lungimea** acestuia.

Este ușor de demonstrat următoarea afirmație.

Lema 5.4.4. Orice vector propriu generalizat formează un sistem liniar independent. \square

Arătăm acum că Teorema lui Jordan (5.4.2) este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) nilpotente. *Existența* formei Jordan rezultă din următoarea propoziție.

Propoziția 5.4.5. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism nilpotent. Atunci \mathbb{V} are o bază formată din vectori proprii generalizați ai lui T .

Matricea asociată lui T în această bază este matrice Jordan.

Demonstrație. Fie $r \in \mathbb{N}$ cel mai mic număr natural pentru care $T^r = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$; vom demonstra propoziția prin inducție după r .

Pentru $r = 1$, este suficient să alegem *orice* bază a lui \mathbb{V} : fiecare vector al acestei baze este un vector propriu generalizat, de lungime 1.

Să demonstrăm acum pasul de inducție. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism cu proprietatea că $T^{r+1} = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Considerăm subspațiul

$$\mathbb{W} = \text{Im}(T) \subseteq \mathbb{V}.$$

\mathbb{W} este un subspațiu propriu al lui \mathbb{V} , invariant de T . Fie $S = \text{res}(T)$, restricția endomorfismului T la subspațiul \mathbb{W} . Este evident că S este un endomorfism al lui \mathbb{W} (deoarece \mathbb{W} este invariant de T) și că $S^r = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ (deoarece $\mathbb{W} = \text{Im}(T)$). Putem aplica deci ipoteza de inducție pentru a deduce că există o bază a lui \mathbb{W} formată din vectori proprii generalizați pentru S , de forma:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s,$$

unde \mathbf{v}_i are rădăcina v_i și lungimea m_i . Vom încerca să "extindem" această bază la o bază a lui \mathbb{V} .

Deoarece $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathbb{W} = \text{Im}(S)$, există vectorii $w_1, w_2, \dots, w_s \in \mathbb{V}$ cu proprietatea că

$$v_i = T(w_i), \text{ pentru } i = \overline{1, s}.$$

Obținem astfel următorii vectori proprii generalizați ai lui \mathbb{V} :

$$\mathbf{w}_i = \{w_i, T(w_i), T^2(w_i), \dots, T^{m_i}(w_i)\}, \quad i = \overline{1, r}.$$

Vom demonstra acum că vectorii $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_s\}$ sunt liniar independenți. (Evident, afirmația se referă la sistemul de vectori obținut prin reunirea vectorilor proprii generalizați!) Să considerăm combinația liniară nulă:

$$(82) \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i} a_{i,j} T^j(w_i) = 0.$$

Aplicăm în (82) morfismul T și ținem cont de faptul că $T^{m_i+1}(w_i) = 0$; obținem

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{i,j} T^{j+1}(w_i) = 0.$$

Deoarece $T(w_i) = v_i$, egalitatea anterioară se mai scrie

$$(83) \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{i,j} T^j(v_i) = 0.$$

Știm însă că vectorii $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s\}$ sunt liniar independenți (pentru că formează o bază a lui \mathbb{W}), iar în egalitatea (83) apar doar acești vectori; de aceea, $a_{i,j} = 0$, pentru $i = \overline{1, r}$ și $j = \overline{0, m_i - 1}$. Cu aceasta, egalitatea (82) se reduce la

$$\sum_{i=1}^r a_{i,m_i} T^{m_i}(w_i) = 0.$$

Deoarece $t_i \geq 1$, aceasta egalitate mai poate fi scrisă

$$\sum_{i=1}^r a_{i,m_i} T^{m_i-1}(v_i) = 0;$$

folosim din nou liniar independența vectorilor proprii generalizați $\{\mathbf{v}_i\}_i$ pentru a deduce că

$$a_{i,m_i} = 0, \forall i \in \overline{1, r}.$$

Fie $\mathbf{U} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ subspațiul vectorial generat de vectorii proprii generalizați determinați deja în \mathbf{V} . Vom arăta că putem completa sistemul liniar independent $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ la o bază a lui \mathbf{V} , adăugând doar vectori din $\text{Ker}(T)$. Aceasta va termina demonstrația propoziției, deoarece orice vector din $\text{Ker}(T)$ este vector propriu generalizat, de lungime 1.

Pentru început, completăm *la întâmplare* sistemul liniar independent $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$, cu vectorii $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_q\}$, pentru a obține o bază a lui \mathbf{V} . Vom arăta că putem modifica vectorii nou adăugați, pentru ca aceștia să aparțină nucleului lui T , iar sistemul de q vectori proprii generalizați astfel obținut să rămână bază în \mathbf{V} .

Să considerăm de exemplu vectorul u_{r+1} ; deoarece $T(u_{r+1}) \in \mathbf{W}$, iar $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ este o bază a lui \mathbf{W} , putem scrie

$$(84) \quad T(u_{r+1}) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^j(v_i) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^{j+1}(w_i)$$

(în ultima egalitate, am ținut cont de faptul că $v_i = T(w_i)$, $i = \overline{1, r}$).

Fie

$$\widetilde{u_{r+1}} = u_{r+1} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^j(w_i);$$

este clar că $T(\widetilde{u_{r+1}}) = 0$ și că, prin înlocuirea lui u_{r+1} cu $\widetilde{u_{r+1}}$, obținem tot o bază.

Procedăm analog cu ceilalți vectori ai bazei, nou adăugați: obținem astfel o bază a lui \mathbf{V} formată din vectori proprii generalizați pentru T .

Justificăm acum ultima parte a Propoziției 5.4.5. Fiecare vector propriu generalizat \mathbf{v} , ale cărui componente $v, T(v), T^2(v), \dots, T^{m-1}(v)$ reprezintă o parte din baza identificată mai sus, determină în matricea asociată lui T celula Jordan $J_m(0)$. Într-adevăr, pentru a scrie matricea asociată lui T , trebuie să exprimăm $T(u)$ în funcție de elementele bazei, unde u este, pe rând, fiecare element al bazei. Când ajungem la secvența reprezentată de componentele lui \mathbf{v} , constatăm că T acționează asupra acestor componente prin "translație" spre dreapta (adică T duce componenta de pe locul i în componenta de pe locul $i + 1$, iar ultima componentă este dusă în 0). Deoarece baza lui \mathbf{V} este formată din vectori proprii generalizați, matricea asociată lui T este o matrice Jordan. \square

Am demonstrat mai sus *existența* matricei Jordan a unui endomorfism nilpotent (sau, echivalent, a unei matrice nilpotente). Rămâne să răspundem la întrebarea:

Este această matrice Jordan unic determinată?

Demonstrația Propoziției 5.4.5 nu ne ajută să dăm un răspuns: în această demonstrație, alegem succesiv elemente ale unei baze din \mathbf{V} . Apriori, aceste alegeri (care permit un grad mare de libertate) influențează matricea asociată endomorfismului. Cu toate acestea, vom demonstra că matricea Jordan are o anumită proprietate de unicitate. Precizăm în continuare ce se înțelege prin aceasta.

Să presupunem că am fixat o bază a lui \mathbf{V} , formată din vectori proprii generalizați pentru T . O permutare a vectorilor proprii generalizați ce constituie baza aleasă determină aceeași permutare a blocurilor Jordan de pe diagonala matricei asociate lui T . Așadar, nu ne putem

aștepta ca matricele Jordan asociate lui T în două baze diferite, să fie "absolut" identice; totuși, dacă permitem permutarea blocurilor de pe diagonala principală, atunci unicitatea poate fi demonstrată!

Propoziția 5.4.6. Fie J o matrice Jordan a matricei nilpotente A , formată din n_1 blocuri Jordan de ordinul 1, n_2 blocuri Jordan de ordinul 2, ..., așezate pe diagonala principală. Atunci

$$(85) \quad n_i = \text{rang}(A^{i-1}) - 2 \text{rang}(A^i) + \text{rang}(A^{i+1}), \text{ pentru orice } i \geq 1.$$

Altfel spus: matricea Jordan J este unic determinată de matricea A , până la o permutare a blocurilor de pe diagonala principală.

Demonstrație. Fie $U \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că

$$J = U^{-1}AU.$$

Deoarece

$$J^i = U^{-1}A^iU, \text{ pentru orice } i \in \mathbb{N},$$

avem egalitatea

$$(86) \quad \text{rang}(A^i) = \text{rang}(J^i), \text{ pentru orice } i.$$

De aceea, este suficient să caracterizăm numărul de blocuri Jordan ale lui J de un anumit ordin, în funcție de rangul diverselor puteri ale lui A .

Vom folosi în continuare următorul rezultat, a cărui demonstrație este lăsată ca exercițiu.

Lema 5.4.7. Fie

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

un bloc Jordan de ordin p , corespunzător numărului 0. Atunci B^i se obține prin deplasarea diagonalei nenule, cu $i - 1$ poziții mai jos.

De aceea: $\text{rang}(B^i) = p - i$ pentru $i \leq p$, iar $\text{rang}(B^j) = 0$ pentru $j > p$. □

Revenim la demonstrația Propoziției (5.4.6). Matricea Jordan J este o matrice organizată în blocuri; această organizare ne permite să exprimăm ușor puterile lui J :

$$(87) \quad \text{dacă } J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}, \text{ atunci } J^i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0)^i & & & \\ & J_{p_2}(0)^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0)^i \end{pmatrix}.$$

De aceea

$$\text{rang}(J^i) = \text{rang}(J_{p_1}(0)^i) + \text{rang}(J_{p_2}(0)^i) + \dots + \text{rang}(J_{p_r}(0)^i).$$

Ținând cont de Lema (5.6.2) și de (86), obținem următorul sistem de ecuații liniare:

$$(88) \quad \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots &= n - \text{rang}(A) \\ n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + \dots &= n - \text{rang}(A^2) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 3n_4 + \dots &= n - \text{rang}(A^3) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots &= n - \text{rang}(A^4) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Sistemul (88) este compatibil determinat și are soluția

$$n_i = \text{rang}(A^{i-1}) - 2 \text{rang}(A^i) + \text{rang}(A^{i+1}),$$

pentru orice $i \geq 1$. (În egalitatea anterioară, am considerat prin convenție $A^0 = I_n$.)

În concluzie: matricea Jordan asociată unei matrice nilpotente A este unic determinată. \square

Observația 5.4.8. Numerele n_i definite în Propoziția 5.4.6 îndeplinesc evident condiția

$$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + \dots = n,$$

unde n este ordinul matricei A .

Exemplul 5.4.9. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

Un calcul simplu arată că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = X^4$; deducem de aici că A este matrice nilpotentă.

Deoarece

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \text{ iar } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\text{rang}(A) = 2$, $\text{rang}(A^2) = 1$, $\text{rang}(A^3) = \text{rang}(A^4) = \text{rang}(A^5) = 0$. De aceea

$$n_1 = \text{rang}(I_4) - 2 \text{rang}(A) + \text{rang}(A^2) = 1,$$

$$n_2 = \text{rang}(A) - 2 \text{rang}(A^2) + \text{rang}(A^3) = 0,$$

$$n_3 = \text{rang}(A^2) - 2 \text{rang}(A^3) + \text{rang}(A^4) = 1,$$

$$n_4 = \text{rang}(A^3) - 2 \text{rang}(A^4) + \text{rang}(A^5) = 0.$$

Așadar, matricea Jordan asociată lui A are o celulă de ordin 1 și o celulă de ordin 3, deci

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

\square

5.4.2. Forma canonică Jordan: cazul general. În secțiunea anterioară, am demonstrat că Teorema 5.4.2 este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) nilpotente. Vom arăta acum în ce mod putem folosi această demonstrație, pentru a justifica teorema în cazul general.

5.4.2.1. *Endomorfisme cu o unică valoare proprie.* Să presupunem acum că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism care are o unică valoare proprie λ ; altfel spus, presupunem că polinomul caracteristic al lui T are forma

$$P_T(X) = (X - \lambda)^n.$$

Fie

$$S = T - \lambda \cdot \text{id}_{\mathbb{V}};$$

obținem astfel un endomorfism nilpotent al lui \mathbb{V} . Conform Propoziției 5.4.6, există o bază a lui \mathbb{V} în care matricea asociată endomorfismului S este o matrice Jordan, de forma

$$J_S = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}.$$

Dacă exprimăm în aceeași bază matricea lui T , obținem matricea

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(\lambda) \end{pmatrix},$$

care este o matrice Jordan asociată endomorfismului T .

Reciproc, dacă J este o matrice Jordan asociată lui T (nu neapărat matricea de mai sus!), atunci $J - \lambda \cdot I_n$ este o matrice Jordan asociată lui S . Pentru endomorfismele nilpotente, am demonstrat însă unicitatea matricei Jordan asociate (în sensul Propoziției 5.4.6); aceasta arată că lui T i se poate asocia o unică matrice Jordan.

Discuția anterioară arată că Teorema 5.4.2 este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) care au o unică valoare proprie.

5.4.2.2. *Endomorfisme arbitrare.* Fie acum $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism arbitrar al spațiului vectorial complex \mathbb{V} . Notăm

$$P_T(X) = (X - \lambda_1)^{s_1} (X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_t)^{s_t}$$

polinomul caracteristic al lui T , unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ sunt valorile proprii distincte ale lui T . Definim subspațiile vectoriale $\mathbb{V}_i \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$, $i = \overline{1, t}$, descrise astfel:

$$V_i = \text{Ker}((T - \lambda_i \cdot \text{id}_{\mathbb{V}})^{s_i}).$$

Polinoamele $F_i = (X - \lambda_i)^{s_i}$ sunt relativ prime între ele. De aceea, conform Teoremei 5.3.5, fiecare dintre subspațiile \mathbb{V}_i este subspațiu invariant de T , cu $\dim_{\mathbb{C}}(V_i) = s_i$. Fie $S_i \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_i)$ restricția lui T la subspațiul \mathbb{V}_i . Deoarece polinomul $F_i(X) = (X - \lambda_i)^{s_i}$ este polinomul caracteristic al lui S_i (conform Teoremei 5.3.5), deducem că fiecare dintre endomorfismele S_i are o unică valoare proprie λ_i . Suntem astfel în condițiile secțiunii (5.4.2.1): pentru fiecare dintre aceste morfisme, există deci câte o matrice Jordan \mathcal{M}_i , care reprezintă matricea asociată endomorfismului S_i într-o anumită bază \mathcal{B}_i a subspațiului \mathbb{V}_i .

Deoarece $\mathbb{V} = \bigoplus_j \mathbb{V}_j$, reuniunea bazelor \mathcal{B}_j , fixate în fiecare dintre subspațiile V_j , determină o bază \mathcal{B} a lui \mathbb{V} . Dacă păstrăm în \mathcal{B} ordinea vectorilor din bazele \mathcal{B}_j , matricea lui T în baza \mathcal{B}

se obține prin scrierea succesivă, pe diagonală, a matricelor \mathcal{M}_j ; este evident însă că matricea \mathcal{M} astfel obținută este o matrice Jordan.

Pentru a demonstra unicitatea matricei Jordan asociată lui T , vom folosi un argument analog celui din Propoziția 5.4.6. Fie J o matrice Jordan asociată morfismului T și fie λ o valoare proprie fixată a morfismului. Notăm cu n_i numărul de blocuri Jordan, care au ordinul i și sunt asociate lui λ , ce apar pe diagonală matricei J . Vom demonstra că numerele n_i verifică un sistem analog cu (88).

Argumentul care urmează se bazează pe câteva rezultate, care au fost demonstrate deja în capitolele anterioare; pentru a fi mai ușor de urmărit de către cititor, reluăm aici enunțurile lor.

Lema 5.4.10. *Dacă*

$$M = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

este o matrice-bloc, în care B și C sunt matrice pătratice, atunci

- (1) $\text{rang}(M) = \text{rang}(B) + \text{rang}(C)$;
- (2) *pentru orice $p \in \mathbb{N}$,*

$$M^p = \begin{pmatrix} B^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^p \end{pmatrix}.$$

Fie $B = J - \lambda \cdot I_n$; aplicând Lema 5.4.10 obținem imediat următoarele egalități, similare celor din (88):

$$(89) \quad \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots &= n - \text{rang}(B) \\ n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + \dots &= n - \text{rang}(B^2) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 3n_4 + \dots &= n - \text{rang}(B^3) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots &= n - \text{rang}(B^4) \\ \dots &\dots \end{cases}$$

Matricea B este însă matricea asociată endomorfismului $g = T - \lambda \cdot \text{id}_V$ în baza \mathcal{B} (de mai sus); de aceea, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $\text{rang}(B^p)$ (care este egal cu $\text{rang}(g^p)$) depinde doar de endomorfismul T . Vedem deci că numerele n_i (care verifică sistemul (89)) depind doar de morfismul T . Faptul că aceste numere sunt unic determinate demonstrează unicitatea matricei Jordan asociate lui T .

Am demonstrat astfel Teorema 5.4.2 în cazul general.

Definiția 5.4.11. Forma canonică Jordan a unui endomorfism (sau a unei matrice) este unica matrice Jordan asociată endomorfismului (sau matricei).

5.5. Algoritmi pentru determinarea formei canonice Jordan

Vom explicita, în cele ce urmează, câteva modalități practice de determinare a formei canonice Jordan. Pentru a facilita înțelegerea acestor algoritmi, am ales de fiecare dată să îi explicăm prin exemple.

5.5.1. Metoda calculării rangului.

Exemplul 5.5.1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Explicităm, pentru această matrice, algoritmul descris parțial în Propoziția 5.4.6.

- Pasul 1: calculăm polinomul caracteristic al matricei

$$P_A(X) = \det(XI_4 - A) = (X - 2)^3(X - 1).$$

- Pasul 2: determinăm valorile proprii și dimensiunile subspațiilor invariante corespunzătoare. Valorile proprii sunt 2 și 1; subspațiile corespunzătoare au respectiv dimensiunile 3 și 1 (egale cu multiplicitățile algebrice ale valorilor proprii).
- Pasul 3: identificăm dimensiunile blocurilor Jordan, pentru fiecare valoare proprie în parte. Există un singur bloc Jordan corespunzător valorii proprii 1, de ordin 1. Notăm n_1, n_2, n_3 numărul de blocuri Jordan de ordin 1, 2, respectiv 3, corespunzătoare valorii proprii 2. Pentru matricea $B = A - 2I_4$, calculăm

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & 12 & -6 & -6 \\ -7 & 14 & -7 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 3 \\ 6 & -12 & 6 & 6 \\ 7 & -14 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\text{rang}(B) = 2$, $\text{rang}(B^2) = 1$, $\text{rang}(B^3) = 1$, din sistemul (89) obținem

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0.$$

- Pasul 4: scriem forma canonică Jordan a lui A .

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

□

5.5.2. Metoda explicitării bazei.

Exemplul 5.5.2. Fie $T : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ endomorfismul descris prin

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y - t; -3x - 6y - 3z - 4t; z; 3x + 13y + 3z + 8t).$$

Vom folosi modul de calcul prezentat în demonstrația Propoziției 5.4.5, pentru a determina efectiv o bază în care matricea asociată lui T este matricea Jordan.

- Pasul 1: determinăm polinomul caracteristic al endomorfismului. Folosim pentru aceasta, de exemplu, baza canonică și matricea lui T în această bază. Obținem

$$P_T(X) = (X - 1)^4.$$

- Pasul 2: Explicităm endomorfismul nilpotent $S = T - 1 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^4}$. Matricea acestui endomorfism în baza canonică este

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Pasul 3: identificăm subspațiile vectoriale $\text{Im}(S), \text{Im}(S^2), \text{Im}(S^3)$. Pentru aceasta, calculăm

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deducem că $\text{Im}(S) = \text{Span}\{(0; 2; 0; 1)^T, (3; 7; 3; 4)^T\}$, $\text{Im}(S^2) = \text{Span}\{(3; 1; 3; 1)^T\}$, iar $\text{Im}(S^3) = (0)$. (Imaginea unui morfism este generată de coloanele matricei core-spunzătoare morfismului, într-o bază dată.)

- Pasul 4: alegem o bază în $\text{Im}(S^2)$. De exemplu, alegem vectorul $v = (3; 1; 3; 1)^T$. Observăm că vectorul ales se poate reprezenta sub forma $v = S(w)$, unde $w = (0; -2; 0; -1)^T \in \text{Im}(S)$. Am obținut vectorul propriu generalizat $\{w, S(w) = v\}$.
- Pasul 5: continuăm procesul de completare a bazei. Scriem $w = S(t)$, unde $t = (1; 0; 0; 0)^T \in \mathbb{C}^4$. Obținem vectorul propriu generalizat $\{t, w = S(t), v = S^2(t)\}$.

Știm că acești trei vectori sunt liniar independenți: completăm sistemul $\{t, w, v\}$ la o bază a lui \mathbb{C}^4 , folosind, de exemplu, vectorul $e_2 = (0; 1; 0; 0)^T$.

- Pasul 6: modificăm vectorul adăugat. Deoarece

$$S(e_2) = -3w - v = S(-t - 3w),$$

înlocuim vectorul e_2 cu vectorul

$$q = e_2 + t + 3w = (-3; -1; 0; -1)^T \in \text{Ker}(S).$$

Am obținut baza $\{t, w, v, q\}$, formată din vectori proprii generalizați pentru S . Matricea lui T în această bază este matricea Jordan

$$J_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplul 5.5.3. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

matricea asociată endomorfismului $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, în baza canonică. Vom determina matricea canonică Jordan a lui T și baza lui \mathbb{C}^4 în care matricea asociată acestui endomorfism este matricea Jordan; folosim pentru aceasta algoritmul descris în demonstrația Propoziției 5.4.5.

Pasul 1: determinăm polinomul caracteristic al endomorfismului.

$$P_T(X) = \det(XI_4 - A) = (X - 3)^3(X + 2).$$

Pasul 2: explicităm subspațiile invariante. Fie $F = (X - 3)^3$ și $G = X + 2$ factorii relativ primi în care se descompune $P_T(X)$ și fie $f = F(T)$ și $g = G(T)$ endomorfismele corespunzătoare. Definim (ca în secțiunea (5.3.2)) $\mathbb{V}_F = \text{Ker}(f) = \text{Im}(g)$ și $\mathbb{V}_G = \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$: știm că acestea sunt subspații invariate de T și că $\mathbb{C}^4 = \mathbb{V}_F \oplus \mathbb{V}_G$.

Pentru a explicita aceste subspații vectoriale, calculăm

$$B = A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

atunci

$$\mathbb{V}_F = \{v \in \mathbb{C}^4 : B^3v = 0\} = \text{Span}\{v_1 = (1; 0; 1; 0)^T, v_2 = (0; 1; 0; 0)^T, v_3 = (0; 0; 0; 1)^T\},$$

iar

$$\mathbb{V}_G = \{v \in \mathbb{C}^4 : Cv = 0\} = \text{Span}\{w_1 = (0; 0; 1; -1)^T\}.$$

Pasul 3: explicităm restricțiile endomorfismelor $S = T - 3 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^4}$ și $U = T + 2 \cdot \text{id}_{\mathbb{C}^4}$ la subspațiile invariante \mathbb{V}_F , respectiv \mathbb{V}_G .

Pentru aceasta, calculăm de exemplu matricea E asociată endomorfismului $S|_{\mathbb{V}_F}$ în baza $\{v_1, v_2, v_3\}$. Deoarece $S(v_1) = (2; -2; 2; -2)^T = 2v_1 - 2v_2 - 2v_3$, prima coloană a matricei căutate este $(2; -2; -2)^T$. Procedând analog cu ceilalți vectori din bază, obținem

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Folosim acum procedeul din exemplul anterior, pentru a determina în \mathbb{V}_F o bază convenabilă, în care matricea lui $S|_{\mathbb{V}_F}$ este matrice Jordan: această bază poate fi, de exemplu

$$\{p_1 = (0; 1; 0)^T, p_2 = (1; -1; -1)^T, p_3 = (0; -1; 1)^T\}.$$

Atenție! Baza obținută mai sus este exprimată în coordonate, în funcție de baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, aleasă în \mathbb{V}_F . Pentru a obține exprimarea vectorilor p_i ca vectori din \mathbb{C}^4 (adică din spațiul vectorial inițial), ținem cont de exprimarea vectorilor v_i în baza canonică. Obținem astfel următoarea bază a lui \mathbb{V}_F :

$$p_1 = v_2 = (0; 1; 0; 0)^T, p_2 = v_1 - v_2 - v_3 = (1; -1; 1; -1)^T, p_3 = -v_2 + v_3 = (0; -1; 0; 1)^T.$$

Pentru spațiul \mathbb{V}_G , calculele sunt mult mai simple: acesta este de dimensiune 1 și, de aceea, matricea asociată endomorfismului $U|_{\mathbb{V}_G}$ în baza $\{w_1\}$ este matricea Jordan.

Pasul 4: scriem matricea Jordan a lui T . Am determinat anterior baze în \mathbb{V}_F și în \mathbb{V}_G , în care matricele asociate restricțiilor lui S și, respectiv, U la aceste subspații, sunt matricele

Jordan. Reuniunea acestor baze, adică $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, w_1\}$, formează o bază a lui \mathbb{V} pentru care matricea asociată lui T este matricea Jordan. Explicităm această matrice și obținem

$$J_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pentru exemplul analizat, am obținut atât forma canonică Jordan a endomorfismului dat, cât și o bază în care matricea asociată este matricea Jordan. În plus, calculele făcute ne permit să determinăm imediat o matrice inversabilă U cu proprietatea că $U^{-1}AU = J_A$: aceasta poate fi, de exemplu, matricea de trecere între baza canonică și baza \mathcal{B} determinată mai sus. \square

5.6. Aplicații: calcule cu matrice

Vom prezenta în continuare câteva aplicații ale formei canonice Jordan a unui endomorfism (sau a unei matrice). Vom arăta în ce mod putem folosi această matrice cvasi-diagonală în calculele efective.

5.6.1. Calculul puterilor unei matrice. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente complexe, de ordinul n . Ne dorim să identificăm algoritmi eficienți pentru calculul puterilor matricei A .

Pentru a calcula, de exemplu, A^{10} , pare să fie nevoie să calculăm, pe rând, toate puterile A^k , cu $k \leq 10$, ceea ce mărește mult complexitatea calculelor.

O abordare mai eficientă ar putea fi următoarea: calculăm A^2 , apoi $A^4 = (A^2)^2$, apoi analog A^8 și finalizăm calculul efectuând $A^8 \cdot A^2$. Metoda este mai eficientă, dar are dezavantajul că toate puterile de exponent putere de 2 ale lui A trebuie memorate, ceea ce consumă memorie (în condiții de calcul electronic).

Forma canonică Jordan a matricei A poate eficientiza și mai mult aceste calcule. Pentru a înțelege afirmația anterioară, avem nevoie de rezultatul care urmează.

Propoziția 5.6.1. *Fie*

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

un bloc Jordan de ordin p , corespunzător numărului a .

Dacă $F \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom arbitrar, atunci

$$F(J) = \begin{pmatrix} F(a) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F'(a)/1! & F(a) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F''(a)/2! & F'(a)/1! & F(a) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F^{(p-2)}(a)/(p-2)! & F^{(p-3)}(a)/(p-3)! & F^{(p-4)}(a)/(p-4)! & \dots & F(a) & 0 \\ F^{(p-1)}(a)/(p-1)! & F^{(p-2)}(a)/(p-2)! & F^{(p-3)}(a)/(p-3)! & \dots & F'(a)/1! & F(a) \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Va fi suficient să verificăm relația din enunț pentru polinoame de forma $F(X) = X^n$, deoarece orice polinom este o sumă de monoame. Am observat deja (vezi Lema 5.6.2) că formula este adevărată pentru $a = 0$. Ne putem însă reduce la acest caz, deoarece

$$\bar{J} = J - aI_p$$

este un bloc Jordan corespunzător numărului 0 pe diagonală. \square

Exemplul 5.6.2. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$$

matricea endomorfismului T din exemplul 5.5.2. Ne propunem să calculăm A^{10} , folosind forma Jordan a acestei matrice.

În exemplul citat, am determinat efectiv baza $\mathcal{B} = \{t, w, v, q\}$, în care matricea asociată lui T este matricea Jordan $J = J_T$. Altfel spus, știm că $U^{-1}AU = J$, unde

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere între baza canonică și baza \mathcal{B} . Propoziția 5.6.1 ne arată cum putem calcula rapid puterile lui J ; în particular,

$$J^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Deoarece $U^{-1}A^{10}U = J^{10}$, obținem imediat

$$A^{10} = UJ^{10}U^{-1} = \begin{pmatrix} 136 & 375 & 0 & -780 \\ 25 & 66 & 0 & -140 \\ 135 & 375 & 1 & -780 \\ 35 & 95 & 0 & -199 \end{pmatrix}.$$

\square

5.6.2. Calculul polinomului minimal. Teorema lui Frobenius (5.2.29) precizează unele condiții *necesare* pe care le îndeplinește polinomul minimal al unei matrice date (sau al unui endomorfism). Vom arăta acum cum putem determina imediat polinomul minimal al unei matrice, odată ce am determinat forma canonică Jordan a acesteia.

Fie deci $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice dată și fie

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

forma sa canonică Jordan. Este suficient să determinăm polinomul minimal al matricei J_A , deoarece acesta coincide cu polinomul minimal al lui A . Conform Propoziției 5.6.1, dacă $F \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom arbitrar, atunci

$$F(J_A) = 0 \iff F(\lambda_i) = F'(\lambda_i) = \dots = F^{(p_i-1)}(\lambda_i) = 0, \text{ pentru orice } i = \overline{1, t}.$$

Așadar, F este polinomul minimal al lui J_A (deci și al lui A) dacă și numai dacă acesta este polinomul nenul, monic, de grad minim posibil, care are fiecare număr λ_i ca rădăcină multiplă de ordin $\geq p_i$. Am demonstrat astfel rezultatul următor.

Propoziția 5.6.3. *Polinomul minimal al matricei Jordan J este egal cu*

$$\mu_J(X) = (X - a_1)^{r_1} (X - a_2)^{r_2} \dots (X - a_s)^{r_s},$$

unde a_1, a_2, \dots, a_s sunt valorile proprii distincte ale lui J , iar r_i este ordinul maxim al blocurilor Jordan ce compun J , asociate valorii proprii a_i .

