Probleme seminar LFA - II - *CF*

1. Definiți câte o CFG pentru următoarele limbaje independente de context peste alfabetul $\{a, b\}$ și argumentați răspunsul:

1.1. $L_1 = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

Un exemplu de răspuns: $G_1 = \{S \longrightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda\}$

1.2. $L_2 = \{w \mid |w|_a \geq |w|_b\}$

Un exemplu de răspuns: $G_2 = \{S \longrightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid aS \mid \lambda\}$

1. Soluții detaliate

1.1. $G_1 = \{S \longrightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid \lambda\}$

$\boxed{L(G_1) \subseteq L_1}$ evident pentru că la orice pas al unei derivări în G_1 avem $|w|_a = |w|_b$

$\boxed{L(G_1) \supseteq L_1}$

dem. prin inducție asupra lui $n = |w|$ următoarea propoziție:
$P(n) : (w \in L_1 \wedge |w| \leq 2n) \Longrightarrow w \in L(G_1)$

"$n = 0$" și "$n = 1$" evidente

"$n \longrightarrow n+1$"

Fie $w \in L_1$, $|w| = 2n + 2$. Putem avea următoarele cazuri:

- $\boxed{w = aw'b \text{ sau } w = bw'a}$

  Tratăm subcazul $w = aw'b$ (subcazul $w = bw'a$ se tratează analog). Avem $w' \in L_1$ și $|w'| = 2n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem $S \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} w'$ deci avem următoarea derivare în G_1 pentru w:

$$S \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSb \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} aw'b = w$$

- $\boxed{w = aw'a \text{ sau } w = bw'b}$

  Tratăm subcazul $w = aw'a$ (subcazul $w = bw'b$ se tratează analog). Avem $|w'|_b = |w'|_a + 2$ și deci putem avea una dintre următoarele situații:

  - $w' = bubv$ cu $u, v \in L_1 - \{\lambda\}$
  - $w' = ubvb$ cu $u, v \in L_1 - \{\lambda\}$
  - $w' = b^2 u$ cu $u \in L_1 - \{\lambda\}$
  - $w' = bub$ cu $u \in L_1 - \{\lambda\}$
  - $w' = ub^2$ cu $u \in L_1 - \{\lambda\}$

  În toate aceste situații avem evident $|u|, |v| \leq 2n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem $S \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} u$, $S \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} v$, deci avem următoarele derivări în G_1 pentru w în fiecare situație de mai sus:

  - $S \underset{G_1}{\Longrightarrow} SS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSbS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abSS \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} abuS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abubSa \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} abubva = w$
  - $S \underset{G_1}{\Longrightarrow} SS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSbS \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} aubS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aubSS \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} aubvS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aubvbSa \underset{G_1}{\Longrightarrow} aubvba = w$

- $S \underset{G_1}{\Longrightarrow} SS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSbS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abbSa \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} abbua = w$
- $S \underset{G_1}{\Longrightarrow} SS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSbS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abSS \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} abuS \underset{G_1}{\Longrightarrow} abubSa \underset{G_1}{\Longrightarrow} abuba = w$
- $S \underset{G_1}{\Longrightarrow} SS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aSbS \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} aubS \underset{G_1}{\Longrightarrow} aubbSa \overset{+}{\underset{G_1}{\Longrightarrow}} aubba = w$

1.2. $G_2 = \{S \longrightarrow SS \mid aSb \mid bSa \mid aS \mid \lambda\}$

$\boxed{L(G_2) \subseteq L_2}$ evident pentru că la orice pas al unei derivări în G_2 avem $|w|_a \geq |w|_b$

$\boxed{L(G_2) \supseteq L_2}$

dem. prin inducție asupra lui $n = |w|$ următoarea propoziție:
$P(n) : (w \in L_2 \wedge |w| \leq n) \Longrightarrow w \in L(G_2)$

"$n = 0$", "$n = 1$", "$n = 2$" evidente

"$n \longrightarrow n+1$"

Fie $w \in L_2$, $|w| = n+1$, $n \geq 2$. Putem avea următoarele cazuri:

- $\boxed{w = aw' \text{ cu } w' \in L_2}$

  Avem, conform ipotezei de inducție $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w'$ deci avem următoarea derivare în G_2 pentru w:

  $$S \underset{G_2}{\Longrightarrow} aS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} aw' = w$$

- $\boxed{w = w'a \text{ cu } w' \in L_2}$

  Avem, conform ipotezei de inducție $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w'$ deci avem următoarea derivare în G_2 pentru w:

  $$S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} w'S \underset{G_2}{\Longrightarrow} w'aS \underset{G_2}{\Longrightarrow} w'a = w$$

- $\boxed{w = aw' \text{ cu } w' \notin L_2}$

  Evident avem $|w'|_b = |w'|_a + 1$ și deci putem avea una dintre următoarele situații:

  - $w' = bu$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
  - $w' = ubv$ cu $u, v \in L_2 - \{\lambda\}$
  - $w' = ub$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$

  În toate aceste situații avem evident $|u|, |v| \leq n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem

  $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u$, $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} v$, deci avem următoarele derivări în G_2 pentru w în fiecare situație de mai sus:

  - $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \underset{G_2}{\Longrightarrow} aSbS \underset{G_2}{\Longrightarrow} abS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} abu = w$
  - $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \underset{G_2}{\Longrightarrow} aSbS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} aubS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} aubv = w$
  - $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} aSb \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} aub = w$

- $\boxed{w = w'a \text{ cu } w' \notin L_2}$ se tratează analog cu precedentul

Evident avem $|w'|_b = |w'|_a + 1$ și deci putem avea una dintre următoarele situații:

- $w' = bu$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = ubv$ cu $u, v \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = ub$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$

În toate aceste situații avem evident $|u|, |v| \le n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u$, $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} v$, deci avem următoarele derivări în G_2 pentru w în fiecare situație de mai sus:

- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} bSa \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} bua = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uS \underset{G_2}{\Longrightarrow} ubSa \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} ubva = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uS \underset{G_2}{\Longrightarrow} ubSa \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uba = w$

- $\boxed{w = bw' \text{ cu } w' \in L_2}$

Evident avem $|w'|_a \ge |w'|_b + 1$ și deci putem avea una dintre următoarele situații:

- $w' = au$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = ua$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = uav$ cu $u, v \in L_2 - \{\lambda\}$

În toate aceste situații avem evident $|u|, |v| \le n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u$, $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} v$, deci avem următoarele derivări în G_2 pentru w în fiecare situație de mai sus:

- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \underset{G_2}{\Longrightarrow} bSaS \underset{G_2}{\Longrightarrow} baS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} bau = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} bSa \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} bua = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \underset{G_2}{\Longrightarrow} bSaS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} buaS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} buav = w$

- $\boxed{w = w'b \text{ cu } w' \in L_2}$ se tratează analog cu precedentul

Evident avem $|w'|_a \ge |w'|_b + 1$ și deci putem avea una dintre următoarele situații:

- $w' = au$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = ua$ cu $u \in L_2 - \{\lambda\}$
- $w' = uav$ cu $u, v \in L_2 - \{\lambda\}$

În toate aceste situații avem evident $|u|, |v| \le n$ și deci, conform ipotezei de inducție, avem $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} u$, $S \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} v$, deci avem următoarele derivări în G_2 pentru w în fiecare situație de mai sus:

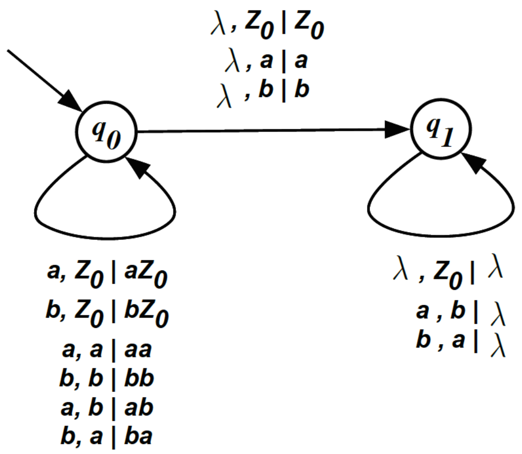
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} aSb \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} aub = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uS \underset{G_2}{\Longrightarrow} uaSb \underset{G_2}{\Longrightarrow} uab = w$
- $S \underset{G_2}{\Longrightarrow} SS \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uS \underset{G_2}{\Longrightarrow} uaSb \overset{+}{\underset{G_2}{\Longrightarrow}} uavb = w$

