Curs 6

Din cursul trecut

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Mulțimea S-sortată a termenilor cu variabile din X, $T_\Sigma(X)$, este cea mai mică mulțime de șiruri finite peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s \in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică:

1. $X \subseteq T_\Sigma(X)$,
2. Dacă $\sigma :\to s$ în Σ, atunci $\sigma \in T_\Sigma(X)_s$,
3. Dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ în Σ și $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$, or. $1 \leq i \leq n$, atunci $\sigma(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)_s$.

- $t \in T_\Sigma(X)$ se numește termen (expresie).
- Notăm cu $Var(t)$ mulțimea variabilelor care apar în termenul t.
- $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$

Din cursul trecut

Mulțimea S-sortată a termenilor $T_\Sigma(X)$ este o (S,Σ)-algebră, numită algebra termenilor cu variabile din X și notată tot $T_\Sigma(X)$, cu operațiile definite astfel:

- pt. or. $\sigma :\to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma := \sigma \in T_\Sigma(X)_s$$
- pt. or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ din Σ, operația corespunzătoare este
$$T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1\ldots s_n} \to T_\Sigma(X)_s$$
$$T_\sigma(t_1,\ldots,t_n) := \sigma(t_1,\ldots,t_n)$$
or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.

- T_Σ algebra termenilor fără variabile $(X = \emptyset)$

Cuprins

Algebre inițiale

Algebră inițială

Fie

- (S, Σ) o signatură multisortată,
- $\mathfrak{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{I} \in \mathfrak{K}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ dacă pentru orice $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$

există un unic (S, Σ)-morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{I}$ este inițială în $\mathfrak{K}$ și $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, atunci $\mathcal{A}$ este inițială în $\mathfrak{K}$.

Demonstrație

Cum $\mathcal{A} \in \mathfrak{K}$ astfel încât $\mathcal{A} \simeq \mathcal{I}$, fie $\iota_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ un izomorfism.

Fie $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$. Cum $\mathcal{I}$ este inițială, există un unic morfism $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Demonstrăm că există un unic morfism $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$:

- **Existența.** Considerăm $h := \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Deoarece compunerea morfismelor este morfism, obținem că h este morfism.
- **Unicitatea.** Presupunem că există un alt morfism $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Atunci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ este morfism, deci $\iota_{\mathcal{A}}^{-1}; g = f_{\mathcal{B}}$. Rezultă că $g = \iota_{\mathcal{A}}; f_{\mathcal{B}} = h$. $\square$

Proprietăți

Propoziție

Dacă $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, atunci $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$.

Demonstrație

Cum $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt inițiale în $\mathfrak{K}$, există

- un unic morfism $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ și
- un unic morfism $g : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$.

Avem $f;g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$, $1_{\mathcal{A}_1} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_1$ inițială, deci $f;g = 1_{\mathcal{A}_1}$.

Similar obținem $g;f = 1_{\mathcal{A}_2}$.

În concluzie $\mathcal{A}_1 \simeq \mathcal{A}_2$. $\square$

(S,Σ)-algebra inițială

Fie (S,Σ) o signatură multisortată.

- Considerăm $\mathfrak{K}$ clasa tuturor (S,Σ)-algebrelor.
- $\mathcal{I}$ este (S,Σ)-algebră inițială dacă pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$ există un unic morfism $f : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$.

Teoremă

Pentru orice (S,Σ)-algebră $\mathcal{B}$, există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

- $f(t)$ este interpretarea termenului $t \in T_\Sigma$ în $\mathcal{B}$.

Demonstrație

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră.
Demonstrăm că există un unic morfism $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$.

Existența. Definim $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}f(t) \text{ este definit"})$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1} \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ astfel încât $f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Din principiului inducției pe termeni, $f(t)$ este definită pt. or. $t \in T_\Sigma$.
Demonstrăm că f este morfism.

- dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $f_s(T_\sigma) = f_s(\sigma) = B_\sigma$;
- dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$, atunci $f_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n))$.

Demonstrație (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma \to \mathcal{B}$ un morfism.
Demonstrăm că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)")$$

- *pasul inițial:* dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = g_s(T_\sigma) = B_\sigma = f_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in (T_\Sigma)_{s_1}, \ldots, t_n \in (T_\Sigma)_{s_n}$ a. î. $g_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t_n)$, atunci

$$g_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = g_s(T_\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(t_1), \ldots, f_{s_n}(t_n)) = f_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)).$$

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = f_s(t)$, oricare $t \in (T_\Sigma)_s$, deci $g = f$.

$\square$

Consecință

Corolar

T_Σ este (S, Σ)-algebra inițială.

Exemplu

Exemplu

- (S, Σ) signatură multisortată
- (S, Σ)-algebra $\mathcal{D} = (D_S, D_\Sigma)$
  - $D_s := \mathbb{N}$, or. $s \in S$,
  - dacă $\sigma : \to s$, atunci $D_\sigma := 0$
  - dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, atunci $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + \max(k_1, \ldots, k_n)$.
- $f : T_\Sigma \to \mathcal{D}$ unicul morfism
- Ce reprezintă valoarea $f(t)$ pentru un termen t?
  - $f(t)$ este adâncimea arborelui $arb(t)$.

Observații

- Un tip abstract de date este o clasă $\mathfrak{C}$ de (S,Σ)-algebre cu proprietatea că oricare două (S,Σ)-algebre din $\mathfrak{C}$ sunt izomorfe ($\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathfrak{C} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.)
- Considerăm clasa de (S,Σ)-algebre

$$\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)} = \{\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\ (S,\Sigma)\text{-algebră inițială}\}$$

- $\mathfrak{I}_{(S,\Sigma)}$ este un tip abstract de date.
- $T_\Sigma \in \mathfrak{I}_{(S,\Sigma)}$.
- Un modul în **Maude** (care conține doar declații de sorturi și operații) definește un astfel de tip abstract de date și construiește efectiv algebra T_Σ.

Algebre libere

Algebră liberă

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Definiție

O (S, Σ)-algebră $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ este liber generată de X dacă

- $X \subseteq A_S$, i.e. există funcția S-sortată incluziune a lui X în A_S $i_A : X \hookrightarrow A_S$,
- pentru orice (S, Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ și orice funcție S-sortată $f : X \to B_S$, există un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{f} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât

$$i_A; \tilde{f} = f.$$

Proprietăți

Teoremă

Dacă $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ sunt liber generate de X, atunci $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Demonstrație

- Fie $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ și $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ două (S, Σ)-algebre liber generate de X.
- Notăm cu $i_A : X \hookrightarrow A_S$ și $i_B : X \hookrightarrow B_S$ funcțiile S-sortate incluziune ale lui X în A_S și, respectiv, B_S.
- Demonstrația are patru pași:

Demonstrație (cont.)

1. Deoarece $\mathcal{A}$ este liber generată de X, există un unic (S, Σ)-morfism $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ astfel încât $i_A; f = i_B$.
2. Similar, deoarece $\mathcal{B}$ este liber generată de X, există un unic (S, Σ)-morfism $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ astfel încât $i_B; g = i_A$.
3. Avem $i_A; (f; g) = (i_A; f); g = i_B; g = i_A$ și $i_A; 1_{\mathcal{A}} = i_A$. Cum $\mathcal{A}$ este liber generată de X, morfismele $f; g$ și $1_{\mathcal{A}}$ sunt unice cu proprietatea de mai sus, deci $f; g = 1_{\mathcal{A}}$.
4. Avem $i_B; (g; f) = (i_B; g); f = i_A; f = i_B$ ș i $i_B; 1_{\mathcal{B}} = i_B$. Cum $\mathcal{B}$ este liber generată de X, obținem că $g; f = 1_{\mathcal{B}}$.