În calculele efective, acest rezultat nu este prea util, deoarece este mai ușor să căutăm prin încercări polinomul minimal al unei matrice, decât să determinăm forma Jordan.

Exemplul 5.6.4. Pentru matricea A din Exemplul 5.5.3, polinomul minimal este

$$\mu_A(X) = (X - 3)^2(X + 2).$$

□

Exemplul 5.6.5. Să analizăm din nou matricea A (asociată endomorfismului T) din Exemplele 5.5.2 și 5.6.2. Folosind Propoziția anterioară și matricea Jordan a lui T (din 5.5.2), obținem imediat polinomul minimal al matricei A : acesta este

$$\mu_A(X) = (X - 1)^3.$$

Vom folosi acest polinom pentru a calcula A^{10} , utilizând o metodă diferită de cea din Exemplul 5.6.2. Aplicăm Teorema împărțirii cu rest (1.3.3):

$$(90) \quad X^{10} = (X - 1)^3 \cdot C(X) + (45X^2 - 80X + 36).$$

Înlocuind în (90) variabila X cu matricea A , obținem

$$A^{10} = 45A^2 - 80A + 36I_4 = 45 \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -12 \\ -3 & -10 & 0 & 20 \\ 3 & 3 & 1 & -12 \\ -1 & -5 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 80 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la același rezultat ca în Exemplul 5.6.2.

□

5.6.3. Calculul inversei unei matrice. Algoritmul de calcul al inversei unei matrice (2.3.16) necesită un număr mare de operații algebrice. De exemplu, dacă matricea are ordinul 5, atunci, pentru a scrie matricea A^{-1} , este nevoie să calculăm un determinant de ordinul 5 și 25 de determinanți de ordinul 4.

Calculatoarele electronice reprezintă un instrument extrem de util în realizarea acestor calcule; pentru a fi eficiente însă, programele de calcul trebuie să utilizeze un număr cât mai mic de operații aritmetice. O modalitate eficientă de calcul se poate obține utilizând polinomul minimal al matricei.

Exemplul 5.6.6. Fie A matricea analizată în Exemplele 5.5.2, 5.6.2 și 5.6.5. Știm că

$$0_4 = (A - I_4)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_4.$$

Din relația anterioară (în care nu am folosit decât faptul că $\mu_A(X) = (X - 1)^3$), obținem

$$0_4 = A^2 - 3A + 3I_4 - A^{-1}.$$

De aceea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -12 \\ -3 & -10 & 0 & 20 \\ 3 & 3 & 1 & -12 \\ -1 & -5 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & -21 \\ 3 & 11 & 0 & -19 \\ 3 & 12 & 1 & -21 \\ 2 & 7 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

□

5.7. Matrice diagonalizabile

Am început acest capitol cu o întrebare naturală: *este oare orice endomorfism de spații vectoriale diagonalizabil?* Știm deja că răspunsul este negativ; ar fi totuși util să putem răspunde la o nouă întrebare:

În ce condiții un endomorfism dat este diagonalizabil?

Având în vedere modul în care se determină matricea unui endomorfism într-o bază, următoarea condiție este evidentă.

Lema 5.7.1. *T este diagonalizabil dacă și numai dacă există o bază a lui \mathbb{V} formată din vectori proprii ai lui T .* □

Cu aceasta, nu am răspuns însă la întrebarea de mai sus; am înlocuit-o doar cu o alta, la fel de complicată: *În ce condiții, există o bază formată din vectori proprii ai unui endomorfism dat?*

Am văzut că oricărei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i se poate asocia o matrice Jordan. O matrice diagonală este un caz particular de matrice Jordan, în care toate blocurile de pe diagonală sunt de ordin 1. De aceea, putem folosi unicitatea formei Jordan, pentru a caracteriza matricele diagonalizabile.

Teorema 5.7.2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice și fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valorile sale proprii distincte. Următoarele condiții sunt echivalente:

- (1) A este diagonalizabilă;
- (2) $F(A) = \mathbf{0}_n$, unde $F(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_m)$;
- (3) Polinomul minimal $\mu_A(X)$ se descompune în factori liniari distincți;
- (4) Polinomul minimal $\mu_A(X)$ nu are rădăcini multiple.
- (5) Pentru orice valoare proprie λ_i , $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.

Demonstrație. Vom justifica doar $(4) \Rightarrow (1)$, celelalte implicații fiind lăsate ca exercițiu cititorului. Fie J forma canonică Jordan a lui A . În ipoteza (4), propoziția 5.6.3 ne arată că toate blocurile Jordan care apar pe diagonală matricei J sunt de dimensiune 1, deci matricea J este o matrice diagonală. Cum A și J sunt matrice asemenea, deducem că A este diagonalizabilă. \square

5.8. Probleme propuse

Problema 5.8.1. Demonstrați Lema 5.1.4, care afirmă că asemănarea matricelor este o relație de echivalență pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Problema 5.8.2. Calculați valorile proprii ale următoarelor matrice cu coeficienți complecși:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.3. (1) Demonstrați că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

are rangul ≤ 1 .

- (2) Folosiți Teorema 74 pentru a calcula polinomul caracteristic al matricei A .
- (3) Precizați valorile proprii ale matricei A și determinați multiplicitatea algebrică și multiplicitatea geometrică a fiecăreia dintre aceste valori proprii.
- (4) Decideți dacă matricea A este diagonalizabilă.

Problema 5.8.4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ și fie

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

matrice-bloc de ordin $2n$. Demonstrați că polinomul caracteristic al matricei M este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A + B$ și $A - B$.

Enunțați un posibil rezultat pentru polinomul minimal al matricei M . Verificați apoi acest rezultat pe câteva cazuri particulare și, dacă se dovedește adevărat, încercați să îl demonstrați!

Problema 5.8.5. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ un endomorfism, fie λ o valoare proprie a lui T și fie v un vector propriu corespunzător acestei valori proprii. Demonstrați că:

- (1) $v \in \text{Ker}(T)$, dacă $\lambda = 0$;
- (2) $v \in \text{Im}(T)$, dacă $\lambda \neq 0$.

Problema 5.8.6. Dacă v este vector propriu pentru endomorfismul T , arătați că v rămâne vector propriu și pentru endomorfismul $T + a \cdot \text{id}_{\mathbf{V}}$, unde $a \in \mathbb{K}$ este un scalar arbitrar. Propuneți apoi o generalizare a acestei proprietăți.

Problema 5.8.7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente numere complexe. Notăm \overline{A} matricea obținută prin înlocuirea fiecărui element a_{ij} al lui A cu conjugatul său complex $\overline{a_{ij}}$. Ce relație există între:

- (1) polinoamele caracteristice ale matricelor A și \overline{A} ;
- (2) valorile proprii ale matricelor A și \overline{A} ?

Problema 5.8.8. Recitiți demonstrația Teoremei 5.2.8, în care am arătat că, dacă două matrice sunt asemenea, atunci ele au același polinom caracteristic. Demonstrați sau infirmați reciproca: Dacă două matrice au același polinom caracteristic, atunci matricele sunt asemenea.

Problema 5.8.9. Dacă matricele A și B sunt asemenea, atunci ele au aceleași valori proprii. Ce relații există între vectorii proprii ai celor două matrice?

Problema 5.8.10. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice care are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ și fie $F \in \mathbb{K}[X]$ un polinom arbitrar.

- (1) Demonstrați că $\det(F(A)) = F(\lambda_1) \cdot F(\lambda_2) \cdots F(\lambda_n)$.
- (2) Arătați că matricea $F(A)$ are valorile proprii $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \dots, F(\lambda_n)$.

Problema 5.8.11. Fie $\mathbf{V} = \mathbb{R}^3$ și fie T simetria față de un plan ce trece prin origine. Descrieți subspații \mathbf{V}_i invariante de T , cu $\dim(\mathbf{V}_i) = i$.

Problema 5.8.12. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ un endomorfism și fie \mathbf{U} și \mathbf{W} două subspații invariante de T .

- (1) Demonstrați că $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ și $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ sunt de asemenea subspații invariante de T .
- (2) Dacă T este automorfism, atunci \mathbf{U} și \mathbf{W} rămân subspații invariante și pentru T^{-1} .

Problema 5.8.13. Calculați forma canonică Jordan a următoarelor matrice cu elemente complexe:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.14. Fie $\mathbf{V} = \mathbb{C}[X]_{\leq 3}$ \mathbb{C} -spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 3 și fie \mathbf{d} endomorfismul de derivare (adică endomorfismul care duce un polinom F în polinomul derivat F'). Determinați matricea Jordan și baza corespunzătoare pentru endomorfismele: a) \mathbf{d} ; b) \mathbf{d}^2 .

Problema 5.8.15. Fiecare dintre matricele următoare este matricea asociată unui endomorfism de \mathbb{C} -spații vectoriale, în baza canonică. Determinați forma canonică Jordan a acestor endomorfisme și câte o bază în care matricea asociată este matricea Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.16. Polinomului monic $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ îi asociem matricea companion de ordinul n

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (1) Scrieți matricea companion a polinomului $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X + 1$.
- (2) Demonstrați că polinomul caracteristic al matricei companion C_P este chiar polinomul P .
- (3) Enunțați, verificați pe cazuri particulare, apoi demonstrați un rezultat despre polinomul minimal al matricei C_P .
- (4) Determinați forma canonică Jordan a matricei C_P , în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (5) Demonstrați că orice bloc Jordan este asemenea cu matricea companion asociată polinomului său caracteristic.

Problema 5.8.17. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice fixată. Notăm $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AX = XA\}$, mulțimea matricelor care comută cu A .

- (1) Demonstrați că $C(A)$ este subspațiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (2) Justificați inegalitatea: $\dim_{\mathbb{C}}(C(A)) \geq n$.
- (3) Determinați $\dim_{\mathbb{C}}(C(B))$ în cazul în care

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (4) Demonstrați că

$$C(A) = \{F(A) : F \in \mathbb{C}[X]\} \iff P_A(X) = \mu_A(X).$$

Problema 5.8.18. (1) Demonstrați că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ are același polinom caracteristic și același polinom minimal ca și matricea transpusă A^T .

- (2) În cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, este oare adevărat că A și A^T au aceeași formă Jordan? Verificați pe un exemplu, apoi demonstrați!

Problema 5.8.19. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de ordinul n . Notăm cu \tilde{A} matricea obținută din A prin aplicarea următoarei transformări: alegem la întâmplare doi indici i, j și schimbăm

între ele liniile i și j , apoi coloanele i și j din matricea A . Demonstrați că matricele A și \tilde{A} au aceeași formă canonică Jordan.

Problema 5.8.20. Demonstrați că, dacă polinomul minimal al matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^t (X - \lambda_i)^{s_i}$, atunci polinomul minimal al matricei de ordin $2n$

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$$

este $\mu_B(X) = \prod_{i=1}^t (X - \lambda_i)^{s_i+1}$.

Problema 5.8.21. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

- (1) Demonstrați că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = (X^2 - 4)^2$.
- (2) Calculați multiplicitatea algebrică și multiplicitatea geometrică a fiecărei valori proprii a lui A .
- (3) Dacă $F = (X - 2)^2$ și $G = (X + 2)^2$, explicitați subspațiile \mathbb{C}_F și \mathbb{C}_G (Notațiile sunt cele din Secțiunea 5.3.2.)
- (4) Folosiți Corolarul 5.2.27 pentru a determina polinomul minimal al matricei A .
- (5) Este matricea A diagonalizabilă?
- (6) Se schimbă ceva în punctele anterioare ale problemei, dacă, în loc să considerăm că A este o matrice de numere complexe, o considerăm matrice de numere raționale?

Problema 5.8.22. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice dată.

- (1) Dacă A este diagonalizabilă, atunci orice putere a lui A este diagonalizabilă.
- (2) Reciproc, dacă A este nesusingulară și o putere a sa este diagonalizabilă, atunci și A este diagonalizabilă.

Problema 5.8.23. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică, adică o matrice pentru care

$$A^T = A.$$

- (1) Demonstrați că toate valorile proprii ale lui A sunt reale.
- (2) Este oare adevărat că, dacă matricea B este asemenea cu A , atunci B este simetrică?

Problema 5.8.24. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică.

- (1) Demonstrați că A este diagonalizabilă.
- (2) Arătați că există o matrice ortogonală U (adică o matrice cu proprietatea $U^{-1} = U^T$) pentru care $U^{-1}AU$ este o matrice diagonală.

Problema 5.8.25. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nilpotentă, adică o matrice pentru care există un număr natural nenul p cu proprietatea că $A^p = \mathbf{0}_n$.

- (1) Demonstrați că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = X^n$.
- (2) Fie k ordinul maxim al blocurilor Jordan din forma canonică Jordan a matricei A . Demonstrați că $A^{k-1} \neq \mathbf{0}_n$.
- (3) În ce caz este diagonalizabilă o matrice nilpotentă?

Problema 5.8.26. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice de ordinul n , să se arate că

$$A \text{ este nilpotentă} \iff \text{Tr}(A^p) = 0, \text{ pentru orice } p \geq 1.$$

Problema 5.8.27. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A + \lambda B$ este matrice nilpotentă, pentru $n+1$ valori distincte ale lui λ , să se arate că matricele A și B sunt nilpotente.

Problema 5.8.28. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numește idempotentă dacă $A^2 = A$.

- (1) Demonstrați că o matrice idempotentă este diagonalizabilă.
- (2) Dacă A este idempotentă, atunci $\text{rang}(A) = \text{Tr}(A)$.
- (3) A este idempotentă dacă și numai dacă $I_n - A$ este idempotentă.
- (4) Fie A și B două matrice idempotente, de același ordin. Să se arate că

$$A + B \text{ este idempotentă} \iff AB = BA = \mathbf{0}_n.$$

Problema 5.8.29. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice diferită de λI_n . Demonstrați că A este asemenea cu o matrice a cărei diagonală este de forma

$$\text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \text{Tr}(A)\}.$$

Problema 5.8.30. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice care are exact m valori proprii distincte. Pentru fiecare $i, j \geq 1$ definim numerele

$$b_{ij} = \text{Tr}(A^{i+j-2}).$$

Demonstrați că $\det(b_{ij})_{i,j \in \overline{1,m}} \neq 0$, iar $\det(b_{ij})_{i,j \in \overline{1,m+1}} = 0$.

CAPITOLUL 6

Algebră multiliniară și produs tensorial. Aplicații biliniare, forme pătratice

Capitolul final al acestei lucrări este dedicat algebrei multiliniare (cu accent pe forme biliniare și forme pătratice) și produsului tensorial. După ce în Secțiunea 1 se studiază formele biliniare, în Secțiunile 2 și 3 sunt tratate formele pătratice. Problema principală care se pune aici constă în reducerea unei forme pătratice la forma canonică. Sunt prezentate trei metode de reducere a formelor pătratice la forma canonică: metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi și metoda transformărilor ortogonale. În Secțiunea 4, principala noțiune studiată este cea de formă multiliniară alternată. Cu ajutorul acestei noțiuni este prezentat un studiu al determinanților, multe din proprietățile acestora apărând și în Capitolul 2. Ultima secțiune introduce produsul tensorial $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ a două spații vectoriale și prezintă principalele proprietăți ale acestuia. Produsul tensorial se dovedește a fi un spațiu vectorial al cărui dual este (izomorf cu) spațiul vectorial al tuturor aplicațiilor biliniare $\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}; \mathbb{K})$.

Pe parcursul primelor trei secțiuni din acest capitol, \mathbf{V} va desemna un spațiu vectorial real.

6.1. Forme biliniare

Definiția 6.1.1. O aplicație $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface proprietățile:

1. $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbf{V}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
2. $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbf{V}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

se numește **formă biliniară**.

Definiția 6.1.2. O formă biliniară $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **simetrică** dacă

$$F(x, y) = F(y, x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{V}$.

Definiția 6.1.3. O formă biliniară simetrică F se numește **pozitiv (negativ) semidefinită** dacă $F(x, x) \geq 0$ (resp. $F(x, x) \leq 0$), pentru orice $x \in \mathbf{V}$. Dacă în plus $F(x, x) = 0$ numai pentru $x = 0_{\mathbf{V}}$, F se numește **pozitiv (resp. negativ) definită**.

Exemplele 6.1.4. 1) Fie \mathbf{V} un spațiu euclidian cu un produs scalar $\langle x, y \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci aplicația $F : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = \langle x, y \rangle$ este o formă biliniară simetrică, pozitiv definită, acest lucru probându-se imediat, având în vedere axiomele din definiția produsului scalar.

2) Dacă $L_1, L_2 : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două transformări liniare, atunci $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = L_1(x)L_2(y)$ este o formă biliniară. Evident, F este simetrică dacă și numai dacă $L_1 = L_2$.

3) Considerăm $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci aplicația $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(v, w) = vAw^T$ este o formă biliniară.

4) Fie D o submulțime deschisă a lui \mathbb{R}^n și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă \mathcal{C}^2 pe D . Considerăm $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$, arbitrar. Atunci aplicația

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j,$$

unde $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ și $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, este o formă biliniară simetrică, numită diferențiala a doua a funcției f .

Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial real de dimensiune n , $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui \mathbb{V} și $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară. Dacă $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ și $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ sunt doi vectori arbitrari din \mathbb{V} , atunci

$$(91) \quad F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j F(e_i, e_j).$$

Pentru $i, j = \overline{1, n}$, notăm $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Astfel, relația (1) conduce la

$$(92) \quad F(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

ceea ce ne permite să conchidem că forma biliniară F este perfect determinată de matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Definiția 6.1.5. Matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ construită mai sus se numește **matricea asociată formei biliniare F în baza \mathcal{B}** .

Propoziția 6.1.6. Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial real finit dimensional și $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară. Atunci F este simetrică dacă și numai dacă matricea asociată lui F într-o bază oarecare este simetrică.

Demonstrație. Considerăm $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază arbitrară a lui \mathbb{V} și fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată lui F în baza \mathcal{B} .

Presupunem mai întâi că F este formă biliniară simetrică. Atunci

$$a_{ij} = F(e_i, e_j) = F(e_j, e_i) = a_{ji},$$

pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, deci A este matrice simetrică.

Reciproc, dacă A este matrice simetrică, atunci $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$. Fie $x, y \in \mathbb{V}$ doi vectori arbitrari având scrierile în baza \mathcal{B} : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ și $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$. Rezultă că

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j F(e_i, e_j) =$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ij} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j F(e_j, e_i) = \\ &= F\left(\sum_{j=1}^n y_j e_j, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = F(y, x)\end{aligned}$$

și astfel putem conchide că forma biliniară F este simetrică. \square

Așa cum s-a văzut anterior, matricea asociată unei forme biliniare $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ depinde de baza spațiului vectorial \mathbb{V} . În continuare, vom studia cum se modifică această matrice o dată cu schimbarea bazei spațiului vectorial.

Teorema 6.1.7. *Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial de dimensiune n , $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ două baze ale lui \mathbb{V} și $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ și $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ sunt matricele atașate lui F în bazele \mathcal{B}_1 și respectiv \mathcal{B}_2 , atunci*

$$(93) \quad B = C^T A C,$$

unde $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea de trecere de la baza \mathcal{B}_1 la baza \mathcal{B}_2 .

Demonstrație. Din definiția matricei de trecere de la o bază la alta pentru un spațiu vectorial avem

$$f_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} e_j.$$

Folosind Definiția 6.1.5, obținem:

$$\begin{aligned}b_{ij} = F(f_i, f_j) &= F\left(\sum_{k=1}^n c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^n c_{lj} e_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ki} c_{lj} F(e_k, e_l) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n c_{ki} c_{lj} a_{kl} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n c_{ki} a_{kl} \right) c_{lj},\end{aligned}$$

pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, de unde rezultă că $B = C^T A C$. \square

Exemplul 6.1.8. Considerăm aplicația

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, F(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$ și $y = (y_1, y_2, y_3)$. Vom demonstra că F este o formă biliniară, iar apoi vom studia simetria și pozitiv definirea lui F . În final, determinăm matricea asociată acestei forme biliniare în baza canonică a spațiului vectorial \mathbb{R}^3 .

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, arbitrari. Atunci:

$$\begin{aligned}F(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2) z_1 + \\ &+ 2(\alpha x_2 + \beta y_2) z_2 + 3(\alpha x_3 + \beta y_3) z_3 = \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_1 z_2 + \beta y_1 z_2 + \alpha x_2 z_1 + \\ &+ \beta y_2 z_1 + 2\alpha x_2 z_2 + 2\beta y_2 z_2 + 3\alpha x_3 z_3 + 3\beta y_3 z_3 = \alpha(x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + \\ &+ 2x_2 z_2 + 3x_3 z_3) + \beta(y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2y_2 z_2 + 3y_3 z_3) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z).\end{aligned}$$

Similar aratăm că $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$. Astfel, F este o formă biliniară.

$F(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 = F(y, x)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^3$, deci F este simetrică.

Pe de altă parte,

$$F(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x_1 + x_2 = x_2 = x_3 = 0$, adică $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Așadar, F este și pozitiv definită.

Baza canonică a lui \mathbb{R}^3 este

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\}.$$

Deoarece

$$F(e_1, e_1) = 1, F(e_1, e_2) = F(e_2, e_1) = 1, F(e_1, e_3) = F(e_3, e_1) = 0,$$

$$F(e_2, e_2) = 2, F(e_2, e_3) = F(e_3, e_2) = 0, F(e_3, e_3) = 3,$$

matricea asociată formei pătratice F în baza \mathcal{B} este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

Definiția 6.2.1. Fie F o formă biliniară simetrică. Aplicația

$$(94) \quad Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = F(x, x)$$

se numește **formă pătratică** asociată formei biliniare simetrice F . În acest context, vom spune că F este **polara formei pătratice** Q .

Așa cum reiese din această definiție, orice formă biliniară simetrică induce o unică formă pătratică. Vom arăta că este valabilă și reciproca, adică oricărei forme pătratice Q i se asociază o unică formă biliniară simetrică. Într-adevăr,

$$Q(x + y) = F(x + y, x + y) = F(x, x) + 2F(x, y) + F(y, y) =$$

$$Q(x) + 2F(x, y) + Q(y),$$

de unde rezultă că

$$(95) \quad F(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)],$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{V}$. S-a obținut astfel următorul rezultat:

Propoziția 6.2.2. Între mulțimea formelor pătratice definite pe spațiul vectorial \mathbb{V} și mulțimea formelor biliniare simetrice definite pe $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ există o corespondență bijectivă.

Exemplele 6.2.3. 1) Fie \mathbb{V} un spațiu euclidian cu un produs scalar $\langle x, y \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Așa cum am văzut în secțiunea precedentă, aplicația $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = \langle x, y \rangle$ este o formă biliniară simetrică. Aceasta induce forma pătratică $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

2) Aplicația

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 5x_2x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, reprezintă o formă pătratică. Polara acestei forme pătratice este

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] = \frac{1}{2}[(x_1+y_1)^2 + 7(x_2+y_2)^2 + \\ &3(x_3+y_3)^2 - (x_1+y_1)(x_2+y_2) + 5(x_2+y_2)(x_3+y_3) - x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_2 - \\ &5x_2x_3 - y_1^2 - 7y_2^2 - 3y_3^2 + y_1y_2 - 5y_2y_3] = x_1y_1 + 7x_2y_2 + 3x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \\ &\frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2. \end{aligned}$$

În continuarea acestei secțiuni vom lucra sub ipoteza că \mathbb{V} este spațiu vectorial real de dimensiune n .

Definiția 6.2.4. Fie \mathcal{B} o bază a spațiului vectorial \mathbb{V} și $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Se numește **matrice asociată formei pătratice** Q în baza \mathcal{B} matricea asociată polarei sale F în aceeași bază.

Observația 6.2.5. Deoarece polara unei forme pătratice este o formă biliniară simetrică, din definiția precedentă și din Propoziția 6.1.6 rezultă că matricea asociată unei forme pătratice este întotdeauna simetrică.

Fie x un vector arbitrar al spațiului vectorial \mathbb{V} , având scrierea în baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Atunci

$$\begin{aligned} Q(x) &= F(x, x) = F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j F(e_i, e_j) = \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Așadar, prin fixarea unei baze \mathcal{B} a spațiului vectorial \mathbb{V} , pentru forma pătratică Q obținem o scriere de forma

$$(96) \quad Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

unde a_{ij} reprezintă componentele matricei A atașate formei pătratice Q în baza \mathcal{B} (și deci, conform observației anterioare, avem $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$). Evident, o dată cu schimbarea bazei spațiului vectorial se va schimba și expresia (96) a formei pătratice.

Definiția 6.2.6. *Spunem că forma pătratică $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ este redusă la forma canonică dacă determinăm pentru Q o scriere de forma*

$$(97) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2,$$

într-o anumită bază a lui \mathbb{V} .

Având în vedere că în scrierea (97) a unei forme pătratice apar două tipuri de termeni:

- termeni la pătrat, pentru $i = j$;
- termeni micști, pentru $i \neq j$,

a reduce o formă pătratică la forma canonică înseamnă de fapt a găsi o scriere în care să apară numai termeni cu pătrate.

În continuare vom prezenta trei metode de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

Metoda lui Gauss.

Teorema 6.2.7. (Gauss) *Pentru orice formă pătratică $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ există o bază \mathcal{B} a lui \mathbb{V} în care forma pătratică este redusă la forma canonică.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bază a lui \mathbb{V} față de care forma pătratică Q are expresia $Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$.

Distingem două cazuri:

(I) Există cel puțin un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$ (în expresia formei pătratice apare cel puțin un termen la pătrat). Printr-o eventuală renumerotare a vectorilor bazei \mathcal{B} putem presupune că $a_{11} \neq 0$. Atunci, în expresia formei biliniare Q , vom grupa termenii astfel:

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_{11}x_1^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_1x_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \\ &a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}} \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{1i}a_{1j}x_ix_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \\ &a_{1n}x_n)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij}x_ix_j, \end{aligned}$$

unde $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$, pentru orice $2 \leq i, j \leq n$.

Notând

$$(98) \quad \begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= x_2 \\ &\dots \\ x'_n &= x_n \end{cases}$$

obținem

$$(99) \quad Q(x) = \frac{1}{a_{11}} (x'_1)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij} x'_i x'_j.$$

x'_1, x'_2, \dots, x'_n reprezintă componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, față de care forma pătratică Q are expresia (99). De remarcat că suma $\sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij} x'_i x'_j$ care apare în (99) este o formă pătratică în $n - 1$ variabile. Astfel, după cel mult $n - 1$ pași (aplicând eventual și procedeul descris în cazul (II)), vom obține o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui \mathbb{V} față de care Q are forma canonică:

$$Q(x) = \alpha_1 \bar{x}_1^2 + \alpha_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n^2.$$

(II) Toți coeficienții a_{ii} sunt nuli (în expresia formei pătratice apar numai termeni micști). Lucrând sub presupunerea că forma pătratică Q este nenulă, există $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, astfel încât $a_{ij} \neq 0$. Printr-o eventuală renumerotare a vectorilor din baza \mathcal{B} se poate presupune că $a_{12} \neq 0$. Cu ajutorul schimbărilor de coordonate

$$(100) \quad \begin{cases} x_1 &= x'_1 + x'_2 \\ x_2 &= x'_1 - x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ &\dots \\ x_n &= x'_n \end{cases}$$

vom obține

$$(101) \quad Q(x) = 2a_{12} \left[(x'_1)^2 - (x'_2)^2 \right] + \dots$$

Deoarece în această expresie avem cel puțin un termen la pătrat, putem aplica în continuare procedeul descris la cazul (I). \square

Observația 6.2.8. Procedeul descris în demonstrația anterioară reprezintă **metoda lui Gauss de reducere a formelor pătratice la forma canonică**.

Exemplul 6.2.9. Considerăm forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, care într-o anumită bază \mathcal{B} a spațiului \mathbb{R}^3 are expresia $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Cu ajutorul metodei lui Gauss, reducem această formă pătratică la forma canonică.

Deoarece în expresia formei pătratice apar termeni la pătrat, ne situăm în cazul (I) al metodei lui Gauss. Urmând procedeul descris în această situație, vom avea:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(9x_2^2 + 6x_2x_3) = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

Cu notațiile:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \bar{x}_2 = 3x_2 + x_3 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

vom obține forma canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{3}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3^2.$$

Pentru a determina baza $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ în raport cu care s-a obținut această formă canonică, se exprimă mai întâi componentele inițiale x_1, x_2, x_3 ale vectorului x în funcție de componentele $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ din baza $\bar{\mathcal{B}}$:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + \frac{1}{3}\bar{x}_2 - \frac{4}{3}\bar{x}_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}\bar{x}_2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_3 \end{cases}$$

Din Teorema 3.3.13, obținem că matricea de trecere de la baza inițială $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\bar{\mathcal{B}}$ este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}}$ vor fi:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = e_1 \\ \bar{e}_2 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ \bar{e}_3 = -\frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3 \end{cases}$$

Exemplul 6.2.10. Reducem la forma canonică prin metoda lui Gauss forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

specificând și transformarea de coordonate care se efectuează.

Deoarece în expresia formei pătratice apar numai termeni micști, ne situăm în cazul (II) al metodei lui Gauss. În consecință, facem schimbările de coordonate:

$$(102) \quad \begin{cases} x_1 &= x'_1 + x'_2 \\ x_2 &= x'_1 - x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \end{cases}$$

Astfel, forma pătratică devine:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + (x'_1 - x'_2)x'_3 + x'_3(x'_1 + x'_2) = \\ &= (x'_1)^2 - (x'_2)^2 + 2x'_1x'_3 = \left[(x'_1)^2 + 2x'_1x'_3\right] - (x'_2)^2 = \\ &= (x'_1 + x'_3)^2 - (x'_2)^2 - (x'_3)^2 \end{aligned}$$

Efectuăm o nouă schimbare de coordonate

$$(103) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x'_1 + x'_3 \\ \bar{x}_2 = x'_2 \\ \bar{x}_3 = x'_3 \end{cases}$$

în urma căreia va rezulta forma canonică

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2.$$

Din sistemele de relații (102) și (104) obținem relațiile de transformare a coordonatelor:

$$(104) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

Metoda lui Jacobi.