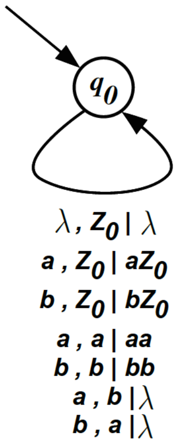
2. Definiți cel puțin câte două PDA-uri care să recunoască (unul dintre ele să recunoască prin vidarea stivei și altul prin stări finale) fiecare din limbajele de la exercițiul 1.

1. Câteva răspunsuri posibile

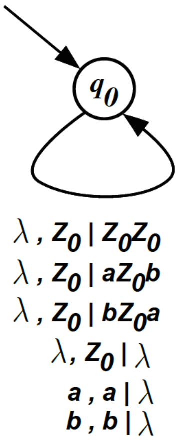
2.1. $L_1 = \{w \mid |w|_a = |w|_b\}$

- prin vidarea stivei:

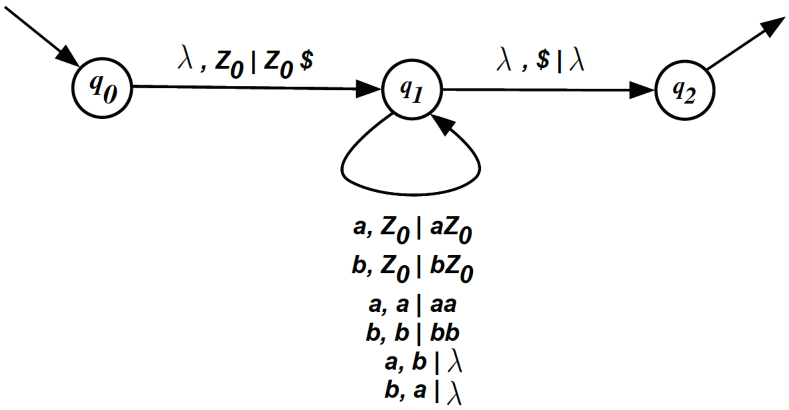


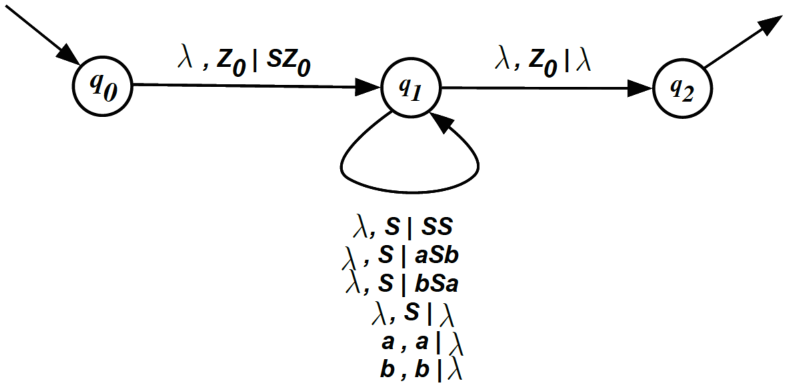


sau



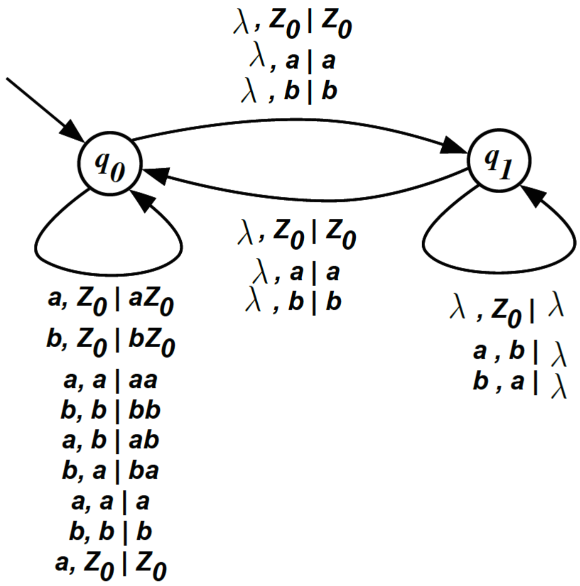
- prin stări finale și vidarea stivei:

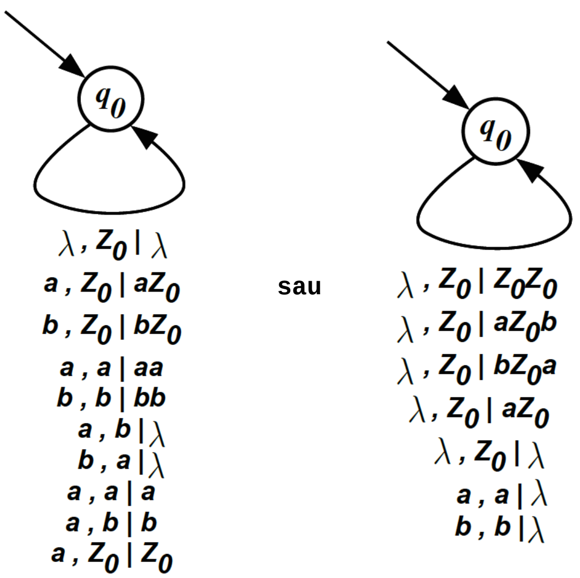




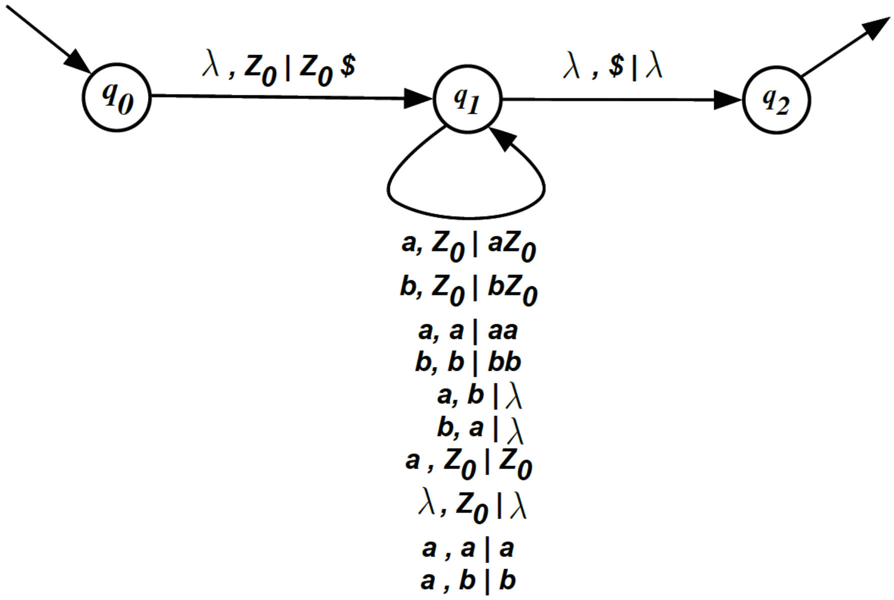
2.2. $L_2 = \{w \mid |w|_a \geq |w|_b\} \subset \{a, b\}^*$

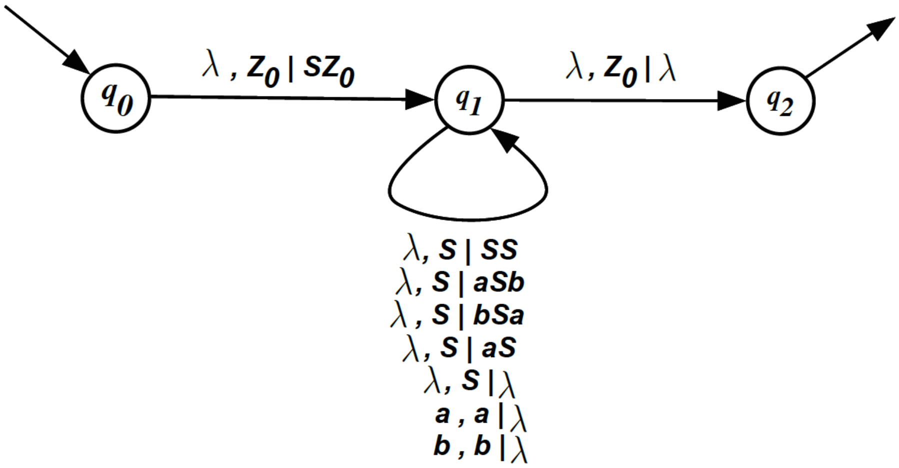
- prin vidarea stivei:





- prin stări finale și vidarea stivei:





3. Treceți în FNC gramaticile pe care le-ați definit la exercițiul 1.

4. Demonstrați că următoarele limbaje sunt independente de context:

4.1. $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 1\}$

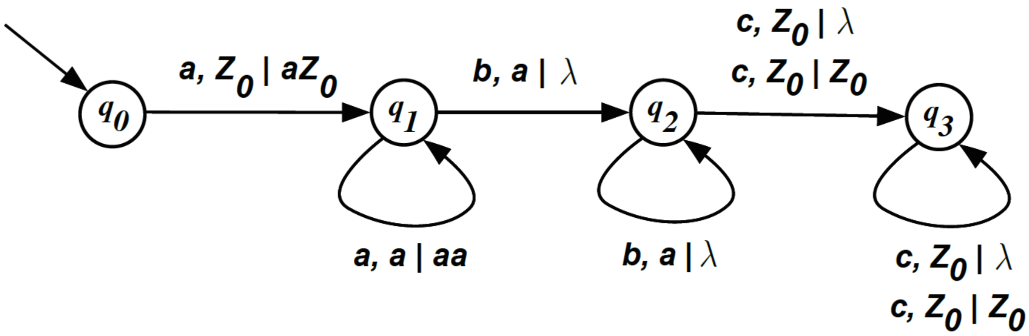
Un exemplu de răspuns

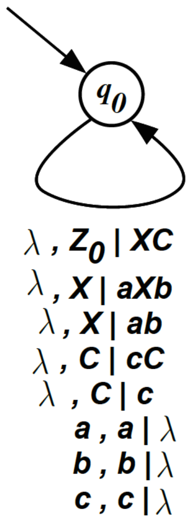
$$G_1 = \begin{cases} S \longrightarrow XC \\ X \longrightarrow aXb \mid ab \\ C \longrightarrow cC \mid c \end{cases}$$ este o CFG cu $L(G_1) = L_1$

Alt exemplu de răspuns

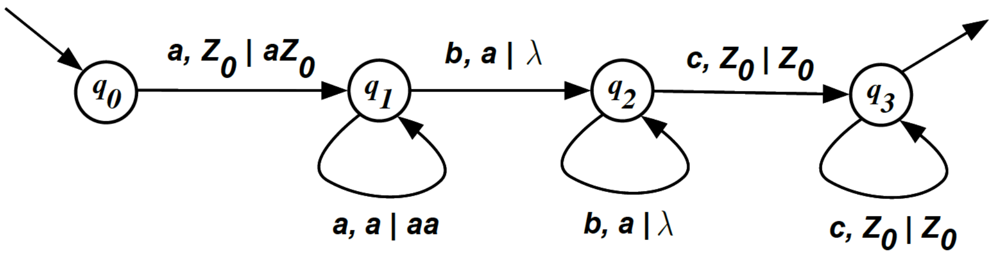
L_1 este recunoscut de oricare dintre următoarele PDA-uri :