Din egalitățile obținute la 3 și 4, deducem că f și g sunt izomorfisme.

$\square$

Evaluarea termenilor în algebre

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X o mulțime de variabile.

Teoremă

Fie $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$ o (S, Σ)-algebră. Orice funcție S-sortată

$$e : X \to B_S$$

se extinde unic la un (S, Σ)-morfism

$$\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}.$$

- e dă interpretarea, evaluarea variabilelor în mulțimi S-sortate.
- $\tilde{e}$ dă interpretarea, evaluarea termenilor în algebre.

Demonstrație.

Fie $\mathcal{B}$ o (S,Σ)-algebră și $e : X \to B_S$ o funcție S-sortată.
Demonstrăm că există un unic morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ astfel încât $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Existența. Definim $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = \text{"}\tilde{e}(t) \text{ este definit"}).$$

- *pasul inițial:*
  - dacă $x \in X_s$, atunci $\tilde{e}_s(x) := e_s(x)$,
  - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $\tilde{e}_s(\sigma) := B_\sigma$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)$ definite, atunci $\tilde{e}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{e}_{s_n}(t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $\tilde{e}(t)$ este definit pentru orice $t \in T_\Sigma(X)$. Evident, $\tilde{e}_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Trebuie arătat că $\tilde{e}$ este morfism - exercițiu!

Demonstrație. (cont.)

Unicitatea. Fie $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ un morfism astfel încât $g_s(x) = e_s(x)$, or. $x \in X_s$. Demonstrăm că $g = \tilde{e}$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = \tilde{e}_s(t)").$$

- *pasul inițial:*
  - dacă $x \in X_s$, atunci $g_s(x) = e_s(x) = \tilde{e}_s(x)$,
  - dacă $\sigma :\to s \in \Sigma$, atunci $g_s(\sigma) = B_\sigma = \tilde{e}_s(\sigma)$.
- *pasul de inducție:* dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$ și $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ astfel încât $g_{s_1}(t_1) = \tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n) = \tilde{e}_{s_n}(t_n)$, atunci $g_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = B_\sigma(g_{s_1}(t_1), \ldots, g_{s_n}(t_n)) = B_\sigma(\tilde{e}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{e}_{s_n}(t_n)) = \tilde{e}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n))$.

Conform principiului inducției pe termeni, $g_s(t) = \tilde{e}_s(t)$, oricare $t \in T_\Sigma(X)_s$, deci $g = \tilde{e}$.

$\square$

Consecința

Corolar

$T_\Sigma(X)$ este (S,Σ)-algebra liber generată de X.

- Pentru a evalua un termen t cu variabile din X într-o (S,Σ)-algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$, este suficient să evaluăm variabilele din X în B_S, i.e. să definim o funcție $e : X \to B_S$.

Exemple

Exemplu

$NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat, + : nat\ nat \to nat, \star : nat\ nat \to nat\}$

X: $X_{nat} = \{x, y\}$

$T_{NATEXP}(X)$: $T_{NATEXP}(X)_{nat} = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots,$
$+(0,0), +(0,x), +(x,y), \star(0, +(s(0), 0)), \ldots\}$

$NATEXP$-algebra $\mathcal{A}$: mulțimea suport $A_{nat} = \mathbb{Z}_4$ și operațiile obișnuite.