Teorema 6.2.11. (Jacobi) Fie \mathbb{V} un spațiu vectorial, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui \mathbb{V} și $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică având expresia $Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_i x_j$ în baza \mathcal{B} . Dacă matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ asociată formei pătratice Q în baza \mathcal{B} are toți minorii principali

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A)$$

nenuli, atunci există o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ a lui \mathbb{V} față de care Q are forma canonică:

$$(105) \quad Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} \bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \bar{x}_3^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \bar{x}_n^2.$$

Demonstrație. Fie $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ polara formei pătratice Q . Căutăm vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}}$ de forma:

$$(106) \quad \begin{cases} \bar{e}_1 = c_{11}e_1 \\ \bar{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots \\ \bar{e}_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + \dots + c_{ii}e_i \\ \dots\dots\dots \\ \bar{e}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots\dots\dots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

unde coeficienții c_{ij} se determină din condițiile

$$(107) \quad F(\bar{e}_i, e_j) = 0, \quad \text{pentru orice } 1 \leq j < i \leq n$$

și

$$(108) \quad F(\bar{e}_i, e_i) = 1, \quad \text{pentru } i = \overline{1, n}.$$

(Aceste ultime relații sunt deduse din condiția ca matricea asociată formei pătratice Q în baza $\bar{\mathcal{B}}$ să fie $\text{diag}(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn})$.)

Fixăm un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ arbitrar. Deoarece

$$F(\bar{e}_i, e_j) = F\left(\sum_{k=1}^i c_{ki}e_k, e_j\right) = \sum_{k=1}^i c_{ki}F(e_k, e_j) = \sum_{k=1}^i c_{ki}a_{kj},$$

din relațiile (107) și (108), ținând cont că $a_{kj} = a_{jk}$, obținem sistemul:

deci putem aplica metoda lui Jacobi. Forma canonică a formei pătratice Q va fi:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} \bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \bar{x}_3^2 = \frac{1}{3} \bar{x}_1^2 + \frac{3}{8} \bar{x}_2^2 - \frac{1}{4} \bar{x}_3^2.$$

Exemplul 6.2.14. Considerăm forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_3x_4,$$

unde $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ sunt coordonatele unui vector x în baza canonică a lui \mathbb{R}^4 . Utilizând metoda lui Jacobi, reducem această formă pătratică la forma canonică și vom specifica și baza în care se obține forma canonică.

Forma pătratică dată are în baza canonică a lui \mathbb{R}^4 matricea asociată:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obținem minorii principali:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \neq 0.$$

Din (105) rezultă că forma canonică obținută în urma aplicării metodei lui Jacobi este:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - 4\bar{x}_4^2.$$

Vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ în care se obține forma canonică sunt dați de sistemul (106), care în acest caz este:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = c_{11}e_1 \\ \bar{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ \bar{e}_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3 \\ \bar{e}_4 = c_{14}e_1 + c_{24}e_2 + c_{34}e_3 + c_{44}e_4 \end{cases}.$$

unde $c_{11} = \frac{1}{\Delta_1}$, iar c_{jk} , $k = 2, 3, 4$, $j = 1, \dots, k$ sunt soluții ale sistemelor (109) pentru $i = 2, 3, 4$. Rezultă că $\bar{e}_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, iar pentru $i = 2$ avem

$$\begin{cases} c_{12} + \frac{1}{2}c_{22} = 0 \\ \frac{1}{2}c_{12} = 1 \end{cases},$$

deci $c_{12} = 2$, $c_{22} = -4$ și $\bar{e}_2 = 2e_1 - 4e_2 = (2, -4, 0, 0)$. Pentru $i = 3$ avem

$$\begin{cases} c_{13} + \frac{1}{2}c_{23} = 0 \\ \frac{1}{2}c_{13} = 0 \\ c_{33} = 1 \end{cases},$$

Observația 6.2.16. Metoda transformărilor ortogonale, spre deosebire de celelalte două metode prezentate anterior, se aplică numai formelor pătratice definite pe spații euclidiene. Deoarece spațiile vectoriale de tipul \mathbb{R}^n sunt spații euclidiene, această metodă poate fi folosită în majoritatea exercițiilor având drept cerință reducerea formelor pătratice la forma canonică.

Din demonstrația teoremei precedente deducem următorul algoritm de reducere a unei forme pătratice $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma canonică, unde \mathbb{V} este spațiu euclidian de dimensiune n :

Etapă 1: scriem matricea A atașată formei pătratice;

Etapă 2: găsim, prin rezolvarea ecuației caracteristice $\det(A - \lambda I_n) = 0$, valorile proprii λ_i , $1 \leq i \leq p$, având ordinele de multiplicitate n_i și determinăm subspațiile vectorilor proprii $\mathbb{V}(\lambda_i)$, corespunzătoare acestor valori proprii;

Etapă 3: Pentru fiecare subspațiu $\mathbb{V}(\lambda_i)$ determinăm câte o bază ortonormată \mathcal{B}_i ;

Etapă 4: Forma canonică a formei pătratice date este:

$$(112) \quad Q(x) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n^2,$$

cu mențiunea că în această scriere fiecare valoare proprie apare de un număr de ori egal cu ordinul de multiplicitate. Baza ortonormată în care se obține această formă canonică este $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_n$.

Exemplul 6.2.17. Vom reduce la forma canonică, prin metoda transformărilor ortogonale, următoarea formă pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

unde $x = (x_1; x_2; x_3)$ este un vector arbitrar din \mathbb{R}^3 , specificând și o bază ortonormată în care s-a obținut această formă.

Matricea asociată formei pătratice Q în baza canonică a lui \mathbb{R}^3 este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom determina valorile proprii ale matricei A , rezolvând ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I_3) = 0$ sau echivalent $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$. Se obțin $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$ sunt dați de sistemul:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \text{ având soluția } \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases}, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R}^*.$$
 Subspațiul invariant corespunzător valorii proprii -2 este

$$\mathbb{V}(-2) = \{(-\alpha; -\alpha; 2\alpha)^T / \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O bază pentru $\mathbb{V}(-2)$ este $\{(-1; -1; 2)^T\}$, de unde obținem baza ortonormată

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T \right\}.$$

Pentru valoarea proprie 4, vectorii proprii sunt dați de sistemul:
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases},$$

adică $\begin{cases} x_1 = -\alpha + 2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Subspațiul invariant corespunzător valorii proprii 4 este

$$\mathbb{V}(4) = \{(-\alpha + 2\beta; \alpha; \beta)^T / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $e_2 = (-1; 1; 0)^T \in \mathbb{V}(4)$ și vrem să determinăm $e_3 = (-\alpha_3 + 2\beta_3; \alpha_3; \beta_3)^T$ astfel încât $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$, adică $\alpha_3 - 2\beta_3 + \alpha_3 = 0$. Rezultă că $\beta_3 = \alpha_3$, de unde $e_3 = (\alpha_3; \alpha_3; \alpha_3)^T$ și astfel putem alege $e_3 = (1; 1; 1)^T$. S-a obținut baza ortogonală $\{(-1; 1; 0)^T, (1; 1; 1)^T\}$, din care se construiește, prin normalizare, baza ortonormată $\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}$.

Forma canonică a formei pătratice date este

$$Q(x) = -2\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 - 4\bar{x}_3^2,$$

aceasta fiind obținută în baza ortonormată

$$\bar{\mathcal{B}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}.$$

Observația 6.2.18. Comparând rezultatele obținute în exemplele 6.2.13 și 6.2.17, reiese concluzia că atunci când se reduce o formă pătratică la forma canonică, prin două metode diferite, se pot obține rezultate diferite. În secțiunea următoare, vom determina totuși un invariant al formei canonice.

6.3. Signatura unei forme pătratice. Teorema inerției

Definiția 6.3.1. Pentru o formă pătratică având forma canonică

$$(113) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{x}_i^2,$$

în care p coeficienți sunt strict pozitivi, q coeficienți sunt strict negativi, iar $r = n - (p + q)$ coeficienți sunt nuli, tripletul (p, q, r) se numește **signatura formei pătratice**.

Teorema 6.3.2. (Teorema inerției) Signatura unei forme pătratice este un invariant al formei canonice, adică signatura este aceeași în orice formă canonică a formei pătratice respective.

Demonstrație. Fie $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică și $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ două baze ale lui \mathbb{V} în raport cu care Q are formele canonice:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n b_i \bar{x}_i^2 \quad \text{și} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^n b_i \tilde{x}_i^2$$

cu signaturile (p_1, q_1, r_1) și respectiv (p_2, q_2, r_2) .

Printr-o eventuală rearanjare a vectorilor din cele două baze se poate presupune că primii p_1 (respectiv p_2) coeficienți ai celor două forme canonice sunt strict pozitivi, următorii q_1 (respectiv q_2) coeficienți sunt strict negativi, iar ultimii r_1 (respectiv r_2) coeficienți sunt nuli.

Presupunem prin absurd că $p_1 > p_2$. Vom nota cu $\mathbf{V}_1 = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_{p_1}\}$ subspațiul lui \mathbf{V} generat de $\{e_1, e_2, \dots, e_{p_1}\}$ și cu $\mathbf{V}_2 = \text{Span}\{e_{p_2+1}, e_{p_2+2}, \dots, e_n\}$ subspațiul lui \mathbf{V} generat de $\{e_{p_2+1}, e_{p_2+2}, \dots, e_n\}$. Rezultă că

$$\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_1) + \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_2) = p_1 + n - p_2 > n.$$

Aplicând acum Teorema dimensiunii 3.3.11 avem:

$$n \geq \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_1) + \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_2) - \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2) > n - \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2),$$

de unde rezultă că $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 \neq \{0_{\mathbf{V}}\}$. Astfel, se poate considera un vector nenul $x^* \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$.

Pe de-o parte, deoarece $x^* \in \mathbf{V}_1$ avem $x^* = \bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + \dots + \bar{x}_p e_p$, de unde

$$(114) \quad Q(x^*) = \sum_{i=1}^p a_i \bar{x}_i^2 \geq 0,$$

iar pe de altă parte, cum $x \in \mathbf{V}_2$ avem $x^* = \tilde{x}_{p_2+1} f_{p_2+1} + \tilde{x}_{p_2+2} f_{p_2+2} + \dots + \tilde{x}_n f_n$, și astfel

$$(115) \quad Q(x^*) = \sum_{i=p_2+1}^n b_i \tilde{x}_i^2 \leq 0.$$

Din relațiile (114) și (115) obținem $Q(x^*) = 0$, de unde vom găsi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_p = \tilde{x}_{p_2+1} = \tilde{x}_{p_2+2} = \dots = \tilde{x}_n = 0$, ceea ce implică $x^* = 0_{\mathbf{V}}$ - contradicție. Deci presupunerea că $p_1 > p_2$ este falsă. Similar se demonstrează că nu putem avea nici inegalitatea $p_1 < p_2$ și astfel am obținut că $p_1 = p_2$.

Procedând analog, se arată că $q_1 = q_2$, ceea ce demonstrează că signatura este aceeași pentru ambele forme canonice. \square

Exemplul 6.3.3. În Exemplul 6.2.17 s-a determinat pentru forma pătratică

$$Q : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

forma canonică $Q(x) = -2\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 + 4\bar{x}_3^2$. Astfel, signatura acestei forme pătratice va fi $(2, 1, 0)$.

Definiția 6.3.4. Spunem că forma pătratică $Q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ este **pozitiv (negativ) definită** dacă $Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$) pentru orice $x \in \mathbf{V} \setminus \{0_{\mathbf{V}}\}$.

Observația 6.3.5. O formă pătratică Q este pozitiv (negativ) definită dacă și numai dacă polara ei F este pozitiv (resp. negativ) definită.

Teorema 6.3.6. (Criteriul lui Sylvester) Fie $Q : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui \mathbf{V} , $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată formei pătratice Q în baza \mathcal{B} și $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A . Atunci:

1. Q este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1,n}$;

2. Q este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1, n}$.

Demonstrație. 1. Presupunem că forma pătratică Q este pozitiv definită și notăm cu F polara lui Q . Vom arăta mai întâi că toți minorii principali ai matricei A sunt nenuli. Presupunem prin absurd că există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\Delta_k = 0$. În acest caz o linie a determinantului Δ_k este o combinație liniară a celorlalte linii, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, nu toți nuli, astfel încât

$$\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + \dots + \alpha_k a_{ki} = 0,$$

pentru $i = \overline{1, k}$. Din această relație, succesiv obținem:

$$0 = \sum_{j=1}^k \alpha_j a_{ji} = \sum_{j=1}^k \alpha_j F(e_j, e_i) = F\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j, e_i\right),$$

pentru $i = \overline{1, k}$. Înmulțind relațiile de mai sus cu α_i și sumând aceste relații după $i = \overline{1, k}$, obținem:

$$F\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j e_j, \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\right) = 0.$$

Cum F este pozitiv definită, rezultă $\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i = 0$, ceea ce arată că vectorii e_1, e_2, \dots, e_k sunt liniar dependenți, contradicție. Deci $\Delta_i \neq 0$, pentru $i = \overline{1, n}$.

Putem aplica acum Teorema 6.2.11. Rezultă că există o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} \bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \bar{x}_3^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \bar{x}_n^2.$$

Deoarece Q este pozitiv definită, obținem

$$\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} > 0$$

și în consecință $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$.

Reciproc, dacă $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0$ rezultă că

$$\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} > 0.$$

Astfel,

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} \bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} \bar{x}_3^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \bar{x}_n^2 > 0,$$

pentru orice $x \in V \setminus \{0_V\}$, unde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ sunt componentele vectorului x în baza în care s-a obținut baza canonică a cărei existență este asigurată de Teorema 6.2.11. Deci forma pătratică Q este pozitiv definită.

2. Forma pătratică Q este negativ definită dacă și numai dacă forma pătratică $Q' : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q'(x) = -Q(x)$ este pozitiv definită. Matricea asociată lui Q' este $A' = -A$, iar minorii ei principali sunt $\Delta'_i = (-1)^i \Delta_i$, $i = \overline{1, n}$.

De la punctul 1. al teoremei avem Q' pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta'_i > 0$. Așadar Q este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$. \square

Fie o formă pătratică având scrierea

$$(116) \quad Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

într-o anumită bază \mathcal{B} a lui \mathbb{V} . Dacă notăm cu $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată formei pătratice Q în baza B , atunci egalitatea (116) este echivalentă cu relația matricială

$$(117) \quad Q(x) = XAX^T,$$

unde, în membrul drept al acestei egalități, X reprezintă matricea linie $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$.

Reamintim că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește pozitiv definită dacă $xAx^T > 0$, pentru orice vector nenul $x \in \mathbb{R}^n$. Din relația (117) se obține imediat următorul rezultat:

Propoziția 6.3.7. *Forma pătratică este pozitiv definită dacă și numai dacă matricea ei asociată A este pozitiv definită.*

Deoarece între mulțimea formelor pătratice $Q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ și mulțimea matricelor simetrice este o corespondență bijectivă, cu ajutorul Propoziției 6.3.7 putem reformula primul punct al *Criteriului lui Sylvester* astfel:

Teorema 6.3.8. *O matrice simetrică este pozitiv definită dacă și numai dacă toți minorii principali ai matricei sunt strict pozitivi.*

6.4. Aplicații multiliniare. Forme multiliniare

Pe parcursul acestor două ultime secțiuni, \mathbb{K} va desemna un corp comutativ.

Definiția 6.4.1. *Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n$ și \mathbb{W} spații vectoriale peste același corp \mathbb{K} . O aplicație $F : \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times \dots \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{W}$ se numește **aplicație multiliniară** (sau **n -liniară**) dacă este liniară în fiecare dintre variabilele sale, adică*

$$F(v_1, \dots, v_{i-1}, \alpha v_i + \beta v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \alpha F(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + \beta F(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $v_j \in \mathbb{V}_j$, cu $j = 1, \dots, n$ și $v'_i \in \mathbb{V}_i$, cu $i = 1, \dots, n$. Vom nota cu $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ mulțimea aplicațiilor n -liniare definite pe $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times \dots \times \mathbb{V}_n$ cu valori în \mathbb{W} .

În cazul particular în care $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 = \dots = \mathbb{V}_n = \mathbb{V}$ și $\mathbb{W} = \mathbb{K}$, aplicația multiliniară se va numi **formă multiliniară** (sau **n -liniară**). Vom nota cu $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}; \mathbb{K})$ mulțimea formelor n -liniare definite pe $\mathbb{V}^n = \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_{n \text{ ori}}$.

Observația 6.4.2. Noțiunea de formă multiliniară reprezintă o generalizare naturală a conceptului de formă biliniară.

Exemplele 6.4.3. 1) Fie \mathbb{V}_3 spațiul vectorial real al vectorilor liberi. Aplicația $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{V}_3$, $F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$ (produsul vectorial a doi vectori liberi) este o aplicație 2-liniară (sau aplicație biliniară).

2) $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{V}_3$, $F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (dublul produs vectorial a trei vectori liberi) este o aplicație 3-liniară (sau aplicație triliniară).

3) Aplicația $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ (produsul scalar a doi vectori liberi) reprezintă o formă 2-liniară (sau formă biliniară).

Observația 6.4.4. Mulțimea formelor n -liniare $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ are o structură de \mathbb{K} -spațiu vectorial față de adunarea formelor n -liniare:

$$(F + G)(v_1, v_2, \dots, v_n) = F(v_1, v_2, \dots, v_n) + G(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad v_i \in \mathbb{V}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

și față de înmulțirea unei forme n -liniare cu un scalar:

$$(\alpha F)(v_1, v_2, \dots, v_n) = \alpha F(v_1, v_2, \dots, v_n), \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad v_i \in \mathbb{V}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Se verifică imediat că $F+G$ și αF astfel definite sunt forme n -liniare. Mai mult, operațiile de adunare și înmulțire a unei forme n -liniare cu un scalar verifică axiomele din definiția spațiului vectorial.

Propoziția 6.4.5. Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n, \mathbb{W}$ spații vectoriale finit dimensionale peste același corp \mathbb{K} . Atunci

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \dots \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_n) \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

Demonstrație. Fie $\{\nu_{i_1}\}, \dots, \{\nu_{i_n}\}, \{\omega_j\}$ baze pentru spațiile vectoriale $\mathbb{V}_1, \dots, \mathbb{V}_n$ și respectiv \mathbb{W} , iar $\{\nu_{i_1}^*\}, \dots, \{\nu_{i_n}^*\}, \{\omega_j^*\}$ bazele duale corespunzătoare.

Definim aplicațiile:

$$F_{i_1, \dots, i_n}^j : \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_n \longrightarrow \mathbb{W}, \quad F_{i_1, \dots, i_n}^j(v_1, \dots, v_n) = \nu_{i_1}^*(v_1) \dots \nu_{i_n}^*(v_n) \omega_j.$$

Datorită liniarității aplicațiilor $\nu_{i_k}^*$, $k = 1, \dots, n$, rezultă imediat că aplicațiile F_{i_1, \dots, i_n}^j sunt n -liniare. Vom demonstra că ele formează o bază a spațiului $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$.

Considerăm $F \in \mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ și $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{V}_1 \times \dots \times \mathbb{V}_n$ arbitrari. Atunci:

$$\begin{aligned} F(v_1, \dots, v_n) &= F\left(\sum_{i_1} \nu_{i_1}^*(v_1) \nu_{i_1}, \dots, \sum_{i_n} \nu_{i_n}^*(v_n) \nu_{i_n}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \nu_{i_1}^*(v_1) \dots \nu_{i_n}^*(v_n) F(\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n}) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n, j} \nu_{i_1}^*(v_1) \dots \nu_{i_n}^*(v_n) \omega_j^*(F(\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n})) \omega_j = \sum_{i_1, \dots, i_n, j} \omega_j^*(F(\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n})) F_{i_1, \dots, i_n}^j(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Deci aplicațiile F_{i_1, \dots, i_n}^j constituie o mulțime de generatori pentru $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$. Mai mult, mulțimea scalarilor $\{\omega_j^*(F(\nu_{i_1}, \dots, \nu_{i_n}))\}$ este unic determinată de aplicația multiliniară F și, în consecință, F_{i_1, \dots, i_n}^j formează o bază a spațiului $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$. Așadar

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_n; \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \dots \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_n) \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

□

Definiția 6.4.6. O formă multiliniară $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ se numește **alternată** dacă $F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$ ori de câte ori $v_i = v_j$, cu $i < j$.

Exemplul 6.4.7. Aplicația $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (produsul mixt a trei vectori liberi) reprezintă o formă 3-liniară (sau formă trilineară) alternată.

Propoziția 6.4.8. Dacă $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ este o formă multiliniară alternată, atunci

$$F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

pentru orice $i < j$.

Demonstrație. Considerăm $1 \leq i < j \leq n$, arbitrari. Din Definițiile 6.4.1 și 6.4.6: $0 = F(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_n) = F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) = F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$, și astfel $F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n)$. \square

Corolarul 6.4.9. Pentru orice formă multiliniară alternată $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ și orice permutare $\sigma \in S_n$ avem

$$F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)F(v_1, \dots, v_n),$$

unde $\epsilon(\sigma)$ reprezintă signatura permutării σ .

Demonstrație. Descompunem permutarea σ în produs de transpoziții: $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$. Rezultă că $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau_1) \circ \dots \circ \epsilon(\tau_m) = (-1)^m$. Astfel, putem să ne reducem la cazul $m = 1$. În acest caz, σ este o transpoziție, iar afirmația de demonstrat rezultă din propoziția precedentă. \square

Definiția 6.4.10. Pentru o matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, suma

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

se va numi **determinantul** matricei A . Vom nota cu $\det(A)$ determinantul matricei A .

Propoziția 6.4.11. Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Demonstrație. Matricea transpusă $A^T = (a_{ij}^T)_{1 \leq i, j \leq n}$ are elementele $a_{ij}^T = a_{ji}$, pentru orice $i, j = 1, 2, \dots, n$. Din definiția determinantului unei matrice avem:

$$(118) \quad \det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)}^T a_{2\sigma(2)}^T \dots a_{n\sigma(n)}^T = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Dacă $\sigma(i) = j$, atunci $i = \sigma^{-1}(j)$. Evident corespondența $S_n \longrightarrow S_n$, $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ este bijectivă. Deoarece $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ și având în vedere comutativitatea operațiilor de pe \mathbb{K} , din relația (118) obținem:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(A).$$

\square

Propoziția 6.4.12. Fie $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă multiliniară alternată, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice arbitrară și elementele $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{V}$. Dacă pentru orice $i = 1, \dots, n$ definim elementele $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ și $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$, atunci

$$F(f_1, f_2, \dots, f_n) = F(g_1, g_2, \dots, g_n) = \det(A) F(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Demonstrație. Datorită "multilinearității" lui F , avem:

$$F(f_1, f_2, \dots, f_n) = F(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n, \dots, a_{n1}e_1 +$$

$$a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n} F(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

Definim funcția $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(k) = i_k$. Evident, dacă σ este injectivă, atunci este și surjectivă, deci bijectivă, adică o permutare de ordin n : $\sigma \in S_n$. Dacă σ nu este injectivă, atunci există $k, l \in 1, 2, \dots, n$, $k \neq l$ astfel încât $e_{i_k} = e_{i_l}$. Cum F este alternată, în aceasta situație avem: $F(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = 0$. Deci

$$(119) \quad F(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}).$$

Dar, din Corolarul 6.4.9, avem

$$(120) \quad F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) F(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Din relațiile (119) și (120) obținem:

$$F(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} F(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(A) F(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Pentru a proba ultima egalitate, observăm că:

$$g_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}^t e_j,$$

pentru orice $i = 1, \dots, n$. Din cele demonstrate mai sus, precum și din Propoziția 6.4.11, avem:

$$F(g_1, g_2, \dots, g_n) = \det(A^T) F(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det(A) F(e_1, e_2, \dots, e_n). \quad \square$$

Considerăm $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ mulțimea matricelor coloană cu n componente din corpul \mathbb{K} . Evident $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ este un \mathbb{K} -spațiu vectorial de dimensiune n , o bază a acestuia fiind

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(baza canonică). Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vom nota cu A^1, A^2, \dots, A^n coloanele matricei A . Astfel

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 6.4.13. (Teorema fundamentală a teoriei determinantilor) *Considerăm \mathbb{K} -spațiul vectorial $\mathbf{V} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ și $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ baza sa canonică. Atunci există o unică formă multiliniară alternată $F_n : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât $F_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = 1$. În plus,*

$$F_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = \det(A),$$

pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Demonstrație. Probăm mai întâi unicitatea. Fie $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathbf{V}$ vectori arbitrari și considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, având coloanele A^1, A^2, \dots, A^n . Dacă $F_n, F'_n : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ sunt două forme multiliniare alternate cu proprietatea că $F_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = F'_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = 1$, atunci din Propoziția 6.4.12 obținem că

$$F_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = F'_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = \det(A).$$

Cum A^1, A^2, \dots, A^n au fost considerați arbitrari, rezultă că $F_n = F'_n$.

Pentru a demonstra existența formei multiliniare alternate vom utiliza metoda inducției matematice.

Dacă $n = 2$, atunci $\mathbf{V} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. Definim aplicația $F_2 : \mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $F(A^1, A^2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, unde $A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ și $A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Se verifică imediat că F_2 este formă biliniară și, deoarece $F(A^1, A^1) = 0$, este și alternată.

Presupunem că există F_{n-1} cu proprietatea din enunțul teoremei și vrem să construim F_n . Fie $A^1, A^2, \dots, A^n \in \mathbf{V}$, $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pentru orice $j = 1, 2, \dots, n$ și considerăm

A matricea pătratică având coloanele A^1, A^2, \dots, A^n . Notăm cu A_{ij} matricea obținută din A prin eliminarea liniei i și coloanei j , iar cu $A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^n$ coloanele acestei matrice. Evident $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Fixăm un $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ arbitrar și definim aplicația

$$(121) \quad F_n : \mathbf{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad F_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}).$$

În cazul particular în care $A^j = e^j$, pentru orice $j = 1, 2, \dots, n$, rezultă că $a_{ii} = 1$ și $a_{ij} = 0$, când $j \neq i$. Pe de altă parte, $A_{ii}^1, A_{ii}^2, \dots, A_{ii}^{n-1}$ va reprezenta, în acest caz, baza canonică a lui $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Așadar, ținând cont și de ipoteza inductivă, din relația (121) obținem

$$F_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = 1.$$

În continuare, vom proba că F_n este formă multiliniară. Pentru aceasta, vom arăta mai întâi că

$$F_n(A^1, \dots, A^k + A'^k, \dots, A^n) = F_n(A^1, \dots, A^k, \dots, A^n) + F_n(A^1, \dots, A'^k, \dots, A^n),$$

pentru orice $A^1, \dots, A^k, A'^k, \dots, A^n \in V$ și $1 \leq k \leq n$. Presupunem că

$$A'^k = \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ \dots \\ a'_{nk} \end{pmatrix}, \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

pentru orice $j = 1, 2, \dots, n$. Considerăm matricele $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, cu $a'_{ij} = a_{ij}$, când $j \neq k$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, cu $b_{ij} = a_{ij} = a'_{ij}$, pentru $j \neq k$ și $b_{ik} = a_{ik} + a'_{ik}$. (De fapt, B este matricea având coloanele $A^1, \dots, A^k + A'^k, \dots, A^n$.) Atunci

$$\begin{aligned} F(A^1, \dots, A^k + A'^k, \dots, A^n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_{ij} F_{n-1}(B_{ij}^1, B_{ij}^2, \dots, B_{ij}^{n-1}) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} b_{ij} F_{n-1}(B_{ij}^1, B_{ij}^2, \dots, B_{ij}^{n-1}) + (-1)^{i+k} b_{ik} F_{n-1}(B_{ik}^1, B_{ik}^2, \dots, B_{ik}^{n-1}) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} a'_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) + \\ &+ (-1)^{i+k} a_{ik} F_{n-1}(A_{ik}^1, A_{ik}^2, \dots, A_{ik}^{n-1}) + (-1)^{i+k} a'_{ik} F_{n-1}(A_{ik}^1, A_{ik}^2, \dots, A_{ik}^{n-1}) = \\ &= F_n(A^1, \dots, A^k, \dots, A^n) + F_n(A'^1, \dots, A'^k, \dots, A'^n) = F_n(A^1, \dots, A^k, \dots, A^n) + F_n(A^1, \dots, A'^k, \dots, A^n). \end{aligned}$$

Demonstrăm acum că

$$F_n(A^1, \dots, \lambda A^k, \dots, A^n) = \lambda F_n(A^1, \dots, A^k, \dots, A^n),$$

pentru orice $A^1, \dots, A^k, \dots, A^n \in \mathbb{V}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ și $1 \leq k \leq n$. Considerăm matricea $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ având drept coloane pe $A^1, \dots, \lambda A^k, \dots, A^n$. Atunci $c_{ij} = a_{ij}$, pentru $j \neq k$ și $c_{ik} = \lambda a_{ik}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} F_n(A^1, \dots, \lambda A^k, \dots, A^n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} c_{ij} F_{n-1}(C_{ij}^1, C_{ij}^2, \dots, C_{ij}^{n-1}) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} c_{ij} F_{n-1}(C_{ij}^1, C_{ij}^2, \dots, C_{ij}^{n-1}) + (-1)^{i+k} c_{ik} F_{n-1}(C_{ik}^1, C_{ik}^2, \dots, C_{ik}^{n-1}) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \lambda F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) + (-1)^{i+k} \lambda a_{ik} F_{n-1}(A_{ik}^1, A_{ik}^2, \dots, A_{ik}^{n-1}) = \\ &= \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) = \lambda F_n(A^1, \dots, A^k, \dots, A^n). \end{aligned}$$

În final, vom demonstra că forma multiliniară F este alternată. Presupunem că doi dintre vectorii A^1, A^2, \dots, A^n sunt egali. Fără a reduce generalitatea putem presupune că $A^1 = A^2$

(altfel, se aplică o permutare vectorilor A^1, A^2, \dots, A^n astfel încât în urma acestuia primii doi vectori să fie egali). Atunci:

$$F_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) = (-1)^{i+1} a_{i1} F_{n-1}(A_{i1}^1, A_{i1}^2, \dots, A_{i1}^{n-1}) +$$

$$(-1)^{i+2} a_{i2} F_{n-1}(A_{i2}^1, A_{i2}^2, \dots, A_{i2}^{n-1}) + \sum_{j=3}^n (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}).$$

Deoarece $A^1 = A^2$, atunci $A_{ij}^1 = A_{ij}^2$, pentru $j = 3, \dots, n$ și în consecință

$$F_{n-1}(A_{ij}^1, A_{ij}^2, \dots, A_{ij}^{n-1}) = 0,$$

pentru $j = 3, \dots, n$. Pe de altă parte, egalitatea $A^1 = A^2$ conduce la

$$a_{i1} F_{n-1}(A_{i1}^1, A_{i1}^2, \dots, A_{i1}^{n-1}) = a_{i2} F_{n-1}(A_{i2}^1, A_{i2}^2, \dots, A_{i2}^{n-1}),$$

deci

$$(-1)^{i+1} a_{i1} F_{n-1}(A_{i1}^1, A_{i1}^2, \dots, A_{i1}^{n-1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} F_{n-1}(A_{i2}^1, A_{i2}^2, \dots, A_{i2}^{n-1}) = 0.$$

Astfel putem conchide că

$$F_n(A^1, A^2, \dots, A^n) = 0.$$

□

Din definirea lui F_n , dată în Teorema fundamentală a teoriei determinantilor, se obține următorul rezultat, cunoscut sub numele de dezvoltarea determinantului după linia i :

Corolarul 6.4.14. *Dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$ avem*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

unde A_{ij} este matricea obținută din matricea A prin eliminarea liniei i și coloanei j .