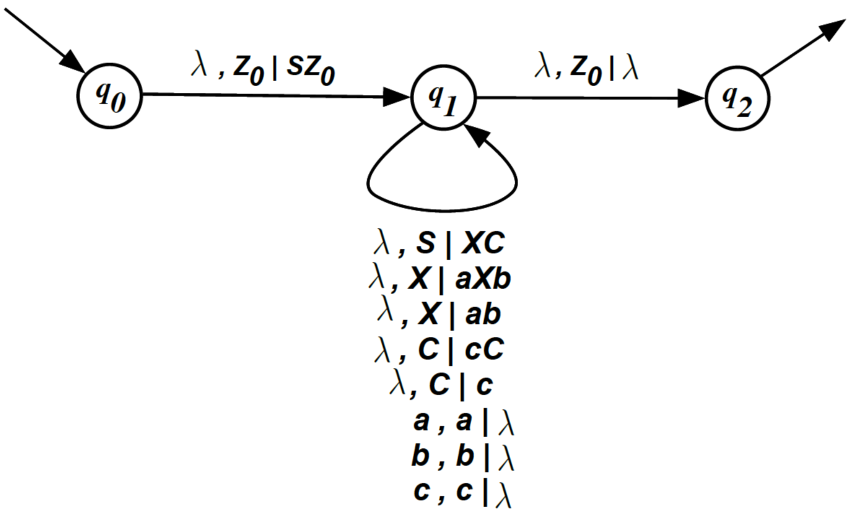
- care recunosc prin vidarea stivei :





- care recunosc prin stări finale :





Alt exemplu de răspuns

$L_1 = L'L''$, unde $L' = \{a^k b^k \mid k \geq 1\} \in \text{LIN} \subset \text{CF}$ și $L'' = a^+ \in \text{REG} \subset \text{CF}$, iar CF este închisă la concatenare.

4.2. $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$

Analog cu precedentul !

4.3. $L_3 = \{a^m b^n c^m \mid m, n \geq 1\}$

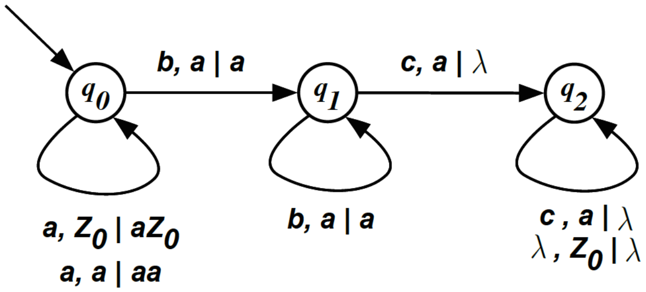
Un exemplu de răspuns

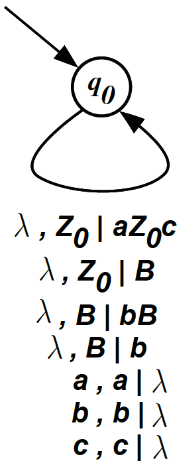
$G_3 = \begin{cases} S \longrightarrow aSc \mid B \\ B \longrightarrow bB \mid b \end{cases}$ este o CFG cu $L(G_3) = L_3$

Alt exemplu de răspuns

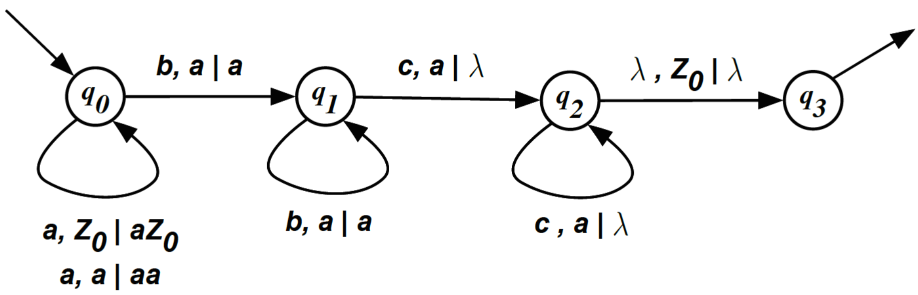
L_3 este recunoscut de oricare dintre următoarele PDA-uri :

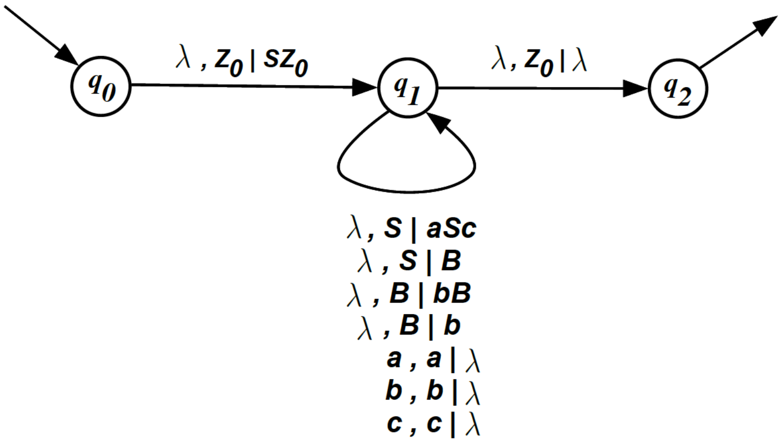
- care recunosc prin vidarea stivei :