O interpretare a termenilor din $T_{NATEXP}(X)$ în $\mathcal{A}$

- definim $e : X \to A_{nat}$, $e(x) := 1$, $e(y) := 3$

Exemple de interpretări ale termenilor:

- $\tilde{e}(+(x,y)) = A_+(e(x), e(y)) = 1 + 3 = 0(mod\ 4)$
- $\tilde{e}(\star(s(x), s(s(0)))) = A_\star(A_s(e(x)), A_s(A_s(A_0))) =$
  $(1+1) \star (0+1+1) = 2 \star 2 = 0(mod\ 4)$

Exemple

Exemplu

$STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$

- $\Sigma = \{0 : \to elem,\ empty : \to stiva, push : elem\ stiva \to stiva,$
  $pop : stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$

$STIVA$-algebra $\mathcal{A}$:

- Mulțimea suport: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- Operații: $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \ldots n_k) := nn_1 \ldots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) := \lambda$, $A_{pop}(n) := \lambda$, $A_{pop}(n_1 n_2 \ldots n_k) := n_2 \ldots n_k$, pt $k \geq 2$
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \ldots n_k) := n_1$, pt. $k \geq 1$

$STIVA$-algebra $\mathcal{B}$:

- Mulțimea suport: $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
- Operații: $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$, pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$

Exemple

Exemplu (Cont.)

X: $X_{elem} = \{x, y\}$, $X_{stiva} = \{s\}$

Fie $t := push(x, push(y, s)) \in T_{STIVA}(X)_{stiva}$.

O interpretare a lui t în $\mathcal{A}$:

- $e : X \to A$, $e(x) := 5$, $e(y) := 3$, $e(s) := 6\ 7$
- $\tilde{e}(t) = A_{push}(e(x), A_{push}(e(y), e(s))) = 5\ 3\ 6\ 7$

O interpretare a lui t în $\mathcal{B}$:

- $e : X \to B$, $e(x) := 0$, $e(y) := 0$, $e(s) := 10$
- $\tilde{e}(t) = B_{push}(e(x), B_{push}(e(y), e(s))) = (10 + 1) + 1 = 12$

Proprietăți

Propoziție

Fie $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un (S, Σ)-morfism surjectiv și X o mulțime de variabile. Pentru orice (S, Σ)-morfism $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$, există un (S, Σ)-morfism $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ astfel încât $g; h = f$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "h"] & \mathcal{B} \\
 & T_\Sigma(X) \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dotted, "g"]
\end{tikzcd}$$

Demonstrație.

- Fie $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ un morfism.
- Cum h este surjectiv, pt. or. $x \in X_s$, există $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$.
- Pentru orice $s \in S$ și $x \in X_s$, alegem $a \in A_s$ astfel încât $h_s(a) = f_s(x)$ și definim $e_s(x) := a$.
- Deci $e : X \to A$.
- Considerăm $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ extensia unică a lui $e : X \to A$.
- Cum $T_\Sigma(X)$ este algebră liberă și $(\tilde{e}; h)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$, obținem că $\tilde{e}; h = f$.
- Luăm $g := \tilde{e}$.

$\square$

Proprietăți

Notație. Dacă $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ este un (S, Σ)-morfism și $X \subseteq A_S$, atunci $f \restriction_X$ este restricția lui f la X, i.e. $(f \restriction_X)_s(x) = f_s(x)$, or. $x \in X_s$.

Propoziție

Fie $\mathcal{B}$ o (S, Σ)-algebră și X o mulțime de variabile. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ și $g : T_\Sigma(X) \to \mathcal{B}$ sunt morfisme, atunci

$$g = f \Leftrightarrow g \restriction_X = f \restriction_X .$$

Demonstrație.

Exercițiu! Se demonstrează că $g = f$ prin inducție pe termeni:

$$(\mathbf{P}(t) = "g_s(t) = f_s(t)").$$

$\square$

Proprietăți

Propoziție

Dacă $X \simeq Y$, atunci $T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)$.

Demonstrație.

Exercițiu! A se vedea demonstrația pentru:

două algebre liber generate de X sunt izomorfe.

$\square$

Concluzii

Fie (S, Σ) o signatură multisortată și X mulțime de variabile.

- T_Σ este (S, Σ)-algebră inițială.
- $T_\Sigma(X)$ este (S, Σ)-algebră liber generată de X.
- T_Σ este liber generată de $\emptyset$.

Pe săptămâna viitoare!