Folosind Propoziția 6.4.11, Teorema 6.4.13, precum și proprietățile formelor multiliniare alternate, regăsim următoarele proprietăți ale determinantilor:

Corolarul 6.4.15. 1) *O matrice având două linii sau două coloane egale are determinantul zero.*

2) *Dacă se permută două linii sau două coloane ale matricei, se schimbă semnul determinantului matricei.*

3) *Dacă se înmulțesc elementele unei linii sau coloane dintr-o matrice cu un element din corpul \mathbb{K} , valoarea determinantului matricei se multiplică prin acel element.*

4) *Dacă la o linie (resp. coloană) a unei matrice se adună o altă linie (resp. coloană) înmulțită cu un element din \mathbb{K} , valoarea determinantului nu se schimbă.*

5) *Dacă toate elementele unei linii sau unei coloane dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este zero.*

Propoziția 6.4.16. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstrație. Fie $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Considerăm $\{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ baza canonică a \mathbb{K} -spațiului vectorial $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ și definim $f_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}e^j$, $g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}f_j$, pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$. Atunci

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix} \right) = (A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ \dots \\ e^n \end{pmatrix}.$$

Aplicând Propoziția 6.4.12, obținem pe de-o parte:

$$(122) \quad F_n(g_1, g_2, \dots, g_n) = \det(AB) \cdot F_n(e^1, e^2, \dots, e^n) = \det(AB),$$

iar pe de altă parte

$$(123) \quad F_n(g_1, g_2, \dots, g_n) = \det(A) \cdot F_n(f_1, f_2, \dots, f_n) = \det(A) \cdot (\det(B) \cdot F_n(e^1, e^2, \dots, e^n)) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Din relațiile (122) și (123) obținem

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

□

Observația 6.4.17. Corolarul 6.4.14, Corolarul 6.4.15, precum și Propoziția 6.4.16 au fost obținute și în cadrul Capitolului II. Demonstrațiile prezentate în această secțiune se bazează însă pe noțiunea de formă multiliniară alternată.

Exemplul 6.4.18. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale, $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ o transformare liniară și $F : \mathbb{W}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă n-liniară alternată. Atunci aplicația

$$G : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad G(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n))$$

este o formă n-liniară alternată.

Într-adevăr, fie $x_1, \dots, x_i, x'_i, \dots, x_n \in \mathbb{V}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, arbitrari. Ținând cont că T este transformare liniară, iar F formă n-liniară, succesiv avem:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, \alpha x_i + \beta x'_i, \dots, x_n) &= F(T(x_1), \dots, T(\alpha x_i + \beta x'_i), \dots, T(x_n)) = \\ &= F(T(x_1), \dots, \alpha T(x_i) + \beta T(x'_i), \dots, T(x_n)) = \alpha F(T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_n)) + \\ &+ \beta F(T(x_1), \dots, T(x'_i), \dots, T(x_n)) = \alpha G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \beta G(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

și, în consecință, G este formă n-liniară.

Dacă există $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ astfel încât $x_i = x_j$, atunci evident $T(x_i) = T(x_j)$. Deoarece F este o formă n-liniară alternată, atunci $F(T(x_1), \dots, T(x_i), \dots, T(x_j), \dots, T(x_n)) = 0$, de unde rezultă că $G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$. Așadar, G este o formă n-liniară alternată.

6.5. Produs tensorial

Definiția 6.5.1. Fie \mathbf{V} și \mathbf{W} două spații vectoriale peste corpul comutativ \mathbb{K} . Un \mathbb{K} - spațiu vectorial $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ împreună cu o aplicație biliniară $F : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ se numește **produs tensorial al lui \mathbf{V} cu \mathbf{W} peste corpul \mathbb{K}** dacă pentru orice \mathbb{K} - spațiu vectorial \mathbf{U} și orice aplicație biliniară $G : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{U}$ există o unică transformare liniară $\bar{G} : \mathbf{V} \otimes \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{U}$ astfel încât următoarea diagramă

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} \times \mathbf{W} & \xrightarrow{F} & \mathbf{V} \otimes \mathbf{W} \\ & \searrow \bar{G} & \downarrow \bar{G} \\ & & \mathbf{U} \end{array}$$

este comutativă: $\bar{G} \circ F = G$.

Observația 6.5.2. Din definiția produsului tensorial rezultă că avem următorul izomorfism de spații vectoriale:

$$(124) \quad \mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}; \mathbf{U}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}, \mathbf{U}).$$

Într-adevăr, dată o aplicație biliniară $G \in \mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}; \mathbf{U})$ există un unic morfism $\bar{G} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}, \mathbf{U})$ astfel încât $\bar{G}(v \otimes w) = G(v, w)$, pentru orice $(v, w) \in \mathbf{V} \times \mathbf{W}$. Reciproc, dat un morfism $\gamma : \mathbf{V} \otimes \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{U}$, compunerea $\gamma \circ \otimes : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{U}$ este aplicație biliniară. Mai mult, aplicațiile

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}; \mathbf{U}) \ni g \longmapsto \bar{g} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}, \mathbf{U})$$

și

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}, \mathbf{U}) \ni \gamma \longmapsto \gamma \circ \otimes \in \mathcal{L}_2(\mathbf{V}, \mathbf{W}; \mathbf{U})$$

sunt inverse una celeilalte.

Propoziția 6.5.3. Produsul tensorial a două \mathbb{K} -spații vectoriale, dacă există, este unic până la un izomorfism: dacă \mathbf{V} și \mathbf{W} sunt două \mathbb{K} -spații vectoriale, iar $\mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W}$ și $\mathbf{V} \otimes_2 \mathbf{W}$ sunt produse tensoriale ale lui \mathbf{V} cu \mathbf{W} peste \mathbb{K} , atunci $\mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W} \simeq \mathbf{V} \otimes_2 \mathbf{W}$.

Demonstrație. Fie $F_1 : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W}$ și $F_2 : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V} \otimes_2 \mathbf{W}$ aplicațiile biliniare corespunzătoare celor două produse tensoriale. Deoarece $\mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W}$ este un produs tensorial, din Definiția 6.5.1, există o unică transformare liniară $\bar{G}_1 : \mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{V} \otimes_2 \mathbf{W}$, astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} \times \mathbf{W} & \xrightarrow{F_1} & \mathbf{V} \otimes_1 \mathbf{W} \\ & \searrow \bar{G}_1 & \downarrow \bar{G}_1 \\ & & \mathbf{V} \otimes_2 \mathbf{W} \end{array}$$

este comutativă.

Cu aceleași argumente, schimbând rolurile lui $\mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W}$ și $\mathbb{V} \otimes_2 \mathbb{W}$, există o unică transformare liniară $\bar{G}_2 : \mathbb{V} \otimes_2 \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W}$, astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \xrightarrow{G} & \mathbb{V} \otimes_2 \mathbb{W} \\ & \searrow F & \downarrow \bar{G}_2 \\ & & \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W} \end{array}$$

este comutativă.

Deoarece $\bar{G}_2 \circ \bar{G}_1 \circ F = \bar{G}_2 \circ G = F$, atunci transformarea liniară $\bar{G}_2 \circ \bar{G}_1 : \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W}$ face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \xrightarrow{F} & \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W} \\ & \searrow F & \downarrow \bar{G}_2 \circ \bar{G}_1 \\ & & \mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W} \end{array}$$

Dar, și $id_{\mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W}}$ face comutativă diagrama precedentă. Ținând cont de unicitate, obținem că $\bar{G}_2 \circ \bar{G}_1 = id_{\mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W}}$. Similar se demonstrează că $\bar{G}_1 \circ \bar{G}_2 = id_{\mathbb{V} \otimes_2 \mathbb{W}}$, deci \bar{G}_1 și \bar{G}_2 sunt inverse una alteia, de unde rezultă $\mathbb{V} \otimes_1 \mathbb{W} \simeq \mathbb{V} \otimes_2 \mathbb{W}$. \square

Propoziția 6.5.4. *Dacă \mathbb{V} și \mathbb{W} sunt două \mathbb{K} -spații vectoriale, atunci produsul tensorial al lui \mathbb{V} cu \mathbb{W} există.*

Demonstrație. Date fiind \mathbb{K} -spațiile vectoriale \mathbb{V} și \mathbb{W} , vrem să construim un nou spațiu vectorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ și o aplicație biliniară $F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ care satisfac Definiția 6.5.1.

Vom considera $\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$ spațiul vectorial al tuturor combinațiilor liniare finite de perechi ordonate (v, w) cu $v \in \mathbb{V}$ și $w \in \mathbb{W}$. Evident, $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ este o bază a acestui spațiu vectorial. Notăm cu \mathbb{U} subspațiul vectorial al lui $\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$ generat de toți vectorii de forma

$$\begin{aligned} & (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \\ & (\alpha v, w) - \alpha(v, w) \\ & (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\ & (v, \alpha w) - \alpha(v, w), \end{aligned}$$

unde $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, $w, w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ și $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definim $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ ca fiind spațiul vectorial cât al lui $\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$ prin subspațiul \mathbb{U} :

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} = \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W}) / \mathbb{U},$$

iar aplicația $F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ ca și compunerea dintre incluziunea $i : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$ și proiecția canonică $\pi : \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W}) / \mathbb{U}$. Din modul de definire al subspațiului \mathbb{U} , rezultă că aplicația F construită anterior este biliniară.

Considerăm aplicația biliniară $G : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$. Deoarece $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ este o bază a lui $\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$, aplicația G induce o unică transformare liniară $\tilde{G} : \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \longrightarrow \mathbb{U}$ astfel încât

$\tilde{G}((v, w)) = G(v, w)$, pentru orice $(v, w) \in V \times W$. Datorită bilinearității lui G și din definirea subspațiului \mathbb{U} , rezultă că \tilde{G} se anulează pe elementele lui \mathbb{U} . Astfel obținem o transformare liniară $\overline{G} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$, $\overline{G}(F((v, w))) = \tilde{G}((v, w)) = G(v, w)$. Deoarece elementele de forma $F((v, w))$ generează spațiul $V \otimes W$, atunci \overline{G} va fi unic. \square

Observația 6.5.5. Având asigurată existența produsului tensorial, precum și unicitatea lui, pâna la un izomorfism, pentru două \mathbb{K} -spații vectoriale date \mathbb{V} și \mathbb{W} vom folosi denumirea de produsul vectorial al lui \mathbb{V} cu \mathbb{W} . De asemenea, dacă $F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ este aplicația biliniară asociată produsului tensorial, vom nota cu $v \otimes w$ imaginea elementului $(v, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}$ prin aplicația F .

Propoziția 6.5.6. Fie v_i , $i = 1, \dots, n$ vectori liniar independenți din \mathbb{V} și w_i , $i = 1, \dots, n$ vectori arbitrari din \mathbb{W} . Atunci relația

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$$

implică $w_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Demonstrație. Deoarece v_i , $i = 1, \dots, n$ sunt vectori liniar independenți, atunci putem construi transformările liniare $f^i \in \mathbb{V}^* = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ astfel încât

$$f^i(v_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } i = j \\ 0 & , \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Construim forma biliniară

$$F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad F(v, w) = \sum_{i=1}^n f^i(v)g^i(w),$$

cu $g^i \in \mathbb{W}^*$, arbitrari. Din definiția produsului tensorial rezultă că există transformarea liniară $h : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât $h(v \otimes w) = \sum_{i=1}^n f^i(v)g^i(w)$. Atunci

$$h\left(\sum_{j=1}^n v_j \otimes w_j\right) = \sum_{i,j=1}^n f^i(v_j)g^i(w_j) = \sum_{i=1}^n g^i(w_i).$$

Deoarece $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$, obținem că $\sum_{i=1}^n g^i(w_i) = 0$, pentru orice $g^i \in \mathbb{W}^*$. Rezultă că $w_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, n$. \square

Corolarul 6.5.7. Dacă $v \neq 0$ și $w \neq 0$, atunci $v \otimes w \neq 0$.

Propoziția 6.5.8. Dacă \mathbb{V} și \mathbb{W} sunt \mathbb{K} -spații vectoriale finit dimensionale, atunci

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

Demonstrație. Folosind izomorfismul (124), precum și Propoziția 6.4.5, succesiv avem:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^* = \dim_{\mathbb{K}}\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}_2(\mathbb{V}, \mathbb{W}; \mathbb{K}) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}). \end{aligned}$$

\square

Corolarul 6.5.9. Dacă $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ și $\{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ sunt baze ale \mathbb{K} -spațiilor vectoriale \mathbb{V} și respectiv \mathbb{W} , atunci $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este o bază a lui $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.

Demonstrație. Deoarece mulțimea $\{v \otimes w / v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{W}\}$ generează \mathbb{K} -spațiul vectorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, iar orice element $v \otimes w$ este o combinație liniară de elemente de forma $v_i \otimes w_j$, rezultă că $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ generează spațiul $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Ținând cont că $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$ este exact numărul de elemente din mulțimea $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$, atunci $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este o bază a lui $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. \square

Propoziția 6.5.10. Dacă \mathbb{V} și \mathbb{W} sunt două \mathbb{K} -spații vectoriale, atunci

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \simeq \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}.$$

Demonstrație. Izomorfismul dintre cele două spații vectoriale rezultă imediat având în vedere egalitatea dintre dimensiunile lor:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}).$$

În continuare vom preciza izomorfismul canonic dintre cele două spații vectoriale. Considerăm aplicația $G : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$, $G(v, w) = w \otimes v$. Deoarece G este aplicație biliniară, atunci există o unică transformare liniară $\bar{G} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$ cu proprietatea că $\bar{G}(v \otimes w) = w \otimes v$. Deoarece mulțimea $\{w \otimes v / w \in \mathbb{W}, v \in \mathbb{V}\}$ generează \mathbb{K} -spațiul vectorial $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$, aplicația \bar{G} este surjectivă. Având în vedere că $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V})$, rezultă că \bar{G} este izomorfism. \square

Propoziția 6.5.11. Dacă \mathbb{V} este un \mathbb{K} -spațiu vectorial, atunci

$$\mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \simeq \mathbb{V} \text{ și } \mathbb{V} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{V}.$$

Demonstrație. Având în vedere propoziția precedentă, precum și tranzitivitatea relației de izomorfism, este suficient să probăm unul dintre cele două izomorfisme. Din Propoziția 6.5.8 avem:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}),$$

deci $\mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \simeq \mathbb{V}$.

Lăsăm cititorului ca exercițiu să probeze că aplicația

$$f : \mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \quad f(k \otimes v) = kv$$

reprezintă izomorfismul canonic. \square

Propoziția 6.5.12. Dacă \mathbb{V} , \mathbb{W} și \mathbb{U} sunt trei \mathbb{K} -spații vectoriale, atunci

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{U} \simeq \mathbb{V} \otimes (\mathbb{W} \otimes \mathbb{U}).$$

Demonstrație. Din Propoziția 6.5.8 avem:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}((\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{U}) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U}) = (\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}))\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U}) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})(\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U})) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{U}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} \otimes (\mathbb{W} \otimes \mathbb{U}). \end{aligned}$$

\square

Observația 6.5.13. Având în vedere proprietatea de asociativitate a produsului tensorial demonstrată în Propoziția 6.5.12 rezultă că putem scrie $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W} \otimes \mathbf{U}$ în loc de $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}) \otimes \mathbf{U}$. Astfel, putem defini ușor produsul tensorial al unui număr finit de \mathbb{K} -spații vectoriale. În mod natural, putem extinde relația dintre aplicații biliniare și produse tensoriale de două spații vectoriale la relația dintre aplicații n -liniare și produse tensoriale de n -spații vectoriale.

De asemenea, Propoziția 6.5.12 ne permite să definim recursiv "puterea tensorială" a unui \mathbb{K} -spațiu vectorial astfel:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{\otimes 0} &= \mathbb{K} \\ \mathbf{V}^{\otimes 1} &= \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^{\otimes n} &= \mathbf{V}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathbf{V}, \text{ pentru orice } n > 1.\end{aligned}$$

6.6. Probleme propuse

Problema 6.6.1. Care dintre următoarele aplicații:

- a) $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$, unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$;
 - b) $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = (x_1 - y_1)^2 - x_2y_2$, unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$;
 - c) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,
- sunt forme biliniare?

Problema 6.6.2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice fixată. Să se demonstreze că aplicația $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(X, Y) = XAY^t$ este o formă biliniară. Este această formă biliniară simetrică?

Problema 6.6.3. Fie $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ o formă biliniară pozitiv definită. Atunci are loc inegalitatea:

$$F(x, y)^2 \leq F(x, x)F(y, y),$$

pentru orice $x, y \in V$, cu egalitate dacă și numai dacă vectorii x și y sunt liniar dependenți.

Problema 6.6.4. Se consideră aplicația $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = 3x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

- a) Arătați că F este formă biliniară;
- b) Scrieți matricea asociată lui F în baza canonică \mathcal{B}_1 a lui \mathbb{R}^3 ;
- c) Determinați matricea asociată lui F în baza $\mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

Problema 6.6.5. Să se determine formele pătratice induse de următoarele forme biliniare simetrice:

- a) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$
- b) $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(AB) = \text{Tr}(AB)$.

Problema 6.6.6. Utilizând metoda lui Gauss, să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

- a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 17x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3;$
- b) $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$
- c) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$
- d) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4.$

Problema 6.6.7. Reduceți următoarele forme pătratice la forma canonică, utilizând metoda lui Jacobi:

- a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$
- b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$
- c) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4;$
- d) $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4.$

Problema 6.6.8. Cu ajutorul metodei transformărilor ortogonale, să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

- a) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$
- b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$
- c) $Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3.$

Problema 6.6.9. Se consideră forma pătratică

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Utilizând metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi și respectiv metoda transformărilor ortogonale, să se reducă forma pătratică la forma canonică. Verificați Teorema inerției.

Problema 6.6.10. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ forma pătratică definită de

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (\alpha - 2)x_1^2 + (\alpha - 2)x_2^2 + (\alpha + 1)x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3,$$

unde α este un parametru real

- a) Pentru ce valori ale lui α forma canonică este pozitiv definită?
- b) Pentru $\alpha = 3$ să se determine forma canonică a lui Q , folosind metoda transformărilor ortogonale.

(Concurs Traian Lalescu, Etapa locala 2009, Universitatea Tehnică de Construcții București)

Problema 6.6.11. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale. Să se găsească izomorfismul natural:

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^* \simeq \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^*.$$

Problema 6.6.12. Fie \mathbb{V} și \mathbb{W} două \mathbb{K} -spații vectoriale. Dacă v_1, v_2 sunt doi vectori liniar independenți din \mathbb{V} , iar w_1, w_2 sunt doi vectori liniar independenți din \mathbb{W} , să se demonstreze că nu există $v \in \mathbb{V}$ și $w \in \mathbb{W}$ astfel încât

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w.$$

Problema 6.6.13. Să se stabilească următoarele izomorfisme:

- a) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, ca și \mathbb{Q} -spații vectoriale;
- b) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ca și \mathbb{Q} -spații vectoriale;
- c) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$, ca și \mathbb{R} -spații vectoriale.

Soluții

1.5.1 Demonstrăm mai întâi că $(a) \Rightarrow (b)$ și $(a) \Rightarrow (c)$. Fie $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dacă f este injectivă, atunci $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sunt n elemente distincte din A , deci $A = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$, adică f este surjectivă și implicit bijectivă.

Dacă f este surjectivă, atunci $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = A$ deci $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sunt distincte două câte două, adică f este injectivă și prin urmare f este bijectivă.

Demonstrăm acum implicațiile $(b) \Rightarrow (a)$ și $(c) \Rightarrow (a)$. Presupunem prin absurd că A este o mulțime infinită și vom construi funcțiile $f, g : A \rightarrow A$, f injectivă nesurjectivă, g surjectivă neinjectivă. Fiind infinită, A conține o submulțime infinită $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Definim funcțiile $f, g : A \rightarrow A$ prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A \setminus B \\ a_{n+1} & \text{dacă } x = a_n \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A \setminus B \cup \{a_1\} \\ a_{n-1} & \text{dacă } x = a_n, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Deoarece $a_1 \notin \text{Im}(f)$, $g(a_1) = g(a_2)$ rezultă că f nu este surjectivă, iar g nu este injectivă. Pe de altă parte, f este evident injectivă (este injectivă pe ramuri iar $f(A \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$) iar g este evident surjectivă. Deci f este injectivă și nu e surjectivă, iar g este surjectivă și nu e injectivă, o contradicție.

1.5.2 Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $A = \{1, \dots, m\}$ și $B = \{1, \dots, n\}$. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție oarecare. Atunci f este perfect determinată de valorile $f(1), \dots, f(m)$.

(a) Fiecare $f(i)$ poate fi ales arbitrar din B , deci poate fi ales în n moduri. Prin urmare, numărul total de funcții care se pot defini pe A cu valori în B este n^m .

(b) În mod evident, dacă $m > n$ rezultă din definiția funcției injective că nu există funcții injective definite pe A cu valori în B . Fie $m \leq n$ și f o funcție injectivă. Rezultă că $f(1), \dots, f(m)$ sunt distincte două câte două. În particular, a da o funcție injectivă f revine la a alege o submulțime ordonată cu m elemente a lui B . Prin urmare numărul funcțiilor injective este numărul de submulțimi ordonate cu n elemente ale mulțimii B (cu n elemente) adică $A_n^m = n!/(n-m)!$.

(c) Pentru calculul numărului funcțiilor surjective avem nevoie de Principiul includerii și excluderii pe care îl enunțăm fără demonstrație (demonstrația se poate face prin inducție după numărul de mulțimi n).

Principiul includerii și excluderii. Fie Y o mulțime finită nevidă și Y_1, \dots, Y_n submulțimi ale lui Y . Atunci are loc:

$$|Y_1 \cup \dots \cup Y_n| = \sum_{i=1}^n |Y_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |Y_i \cap Y_j| + \dots + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n} |Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_l}| + \dots + (-1)^{n+1} |Y_1 \cap \dots \cap Y_n|.$$

Numărul funcțiilor surjective se obține scăzând din numărul total de funcții (calculat la punctul (a)) pe cel al funcțiilor care nu sunt surjective. Să notăm cu N numărul funcțiilor care nu sunt surjective. Prin definiție, f nu este surjectivă dacă există $i \in B$ astfel încât $i \notin \text{Im}(f)$. Să notăm cu Y_i , pentru orice $i = 1, \dots, n$, mulțimea funcțiilor $f : A \rightarrow B$ cu $i \notin \text{Im}(f)$. Atunci $N = |Y_1 \cup \dots \cup Y_n|$ și pentru calculul lui N folosim principiul includerii și excluderii. Rămâne de văzut cine este $|Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_l}|$, unde l parcurge mulțimea $\{1, \dots, n\}$ iar $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$. Din definiția lui Y_i obținem că mulțimea $Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_l}$ este mulțimea funcțiilor definite pe A care iau valori în mulțimea $B \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$, deci are $(n-l)^m$ elemente conform (a). Pentru un l fixat, avem C_n^l astfel de intersecții. Deci, numărul de funcții surjective este egal cu

$$n^m - |Y_1 \cup \dots \cup Y_n| = n^m - (C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + \dots + (-1)^n C_n^{n-1}(n-(n-1))^m),$$

adică numărul căutat.

1.5.3 (a) \sim este reflexivă ($a - a = 0 \in \mathbb{Z}$), simetrică ($a - b \in \mathbb{Z}$ implică $b - a \in \mathbb{Z}$) și tranzitivă ($a - b \in \mathbb{Z}$ și $b - c \in \mathbb{Z}$ implică $a - c = (a - b) + (b - c) \in \mathbb{Z}$), deci \sim este relație de echivalență. (b) \equiv este reflexivă, simetrică și nu este tranzitivă ($|0 - 1| < 3$, $|1 - 3| < 3$ dar $|0 - 3| = 3 \geq 3$), deci \equiv nu este relație de echivalență. (c) \circ nu este reflexivă ($1/3 + 1/3 \notin \mathbb{Z}$), este simetrică și nu este tranzitivă ($2/3 + 1/3 \in \mathbb{Z}$, $1/3 + 5/3 \in \mathbb{Z}$ dar $2/3 + 5/3 \notin \mathbb{Z}$), deci nu este relație de echivalență.

1.5.4 Se verifică imediat că \sim este relație de echivalență. Clasa de echivalență a lui z este $\hat{z} = \{w \mid |w| = |z|\}$. Să observăm că $\hat{0} = \{0\}$, iar $z \sim |z|$ implică $\hat{z} = \hat{|z|}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Geometric, prin identificarea lui \mathbb{C} cu planul, via bijecția $z = a + ib \mapsto (a, b)$, clasele de echivalență sunt cercurile cu centru în origine. Aceasta ne arată că un sistem complet de reprezentanți este orice semidreaptă închisă care pleacă din originea planului. Algebric, să arătăm că \mathbb{R}_+ este un sistem complet de reprezentanți. Deoarece $z \sim |z|$ și $|z| \geq 0$, $|z| \in \mathbb{R}$ rezultă că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ există un element $a \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $z \sim a$. Mai departe, este evident că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$ cu $|a| = |b|$ rezultă că $a = b$. Obținem astfel că \mathbb{R}_+ este un sistem complet de reprezentanți pentru \sim . Alegerea sistemului complet de reprezentanți nu e unică. Cititorul este invitat să demonstreze că oricare din următoarele mulțimi este un sistem complet de reprezentanți pentru \sim : \mathbb{R}_- , $i\mathbb{R}_+ = \{ai \mid a \in \mathbb{R}_+\}$, $\{a + ai \mid a \in \mathbb{R}_+\}$.

1.5.5 Se verifică la fel ca la exercițiul anterior că \sim este o relație de echivalență. Dacă $z = a + ib \in \mathbb{C}$ este un număr complex atunci se verifică imediat că $a + ib \sim c + id$ dacă și numai dacă $b = d$. Deci clasa de echivalență a unui număr complex $z = a + ib$ este $\widehat{a + ib} = \{c + ib \mid c \in \mathbb{R}\}$. Geometric, clasele de echivalență sunt dreptele verticale, iar un sistem complet de reprezentanți este dat de orice dreaptă care nu este verticală. Algebric, se poate verifica la fel ca la exercițiul anterior că oricare din mulțimile următoare este un sistem complet de reprezentanți: \mathbb{R} , $\{a + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$, $\{x + 1 + ix \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1.5.6 Relația \sim este reflexivă ($a + b = b + a$), simetrică ($a + d = b + c$ implică $b + c = a + d$) și tranzitivă ($a + d = b + c$ și $c + f + d + e$ implică, prin adunarea relațiilor, că $a + f = b + e$), deci este o relație de echivalență. Fie mulțimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim = \{\widehat{(a, b)} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$. Definim funcția $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \rightarrow \mathbb{Z}$ prin $f(\widehat{(a, b)}) = a - b$. Arătăm că f este bine definită și apoi că f este

funcție bijectivă. Într-adevăr, să presupunem că $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $\widehat{(a, b)} = \widehat{(c, d)}$. Obținem din definiția lui \sim că $a + d = b + c$, adică $a - b = c - d$. Cu alte cuvinte, definiția lui f nu depinde de reprezentantul ales al clasei de echivalență, adică f este bine definită. f este injectivă deoarece dacă $f(\widehat{(a, b)}) = f(\widehat{(c, d)})$ pentru $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, rezultă că $a - b = c - d$, de unde $a + d = b + c$ adică $\widehat{(a, b)} = \widehat{(c, d)}$. Pentru surjectivitate, este ușor de văzut că $f(\widehat{(n, 0)}) = n$ și $f(\widehat{(0, n)}) = -n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Obținem că f este bijectivă, ceea ce doream.

1.5.7 Operația $*$ este asociativă dacă și numai dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Calculând, obținem $(x * y) * z - x * (y * z) = (ac + b - b^2)(x - z)$. Prin urmare $*$ este asociativă dacă și numai dacă $b^2 = b + ac$. Operația $*$ are element neutru dacă și numai dacă există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x * e = e * x = x$. Dar $x * e - x = e * x - x = (ae - 1 + b)x + be + c$, deci $*$ are element neutru dacă și numai dacă $(ae - 1 + b)x + be + c = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $ae - 1 + b = 0$ și $be + c = 0$. Așadar $*$ are element neutru dacă și numai dacă $b|c$ și $b^2 = b + ac$.