- care recunosc prin stări finale :





4.4. $L_4 = \{a^m b^n c^p \mid m, n, p \geq 1 \wedge m \neq n\}$

Un exemplu de răspuns

$$G_4 = \begin{cases} S \longrightarrow XC \\ C \longrightarrow cC \mid c \\ X \longrightarrow aXb \mid aAb \mid aBb \\ A \longrightarrow aA \mid a \\ B \longrightarrow bB \mid b \end{cases}$$ este o CFG cu $L(G_4) = L_4$

Alt exemplu de răspuns

L_3 este recunoscut de următorul PDA : ....etc.....

4.5. $L_5 = \{a^m b^n c^p \mid m, n, p \geq 1 \wedge n \neq p\}$

Analog cu precedentul !

4.6. $L_6 = \{a^m b^n c^p \mid m, n, p \geq 1 \wedge m \neq p\}$

Un exemplu de răspuns

$$G_6 = \begin{cases} S \longrightarrow aSc \mid aAc \mid aCc \\ A \longrightarrow aA \mid aB \\ C \longrightarrow Cc \mid Bc \\ B \longrightarrow bB \mid b \end{cases}$$ este o CFG cu $L(G_6) = L_6$

Alt exemplu de răspuns

L_3 este recunoscut de următorul PDA : ....etc.....

4.7. $L_7 = \{a^m b^n c^p \mid m, n, p \geq 1 \wedge (m = n \vee n = p)\}$

Un exemplu de răspuns

$L_7 = L_1 \cup L_2$ și CF închisă la reuniune

Alt exemplu de răspuns

se construiește imediat o CFG care generează L_7 - construiți o astfel de gramatică

Alt exemplu de răspuns

$L_7 = L'L'' \cup L'''L''''$ unde:

$L' = \{a^k b^k \mid k \geq 1\}$ și $L'''' = \{b^k c^k \mid k \geq 1\}$ sunt liniare, deci CF

$L'' = c^+$ și $L''' = a^+$ sunt regulate, deci CF

iar CF este închisă la reuniune și concatenare.

Alt exemplu de răspuns

se construiește imediat un PDA care recunoaște L_7 - construiți un astfel de PDA

4.8. $L_8 = \{a, b, c\}^* - \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

Un exemplu de răspuns

$L_8 = L_4 \cup L_5 \cup L_6$ și CF închisă la reuniune

Un alt exemplu de răspuns

se construiește imediat o CFG care generează L_8 - construiți o astfel de gramatică

Un exemplu de răspuns

se construiește imediat un PDA care recunoaște L_8 - construiți un astfel de PDA

5. Demonstrați că următoarele limbaje nu sunt independente de context:

5.1. $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

5.2. $L_2 = \{a^m b^n c^p \mid 1 \leq m \leq n \leq p\}$

5.3. $L_3 = \{a^m b^n c^p \mid 1 \leq m < n < p\}$

5.4. $L_4 = \left\{a^{n^2} \,\middle|\, n \geq 1\right\}$

5.5. $L_5 = \left\{a^{n^3} \,\middle|\, n \geq 1\right\}$

5.6. $L_6 = \left\{a^{n^2} b^{n^3} \,\middle|\, n \geq 1\right\}$

5.7. $L_7 = \{a^p \mid p \text{ prim}\}$

5.8. $L_8 = \left\{a^{n^2} b^p \,\middle|\, n \geq 1, p \text{ prim}\right\}$

5.9. $L_9 = \{a^m b^n a^m b^n \mid m, n \geq 1\}$

5.10. $L_{10} = \{w \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\} \subset \{a, b, c\}^*$