1.5.8 Fie $\phi : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ un morfism de grupuri. Din definiția morfismului obținem că $\phi(0) = 0$. Să presupunem că $\phi(1) = a \neq 0$ și fie p un număr prim mai mare strict decât a (putem alege un astfel de p deoarece mulțimea numerelor prime este infinită). Deoarece $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, obținem că

$$a = \phi(1) = \phi(\underbrace{\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}_p) = \underbrace{\phi(\frac{1}{p}) + \dots + \phi(\frac{1}{p})}_p = p\phi(\frac{1}{p}),$$

de unde rezultă că $\phi(\frac{1}{p}) = a/p \notin \mathbb{Z}$, o contradicție cu $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{Z}$. Așadar avem că $\phi(1) = 0$. Aceasta implică imediat că $\phi(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ și la fel ca mai sus că $\phi(1/n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$. Implicit obținem că $\phi(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

1.5.9 Să observăm mai întâi că $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$ este grup finit pe când $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ și (\mathbb{Q}^*, \cdot) sunt grupuri infinite, deci primul grup nu este izomorf cu nici unul din celelalte 3 grupuri. Am văzut în problema anterioară că singurul morfism de grupuri de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$ este morfismul nul, prin urmare aceste două grupuri nu sunt izomorfe. În sfârșit, (\mathbb{Q}^*, \cdot) are un element de ordin 2, pe -1 , iar celelalte două grupuri nu au.

1.5.10 E clar că matricea unitate se află în \mathbb{H} . Se arată prin calcul că \mathbb{H} este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. De exemplu, pentru înmulțire avem

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\bar{\alpha}\delta + \bar{\beta}\bar{\gamma} & \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este inel (vezi Teorema 2.1.11), rezultă că \mathbb{H} este subinel al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Fie $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ o matrice nenulă din \mathbb{H} , deci $\Delta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \neq 0$. Se verifică ușor că

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}/\Delta & -\beta/\Delta \\ \bar{\beta}/\Delta & \alpha/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă că orice element nenul al lui \mathbf{H} este inversabil, ceea ce înseamnă că \mathbf{H} este corp. În plus,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

implică faptul că \mathbf{H} este corp necomutativ. Pentru demonstrarea ultimei afirmații, definim mai întâi morfismul (injectiv) de corpuri $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{H}$, $f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$. Prin acest morfism putem gândi \mathbb{R} și \mathbb{C} ca pe subcorpuri ale lui \mathbf{H} prin identificarea fiecărui $a \in \mathbb{C}$ cu $f(a)$. În particular, numărul real a se identifică cu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, iar i se identifică cu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Considerăm și elementele $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Prin calcul se arată că $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$ și $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. În plus, dacă luăm un element arbitrar al lui \mathbf{H} , $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, cu $\alpha = x + iy \in \mathbb{C}$ și $\beta = z + iu \in \mathbb{C}$, îl putem identifica via notațiile făcute mai sus cu

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & z + iu \\ -z + iu & x - iy \end{pmatrix} = x + yi + zj + uk,$$

scrierea fiind unică. Asta înseamnă că mai putem scrie pe \mathbf{H} și sub forma

$$\mathbf{H} = \{x + yi + zj + uk \mid x, y, z, u \in \mathbb{R}\},$$

împreună cu relațiile $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$ și $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Fie următoarea submulțime a lui \mathbf{H} , $\{yi + zj + uk \mid y, z, u \in \mathbb{R}, y^2 + z^2 + u^2 = 1\}$. Această mulțime este infinită și are proprietatea că orice element al ei este rădăcină a polinomului $X^2 + 1 \in \mathbf{H}[X]$, cum se poate verifica ușor ținând cont de regulile de calcul din \mathbf{H} .

1.5.11 Fie R un astfel de inel și fie $a \in R$, $a \neq 0$. Definim funcția $\phi_a : R \rightarrow R$, $\phi_a(x) = ax$. Dacă $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, atunci $ax = ay$ sau $a(x - y) = 0$, de unde rezultă că $x = y$, deoarece inelul R este integru. Prin urmare, funcția ϕ_a este injectivă și aplicând Propoziția 1.1.2 rezultă că ϕ_a este și surjectivă. De aici, obținem că există $b \in R$ astfel încât $1 = \phi_a(b) = ab$. Analog, considerând funcția $\psi_a : R \rightarrow R$, $\psi_a(x) = xa$ obținem că există $c \in R$ astfel încât $1 = \psi_a(c) = ca$. Deci, avem $ab = 1 = ca$ de unde obținem $b = 1 \cdot b = (ca)b = c(ab) = c \cdot 1 = c$, adică a este inversabil. Cum a a fost ales arbitrar, obținem că R este un corp.

1.5.12 Avem că $\hat{x} \in U(\mathbb{Z}_n) \Leftrightarrow$ există $y \in \mathbb{Z}$ cu $\hat{x}\hat{y} = \hat{1} \Leftrightarrow$ există $a, y \in \mathbb{Z}$ cu $xy + an = 1 \Leftrightarrow (x, n) = 1$. De aici obținem că \mathbb{Z}_n este corp $\Leftrightarrow U(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\} \Leftrightarrow$ toți întregii strict pozitivi mai mici decât n sunt primi cu $n \Leftrightarrow n$ este număr prim.

1.5.13 E clar că matricea unitate se află în \mathbb{K} . Se arată prin calcul că \mathbb{K} este parte stabilă în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. Prin urmare, \mathbb{K} este un subinel al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ și se verifică imediat că \mathbb{K} este inel comutativ. Fie acum $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$ o matrice nenulă din \mathbb{K} . Cum $\det(A) = \hat{a}^2 + \hat{b}^2$ și $\hat{a}^2, \hat{b}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$, deoarece $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_7$ rezultă că $\det(A) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b} = \hat{0} \Leftrightarrow A = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$. Deci $A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq \hat{0}$. Se verifică imediat că matricea

$\begin{pmatrix} \hat{a}/\det(A) & -\hat{b}/\det(A) \\ \hat{b}/\det(A) & \hat{a}/\det(A) \end{pmatrix}$ aparține lui \mathbb{K} și este inversa lui A . Prin urmare, obținem \mathbb{K} este un corp comutativ. Fie acum p un număr prim astfel încât $p \equiv 3 \pmod{4}$. Analog se arată că \mathbb{K} este inel comutativ. La fel ca mai sus este suficient să arătăm că $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq \hat{0}$. Această afirmație este echivalentă cu $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$ sau $p|a^2 + b^2 \Leftrightarrow p|a$ și $p|b$. Această ultimă echivalență este datorată ipotezei că $p \equiv 3 \pmod{4}$. Demonstrarea acestui fapt nu este deloc ușoară, cititorul având nevoie de cunoștințe de teoria numerelor (simbol Legendre) sau de algebră. Dăm în continuare demonstrația variantei algebrice, care presupune cunoașterea elementelor prime ale inelului $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mai exact, în $\mathbb{Z}[i]$ se știe că numerele prime p din \mathbb{Z} care au proprietatea că $p \equiv 3 \pmod{4}$ sunt numere prime și în $\mathbb{Z}[i]$. Atunci din $p|a^2 + b^2$ rezultă că $p|(a+bi)(a-bi)$ și, folosind faptul că p este prim în $\mathbb{Z}[i]$, obținem că $p|a+bi$ sau $p|a-bi$. Dacă $p|a+bi$ atunci din definiția divizibilității în $\mathbb{Z}[i]$ obținem că există $z = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ astfel încât $a + bi = p(c + di)$. Egalitatea de numere complexe implică $a = pc$ și $b = pd$, adică $p|a$ și $p|b$.

1.5.14 Presupunem prin absurd că există un izomorfism de corpuri $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, unde $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ și $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Deoarece ϕ este morfism de corpuri și $\phi(1) = 1$ rezultă că $\phi(q) = q$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}$. Fie $\phi(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Atunci

$$3 = \phi(3) = \phi(\sqrt{3}^2) = \phi(\sqrt{3})^2 = (a + b\sqrt{5})^2 = (a^2 + 5b^2) + 2ab\sqrt{5},$$

de unde obținem că $(a^2 + 5b^2 - 3) + 2ab\sqrt{5} = 0$. Dacă $ab \neq 0$ atunci $\sqrt{5} = -(a^2 + 5b^2 - 3)/(2ab) \in \mathbb{Q}$, o contradicție. Deci $ab = 0$, adică $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $a = 0$ atunci obținem $3 = 5b^2$, o contradicție deoarece $b \in \mathbb{Q}$. Cazul $b = 0$ implică $3 = a^2$, o contradicție cu $a \in \mathbb{Q}$. Am obținut că presupunerea inițială este falsă, adică cele 2 corpuri nu sunt izomorfe.

1.5.15 Demonstrăm rezultatul în cazul mai general în care mulțimile A și B sunt echipotente, adică există o funcție bijectivă $f : A \rightarrow B$ (în cazul nostru mulțimile fiind finite și având același număr de elemente rezultă imediat existența acestei funcții bijective). Definim $\phi : S_A \rightarrow S_B$, $\phi(\sigma) = f\sigma f^{-1}$, unde prin f^{-1} am notat inversa lui f . Arătăm că ϕ este izomorfism de grupuri. Într-adevăr

$$\phi(\sigma \circ \tau) = f\sigma\tau f^{-1} = (f\sigma f^{-1})(f\tau f^{-1}) = \phi(\sigma)\phi(\tau),$$

adică ϕ este morfism de grupuri. Probăm injectivitatea: $\phi(\sigma) = \phi(\tau) \Rightarrow f\sigma f^{-1} = f\tau f^{-1} \Rightarrow (f\sigma f^{-1})(b) = (f\tau f^{-1})(b)$ pentru orice $b \in B$. De aici obținem că $f(\sigma(f^{-1}(b))) = f(\tau(f^{-1}(b)))$ pentru orice $b \in B$ și deoarece f este bijectivă avem $\sigma(a) = \tau(a)$ pentru orice $a \in A$, adică $\sigma = \tau$. Surjectivitatea rezultă imediat observând că pentru o permutare $\tau \in S_B$ funcția $f^{-1}\tau f \in S_A$ și $\phi(f^{-1}\tau f) = \tau$.

1.5.16 $\sigma = (1 \ 13 \ 5 \ 10)(3 \ 15 \ 8)(4 \ 14 \ 11 \ 7 \ 12 \ 9)$, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3(-1)^2(-1)^5 = 1$, $\text{ord}(\sigma) = [4, 3, 6] = 12$; $\tau = (1 \ 14)(2 \ 9 \ 15 \ 13 \ 4)(3 \ 10)(5 \ 12 \ 7)(8 \ 11)$, $\text{sgn}(\tau) = (-1)^1(-1)^4(-1)^1(-1)^2(-1)^1 = -1$, $\text{ord}(\tau) = [2, 5, 2, 3, 2] = 30$;

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 2 & 8 & 11 & 1 & 6 & 9 & 15 & 14 & 13 & 12 & 4 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

6. SOLUȚII

de unde $\sigma^2 = (1\ 5)(3\ 8\ 15)(4\ 11\ 12)(7\ 9\ 14)(10\ 13)$, $\text{sgn}(\sigma^2) = 1$, $\text{ord}(\sigma^2) = [2, 3, 3, 3, 2] = 6$ (sau $\text{ord}(\sigma^2) = \frac{\text{ord}(\sigma)}{(2, \text{ord}(\sigma))} = \frac{12}{2} = 6$);

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 4 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 & 15 & 3 & 12 & 14 & 13 & 5 \end{pmatrix},$$

de unde $\sigma\tau = (1\ 11\ 3)(2\ 4)(5\ 9\ 8\ 7\ 10\ 15)(13\ 14)$, $\text{sgn}(\sigma\tau) = -1$, $\text{ord}(\sigma\tau) = [3, 2, 6, 2] = 6$;

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 9 & 13 & 1 & 3 & 6 & 7 & 10 & 2 & 14 & 5 & 15 & 12 & 8 & 11 \end{pmatrix},$$

de unde $\tau\sigma = (1\ 4)(2\ 9)(3\ 13\ 12\ 15\ 11\ 5)(8\ 10\ 14)$, $\text{sgn}(\tau\sigma) = -1$, $\text{ord}(\tau\sigma) = [2, 2, 6, 3] = 6$;

$$\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 14 & 13 & 2 & 4 & 6 & 1 & 12 & 3 & 8 & 15 & 9 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

de unde $\sigma^2\tau = (1\ 7)(2\ 14\ 5\ 4)(3\ 13\ 11\ 15\ 10\ 8\ 12\ 9)$, $\text{sgn}(\sigma^2\tau) = -1$, $\text{ord}(\sigma^2\tau) = [2, 4, 8] = 8$.

1.5.17 (1) $\sigma = (1\ 3\ 5\ 9)(2\ 4\ 7\ 8\ 6)(10\ 11)$; (2) $\sigma = (1\ 3)(3\ 5)(5\ 9)(2\ 4)(4\ 7)(7\ 8)(8\ 6)(10\ 11)$; (3) $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3(-1)^4(-1) = 1$, $\text{ord}(\sigma) = [4, 5, 2] = 20$. (4) Știm că ordinul unei permutări este egal cu cel mai mic multiplu comun al lungimii ciclilor care apar în descompunerea ei în produs de cicli disjuncți. Deci, dacă ar exista $\tau \in S_{11}$ astfel încât $\text{ord}(\tau) = 35$ și dacă n_1, \dots, n_k sunt lungimile ciclilor care apar în descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncți, atunci avem $k \geq 1$, $1 \leq n_1, \dots, n_k \leq 11$, $n_1 + \dots + n_k = 11$ și $[n_1, \dots, n_k] = 35$. Acest lucru e imposibil, deoarece singura posibilitate de a obține 35 ca cel mai mic multiplu comun al unor numere întregi mai mici sau egale cu 11 este ca 2 dintre numere să fie 5, respectiv 7, o contradicție cu faptul că suma lor este mai mică decât 11. (5) Să presupunem că există $\tau \in S_{11}$ astfel încât $\tau^{2011} = \sigma$ și fie $\tau = \tau_1 \cdots \tau_k$ descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncți de lungimi $n_1, \dots, n_k \leq 11$. Cum 2011 este un număr prim și $\tau^{2011} = \tau_1^{2011} \cdots \tau_k^{2011}$ rezultă că τ_i^{2011} este tot un ciclu de lungime n_i pentru orice $i \in \{1, \dots, k\}$. Rezultă că $k = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 2$ și $\tau_1^{2011} = (1\ 3\ 5\ 9)$, $\tau_2^{2011} = (2\ 4\ 7\ 8\ 6)$, $\tau_3^{2011} = (10\ 11)$. Obținem că $\tau_1^3 = (1\ 3\ 5\ 9)$, de unde rezultă că $\tau_1 = (1\ 9\ 5\ 3)$; $\tau_2 = (2\ 4\ 7\ 8\ 6)$ și $\tau_3 = (10\ 11)$. Deci ecuația dată are o singură soluție $\tau = (1\ 9\ 5\ 3)(2\ 4\ 7\ 8\ 6)(10\ 11)$.

1.5.18 (a) S_n este generat de toate transpozițiile și $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$. (b) $(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)$, $(3\ 4)(1\ 3)(3\ 4) = (1\ 4)$, etc. și aplicăm apoi (a). (c) $(1\ 2 \dots n)(1\ 2)(1\ 2 \dots n)^{-1} = (2\ 3)$, $(1\ 2 \dots n)(2\ 3)(1\ 2 \dots n) = (3\ 4)$, etc. și aplicăm (b).

1.5.19 (a) Mulțimea ordinelor posibile ale permutărilor din S_5 este $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Într-adevăr, dacă n este astfel încât $n = [n_1, \dots, n_k]$, cu $n_1 + \dots + n_k = 5$ și $n_1, \dots, n_k \geq 1$ atunci avem următoarele posibilități $5 = 5$, $5 = 4 + 1$, $5 = 3 + 2$, $5 = 3 + 1 + 1$, $5 = 2 + 2 + 1$, $5 = 2 + 1 + 1 + 1$ și $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. De aici obținem concluzia dorită. Să dăm în continuare câte un exemplu pentru fiecare ordin posibil. Pentru $n = 1$ avem permutarea identică; pentru $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ un ciclu de lungime n ; pentru $n = 6$ un produs între un ciclu de lungime 3 și o transpoziție, i.e. $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$. (b) Putem lua de exemplu ciclul de lungime 10, $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10)$ și observăm că $\sigma^5 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$. (c) Dacă σ este un n -ciclu definit astfel:

$$a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} a_3 \dots \xrightarrow{\sigma} a_n \xrightarrow{\sigma} a_1,$$

atunci $\sigma^k(a_i) = a_{k+i(\bmod n)}$ pentru orice k și orice $i = 1, \dots, n$. Prin urmare, dacă ar exista un ciclu de lungime n , σ , astfel încât $\sigma^k = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ atunci $n = 5$ și $\{a_1, \dots, a_5\} = \{1, \dots, 5\}$. Acest lucru nu este însă posibil deoarece $\text{ord}(\sigma) = 5$ iar $\text{ord}(\tau) = 6$.

1.5.20 Aplicăm succesiv Teorema împărțirii cu rest: $X^4 - 2X^3 + 1 = X(X^3 - 2X^2 + 1) + (-X + 1)$; $X^3 - 2X^2 + 1 = (-X^2 + X + 1)(-X + 1) + 0$. Deci, conforma algoritmului lui Euclid, cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^4 - 2X^3 + 1$ și $X^3 - 2X^2 + 1$ este $X - 1$. Obținem că $X - 1 = (-1)(X^4 - 2X^3 + 1) + X(X^3 - 2X^2 + 1)$.

1.5.21 $X - 1$ este ireductibil în $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$. $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$; $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ este descompunerea în polinoame ireductibile în $\mathbb{R}[X]$; în $\mathbb{C}[X]$ putem scrie $X^3 - 1 = (X - 1)(X + 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X + 1/2 - i\sqrt{3}/2)$; $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ și $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)$ în $\mathbb{C}[X]$; $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X - 1)(X^2 + (1/2 + \sqrt{5}/2)X + 1)(X^2 + (1/2 - \sqrt{5}/2)X + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ și $X^5 - 1 = (X - 1)(X - \epsilon)(X - \epsilon^2)(X - \epsilon^3)(X - \epsilon^4)$ în $\mathbb{C}[X]$, unde $\epsilon = (\sqrt{5} - 1)/4 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$; $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ și $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X + 1/2 - i\sqrt{3}/2)(X - 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X - 1/2 - i\sqrt{3}/2)$ în $\mathbb{C}[X]$. Toate descompunerile sunt clare mai puțin cea a lui $X^5 - 1$. Prezentăm în continuare detaliile. Rădăcinile polinomului $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ sunt $\{1, \epsilon_n, \epsilon_n^2, \dots, \epsilon_n^{n-1}\}$, unde $\epsilon_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Formula lui Moivre ne spune că $\epsilon_n^k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ pentru orice întreg $k \geq 1$. Atunci $X^5 - 1 = (X - 1)(X - \epsilon)(X - \epsilon^2)(X - \epsilon^3)(X - \epsilon^4)$, unde $\epsilon = \epsilon_5 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$. Deoarece ϵ și ϵ^4 , respectiv ϵ^2 și ϵ^3 sunt perechi de numere complexe conjugate ($\epsilon^5 = 1$, $\epsilon^4 = 1/\epsilon = |\epsilon|/\epsilon = \bar{\epsilon}$ și analog pentru ϵ^2 și ϵ^3) rezultă că descompunerea polinomului $X^5 - 1$ în $\mathbb{R}[X]$ este: $X^5 - 1 = (X - 1)[(X - \epsilon)(X - \bar{\epsilon})][(X - \epsilon^2)(X - \bar{\epsilon}^2)] = (X - 1)(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1)$. Pentru a ajunge la descompunerea de mai sus mai rămâne să calculăm efectiv ϵ . Pentru aceasta să observăm că, deoarece $\epsilon \neq 1$ este rădăcina polinomului $X^5 - 1$, avem $\epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. Împărțind egalitatea cu ϵ^2 și notând cu $t = \epsilon + 1/\epsilon$ obținem că $t^2 + t - 1 = 0$, de unde rezultă că $t = -1/2 - \sqrt{5}/2$ sau $t = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Dar cum $t = 2\cos(2\pi/5) > 0$, rezultă că $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ și de aici $\sin(2\pi/5) = \sqrt{1 - \cos(2\pi/5)^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$. Obținem astfel formula lui ϵ .

1.5.22 Fie $f = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$. Polinomul $X^4 + X^2 + 1$ se descompune în $\mathbb{R}[X]$ astfel: $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. Polinoamele de gradul 2, $X^2 + X + 1$ și $X^2 - X + 1$ au fiecare câte două rădăcini distincte. Fie ϵ o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Atunci se poate observa ușor că $\epsilon^3 = 1$ (vezi eventual rezolvarea Problemei 1.5.21) și că $f(\epsilon) = \epsilon^{3m} + \epsilon^{3n+1} + \epsilon^{3p+2} = 1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$, adică ϵ este rădăcină și a lui f . Deci $X^2 + X + 1$ divide f . Fie acum ω o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$. Se poate observa ușor că $\omega^3 = -1$ (la fel ca mai sus) și că $f(\omega) = \omega^{3m} + \omega^{3n+1} + \omega^{3p+2} = (-1)^m + (-1)^n\omega + (-1)^p\omega^2$, de unde via $\omega^2 = \omega - 1$ obținem $f(\omega) = \omega((-1)^n + (-1)^p) + (-1)^m + (-1)^{p+1}$. Prin urmare, f este divizibil cu $X^4 + X^2 + 1$ dacă și numai dacă f este divizibil cu $X^2 - X + 1$ dacă și numai dacă p, n au parități diferite și p, m au aceeași paritate.

1.5.23 Aplicând relațiile lui Viète avem că $\alpha + \beta = 6$ și $\alpha\beta = 1$. Notăm cu $s_n = \alpha^n + \beta^n$ pentru orice $n \geq 1$. Observăm că $s_1 = 6$ și $s_2 = s_1^2 - 2\alpha\beta = 34$. Din egalitățile

$\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$ și $\beta^2 - 6\beta + 1 = 0$, prin înmulțire cu α^{n-2} , respectiv β^{n-2} , obținem după adunare că $s_n - 6s_{n-1} + s_{n-2} = 0$, pentru orice $n \geq 3$. Din această relație rezultă că $s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$, și cum $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ obținem că $s_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \geq 1$. Pentru ultima afirmație, se poate observa mai întâi că $s_n \equiv s_{n-1} - s_{n-2} \pmod{5}$, iar apoi prin calcul direct că $s_1 \equiv 1 \pmod{5}$, $s_2 \equiv 4 \pmod{5}$, $s_3 \equiv 3 \pmod{5}$, $s_4 \equiv 4 \pmod{5}$, $s_5 \equiv 1 \pmod{5}$, $s_6 \equiv 2 \pmod{5}$, $s_7 \equiv 1 \pmod{5}$, $s_8 \equiv 4 \pmod{5}$, $s_9 \equiv 3 \pmod{5}$. Prin urmare, modulo 5, șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ este periodic de perioadă 6, și deci s_n nu este divizibil cu 5 pentru orice $n \geq 1$.

1.5.24 Fie $a = bq + r$ împărțirea cu rest a lui a la b . Atunci

$$X^a - 1 = X^r(X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \dots + X^b + 1) + X^r - 1$$

este împărțirea cu rest a lui $X^a - 1$ la $X^b - 1$. Observăm că dacă restul împărțirii lui a la b este r , atunci restul împărțirii lui $X^a - 1$ la $X^b - 1$ este $X^r - 1$. Prin urmare, cum cel mai mare divizor comun al numerelor întregi/polinoamelor se calculează cu algoritmul lui Euclid, vezi Algoritm 1.4.2, va rezulta că, în paralel cu d , vom obține că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^a - 1$ și $X^b - 1$ este $X^d - 1$.

$$\mathbf{2.5.1} \quad X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3/2 & 9 \\ 44 & -13/2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{2.5.2} \quad \begin{pmatrix} 16 & 80 & 54 \\ 17 & 8 & 15 \end{pmatrix}.$$

2.5.3 Matricea nulă de ordin 3.

2.5.4 Deoarece $AB = BA$ rezultă că pentru orice $m, p \in \mathbb{N}$ avem $A^m B^p = B^p A^m$. Folosind aceasta, relația cerută la punctul a) rezultă prin efectuarea produsului din membrul drept al acesteia, iar identitatea de la b) se obține prin inducție matematică.

2.5.5 a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $ad = bc$. Dacă cel puțin un element al matricei este nul atunci A are una dintre formele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și proprietatea se verifică imediat. Putem presupune că toate elementele matricei A sunt nenule.

Dacă notăm $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{1}{\alpha}$ atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha d \end{pmatrix}$. Dacă există $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = rA$,

atunci $A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3, \dots$. Într-adevăr, dacă $A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$, atunci $A^n = A^{n-1}A = r^{n-2}AA = r^{n-2}rA = r^{n-1}A$. Rămâne să determinăm r așa încât $A^2 = rA$. După un calcul elementar, această condiție se exprimă în a găsi un număr

r care satisface $\begin{cases} a^2 + \alpha ab = ra \\ ab + \alpha b^2 = rb. \end{cases}$ Acest sistem are soluția $r = a + \alpha b$.

b) Deoarece $AI_2 = I_2A$, folosind Problema 2.5.5 b) și rezultatul de la a), obținem succesiv:

$$\begin{aligned} (A + I_2)^n &= I_2 + \sum_{j=1}^n C_n^j A^j I_2^{n-j} = I_2 + \sum_{j=1}^n C_n^j A^j = \\ &= I_2 + \sum_{j=1}^n C_n^j r^{j-1} A = I_2 + \frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^n C_n^j r^j \right) A = I_2 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} A. \end{aligned}$$

2.5.6 a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$,
b) $\left[\frac{1}{2}(A + I_n)\right]^2 = \frac{1}{4}(A^2 + 2A + I_n) = \frac{1}{2}(A + I_n)$.

2.5.7 Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

a) $\text{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$,

b) $\text{Tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha \text{Tr}(A)$,

c) $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} a_{ji} \right) = \text{Tr}(BA)$,

d) $\text{Tr}(UAU^{-1}) = \text{Tr}(AUU^{-1}) = \text{Tr}(A)$.

2.5.8 $\text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0$ și $\text{Tr}(I_n) = n$.

2.5.9 Fie E_{ij} matricea de ordin n care are în poziția (i, j) elementul 1, iar în rest 0. Deoarece $AE_{ij} = E_{ij}A$ pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, rezultă cu ușurință că A este o matrice de forma $A = \alpha I_n$.

2.5.10 Avem $I_n - A - B + AB = I_n$ de unde $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$. Rezultă că una dintre matrice este inversa celeilalte și deci are loc și relația $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$. Deci $I_n - B - A + BA = I_n$ și în concluzie $BA = A + B = AB$.

2.5.11 a) Înmulțim relația $A + B = I_n$ cu A la dreapta și apoi la stânga, obținem $A^2 + AB = A$, $A^2 + BA = A$ de unde rezultă prima relație. b) Avem $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n + AB - AB + ABAB$. Din $A + B = I_n$ prin înmulțirea cu A^2 la stânga obținem $A^3 + A^2B = A^2$ și deci $A^2B = 0_n$. Dacă ținem seama de rezultatul punctului a), avem $ABAB = A(BA)B = (A^2B)B = 0_n$. Atunci $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n$. Aplicăm determinantul și rezultă b).

2.5.12 Avem $A^* = (\det A) \cdot A^{-1}$ și $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Deoarece $AA^* = (\det A) \cdot I_n$ rezultă $\det A^* = (\det A)^{n-1}$. Atunci $(A^*)^* = (\det(A^*)) \cdot (A^*)^{-1} = (\det A)^{n-1} ((\det A) \cdot A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n-2} \cdot A$. În ipoteza că A este nesingulară, relația $(A^*)^* = A$ are loc dacă și numai dacă $(\det A)^{n-2} = 1$, iar matricele care satisfac această proprietate sunt cele nesingulare de ordin 2, matricele de determinant 1 și ordin arbitrar precum și matricele de determinant -1 și ordin par.

2.5.13 Se poate scrie

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix},$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ -\sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ -\sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

Prin inducție matematică se demonstrează că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos \frac{n\pi}{3} & \sin \frac{n\pi}{3} \\ -\sin \frac{n\pi}{3} & \cos \frac{n\pi}{3} \end{bmatrix}. \quad A^{2008} = \begin{bmatrix} -\cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & -\cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = -A.$$

2.5.14 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

Se demonstrează prin inducție că $A^k = 3^{k-1}A$. Rezultă că valoarea maximă cerută este $3^5 = 243$.

2.5.15 Considerăm polinomul $P(x) = \det(A + xB)$. Transformăm determinantul scăzând prima linie din a doua și din a treia linie, apoi dezvoltăm determinantul după linia întâi. Este evident că polinomul este de forma $P(x) = a_0 + a_1x$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Observăm că $a_0 = P(0) = \det A$. Dar $P(1) = \det(A + B) = 1 + a_1 = 1$, rezultă $a_1 = 0$. Deci $P(x) = 1$. Rezultă că $P(2011) = 1$.

2.5.16 a) 2, b) 4, c) pentru $\alpha = 3$ rangul este 2, pentru $\alpha \neq 3$ rangul este 3, d) pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ și $\alpha = 0$ rangul este 2, iar în rest rangul este 3.

2.5.17 Remarcăm că rangul matricei produs AB este 2. Se verifică prin calcul direct că $ABAB = 9AB$, deci $\text{rang}(ABAB) = 2$. Din Teorema 2.3.4 avem $\text{rang}(ABAB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(BA), \text{rang}(B)\}$.

Deci $\text{rang}(BA) = 2$ și atunci rezultă că BA este inversabilă. Dar $(BA)^3 = B(AB)(AB)A = B(ABAB)A = 9B(AB)A = 9(BA)^2$, de unde $BA = 9I_2$.

2.5.18 a) Proprietatea rezultă evident din definiția inversei unei matrice $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$, de unde rezultă și $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, b) Avem $I_n = I_n^T = (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T$, c) $(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, d) $(\lambda A)^{-1} \cdot \frac{1}{\lambda} A^{-1} = I_n$.

$$\textbf{2.5.19 a)} A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{b)} A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 17 & -6 & -1 \\ 21 & -8 & -1 \\ 27 & -10 & -1 \end{pmatrix},$$

c) Dacă $\alpha = \frac{3}{4}$ matricea nu este inversabilă. Pentru $\alpha \neq \frac{3}{4}$ se obține

$$A^{-1} = \frac{1}{3-4\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha & 2(3-\alpha) & 3 \\ -\alpha & 2\alpha+3 & 3 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{d)} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$\textbf{e)} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{2.5.20 a)} X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -3+11i & 3+9i & -1+7i \end{pmatrix},$$

$$\textbf{b)} X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5.21 a) $\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}} \overline{a_{2\sigma(2)}} \cdots \overline{a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det(A)}$.
b) $\det(A\overline{A}) = \det(A) \det(\overline{A}) = \det(A) \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \geq 0$.

2.5.22 Folosim definiția determinantului și faptul că dacă $\sigma \in S_n$ atunci și $\sigma^{-1} \in S_n$. Avem $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\det(A)} &= \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{a_{1\sigma(1)}} \overline{a_{2\sigma(2)}} \cdots \overline{a_{n\sigma(n)}} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

Deci $\overline{\det(A)} = \det(A)$.

2.5.23 Deoarece $AB = BA$ avem $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ și putem scrie $\det(A^2 + B^2) = \det[(A + iB)(A - iB)] = \det(A + iB) \det(A - iB) = \det(A + iB) \overline{\det(A + iB)} = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$.

2.5.24 Dacă $n = 2$, prin calcul direct rezultă (44). Reciproc, în (44) facem $A = B$ cu $\det(A) \neq 0$ și obținem $\det(2A) = 4 \det(A)$, deci $2^n \det(A) = 4 \det(A)$. Deducem $n = 2$.

2.5.25 a) $(a - b)(b - c)(c - a)$, b) $2abc(a - b)(b - c)(c - a)$, c) 70, d) 37.

2.5.26 Se scade linia a doua din linia întâi, linia a treia din linia a doua etc, apoi se scade linia întâi din a doua, din a treia, ..., din a cincea și se dezvoltă după acele linii care au un singur element diferit de zero.

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -7^2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 7^3 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -7^3. \end{aligned}$$

2.5.27 Putem considera $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ca un polinom de grad $n - 1$ în necunoscuta a_n . Pentru $a_n = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ se obțin de fiecare dată două coloane egale, deci determinantii vor fi nuli. Rezultă că $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este divizibil cu $(a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})$ și atunci $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})V'$. Dacă dezvoltăm după ultima coloană, a_n^{n-1} se înmulțește exact cu $V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Rezultă atunci că $V' = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Obținem astfel următoarea formulă de recurență:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1})V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

2.5.28 $\det(A) = 1$, $\det(AV) = \det(A) \cdot \det(V) = V(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Pe de altă parte avem:

$$\begin{aligned} \det(AV) &= \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ a_1(a_1 - a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & 0 \\ a_1^2(a_1 - a_n) & \cdots & a_{n-1}^2(a_{n-1} - a_n) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{n-1}(a_1 - a_n) \cdots (a_{n-1} - a_n)V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \end{aligned}$$

$$(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

de unde obținem $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

2.5.29 Se consideră matricea $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$

cu determinantul Vandermonde $\det(V) = V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ și se calculează produsul

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(AV) = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n) \cdot \det(V)$, iar pe de altă parte, $\det(AV) = \det(A) \cdot \det(V)$, de unde concluzia.

2.5.30 Analog cu Exemplitul 2.3.36.

2.5.31 Se aplică Exemplitul 2.3.36 sau Problema 2.5.30.

$$B^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta A^{-1} & -\beta A^{-1} \\ -\gamma A^{-1} & \alpha A^{-1} \end{pmatrix}.$$

2.5.32 Partiționăm matricea în modul:

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} A & B \\ C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Putem folosi Problema 2.5.30. Avem $\det(D) = 2 \neq 0$ și inversa $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece matricea $A - BD^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ este inversabilă ($\det(A - BD^{-1}C) = 3/2 \neq 0$) rezultă că M este inversabilă. Folosind rezultatul din Problema 2.5.30 găsim

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array} \right).$$

2.5.33 a), b) Se aplică regula lui Laplace de dezvoltare a unui determinant; $\det(P) = \det(Q) = \det(A) \cdot \det(D)$. c) Admitem că A este inversabilă. Determinăm o matrice T care prin înmulțirea la stânga cu matricea R să conducă la o matrice triunghiulară.

$$RT = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & U \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B + AU \\ C & D + CU \end{pmatrix}$$

Alegem U astfel încât $B + AU = 0_n$ deci $U = -A^{-1}B$. Atunci

$$RT = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

și $\det(RT) = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$. Pe de altă parte $\det(RT) = \det(R) \cdot \det(T) = \det(R)$. Obținem $\det(R) = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B)$.

Dacă $AC = CA$ atunci rezultă $\det(A(D - CA^{-1}B)) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CAA^{-1}B) = \det(AD - CB)$.

Un raționament analog are loc dacă matricea D este inversabilă.

2.5.34 a) Sistemul este compatibil determinat cu soluția unică: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = -2$, b) sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu soluția: $x_1 = \frac{3-4\beta}{3}, x_2 = \frac{3\alpha+\beta}{3}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, c) sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluția: $x_1 = \alpha + 6, x_2 = 2\alpha + 6, x_3 = -6\alpha - 10, x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, d) sistemul este incompatibil.

2.5.35 Deoarece în primele trei ecuații necunoscutele x_4, x_5, x_6 au coeficienții nuli, putem descompune sistemul în două blocuri. Primul este format din primele trei ecuații

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$
 și are soluția $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Introducem în ultimele trei ecuații și avem

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$
 cu soluția $x_4 = 3, x_5 = -1, x_6 = 0$.

2.5.36 a) Dacă $m \neq 0$ sistemul este incompatibil. Dacă $m = 0$ soluția sistemului este $x_1 = \frac{-5\alpha - 13\beta - 3}{2}, x_2 = \frac{-7\alpha - 19\beta - 7}{2}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. b) Dacă $m \neq 1$ și $n \neq 0$

sistemul este compatibil determinat cu soluția $x_1 = \frac{2n-1}{n(m-1)}, x_2 = \frac{1}{n}, x_3 = \frac{2mn-4n+1}{n(m-1)}$.

Dacă $\{m = 1 \text{ și } n \neq \frac{1}{2}\}$ sau $n = 0$ sistemul este incompatibil. Dacă $m = 1$ și $n = \frac{1}{2}$ sistemul este compatibil nedeterminat cu soluția $x_1 = 2 - \alpha, x_2 = 2, x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

2.5.37 a) $x_1 = 8\alpha - 7\beta, x_2 = -6\alpha + 5\beta, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. b) Dacă $m \neq -\frac{2}{3}$ sistemul admite numai soluția nulă. Dacă $m = -\frac{2}{3}$ sistemul admite și soluții nebanale și acestea sunt $x_1 = 34\alpha, x_2 = -18\alpha, x_3 = 40\alpha, x_4 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

2.5.38 Este un sistem liniar omogen care admite soluția banală pentru orice valoare a parametrului y . Determinantul sistemului este $\Delta = (2 - y)(y^2 + y - 1)^2$. Dacă $y = 2$ obținem

soluțiile $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ obținem soluțiile $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\beta - \alpha, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta, x_3 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha - \beta, x_4 = \alpha, x_5 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dacă $y = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ obținem soluțiile $x_1 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\beta - \alpha, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta, x_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\alpha - \beta, x_4 = \alpha, x_5 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.5.1-3.5.2. Se verifică axiomele spațiului vectorial.

3.5.3. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și orice $x, y \in S$, rezultă

$$\begin{aligned} ax + by &= a(\alpha - 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta) + b(\alpha' - 2\beta', \alpha' + 3\beta', \beta') \\ &= (a\alpha + b\alpha' - 2(a\beta + b\beta'), a\alpha + b\alpha' + 3(a\beta + b\beta'), a\beta + b\beta') \in S, \end{aligned}$$

deci S este subspațiu vectorial.

Pentru $x \in S$, arbitrar, avem $x = (\alpha - 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta) = \alpha(1; 1; 0) + \beta(-2; 3; 1)$, deci $B = \{e_1 = (1; 1; 0), e_2 = (-2; 3; 1)\}$ este bază în S , adică $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$.

3.5.4. Se procedează analog cu exercițiul **3.5.3**.

3.5.5. Matricea sistemului $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ are rangul 2, minorul principal fiind $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$. x_1 și x_2 sunt necunoscute principale, iar $x_3 = \alpha$ și $x_4 = \beta$ sunt necunoscute secundare. Se obține soluția sistemului

$$S = \left\{ \left(\frac{\alpha + 3\beta}{3}, \frac{5\alpha + 3\beta}{3}, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.5.6. Din combinația liniară $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \dots + \alpha_n e^{a_n x} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru $x = 0$, avem $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$. Derivând succesiv și considerând $x = 0$, se obține sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0 \\ a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \dots + a_n \alpha_n = 0 \\ a_1^2 \alpha_1 + a_2^2 \alpha_2 + \dots + a_n^2 \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} \alpha_1 + a_2^{n-1} \alpha_2 + \dots + a_n^{n-1} \alpha_n = 0, \end{cases}$$

al cărui determinant este Vandermonde. Ținând cont că a_i sunt distincte, $\forall i = \overline{1, n}$, deci determinantul este nenul, deci unica soluție a sistemului este cea nulă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

3.5.7. Fie polinomul $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Obținem

$$\begin{aligned} f'(x) &= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 \\ f''(x) &= n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \dots + 2a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n! \cdot a_n. \end{aligned}$$

Din combinația liniară $\alpha_0 f(x) + \alpha_1 f'(x) + \dots + \alpha_n f^{(n)}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Identificând coeficienții din membrul stâng cu zero și ținând cont că $a_n \neq 0$, rezultă $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

3.5.8. Matricea formată din componentele vectorilor v_1, v_2, v_3 și v_4 , scrise pe coloane, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $\text{rang } A = 3$, deducem că vectorii v_1, v_2, v_3 și v_4 sunt liniar dependenți.

3.5.9. Matricea formată din componentele vectorilor v_1, v_2 și v_3 , scrise pe coloane, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha + 3 \\ 2 & 3 & \alpha + 1 \\ 3 & 1 & \alpha + 2 \end{pmatrix}$. Întrucât vectorii v_1, v_2 și v_3 sunt liniar dependenți, rezultă că $\text{rang}(A) < 3$, adică $\det(A) = 0$, de unde $\alpha = -6$.

3.5.10. Presupunând că există numerele reale α_1, α_2 și α_3 astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, se obține sistemul $\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4 \\ 9\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = -2 \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \end{cases}$ care este incompatibil. Deci v nu se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor v_1, v_2 și v_3 .

3.5.12. Din egalitatea $p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$ adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se obține sistemul
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_2 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4, \end{cases}$$
 care are soluția $\alpha_1 = \frac{9}{8}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ și $\alpha_3 = \frac{15}{8}$.

3.5.13. Întrucât \mathcal{B} este baza canonică, rezultă că matricea de trecere de la baza \mathcal{B} la baza \mathcal{B}' este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3.5.14. Se verifică proprietățile produsului scalar. În plus,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{\langle 1 + 5x - 4x^2 + 6x^3, 1 + 5x - 4x^2 + 6x^3 \rangle} \\ &= \sqrt{(0!)^2 \cdot 1^2 + (1!)^2 \cdot 5^2 + (2!)^2 \cdot (-4)^2 + (3!)^2 \cdot 6^2} = \sqrt{1386}. \end{aligned}$$

3.5.15. a) Se verifică proprietățile produsului scalar.

b) Obținem

$$\langle h, h \rangle = \int_1^e h^2(x) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2 + 1}{4},$$

de unde $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \frac{\sqrt{e^2 + 1}}{2}$.

c) Avem $0 = \langle f(x), g(x) \rangle = \int_1^e f(x) \cdot g(x) \ln x dx = \int_1^e 5(ax + b) \ln x dx = 5a \int_1^e x \ln x dx + 5b \int_1^e \ln x dx = 5a \cdot \frac{e^2 + 1}{4} + 5b$ și rezultă $b = \frac{-a(e^2 + 1)}{4}$, $a \in \mathbb{R}$.

3.5.16. Se notează $p(x) = ax^2 + bx + c$. Găsim

$$\begin{aligned} d(p, p_1) &= \|p - p_1\| = \|(a - 3)x^2 + (b - 2)x + (c - 5)\| \\ &= \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 2)^2 + (c - 5)^2}. \end{aligned}$$

Similar, se exprimă și celelalte distanțe care, egale, conduc la $a = 1$, $b = 3$ și $c = 3$.

3.5.17. Fie $z = (a, b, c, d)$. Din condițiile de ortogonalitate $\langle x, z \rangle = 0$ și $\langle y, z \rangle = 0$, se obține
$$\begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ -a + b + c = 0, \end{cases}$$
 care are soluția

$$z = (-c - 3d, -2c - 3d, c, d) = c(-1; -2; 1; 0) + d(-3; -3; 0; 1).$$

Se ia $z = (-1; -2; 1; 0)$. Apoi se determină vectorul $t = (a', b', c', d')$, ortogonal vectorilor x , y și z . Se obține sistemul
$$\begin{cases} a + c + 3d = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{cases}$$
 cu soluția $t = \left(a, 0, a, -\frac{2a}{3}\right)$. Se ia $t = (3; 0; 3; -2)$.

3.5.18. a) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (-x_2, x_2, x_3) = x_2(-1; 1; 0) + x_3(0; 0; 1)\} = \text{Span}(e_1, e_2)$, unde $e_1 = (-1; 1; 0)$ și $e_2 = (0; 0; 1)$. Fie $x = (a, b, c)$. Din $\langle x, e_1 \rangle = 0$ și $\langle x, e_2 \rangle = 0$, rezultă $x = (a, a, 0) = a(1; 1; 0)$, deci $S^\perp = \text{Span}(e_3)$, unde $e_3 = (1; 1; 0)$.

b) Se rezolvă sistemul neomogen $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ și se obține descompunerea $v = \frac{3}{2}e_1 + 5e_2 + \frac{5}{2}e_3$.

3.5.19. Avem $x_2 = x_1 + x_3$, deci $\dim \text{Span}(S) = 2$ și $\dim L^\perp(S) = 2$. Fie $v \in L^\perp(S)$, cu $v = (a, b, c, d)$. Din $\langle v, x_1 \rangle = 0$, $\langle v, x_3 \rangle = 0$ se obține sistemul
$$\begin{cases} a + 3b + 2d = 0 \\ 2a + 4d - c = 0 \end{cases}$$
 sau

din $\langle v, x_1 \rangle = 0$, $\langle v, x_3 \rangle = 0$, se obține sistemul $\begin{cases} a + 3b + 2d = 0 \\ 3a + 7b - c + 2d = 0. \end{cases}$ Rezolvând unul dintre sistemele de mai sus, rezultă $v = \left(\frac{3}{2}c, -\frac{1}{2}c - 2d, c, d\right)$, respectiv $v = \left(\frac{3}{2}c + 4d, -\frac{1}{2}c - 2d, c, d\right)$. Vectorii $(-3; -1; -2; 0)$ și $(1; -1; -2; 1)$ formează o bază în $L^\perp(S)$.

3.5.20. Fie $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ proiecția ortogonală a lui v pe subspațiul S . Fie $y^\perp = (a, b, c, d)$ proiecția lui v pe $\text{Span}(S)$. Deoarece $\langle y^\perp, x_i \rangle = 0$, $(\forall) i = 1, 2, 3$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} a + b + 2c + d = 0 \\ -a + 2c + 3d = 0 \\ a + 2b - c + 3d = 0. \end{cases}$$

Din condiția $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + y^\perp = v$, se obține sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + a = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 + b = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + c = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 + d = 1, \end{cases}$$

cu a, b, c și d aflați anterior.

4.8.3. (a) Dacă \mathbb{C} este spațiu vectorial peste \mathbb{R} atunci $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$: $T(\alpha z_1 + z_2) = T(\alpha x_1 + x_2 + i(\alpha y_1 + y_2)) = \alpha x_1 + x_2 - i(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T(z_1) + T(z_2)$.

(b) Considerăm $\alpha = i, z = i \Rightarrow T(i \cdot i) = T(-1) = -1$ și $iT(i) = i \cdot (-i) = 1 \Rightarrow T(i \cdot i) \neq iT(i)$.

4.8.4. Proiecția ortogonală a unui vector oarecare $x \in \mathbb{R}^4$ pe subspațiul generat de u și v este un vector din acest subspațiu, deci de forma $c_1 u + c_2 v$, cu proprietatea că $x - (c_1 u + c_2 v)$ este ortogonal pe vectorii u și v . Anulând respectivele produse scalare, găsim sistemul

$$\begin{cases} c_1 \langle u, u \rangle + c_2 \langle v, u \rangle = \langle x, u \rangle \\ c_1 \langle u, v \rangle + c_2 \langle v, v \rangle = \langle x, v \rangle \end{cases}.$$

Se găsește că

$$15c_1 = 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4, \quad 15c_2 = -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4.$$

Proiecția ortogonală căutată, notată $T(x)$, este dată de vectorul

$$\begin{aligned} T(x) &= c_1 u + c_2 v = \\ &= \frac{1}{15} [(4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4)u + (-x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4)v] = \\ &= \frac{1}{15} (10x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4, \quad 3x_1 + 13x_2 + x_3 - 4x_4, \\ &\quad -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4, \quad 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4) \end{aligned}$$

Proiecțiile vectorilor bazei standard (numite și baza canonică) sunt

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{1}{15} (10, 3, -4, 5) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{5}e_2 - \frac{4}{15}e_3 + \frac{1}{3}e_4 \\ T(e_2) = \frac{1}{15} (3, 13, 1, -4) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{13}{15}e_2 + \frac{1}{15}e_3 - \frac{4}{15}e_4 \\ T(e_3) = \frac{1}{15} (-4, 1, 2, -3) = -\frac{4}{15}e_1 + \frac{1}{15}e_2 + \frac{2}{15}e_3 - \frac{1}{5}e_4 \\ T(e_4) = \frac{1}{15} (5, -4, -3, 5) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{4}{15}e_2 - \frac{1}{5}e_3 + \frac{1}{3}e_4 \end{cases}$$

iar matricea transformării T se poate scrie imediat.

4.8.5. $z = (-1; 1) = \alpha x + \beta y, (-1; 1) = \alpha(1; 2) + \beta(-1; -1) \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$. De aici

$$T(z) = T(2x + 3y) = 2T(x) + 3T(y) = 2(1; 0; 0) + 3(1; 1; 1) = (5; 3; 3).$$

4.8.6. Fie $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$ și $\alpha_0 x + \alpha_1 T x + \dots + \alpha_{m-1} T^{m-1} x = \mathbf{0}$.

Aplicăm relației T^{m-k-1} , $k = \overline{0, m-1}$ și se obține $\alpha_{m-k+1} = 0$, $k = \overline{0, m-1}$ de unde rezultă concluzia.

4.8.7. Se folosesc Teoremele 4.3.2 și 4.3.3.

4.8.8. Fie $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ astfel încât $\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \dots + \alpha_p T(u_p) = \mathbf{0}_W \Rightarrow T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p) = \mathbf{0}_W \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p \in \text{Ker}(T)$. Dar $\{u_1, u_2, \dots, u_p\} \notin \text{Ker}(T)$ rezultă că $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_p u_p = \mathbf{0}_V$; $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ este un sistem de vectori liniar independent rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, deci concluzia.

4.8.9. Demonstrăm prin dublă incluziune. Fie $v \in T(\text{Span}(\mathbf{V}_1)) \Rightarrow \exists u \in \text{Span}(\mathbf{V}_1) : T(u) = v$; dar $u \in \text{Span}(\mathbf{V}_1) \Rightarrow \exists u_1, u_2, \dots, u_p \in S$ și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ astfel încât $u = \sum_{i=1}^p \alpha_i u_i$ și $v = T(u) = T(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^p \alpha_i T(u_i) \Rightarrow v \in \text{Span } T(\mathbf{V}_1)$.

Invers, dacă $v \in \text{Span } T(\mathbf{V}_1) \Rightarrow \exists T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_p) \in T(\mathbf{V}_1), u_1, u_2, \dots, u_p \in \mathbf{V}_1$ și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ astfel încât $v = \sum_{i=1}^p \alpha_i T(u_i) = T(\sum_{i=1}^p \alpha_i u_i) \Rightarrow v \in T(\text{Span}(\mathbf{V}_1))$.

4.8.10. Determinăm nucleul lui T .

$$T(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}.$$

Rezultă $x \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow x = \alpha(-2, -3, 1), x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, \text{def}(T) = 1$.

Determinăm imaginea lui T .

$$T(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + y_1 \\ x_2 = 3x_3 + y_2 - y_1 \end{cases}$$

Sistemul este compatibil nedeterminat, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$. Rezultă $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{rang}(T) = 2$.

Cum $n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \text{rang}(T) + \text{def}(T) = 1 + 2 = 3$ și teorema este verificată.

4.8.11 Considerăm restricția lui T la $T^{-1}(\mathbf{W}_1)$ și aplicăm teorema rang-defect pentru T :

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{V} = \text{def}(T) + \text{rang}(T)$$

și pentru

$$T|_{T^{-1}(\mathbf{W}_1)} : T^{-1}(\mathbf{W}_1) \rightarrow \mathbf{W}_1,$$

$$\dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbf{W}_1) = \dim_{\mathbb{K}} (\text{ker}(T|_{T^{-1}(\mathbf{W}_1)})) + \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(T|_{T^{-1}(\mathbf{W}_1)})).$$

Dar $\dim_{\mathbb{K}} (\text{ker}(T|_{T^{-1}(\mathbf{W}_1)})) = \text{def}(T), \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}(T|_{T^{-1}(\mathbf{W}_1)})) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W}_1$, rezultă

$$\text{def}(T) = \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbf{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W}_1$$

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbf{V} = \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbf{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W}_1 + \text{rang}(T) \leq \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbf{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W} \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbf{W}_1) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathbf{W}_1.$$

4.8.12. Liniaritatea rezultă din proprietățile operației de derivare.

Determinarea matricei: $\mathbf{d}(1) = 0, \mathbf{d}(x) = 1, \mathbf{d}(x^2) = 2x, \dots, \mathbf{d}(x^n) = nx^{n-1}$, deci

$${}_B(\mathbf{d})_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8.13. Calculăm $T(u_1) = (2; 0; 2; -2) = \sum_{i=1}^4 p_{i1}v_i$,

$$T(u_2) = (0; 2; -2; 4) = \sum_{i=1}^4 p_{i2}v_i,$$

$$T(u_3) = (0; 0; 0; 0) = \sum_{i=1}^4 p_{i3}v_i.$$

Rezolvând sistemele obținem

$$P = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8.14. a) Fie $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_n[x]$, $p_1 = c_1 \cdot q + r_1$, $p_2 = c_2 \cdot q + r_2$, $\text{grad}(r_1) < n$, $\text{grad}(r_2) < n$,
 $p_1 + p_2 = (c_1 + c_2) \cdot q + r_1 + r_2$, $\text{grad}(r_1 + r_2) < n$

$$T(p_1 + p_2) = c_1 + c_2 = T(p_1) + T(p_2),$$

$$\alpha \cdot p = \alpha \cdot c \cdot q + \alpha \cdot r, \text{grad}(\alpha r) = \text{grad}(r) < n$$

$$T(\alpha p) = \alpha \cdot c = \alpha T(p).$$

$$\text{b) Ker}(T) = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p = 0 \cdot q + r, \text{grad}(r) < \text{grad}(q)\}.$$

$$\text{Fie } \text{grad}(q) = s. \text{ Ker}(T) = \{p \in \mathbb{R}_{s-1}[x]\}.$$

$$\text{c) } 1 = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + 1 \Rightarrow T(1) = 0$$

$$x = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + x \Rightarrow T(x) = 0$$

$$x^2 = 1 \cdot (x^2 + x + 1) - x - 1 \Rightarrow T(x^2) = 1$$

$$x^3 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) + 1 \Rightarrow T(x^3) = x - 1,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.8.15. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este spațiu vectorial în raport cu operațiile de adunare a funcțiilor și de înmulțire cu un scalar.

Fie $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ o bază în \mathbf{W} . Completăm până la o bază în \mathbb{R}^n , fie aceasta

$$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}.$$

Fie $f \in \mathcal{F}$. Matricea lui f în baza \mathcal{B} este:

$$f(w_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n,$$

$$f(w_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n,$$

...

$$f(w_k) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n,$$

$$f(w_{k+1}) = p_{1,k+1} \cdot w_1 + p_{2,k+1} \cdot w_2 + \dots + p_{n,k+1} \cdot w_n,$$

...

$$f(w_n) = p_{1,n} \cdot w_1 + p_{2,n} \cdot w_2 + \dots + p_{n,n} \cdot w_n,$$

$${}_B(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_{1,k+1} & p_{1,k+2} & \cdots & p_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{2,k+1} & p_{2,k+2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_{1,n} & p_{2,n} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = n(n - k)$ și o bază a sa este dată de mulțimea transformărilor liniare corespunzătoare matricelor

$$M_{ij} = (m_{lh}), m_{lh} = \begin{cases} 1, l = i, h = j, j \geq k \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

$$\mathbf{4.8.16.} \quad T(f)(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \int_0^{2\pi} \sin^3(x+y) f(y) dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} (3 \sin(x+y) - \sin 3(x+y)) f(y) dy = 0 \Leftrightarrow$$

$$3 \sin x \int_0^{2\pi} \cos y f(y) + 3 \cos x \int_0^{2\pi} \sin y f(y) - \sin 3x \int_0^{2\pi} \cos 3y f(y) - \cos 3x \int_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \cos y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \sin y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \cos 3y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0.$$

$$\text{Ker}(T) = \left\{ f \in \mathbb{V} : \int_0^{2\pi} \cos y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \sin y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \cos 3y f(y) = 0, \int_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0 \right\}.$$

$$\text{Im}(T) = \{g \in \mathbb{V} : g(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x\}.$$

$$\text{Im}(T) = (\text{Ker}(T))^\perp$$

4.8.18. Fie $w \in \text{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V} : (\alpha T_1 + \beta T_2)(v) = w \Rightarrow w = \alpha T_1(v) + \beta T_2(v) \in \alpha \text{Im}(T_1) + \beta \text{Im}(T_2)$.

Pentru $\alpha = 1, \beta = -1, \mathbb{W} = \mathbb{V}, T_1 = T_2 = I_{\mathbb{V}} \Rightarrow \text{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow$

$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2)) = 0$ și $\dim_{\mathbb{K}}(\alpha \text{Im}(T_1)) > 0, \dim_{\mathbb{K}}(\beta \text{Im}(T_2)) > 0$.

4.8.19. Demonstrăm că $\text{Im}(T^2) = \text{Im}(T)$.

Pentru aceasta arătăm că $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$ și, ținând seama că au aceeași dimensiune, rezultă relația $\text{Im}(T^2) = \text{Im}(T)$.

Fie $y \in \text{Im}(T^2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{V} : T^2(x) = y$, dar $y = T(T(x)) \Rightarrow y \in \text{Im}(T)$.

Fie $T_1 : \text{Im}(T) \rightarrow \text{Im}(T^2), \forall u \in \text{Im}(T) : T_1(u) = T(u)$, T_1 restricția lui T la $\text{Im}(T)$.

Dar $\forall y \in \text{Im}(T^2), \exists x \in \mathbb{V} : T^2(x) = y$. Dar $y = T(T(x)) = T_1(T(x)), T(x) \in \text{Im}(T) \Rightarrow T_1$ surjectivă, $\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T^2) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T) \Rightarrow T_1$ injectivă $\Rightarrow \text{Ker}(T_1) = \{\mathbf{0}\}, \text{Ker}(T_1) = \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) \Rightarrow \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Aplicăm Grassmann

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T) + \text{Ker}(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T) + \dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}(T) - \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V},$$

$$\text{Im}(T) + \text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = \mathbb{V}.$$

4.8.20. Notăm $S' = S|_{\text{Im}(T)}$. Rezultă

$$\text{rang}(S') + \text{def}(S') = \text{rang}(T).$$

$$\text{Dar } \text{Im}(S') = \text{Im}(S \circ T) \Rightarrow \text{rang}(S') = \text{rang}(S \circ T).$$

$$\text{Ker}(S') = \text{Ker}(S) \cap \text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(S) \Rightarrow \text{def}(S') \leq \text{def}(S).$$

$$\text{rang}(S \circ T) + \text{def}(S') = \text{rang}(T), \text{rang}(S) + \text{def}(S) = n \Rightarrow$$

$$\text{rang}(S \circ T) = \text{rang}(T) - \text{def}(S') \geq \text{rang}(T) - \text{def}(S) = \text{rang}(T) - n + \text{rang}(S) = \text{rang}(T) + \text{rang}(S) - n.$$

4.8.21. Aplicăm inegalitatea lui Sylvester matricelor A și B .

$$\text{rang}(AB) \geq \text{rang}(A) + \text{rang}(B) - n.$$

Dar $\text{rang}(AB) = 0$ și rezultă inegalitatea.

4.8.22. Observăm că $\text{Ker}(T|_{\mathbb{V}}) \subset \text{Ker}(T) \Leftrightarrow \text{def}(T|_{\mathbb{V}}) \leq \text{def}(T)$.

Știm că

$$\text{def}(T) + \text{rang}(T) = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{X},$$

$$\text{def}(T|_{\mathbf{V}}) + \text{rang}(T|_{\mathbf{V}}) = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{V}.$$

Scădem aceste două egalități și obținem:

$$\text{def}(T) - \text{def}(T|_{\mathbf{V}}) + \text{rang}(T) - \text{rang}(T|_{\mathbf{V}}) = \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{X} - \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{V}.$$

$$\text{Dar } \text{def}(T) - \text{def}(T|_{\mathbf{V}}) \geq 0 \Rightarrow \text{rang}(T) - \text{rang}(T|_{\mathbf{V}}) \leq \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{X} - \dim_{\mathbf{K}} \mathbf{V}.$$

4.8.23. Aplicăm relația (69) spațiului $\text{Im}(S)$ și subspațiului $\text{Im}(S \circ T)$:

$$\text{rang}(P \circ S) - \text{rang}(P|_{\text{Im}(S \circ T)}) \leq \text{rang}(S) - \text{rang}(S \circ T) \Leftrightarrow$$

$$\text{rang}(P \circ S) + \text{rang}(S \circ T) \leq \text{rang}(S) + \text{rang}(P \circ S \circ T).$$

Transpusă pentru matrice această inegalitate devine: $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbf{R})$: $\text{rang}(BC) + \text{rang}(AB) \leq \text{rang}(B) + \text{rang}(ABC)$.

4.8.24. Observaăm că

$$1) \forall u \in \text{Ker}(T_1) \Rightarrow T_1(u) = \mathbf{0}$$

$$2) \exists v \in \mathbf{V}_1 : T_1(v) \neq \mathbf{0} \text{ dar } (T_2 \circ T_1)(v) = \mathbf{0} \Rightarrow \text{Ker}(T_1) \subseteq \text{Ker}(T_2 \circ T_1) \text{ și } T_1(v) \in \text{Ker}(T_2).$$

$$3) \text{ Problema } T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)) = \text{Ker}(T_2 \circ T_1)?$$

$$\text{Fie } u \in T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)) \Rightarrow T_1(u) \in \text{Ker}(T_2) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(u) = \mathbf{0} \Rightarrow u \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1).$$

$$\text{Reciproc } u \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(u) = \mathbf{0} \Rightarrow T_2(T_1(u)) = \mathbf{0} \Rightarrow T_1(u) \in \text{Ker}(T_2) \Rightarrow u \in T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)).$$

Definim \widetilde{T}_1 restricția lui T_1 la $T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2))$,

$$\widetilde{T}_1 : T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)) \rightarrow \mathbf{V}_2, \forall u \in T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)), \widetilde{T}_1(u) = T_1(u).$$

$$\dim_{\mathbf{R}} T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)) = \text{def}(\widetilde{T}_1) + \text{rang}(\widetilde{T}_1).$$

$$\text{Dar } \text{Ker}(\widetilde{T}_1) \subseteq \text{Ker}(T_1) \Rightarrow \text{def}(\widetilde{T}_1) \subseteq \text{def}(T_1),$$

$$\text{Im}(\widetilde{T}_1) \subseteq \text{Ker}(T_2) \Rightarrow \text{rang}(\widetilde{T}_1) \subseteq \text{def}(T_2)$$

$$\text{Rezultă că } \dim_{\mathbf{R}} T_1^{-1}(\text{Ker}(T_2)) = \text{def}(T_2 \circ T_1) = \text{def}(\widetilde{T}_1) + \text{rang}(\widetilde{T}_1) \leq \text{def}(T_1) + \text{def}(T_2).$$

$$\mathbf{V}_1 \xrightarrow{T_1} \mathbf{V}_2 \xrightarrow{T_2} \mathbf{V}_3,$$

$$\mathbf{V}_1 \xrightarrow{T_1} \text{Im}(T_1) \subseteq \mathbf{V}_2 \xrightarrow{T_2} \mathbf{V}_3 \Rightarrow \dim_{\mathbf{K}} \text{Im}(T_1) = \dim_{\mathbf{K}} \text{Im}(T_2 \circ T_1) + \dim_{\mathbf{K}} \text{ker}(T_2 \circ T_1),$$

$$\text{ker}(T_2 \circ T_1) = \text{Im}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2) \text{ deoarece}$$

$$x \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(x) = \mathbf{0}_{\mathbf{V}_3} \Rightarrow T_2(T_1(x)) = \mathbf{0}_{\mathbf{V}_3} \Rightarrow T_1(x) \in \text{Im}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2),$$

$$y \in \text{Im}(T_1) \cap \text{ker}(T_2) \Rightarrow T_2(y) = \mathbf{0}, y \in \text{Im}(T_1) \Rightarrow \exists x \in \mathbf{V}_1 : T_1(x) = y \Rightarrow T_2(T_1(x)) = T_2(y) = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1).$$

4.8.26. Fie transformările liniare

$$T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = A,$$

$$S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = B,$$

unde am notat cu \mathcal{B} o baza canonică.

$$\text{rang}(A + B) = \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S + T)).$$

$$\text{Demonstrăm că } \text{Im}(S + T) \subseteq \text{Im}(S) + \text{Im}(T).$$

$$\text{Fie } y \in \text{Im}(S + T) \Rightarrow \exists x \in \mathbf{R}^n : (S + T)(x) = y \Rightarrow y = S(x) + T(x) = y_1 + y_2, \\ y_1 \in \text{Im}(S), y_2 \in \text{Im}(T) \Rightarrow y \in \text{Im}(S) + \text{Im}(T).$$

$$\text{Rezultă } \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S + T)) \leq \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S) + \text{Im}(T))$$

$$\dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S)) + \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(T)) + \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S) \cap \text{Im}(T)) = \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(S)) + \dim_{\mathbf{R}}(\text{Im}(T))$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(S+T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(S) + \text{Im}(T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(S)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(T)).$$

4.8.27. a) Studiem $\text{rang}(A - bI_n)$ și $\text{rang}(B - aI_n)$.

$$AB - aA - bB + abI_n = abI_n \Rightarrow A(B - aI_n) - b(B - aI_n) = abI_n \Rightarrow (A - bI_n)(B - aI_n) = abI_n \Rightarrow \text{rang}[(A - bI_n)(B - aI_n)] = n \Rightarrow \text{rang}(A - bI_n) = \text{rang}(B - aI_n) = n.$$

$$\text{b) } AB = aA + bB \Rightarrow aA = AB - bB \Rightarrow A = \frac{1}{a}(A - bI_n)B \Rightarrow \text{rang}(A) \leq \min\{\text{rang}(A - bI_n), \text{rang}(B)\}$$

$$\text{Analog } \text{rang}(B) \leq \min\{\text{rang}(B - aI_n), \text{rang}(A)\}.$$

Din cele două relații de mai sus rezultă $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

$$\text{4.8.28. } \text{rang}(A^T A) = \text{rang}(A) \Leftrightarrow \text{def}(A^T A) = \text{def}(A)$$

$$\text{Fie } x \in \text{Ker}(A) \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \text{Ker}(A^T A).$$

$$x \in \text{Ker}(A^T A) \Rightarrow A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x^T A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \|Ax\|^2 = \mathbf{0} \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \text{Ker}(A)$$

$$\text{4.8.29. a) } A + B = AB \Leftrightarrow AB - A - B + I_n = I_n \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n \Rightarrow \text{rang}(A - I_n) = \text{rang}(B - I_n) = n$$

$$\text{Dar } A = (A - I_n)B \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } B.$$

b) Determinăm matricea C astfel încât $AC = CA = 0_n, C \neq 0_n$.

$$\text{Fie } X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C}) \text{ și sistemul } AX = 0_{n \times 1}, \det(A) = 0 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C}) \ X \neq 0_{n \times 1}$$

$$\text{Fie } Y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{C}) \text{ și sistemul } YA = 0_{n \times 1}, \det(A) = 0 \Rightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \ Y \neq 0_{1 \times n}$$

$$\text{Considerăm } C = XY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

$$AC = AXY = 0_{n \times 1}Y = 0_n, CA = XYA = 0_n.$$

$$\text{Demonstrăm prin inducție } A^k C^j = 0_n, \forall k, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (A + C)^p = A^p + C^p, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\text{4.8.30. } \text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in \mathbb{R}$$

$$\text{Teorema rang-defect } \text{def}(Tr) + \text{rang}(Tr) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rang}(\text{tr}) = 1 \Rightarrow \text{def}(Tr) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \text{rang}(Tr) = n^2 - 1.$$

$$\text{4.8.31 a) } \text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik} \right) = \text{Tr}(BA),$$

$$\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

$$\text{Tr}(AB - BA) = 0 \Rightarrow S \subset \text{Ker}(Tr) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(S) \leq \text{def}(Tr) = n^2 - 1.$$

b) Punem în evidență $n^2 - 1$ vectori liniar independenți din S . Atunci va rezulta că $\dim_{\mathbb{R}}(S) = n^2 - 1$.

Fie M_{ij} matricea care are pe poziția (i, j) valoarea 1 și restul 0. Pentru $i \neq j$ scriem $M_{ij} = M_{ik}M_{kj} - M_{kj}M_{ik} \in S$.

$$M_{11} - M_{jj} = M_{1j}M_{j1} - M_{j1}M_{1j}.$$

Se demonstrează că sistemul de vectori astfel obținut este liniar independent.

4.8.32. a) Orice punct (vector) din S_1 poate fi scris în mod unic în forma $(-v, u + v, u)$ și orice punct din S_2 poate fi scris în mod unic în forma $(2u, u - v, u + 2v)$. Aplicația $T : S_1 \rightarrow S_2$ este injectivă și surjectivă (demonstrați!). Dacă notăm $s = (-v_1, u_1 + v_1, u_1)$ și $t = (-v_2, u_2 + v_2, u_2)$, avem $T(s + t) = T(s) + T(t)$, $\forall s, t \in S_1$ și $T(cs) = cT(s)$, $\forall c \in \mathbb{R}$ și $\forall s \in S_1$.

b) Coordonatele mijlocului segmentului (în spațiu) care unește punctele $(-v, u+v, u)$ și $(2u, u-v, u+2v)$ sunt $z = u - \frac{v}{2}$, $y = u$, $x = u+v$ și ele satisfac ecuația $2x - 3y + z = 0$, care este ecuația unui plan ce trece prin origine. Acesta este locul geometric căutat.

c) Dacă $\varphi(X) = (X')$, unde $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z')$ este un izomorfism liniar în \mathbb{R}^3 , el este de forma

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + a_3z \\ y' = b_1x + b_2y + b_3z \\ z' = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases}$$

în care determinantul coeficienților este $\neq 0$. Impunând condiția că φ coincide cu T pe subspațiul liniar S_1 , găsim

$$\begin{cases} -a_1v + a_2(u+v) + a_3u \equiv 2u \\ -b_1v + b_2(u+v) + b_3u \equiv u-v \\ -c_1v + c_2(u+v) + c_3u \equiv u+2v \end{cases}.$$

Din prima identitate, avem $a_2 + a_3 = 2$ și $a_2 - a_1 = 0$. Dacă notăm $a_1 = a$, vom avea $a_2 = a$ și $a_3 = 2 - a$. Din celelalte două identități, găsim $b_1 = b$, $b_2 = b - 1$, $b_3 = 2 - b$ și respectiv $c_1 = c$, $c_2 = c + 2$, $c_3 = -(c + 1)$. Izomorfismele căutate sunt de forma

$$\begin{cases} x' = ax + ay + (2-a)z \\ y' = bx + (b-1)y + (2-b)z \\ z' = cx + (c+2)y - (c+1)z \end{cases}$$

în care constantele satisfac condiția $-3a + 4b + 2c \neq 0$.

4.8.33. Transformarea adjuncă se definește prin condiția $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. În baze ortonormate, dacă T are matricea A , adjuncta T^* are matricea A^T .

Deci este preferabil să lucrăm în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Vom avea

$$\begin{cases} T(v_1) = v_1 + 2v_3 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \\ T(v_2) = v_1 + 5v_2 + 7v_3 = 13e_1 + 14e_2 + 11e_3 \\ T(v_3) = 3v_1 - v_2 - 3v_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{cases} T(f_1) = T(e_1) + 2T(e_2) + T(e_3) \\ T(f_2) = T(e_1) + T(e_2) + 2T(e_3) \\ T(f_3) = T(e_1) + T(e_2) \end{cases}.$$

Scriind $2T(e_3) = T(f_2) - T(f_3)$, $T(e_2) - T(e_3) = T(f_1) - T(f_2)$, $T(e_1) = T(f_3) - T(e_2)$, vom obține

$$\begin{cases} T(e_1) = 2e_1 + 6e_2 + 6e_3 \\ T(e_2) = -3e_1 - 4e_2 - 5e_3 \\ T(e_3) = 7e_1 + 6e_2 + 5e_3 \end{cases}.$$

Deci, în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$, transformarea T^* va avea ca matrice transpusa matricei lui T , adică matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Trecerea de la baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ se face prin matricea schimbării de bază

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

prin urmare matricea lui T^* în noua bază va fi

$$B^* = C^{-1}A^*C.$$

4.8.34. Considerăm baza canonică, \mathcal{B}_1 , din \mathbb{R}^3 care este ortonormată și matricea lui T_1 în această bază va fi

$${}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea endomorfismului T_1^* în aceeași bază ortonormată este

$${}_{\mathcal{B}_1}(T_1^*)_{\mathcal{B}_1} = ({}_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $T_1^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$T_1^*(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

Analog,

$${}_{\mathcal{B}_2}(T_2^*)_{\mathcal{B}_2} = ({}_{\mathcal{B}_2}(T_2)_{\mathcal{B}_2})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T_2^* : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$T_2^*(x) = (x_1 - x_4, -x_1 + x_2, -x_2 + x_3, -x_3 + x_4).$$

4.8.35 Se știe că o bază a spațiului $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ este $\{1, x, x^2\}$. Aplicând procedeul Gram-Schmidt se obține baza ortogonală $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ și apoi baza ortonormată

$$\mathcal{B} = \left\{ r_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, r_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x, r_3(x) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1) \right\}.$$

În această bază determinăm matricea asociată endomorfismului

$$T(r_1(x)) = -3 \cdot r_1(x) + 0 \cdot r_2(x) + 0 \cdot r_3(x)$$

$$T(r_2(x)) = 2\frac{\sqrt{6}}{2} - 3\frac{\sqrt{6}}{2}x = 2\sqrt{3}r_1(x) + (-3)r_2(x) + 0 \cdot r_3(x)$$

$$T\left(\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)\right) = 0 \cdot r_1(x) + 2\sqrt{15}r_2(x) + (-3)r_3(x)$$

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2\sqrt{15} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matricea endomorfismului adjunct în aceeași bază ortonormată este

$${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & -3 \end{pmatrix}$$

$$T^*(r_1(x)) = -3r_1(x) + 2r_2(x) = \sqrt{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$T^*(r_2(x)) = -3r_2(x) + 2\sqrt{15}r_3(x) = -\sqrt{6}\left(-\frac{15}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)$$

$$T^*(r_3(x)) = -3r_3(x) = -3\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$$

$$T^*(a + bx + cx^2) = T^*\left(a\sqrt{2}r_1(x) + b\frac{\sqrt{6}}{2}r_2(x) + c\left(\frac{2}{15}\sqrt{10}r_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3}r_1(x)\right)\right) =$$

$$= a\sqrt{2}T^*(r_1(x)) + b\frac{\sqrt{6}}{2}T^*(r_2(x)) + c\frac{2}{15}\sqrt{10}T^*(r_3(x)) + c\frac{\sqrt{2}}{3}T^*(r_1(x)) =$$

$$= \left(-\sqrt{3}a - 5b + c - \frac{1}{3}\sqrt{3}c\right) + (2\sqrt{3}a - 3b + \frac{2}{3}\sqrt{3}c)x + (15b - 3c)x^2$$

4.8.36. Matricea asocată în baza canonică din \mathbb{R}^2 , bază ortonormată, este

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Deoarece $P^{-1} = P^T$ rezultă că endomorfismul este ortogonal.

4.8.37. a) Impunem condiția $\langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle, \forall x \in \mathbb{V}$ și găsim $a \langle x, u \rangle^2 (a \langle u, u \rangle - 2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{\langle u, u \rangle}$. Prin urmare, T este dată prin

$$T(x) = x - \frac{2 \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u, \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} (T \circ T)(x) &= T(T(x)) = T\left(x - \frac{2 \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) = T(x) - \frac{2 \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} T(u) = \\ &= x - \frac{2 \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u - \frac{2 \langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \left(u - \frac{2 \langle u, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u\right) = x, \quad \forall x \in \mathbb{V} \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă $T \circ T = I =$ transformarea identică în \mathbb{V} . Este evident că aplicarea de un număr impar de ori a transformării T coincide cu T și că aplicarea de un număr par de ori coincide cu transformarea identică.

b) Pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$ și $u = (2; 2; 1)$, avem $\langle x, u \rangle = 2x_1 + 2x_2 + x_3$ și

$$T(x) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 - \frac{2}{9} (2x_1 + 2x_2 + x_3) (2e_1 + 2e_2 + e_3).$$

Acum, vom căuta imaginile vectorilor e_1, e_2, e_3 pentru a putea scrie matricea lui T în această bază

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{1}{9} e_1 - \frac{8}{9} e_2 - \frac{4}{9} e_3 \\ T(e_2) = -\frac{8}{9} e_1 + \frac{1}{9} e_2 - \frac{4}{9} e_3 \\ T(e_3) = -\frac{4}{9} e_1 - \frac{4}{9} e_2 + \frac{7}{9} e_3 \end{cases}.$$

Matricea căutată este

$$\mathbf{A} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

5.8.1 Vom demonstra doar simetria relației: reflexivitatea și tranzitivitatea sunt lăsate pe seama cititorilor. Dacă $B = UAU^{-1}$, atunci $A = U^{-1}BU = U^{-1}B(U^{-1})^{-1}$: aceasta arată că, dacă A este asemenea cu B , atunci și B este asemenea cu A .

5.8.2 Calculăm mai întâi polinoamele caracteristice ale acestor matrice: $P_A(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$; $P_B(X) = (X - 3)^2(X - 6)$; $P_C(X) = (X - 2)(X^2 - X + 1)$; $P_D(X) = (X - 3)^2(X - 6)$. Rezolvăm apoi în \mathbb{C} ecuațiile polinomiale asociate.

5.8.3

- (1) Este evident că orice minor de ordin ≥ 2 al matricei A are două linii proporționale, deci este nul.
- (2) Deoarece, în particular, toți minorii principali de ordin ≥ 2 sunt nuli, polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n = X^n - tX^{n-1},$$

unde $t = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$. (Notațiile sunt cele din Propoziția 5.2.11.)

- (3) Pentru $t \neq 0$, matricea A are valoarea proprie 0, de multiplicitate algebrică $n - 1$ și valoarea proprie t de multiplicitate algebrică 1. În acest caz, multiplicitatea geometrică a lui t (care oricum este > 0), este egală cu 1, iar multiplicitatea algebrică a lui 0 (care

este egală cu $n - \text{rang}(A)$) este $n - 1$. Cazurile $t = 0, \text{rang}(A) = 1$ și $t = \text{rang}(A) = 0$ sunt lăsate spre analiză cititorilor.

- (4) Observăm că $A^2 = tA$. De aceea, dacă $t \neq 0$, polinomul minimal al matricei A (care divide $X^2 - tX$) trebuie să aibă rădăcini simple, adică A este diagonalizabilă. Cititorul este îndemnat să analizeze cazurile: $t = 0, \text{rang}(A) = 1$, respectiv $A = 0$.

5.8.4 Calculăm

$$\begin{aligned} \det(XI_{2n} - M) &= \begin{vmatrix} XI_n - A & -B \\ -B & XI_n - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ XI_n - A - B & XI_n - A \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ \mathbf{0} & XI_n - A - B \end{vmatrix} = \det(XI_n - (A+B)) \cdot \det(XI_n - (A-B)) = P_{A+B}(X) \cdot P_{A-B}(X). \end{aligned}$$

5.8.5 Dacă $\lambda = 0$, atunci $T(v) = 0 \cdot v = 0$, adică $v \in \text{Ker}(T)$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $T(\lambda^{-1}v) = \lambda^{-1}T(v) = v$, deci $v \in \text{Im}(T)$.

5.8.6 Fie λ valoarea proprie corespunzătoare vectorului propriu v ; atunci

$$(T + a \cdot \text{id}_{\mathbf{V}})(v) = T(v) + av = (\lambda + a)v,$$

ceea ce arată că v este vector propriu pentru endomorfismul dat.

O posibilă generalizare este: *Dacă v este vector propriu pentru T , iar F este un polinom arbitrar, atunci v este vector propriu și pentru $F(T)$.*

5.8.7 Vom arăta că toți coeficienții polinomului $P_{\bar{A}}$ se obțin prin conjugarea complexă a coeficienților corespunzători ai polinomului P_A . Dacă ținem cont de Propoziția 5.2.11, e suficient să arătăm că $\det(\bar{A})$ este conjugatul complex al $\det(A)$: aceasta rezultă imediat din definiția determinantului și din proprietățile conjugării.

5.8.8 Reciproca nu este adevărată. Să considerăm, de exemplu, următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că $P_A(X) = P_B(X) = (X-1)^2$, dar A și B nu pot fi asemenea, deoarece $U^{-1}AU = A$ pentru orice matrice inversabilă U .

5.8.9 Două matrice asemenea A și B au același polinom caracteristic, deci au aceleași valori proprii.

Dacă v este vector propriu pentru A , iar U este o matrice inversabilă pentru care $B = UAU^{-1}$, atunci $w = Uv$ este vector propriu al lui B , corespunzător aceleiași valori proprii λ :

$$Bw = (UAU^{-1})(Uv) = U(Av) = U(\lambda v) = \lambda w.$$

5.8.10

- (1) Fie $F(X) = a(X - t_1) \dots (X - t_r)$; atunci $F(A) = a(A - t_1 I_n)(A - t_2 I_n) \dots (A - t_r I_n)$. De aceea, $\det(F(A)) = a^n \det(A - t_1 I_n) \dots \det(A - t_r I_n) = a^n (-1)^{nr} P_A(t_1) \dots P_A(t_r)$. Cum $P_A(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$, egalitatea din enunț rezultă imediat.
- (2) Aplicăm proprietatea de la punctul (1) polinomului $G(X) = Y - F(X) \in \mathbb{K}(Y)[X]$:

$$\det(G(A)) = \det(YI_n - F(A)) = (Y - F(\lambda_1))(Y - F(\lambda_2)) \dots (Y - F(\lambda_n)).$$

Pe de altă parte, $\det(G(A)) = P_{G(A)}(Y)$, ceea ce demonstrează afirmația din enunț.

5.8.11 De exemplu, subspațiile de dimensiune 2, invariante de T , sunt planul de simetrie π , precum și orice plan β ce trece prin origine și este perpendicular pe π .

5.8.12 Vom demonstra, ca exemplu, doar afirmația: $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ este subspațiu invariant de T .

Fie $v \in \mathbf{U} + \mathbf{W}$ un vector arbitrar; există deci $u \in \mathbf{U}$ și $w \in \mathbf{W}$ astfel ca $v = u + w$. Atunci:

$$T(v) = T(u + w) = T(u) + T(w) \in \mathbf{U} + \mathbf{W}.$$

(Ultima afirmație rezultă din ipoteza că \mathbf{U} și \mathbf{W} sunt subspații invariante.)

5.8.13 Răspuns:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}, J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, J_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, J_D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Explicităm calculele doar pentru matricea B : pentru celelalte matrice, recomandăm cititorului să procedeze analog.

Calculăm $P_B(X) = \det(XI_3 - B) = (X - 2)^3$. Definim

$$E = B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $E^2 = 0_3$, deci $\text{rang}(E) = 1$, iar $\text{rang}(E^2) = \text{rang}(E^3) = 0$, obținem $n_1 = n_2 = 1$ (notațiile sunt cele din (88)).

5.8.14 Răspuns:

$$J_{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_1 = \{X^2; 2X; 2\}; \quad J_{\mathbf{d}^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_2 = \{X^2; 2; 2X\}.$$

Argumentăm doar primul calcul. Matricea asociată lui \mathbf{d} în baza canonică $\{1; X; X^2\}$ este $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculăm $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $D^3 = 0$. O bază în $\text{Im}(\mathbf{d}^2)$ este $v_1 = [2; 0; 0]^T$, vector care corespunde polinomului $F_1 = 2$. Avem $v_1 = Dv_2$, unde $v_2 = [0; 2; 0]^T$ corespunde polinomului $F_2 = 2X$, iar $v_2 = Dv_3$, unde $v_3 = [0; 0; 1]^T$ corespunde polinomului $F_3 = X^2$. Deci $\{F_3, F_2, F_1\}$ este un vector propriu generalizat, iar matricea asociată lui \mathbf{d} în această bază este matricea $J_{\mathbf{d}}$.

5.8.15 Răspuns: $J_A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_A = \{[4; 3]^T, [0; 1]^T\};$

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_B = \{[(1; 1; -1)^T, [-4; -5; 6]^T; [0; 0; 1]^T\};$$

$$J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_C = \{[1; -1; 0; 0]^T, [0; 1; -1; 0]^T, [0; 0; 1; -1]^T, [0; 0; 0; 1]^T\}.$$

(Bazele $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B, \mathcal{B}_C$ în care matricele asociate sunt matricele Jordan, nu sunt unic determinate.)

Explicităm calculele doar pentru matricea B . Calculăm: $P_B(X) = X^3$, deci singura valoare proprie a lui B este 0. Notăm tot cu B endomorfismul lui \mathbb{C}^3 a cărei matrice în baza canonică este matricea B . Calculăm

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $\dim(\text{Im}(B^2)) = \text{rang}(B^2) = 1$, o bază fiind de exemplu $v_1 = (1; 1; -1)^T$ (luăm una din coloanele matricei B^2). Căutăm vectorul $v_2 \in \text{Im}(B)$ cu proprietatea că $v_1 = Bv_2$ și găsim $v_2 = (-4; -5; 6)^T$ (v_2 este ultima coloană a matricei B), apoi determinăm un vector v_3 pentru care $Bv_3 = v_2$ și găsim $v_3 = (0; 0; 1)^T$ ($v_3 = e_3$, deoarece v_2 este ultima coloană a lui B). Am determinat astfel o bază în care matricea asociată endomorfismului dat este matricea Jordan.

5.8.16

$$(1) C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2) Dezvoltăm $\det(XI_n - C_P)$ după ultima coloană și obținem $P(X) =$

$$(-1)^{n+1}a_0 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^{n+2}a_1 \cdot (-1)^{n-2}X + \dots + (-1)^{2n-1}a_{n-2} \cdot (-1)^1X^{n-2} + (X + a_{n-1})X^{n-1}.$$

(3) Enunț posibil: *polinomul minimal al matricei companion C_P este polinomul P* . Enunțul este susținut de următorul caz particular: dacă P este ireductibil în $\mathbb{K}[X]$, atunci el trebuie să coincidă cu polinomul minimal al matricei C_P . Vom demonstra că acest enunț este adevărat. Considerăm matricea C_P ca fiind matricea asociată endomorfismului $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$, în baza canonică $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Știm deci că $T(e_i) = e_{i+1}$ pentru $1 \leq i < n$. Fie $F = b_0 + b_1X + \dots + b_{n-1}X^{n-1}$ un polinom de grad $< n$, pentru care $F(T) = 0$. Atunci

$$0 = F(T)(e_1) = b_0e_1 + b_1e_2 + \dots + b_{n-1}e_n.$$

Folosind liniar independența sistemului de vectori $\{e_i\}_i$, deducem că F este polinomul nul. Rezultă deci că polinomul minimal al lui T are grad $\geq n$, deci coincide cu polinomul caracteristic, adică cu $P(X)$.

(4) Dacă polinomul minimal al unei matrice A coincide cu polinomul caracteristic, Teorema 5.6.3 și un calcul cu ordinele blocurilor Jordan ne arată că matricea Jordan J_A are câte un singur bloc Jordan corespunzător fiecărei valori proprii, al cărui ordin este egal cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii respective. În particular, în cazul matricei companion C_P , forma sa canonică Jordan este

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

dacă $P(X) = (X - \lambda_1)^{p_1}(X - \lambda_2)^{p_2} \dots (X - \lambda_r)^{p_r}$ este descompunerea în factori liniari a lui P .

(5) Rezultă din (2) și (4).

5.8.17

(1) Se aplică doar definiția: dacă $X, Y \in C(A)$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, atunci

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha XA + \beta YA = (\alpha X + \beta Y)A,$$

deci $\alpha X + \beta Y \in C(A)$.

(2) Dacă polinomul minimal și polinomul caracteristic ale matricei A coincid, atunci proprietatea cerută este imediată: matricele $I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ sunt liniar independente și comută cu A . Acest caz particular, care arată legătura între punctele (2) și (4) ale problemei, nu este însă suficient pentru a demonstra proprietatea (2) în general.

Să particularizăm într-un alt mod: vom presupune acum că

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este un bloc Jordan corespunzător numărului 0. (De fapt, pentru un bloc Jordan, polinomul minimal și polinomul caracteristic coincid, deci putem aplica de la început argumentul de mai sus; includem totuși o demonstrație directă pentru acest caz.) Este ușor de văzut, folosind doar definiția, că X comută cu A dacă și numai dacă

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ c & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & y & z & \dots & a \end{pmatrix},$$

adică diagonalele de sub diagonală principală ale lui X conțin câte un același număr, iar restul elementelor sunt nule. De aceea, în acest caz, $\dim_{\mathbb{C}}(C(A)) = n$.

Dacă A este un bloc Jordan arbitrar (care corespunde numărului λ , eventual nenul), observăm că X comută cu A dacă și numai dacă X comută cu $A - \lambda I_n$; reducem astfel problema la cazul particular anterior.

Fie acum $A = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_p\}$ o matrice Jordan, adică o matrice formată din blocuri Jordan așezate pe diagonală principală. Vom determina doar acele matrice X care comută cu A și, în plus, au o formă - bloc asemănătoare cu A , adică $X = \text{diag}\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ (deci sunt formate din blocuri de aceleași dimensiuni cu cele din A , așezate pe diagonală, iar restul elementelor sunt 0). Dacă scriem explicit condiția de comutare, obținem imediat relația

$$X \text{ comută cu } A \Leftrightarrow X_i \text{ comută cu } J_i, \forall i.$$

Deoarece matricele X de această formă formează un subspațiu vectorial al lui $C(A)$, iar din cele demonstrate mai sus, obținem că dimensiunea acestui subspațiu este n , deducem că $\dim_{\mathbb{C}}(C(A)) \geq n$.

Fie acum A o matrice arbitrară și fie J forma sa canonică Jordan. Este ușor de văzut că spațiile vectoriale $C(A)$ și $C(J)$ sunt izomorfe. Într-adevăr, dacă $J = U^{-1}AU$, aplicația $X \mapsto U^{-1}XU$ determină izomorfismul cerut. Deci: $\dim_{\mathbb{C}}(C(A)) = \dim_{\mathbb{C}}(C(J)) \geq n$.

- (3) Conform celor demonstrate anterior, este suficient să determinăm dimensiunea spațiului $C(J)$, unde $J = \text{diag}\{J_3, J_1\}$ este forma Jordan a matricei B , în care blocurile Jordan corespund numărului 1. Scriem matricea X sub forma-bloc

$$X = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

unde blocurile au aceleași dimensiuni cu blocurile lui J . Condiția de comutare se scrie

$$J_3 \cdot M = M \cdot J_3; J_3 \cdot N = N \cdot J_1; J_1 \cdot P = P \cdot J_3; J_1 \cdot Q = Q \cdot J_1.$$

Știm deja că M determină un spațiu vectorial de dimensiune 3, iar Q determină un spațiu vectorial de dimensiune 1. Scriind explicit celelalte două ecuații, obținem că N și P determină fiecare spații vectoriale de dimensiune 1. De aceea, $\dim_{\mathbb{C}}(C(B)) = 6$.

- (4) Procedăm analog ca în exemplul de la punctul (3). Este util să demonstrăm doar următorul rezultat: *Dacă $J_p(\alpha)$ și $J_q(\beta)$ sunt două blocuri Jordan, atunci dimensiunea spațiului matricelor Y pentru care $J_p(\alpha)Y = YJ_q(\beta)$ este egală cu $\min\{p, q\}$ pentru $\alpha = \beta$, sau este 0 în caz contrar.*

5.8.18 Observăm că $\det(XI_n - A) = \det(XI_n - A^T)$, deoarece aceste două matrice sunt una transpusa celeilalte; de aici, rezultă că $P_A(X) = P_{A^T}(X)$. Pentru a demonstra că matricele A și A^T au același polinom minimal, folosim faptul că rangul unei matrice nu se modifică prin transpunerea matricei respective; de aceea, relațiile (89) arată că matricele au aceeași formă canonică Jordan, deci au același polinom minimal.

5.8.19 Fie U matricea obținută din I_n prin schimbarea între ele a liniilor i și j , apoi a coloanelor i și j . Matricea U are în continuare, pe fiecare linie și coloană, un singur element egal cu 1, toate celelalte elemente fiind nule. Matricea U corespunde, de fapt, transpoziției (i, j) : chiar și fără această observație, putem verifica imediat egalitatea $U^{-1} = U$. În plus, un calcul simplu arată că $\tilde{A} = UAU$. Deducem că matricele \tilde{A} și A sunt matrice asemenea, deci ele au aceeași formă Jordan.

5.8.20 Putem verifica (de exemplu, prin inducție) că, dacă F este un polinom arbitrar, atunci

$$F(B) = \begin{pmatrix} F(A) & F'(A) \\ 0 & F(A) \end{pmatrix}.$$

De aceea, polinomul minimal al matricei B este un polinom nenul P , de grad minim posibil, cu proprietatea că P și P' sunt divizibile cu μ_A . Ajungem astfel la egalitatea: $P(X) = \prod_{i=1}^t (X - \lambda_i)^{s_i+1}$.

5.8.21

- (1) Dezvoltați determinantul după o linie.

- (2) Evident, $m_a(2) = 2$. Pentru a calcula $m_g(2)$, calculăm rangul matricei $2I_4 - A$: avem $m_g(2) = \dim(\text{Ker}(2I_4 - A)) = 4 - \text{rang}(2I_4 - A) = 1$.
- (3) Calculăm $B = A - 2I_4$, apoi B^2 ; subspațiul \mathbb{C}_F se obține determinând vectorii v pentru care $B^2v = 0$. Explicităm spațiul soluțiilor acestui sistem linear și obținem $\mathbb{C}_F = \text{Span}\{(1; 0; -1; 0)^T, (0; 1; 0; -1)^T\}$. Analog, $\mathbb{C}_G = \text{Span}\{(1; 0; 1; 0)^T, (0; 1; 0; 1)^T\}$.
- (4) Polinomul minimal divide polinomul caracteristic și aceste două polinoame au aceiași factori ireductibili. De aceea, polinomul minimal al lui A poate fi unul din următoarele polinoame: $(X - 2)(X + 2)$, $(X - 2)^2(X + 2)$, $(X - 2)(X + 2)^2$, $(X - 2)^2(X + 2)^2$. O verificare directă ne arată că $\mu_A(X) = (X - 2)^2(X + 2)^2$.
- (5) Nu, deoarece polinomul minimal are rădăcini multiple. Alt argument: $m_a(2) \neq m_g(2)$, deci matricea A nu este diagonalizabilă.
- (6) Nu, aceleași calcule sunt valabile și peste corpul \mathbb{Q} al numerelor raționale.

5.8.22

- (1) Dacă $U^{-1}AU = \text{diag}\{a_1, a_n, \dots, a_n\}$, atunci $U^{-1}A^pU = \text{diag}\{a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p\}$. Deci A^p este diagonalizabilă.
- (2) Dacă A^p este diagonalizabilă, atunci polinomul minimal al acestei matrice este de forma $\mu_{A^p}(X) = (X - b_1) \dots (X - b_r)$, unde numerele b_1, b_2, \dots, b_r sunt distincte și nenule. Deducem că $F(A) = 0$, unde $F = (X^p - b_1) \dots (X^p - b_r)$. Deoarece polinomul F are rădăcini distincte, iar μ_A divide F , rezultă că și polinomul minimal μ_A al matricei A are rădăcini distincte. Deci A este diagonalizabilă.

5.8.23 Considerăm A ca matrice cu elemente numere complexe, asociată unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ și fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui A . Există deci un vector propriu (nenul) $v \in \mathbb{C}^n$, pentru care $Av = \lambda \cdot v$. Aplicând conjugarea complexă egalității anterioare și ținând cont de ipoteze, obținem

$$\bar{v}^T A = \bar{\lambda} \cdot \bar{v}^T.$$

Deoarece

$$\lambda \|v\| = \lambda \bar{v}^T \cdot v = \bar{v}^T Av = \bar{\lambda} \|v\|,$$

iar $\|v\| \neq 0$, deducem că $\lambda \in \mathbb{R}$. Răspunsul la a doua întrebare este negativ. Lăsăm cititorului plăcerea de a găsi un contraexemplu.

5.8.24 Vom demonstra ambele proprietăți în același timp, prin inducție după n .

Pentru $n = 1$, problema este evidentă. Să presupunem acum că orice matrice simetrică din $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă, prin intermediul unei matrice de trecere ortogonale, și să demonstrăm că proprietatea se păstrează pentru matricele simetrice din $\mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$.

Fie $A \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și fie λ o valoare proprie (reală) a matricei A . Putem alege un vector propriu v_1 , corespunzător acestei valori proprii, de normă 1. Completăm vectorul v_1 la o bază a lui \mathbb{R}^{k+1} , apoi transformăm această bază în baza ortonormată $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$, folosind, de exemplu, procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt. Fie U

matricea de trecere dintre baza canonică a lui \mathbb{R}^{k+1} și baza \mathcal{B}_1 ; atunci U este o matrice ortogonală, ortogonalitatea fiind echivalentă cu $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ (condiție ce definește bazele ortonormate).

Fie $B = U^{-1}AU$; deoarece

$$B^T = (U^{-1}AU)^T = U^T A^T (U^{-1})^T = U^{-1}AU,$$

deducem că B este matrice simetrică. În plus, prima coloană a lui B este

$$Be_1 = U^{-1}AUe_1 = U^{-1}Av_1 = U^{-1}\lambda v_1 = \lambda e_1,$$

unde e_1 este primul vector al bazei canonice din \mathbb{R}^{k+1} . (Am folosit aici doar definiția matricei de trecere de la o bază la alta!). Deducem că

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

unde C este o matrice simetrică, de ordinul k . Conform ipotezei de inducție, există o matrice ortogonală $V \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ pentru care $V^{-1}CV$ este matrice diagonală; atunci matricea

$$D = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

este o matrice ortogonală, care transformă A într-o matrice diagonală.

5.8.25

- (1) Polinomul minimal al matricei A divide X^p , deci este de forma X^q . Cum polinomul caracteristic și polinomul minimal au aceiași factori ireductibili, deducem că $P_A(X) = X^n$.
- (2) Se folosește Lema 5.6.1.
- (3) Deoarece polinomul minimal al matricei A este de forma $\mu_A(X) = X^q$, matricea A este diagonalizabilă dacă și numai dacă $q = 1$. Altfel spus, singura matrice nilpotentă diagonalizabilă este matricea nulă.

5.8.26 Pentru implicația directă, înlocuim A cu J_A : urma unei matrice se păstrează dacă înlocuim matricea dată cu o matrice asemenea cu ea.

Pentru implicația inversă, folosim egalitatea

$$\text{Tr}(A^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A .

5.8.27 Exprimăm matricea $(A + \lambda B)^n$ sub forma

$$A^n + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots + \lambda^{n-1} C_{n-1} + \lambda^n B^n,$$

unde matricele C_1, C_2, \dots, C_{n-1} nu depind de λ .

Pentru o poziție fixată (i, j) , fie $a, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, b$ elementele de pe poziția (i, j) din matricele $A^n, C_1, \dots, C_{n-1}, B^n$. Ipoteza spune că polinomul

$$a + c_1 X + c_2 X^2 + \dots + c_{n-1} X^{n-1} + b X^n$$

se anulează pentru $n+1$ valori distincte ale variabilei X . Deducem că acest polinom este identic nul, deci, în particular, $a = b = 0$. Așadar, toate elementele matricelor A^n și B^n sunt nule, deci matricele A și B sunt nilpotente.

5.8.28

- (1) Polinomul minimal al lui A divide $X(X-1)$, deci are rădăcini simple.
- (2) Înlocuim A cu J_A : rangul și urma matricei nu se schimbă prin această înlocuire. Dacă A este idempotentă, atunci celulele Jordan din J_A au ordin 1 și corespund valorilor proprii 0 sau 1.
- (3) $A^2 = A \iff (I-A)^2 = I-A$.
- (4) Dacă $(A+B)^2 = A+B$, atunci $AB+BA = \mathbf{0}_n$. Înmulțim la stânga cu A , apoi la dreapta cu B această relație și obținem

$$AB = -ABA = BA.$$

Deci $AB = BA = \mathbf{0}_n$. Reciproca este imediată.

5.8.29 Demonstrația se face prin inducție după n . Pentru $n=2$, rezultă imediat că putem alege vectorul $v \neq 0$ pentru care Av și v sunt liniar independenți; în baza $\{v, Av\}$, matricea asemenea cu A are forma cerută.

Fie A o matrice de ordin $m+1$, cu $m \geq 2$. Scriem $A = \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$, unde B este o matrice de ordinul m . Putem presupune (efectuând eventual permutări de linii și coloane) că $B \neq \lambda I_m$. Există deci o matrice inversabilă $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ pentru care UPU^{-1} are forma cerută. Diagonala matricei $C = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UBU^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ este de forma $\text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \alpha, \beta\}$. Dacă $\alpha = 0$, am terminat; dacă nu, aplicăm cazul $n=2$ matricei $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ * & \beta \end{pmatrix}$.

5.8.30 Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ cele m valori proprii distincte, de multiplicități algebrice p_1, \dots, p_m . Atunci

$$b_{ij} = p_1 \lambda_1^{i+j-2} + p_2 \lambda_2^{i+j-2} + \dots + p_m \lambda_m^{i+j-2}.$$

Folosind un determinant de tip Vandermonde și proprietatea $\det(XY) = \det(X)\det(Y)$, obținem egalitatea

$$\det(b_{ij})_{i,j \in \overline{1,m}} = p_1 \dots p_m \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \neq 0.$$

6.6.1 Se verifică imediat, prin calcul direct, că aplicațiile de la punctele a) și c) sunt forme biliniare, în timp ce aplicația dată la punctul b) nu este formă biliniară.

6.6.2 Ținând cont de proprietățile matricelor avem:

$F(\alpha X + \beta Y, Z) = (\alpha X + \beta Y)AZ^t = \alpha XAZ^t + \beta YAZ^t = \alpha F(X, Z) + \beta F(Y, Z)$ și $F(X, \alpha Y + \beta Z) = XA(\alpha Y + \beta Z)^t = XA(\alpha Y^t + \beta Z^t) = \alpha XAY^t + \beta XAZ^t = \alpha F(X, Y) + \beta F(X, Z)$. Astfel, putem conchide că F este o formă biliniară. Forma biliniară nu este simetrică.

6.6.3 Dacă $x = 0_V$, atunci $F(x, y) = F(x, x) = 0$, deci în următoarea inegalitate $F(x, y)^2 \leq F(x, x)F(y, y)$ avem egalitate. Pe de altă parte, deoarece orice mulțime de vectori ce conține vectorul nul este liniar dependentă, problema este rezolvată în acest caz particular.

Putem presupune deci că $x \neq 0_V$, adică $F(x, x) > 0$. Considerăm $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar. Deoarece F este pozitiv definită, rezultă că $F(\alpha x + y, \alpha x + y) \geq 0$. Pe de altă parte, folosind axiomele din definiția formei biliniare, avem $F(\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha^2 F(x, x) + 2\alpha F(x, y) + F(y, y)$, deci $\alpha^2 F(x, x) + 2\alpha F(x, y) + F(y, y) \geq 0$, pentru orice $x, y \in V$.

Definim funcția $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = \alpha^2 F(x, x) + 2\alpha F(x, y) + F(y, y)$. Observăm că φ este o funcție polinomială de gradul doi, având coeficientul termenului dominant $F(x, x) > 0$ și cu proprietatea că $\varphi(\alpha) \geq 0$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Obținem că $\Delta \leq 0$, adică $4F(x, y)^2 - 4F(x, x)F(y, y) \leq 0$, de unde rezultă că $F(x, y)^2 \leq F(x, x)F(y, y)$.

Presupunem acum că $F(x, y)^2 = F(x, x)F(y, y)$, adică $\Delta = 0$. Atunci ecuația de gradul doi $\alpha^2 F(x, x) + 2\alpha F(x, y) + F(y, y) = 0$ are două rădăcini reale egale $\alpha_1 = \alpha_2$. Obținem deci că $F(\alpha_1 x + y, \alpha_1 x + y) = 0$, ceea ce conduce la $\alpha_1 x + y = 0$, deci vectorii x și y sunt liniar dependenți.

Reciproc, dacă x și y sunt liniar dependenți, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = \lambda x$. Rezultă că $F(x, y)^2 = \alpha^2 F(x, x)^2$, iar $F(x, x)F(y, y) = F(x, x)F(\alpha x, \alpha x) = \alpha^2 F(x, x)^2$. Din ultimele două relații obținem că $F(x, y)^2 = F(x, x)F(y, y)$.

6.6.4 a) Se verifică prin calcul direct că F este formă biliniară.

b) Matricea asociată formei biliniare F în baza canonică a lui \mathbb{R}^3 este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Vom folosi Teorema 6.1.7. Deoarece matricea asociată formei pătratice F în baza canonică B_1 este A , găsită la punctul precedent, iar matricea de trecere de la B_1 la B_2 este $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, rezultă că matricea asociată lui F în baza B_2 este:

$$B = C^T A C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6.6.5 a) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$;

b) $Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $Q(A) = \text{Tr}(A)$.

6.6.6 a) Aplicând procedeul descris în Teorema 6.2.7 avem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 9x_2^2 + 17x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 9x_2^2 + 17x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(64x_2^2 + 32x_2x_3 + 13x_3^2) \end{aligned}$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(8x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 13x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(8x_2 + 2x_3)^2 + \frac{25}{2}x_3^2$$

Cu notațiile:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \bar{x}_2 = 8x_2 + 2x_3 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

vom obține forma canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{8}\bar{x}_2^2 + \frac{25}{2}\bar{x}_3^2.$$

b) Ne aflăm în primul caz al metodei lui Gauss, prezentat în demonstrația Teoremei 6.2.7. Astfel

$$\begin{aligned} Q(x) &= (4x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{4}(16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + \\ &8x_2x_3 = \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 6x_2x_3. \end{aligned}$$

În continuare ne aflăm în cel de-al doilea caz al metodei lui Gauss. Pentru a obține un nou termen cu pătrat vom nota:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \end{cases}$$

Obținem forma canonică:

$$Q(x) = \frac{1}{4}\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 - 6\bar{x}_3^2.$$

c) Notând

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + x'_2 \\ x_2 = x'_1 - x'_2 \\ x_3 = x'_3 \\ x_4 = x'_4 \end{cases}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3' + 2x_1'x_4' + x_3'x_4' = (x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_2'^2 - x_4'^2 - 2x_3'x_4' - x_2'^2 + x_3'x_4' = \\ &(x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 - x_3'x_4' = (x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_2'^2 - \left(x_3' + \frac{1}{2}x_4'\right)^2 - \frac{3}{4}x_4'^2. \end{aligned}$$

În final găsim forma canonică

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{3}{4}\bar{x}_4^2.$$

d) Succesiv avem:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4) + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_2x_3 + x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - \\ &\frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 - x_2x_3 + x_2x_4 + 4x_3x_4 + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_2x_3 + x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \\ &\frac{7}{4}x_2^2 - x_3^2 - 7x_4^2 + x_2x_4 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{49}{16}x_2^2 + \frac{7}{4}x_2x_4\right) - x_3^2 - 7x_4^2 + 5x_3x_4 = \\ &(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{7}x_4^2 - x_3^2 - 7x_4^2 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{4}{7} \left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \right)^2 - x_3^2 - \frac{50}{7}x_4^2 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7} \left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \right)^2 - \left(x_3 - \frac{5}{2} \right)^2 +$$

$$\frac{25}{4}x_4^2 - \frac{50}{7}x_4^2 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7} \left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \right)^2 - \left(x_3 - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{25}{28}x_4^2.$$

Așadar, forma canonică va fi

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{4}{7}\bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{25}{28}\bar{x}_1^2.$$

6.6.7 a) Matricea asociată formei pătratice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei matrice sunt:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -56 \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Forma canonică a formei pătratice Q va fi:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{56}\bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_3^2.$$

$$\text{b) } Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2^2 + \frac{1}{5}\bar{x}_3^2.$$

$$\text{c) } Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{x}_3^2 + 2\bar{x}_4^2.$$

$$\text{d) } Q(x) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_4^2.$$

6.6.8 Formele canonice obținute prin metoda transformărilor ortogonale sunt:

$$\text{a) } Q(x) = -\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2 + 5\bar{x}_3^2;$$

$$\text{b) } Q(x) = -2\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2;$$

$$\text{c) } Q(x) = -\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 + 11\bar{x}_3^2.$$

6.6.9 În urma aplicării metodei lui Gauss obținem forma canonică $Q(x) = \frac{1}{5}\bar{x}_1^2 + \frac{5}{26}\bar{x}_2^2 + \frac{40}{13}\bar{x}_4^2$, unde $\bar{x}_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $\bar{x}_2 = \frac{26}{5}\bar{x}_2 - \frac{4}{4}\bar{x}_3$ și $\bar{x}_3 = x_3$.

Aplicând metoda lui Jacobi vom găsi forma canonică $Q(x) = \frac{1}{5}\bar{x}_1^2 + \frac{5}{26}\bar{x}_2^2 + \frac{13}{40}\bar{x}_4^2$, iar prin metoda transformărilor ortogonale obținem $Q(x) = 2\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 + 8\bar{x}_3^2$.

Toate formele canonice găsite conțin 3 termeni pozitivi, 0 negativi și 0 nuli, deci semnatura este (3,0,0).

6. SOLUȚII

6.6.10 a) Vom folosi Criteriul lui Sylvester. Deoarece matricea asociată formei pătratică Q este

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 2 & -1 & 2 \\ -1 & \alpha - 2 & -2 \\ 2 & -2 & \alpha + 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că minorii principali ai matricei A vor fi:

$$\Delta_1 = \alpha - 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha - 2 & -1 \\ -1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 2 & -1 & 2 \\ -1 & \alpha - 2 & -2 \\ 2 & -2 & \alpha + 1 \end{vmatrix}.$$

Pentru ca forma pătratică să fie pozitiv definită condiția necesară și suficientă este ca $\Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1, 3}$.

Rezultă că $\Delta_1 = \alpha - 2 > 0$, $\Delta_2 = (\alpha - 3)(\alpha - 1) > 0$ și $\Delta_3 = (\alpha - 3)^2(\alpha + 3) > 0$. Intersectând soluțiile acestor trei inecuații vom găsi $\alpha \in (3, +\infty)$.

b) Pentru $\alpha = 3$ obținem forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$. Matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ și astfel ecuația caracteristică va fi

$$A = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Obținem valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$, deci forma canonică a formei pătratică va fi $Q(x) = 6x_3^2$.

6.6.11 Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ și $\{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ baze ale \mathbb{K} -spațiilor vectoriale \mathbf{V} și respectiv \mathbf{W} . Atunci $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este bază a lui $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$. Definim $\varphi : (\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})^* \longrightarrow \mathbf{V}^* \otimes \mathbf{W}^*$ astfel încât pe elementele bazei spațiului vectorial $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})^*$ avem $\varphi((v_i \otimes w_j)^*) = v_i^* \otimes w_j^*$. Evident φ este transformare liniară. Cum $\{v_i^*\}_{i=\overline{1,n}}$ și $\{w_j^*\}_{j=\overline{1,m}}$ sunt baze ale \mathbb{K} -spațiilor vectoriale \mathbf{V}^* și respectiv \mathbf{W}^* , rezultă că $\{v_i^* \otimes w_j^*\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este bază a spațiului $\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{W}^*$. Astfel, φ este surjectivă. Deoarece

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})^* = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{W}) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V})^* \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{W})^* = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{W}^*)$,
rezultă că φ este izomorfism.

6.6.12 Presupunem prin absurd că există $v \in V$ și $w \in W$ astfel încât $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w$. Dacă vectorii v_1, v_2, v ar fi liniar independenți, din relația

$$(125) \quad v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 - v \otimes w = 0$$

și din Propoziția 6.5.6 ar rezulta că $w_1 = w_2 = w$, în contradicție cu liniar independența vectorilor w_1 și w_2 . Similar, vectorii w_1, w_2, w nu pot fi liniar independenți.

Așadar, v este o combinație liniară a vectorilor v_1 și v_2 , iar w este o combinație liniară a vectorilor w_1 și w_2 . Rezultă că

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad \text{și} \quad w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2,$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$. Este clar că $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ și $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Înlocuind în relația (125) și grupând termenii convenabil, obținem:

$$v_1 \otimes [(1 - \alpha_1\beta_1)w_1 - \alpha_1\beta_2w_2] + v_2 \otimes [-\alpha_2\beta_1w_1 + (1 - \alpha_2\beta_2)w_2] = 0.$$

Deoarece v_1, v_2 sunt liniar independenți, din Propoziția 6.5.6 rezultă că $(1 - \alpha_1\beta_1)w_1 - \alpha_1\beta_2w_2 = 0$ și $-\alpha_2\beta_1w_1 + (1 - \alpha_2\beta_2)w_2 = 0$. Deci w_1 și w_2 sunt liniar dependenți (o contradicție) sau $1 - \alpha_1\beta_1 = \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 1 - \alpha_2\beta_2 = 0$ (o contradicție, deoarece din $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1$ rezultă că $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \neq 0$).

6.6.13 a) Deoarece $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \aleph$, atunci există o mulțime I de cardinal \aleph astfel încât avem următorul izomorfism de spații vectoriale: $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$. În acest caz, $|I \times I| = |I|$ și astfel:

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{Q}^{(I \times I)} \simeq \mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{R}.$$

b) Deoarece $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, ca și \mathbb{Q} -spații vectoriale, rezultă că

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 \simeq (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R})^4 \simeq \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

ca și \mathbb{Q} -spații vectoriale.

c) Cum $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, rezultă că $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 4$, deci $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$.

Bibliografie

1. E. Arghiriade, *Curs de algebră superioară*, vol I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962.
2. Gh. Atanasiu, E. Stoica, *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, 2003.
3. G. Bercu, *Algebră liniară. Geometrie analitică și diferențială*, Editura Fair Partners, 2009.
4. E. Cioară, *Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială*, Editura Fair Partners, 2005.
5. L. Dăuș, *Algebră liniară și geometrie analitică*, Editura ConsPress, București, 2009.
6. T. Dumitrescu, *Algebră*, Editura Universității din București, București, 2006.
7. P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, 2nd ed, Undergraduate Texts in Mathematics, Editura Springer, 1987.
8. R. Horn, C. Johnson, *Analiza matricială*, Editura Theta, București, 2001.
9. I. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1991.
10. H. Ikramov, *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*, Editura Mir, Moscova, 1977.
11. D. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley Publishing, 2003.
12. C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joiță, *Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX-XII*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
13. C. Năstăsescu, C. Niță, I. Stănescu, *Matematică. Elemente de algebră superioară*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
14. M. Pavel, *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Vol. I, Editura Agir, București, 2002.
15. I. Pop, Gh. Neagu, *Algebră liniară și geometrie analitică în plan și spațiu*, Editura Plumb, Bacău, 1996.
16. A. L. Pletea, A. Corduneanu, M. Lupan, *Lecții de algebra liniară*, Editura Politehniun, Iași, 2005.
17. I. Proskouriakov, *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*, Editura Mir, Moscova, 1989.
18. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Thomson Learning, 1988.
19. C. Udriște, *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Geometry Balkan Press, 1996.
20. C. Udriște ș.a., *Algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

Index

- algoritmul lui Euclid, 21
- automorfism de grupuri, 7

- bază, 70
- bază ortogonală, 74
- bază ortonormată, 75

- caracteristica unui corp, 12
- ciclu, 13
- combinație liniară, 35, 66
- complement algebric, 37
- complement ortogonal, 76
- coordonate, 71
- corp, 10
- corp comutativ, 10
- Criteriul lui Sylvester, 160

- determinant, 32, 163
- determinant-regula lui Laplace, 36
- dezvoltarea unui determinant după o linie (coloană), 37
- distanță, 74
- domeniu de integritate, 9
- dualul algebric, 83

- element inversabil, 4
- element neutru, 4
- endomorfism
 - adjunct, 96
 - autoadjunct, 97
 - otogonal, 98

- finit generat, 68
- formă biliniară, 145
- formă biliniară negativ semidefinită, 145
- formă biliniară simetrică negativ definită, 145
- formă biliniară simetrică pozitiv definită, 145
- formă biliniară simetrică pozitiv semidefinită, 145
- formă biliniară simetrică, 145
- formă multiliniară, 161
- formă multiliniară alternată, 162
- formă pătratică, 148
- forma pătratică negativ definită, 159
- forma pătratică pozitiv definită, 159

- gradul unui polinom, 17
- grup, 4

- grup abelian, 4
- grup finit, 4

- ideal, 9
- ideal propriu, 9
- inel, 8
- inel de polinoame într-o nedeterminată, 17
- inel factor, 10
- inel integru, 9
- inel unitar, 8
- inversiune, 15
- izomorfism de corpuri, 25
- izomorfism de grupuri, 7
- izomorfism de inele, 10

- legea de asociativitate generalizată, 6
- liniar dependent, 67
- liniar independent, 67

- matrice adjunctă, 42
- matrice antisimetrică, 40
- matrice asociată formei pătratice, 149
- matrice coloană, 28
- matrice cu blocuri, 48
- matrice de tipul (m, n) , 27
- matrice diagonală, 40
- matrice eşalon, 44
- matrice echivalente pe linii, 44
- matrice elementară, 46
- matrice idempotentă, 58
- matrice inversabilă, 41
- matrice involutivă, 58
- matrice linie, 28
- matrice nesingulară, 41
- matrice ortogonală, 41
- matrice pătratică, 28
- matrice simetrică, 40
- matrice transpusă, 32
- matrice unitate, 31
- matricea asociată formei biliniare, 146
- metoda Gauss, 151
- minor, 36
- minor complementar, 36
- morfism de grupuri, 7
- morfism de inele, 10

6. INDEX

- n-grupul liniar general, 42
- n-grupul ortogonal, 43
- n-grupul ortogonal special, 43
- normă, 74

- operație algebrică, 4
- operație asociativă, 4
- operație comutativă, 4
- ordinul de multiplicitate al unei rădăcini, 19
- ordinul unui element, 8
- ordinul unui grup, 6

- parte stabilă, 4
- permutări impare, 15
- permutări pare, 15
- polara formei pătratice, 148
- polinom ireductibil, 21
- polinom reductibil, 21
- polinom unitar, 17
- produs direct de grupuri, 5
- produs scalar, 73
- produs tensorial, 169
- proiecții ortogonale, 100
- proprietățile determinantilor, 33
- proprietatea de aditivitate, 81
- proprietatea de omogeneitate, 81

- rangul unei matrice, 40
- reducere la forma canonică, 150

- signatura formei pătratice, 158
- signatura unei permutări, 15
- sistem algebric compatibil, 51
- sistem algebric incompatibil, 51
- sistem algebric liniar, 50
- sistem Cramer, 55
- sistem de generatori, 68
- sistem omogen, 56
- spațiu vectorial, 63
- spațiu vectorial euclidian, 73
- spații vectoriale izomorfe, 88
- subcorp, 11
- subgrup, 6
- subinel, 10
- subspații suplimentare, 66
- subspațiu vectorial, 64
- subspațiul generat, 67
- sumă directă, 66
- suma subspațiilor, 65

- Teorema inertiei, 158
- Teorema lui Gauss, 150
- Teorema lui Jacobi, 153
- transformare elementară, 44
- transformare liniară, 81
- transformare liniară
 - automorfism, 82
 - endomorfism, 82
 - epimorfism, 81
 - izomorfism, 81
 - monomorfism, 81
 - omotetii, 83
 - proiecția, 83
 - transformarea identitate, 83
- transformare liniară
 - defectul, 87
 - ecuația matriceală, 91
 - formula de schimbare a matricei unei transformări liniare, 95
 - imagea, 86
 - matricea asociată, 91
 - nucleul, 86
 - rangul, 87
- transformarea nulă, 83
- transpoziție, 13

- urma matricei, 58

- vectori ortogonali, 74