Calcul Numeric – Tema #5

Ex. 1 Să se demonstreze că $det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$, unde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Indicaţie: Se vor folosi relaţiile lui Viète pentru polinomul caracteristic $P_n(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_0$ şi se va ţine cont că $P_n(0) = det(A)$.

Ex. 2 Să se demonstreze că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este nesingulară, atunci matricea A^TA este pozitiv definită. Indicaţie: Se va folosi definiţia unei matrice pozitiv definite şi **Ex. 1**.

Ex. 3 Fie λ valoare proprie pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $x \neq 0_n$ un vector propriu asocoat valorii proprii λ. Să se arate că:

a) λ este valoare proprie şi pentru A^T;

b) λ^k este valoare proprie a matricei A^k cu vectorul propriu x. Indicaţie: Se va folosi o relaţie asemănătoare cu relaţia (9) din Cursul #5;

c) Dacă A este nesingulară, atunci $\dfrac{1}{\lambda}$ este valoare proprie a matricei A^{-1} cu vectorul propriu x.

Ex. 4 Să se construiască în Matlab procedurile

a) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobi**(A, a, ε)

b) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobiDDL**(A, a, ε)

c) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobiR**$(A, a, \varepsilon, \sigma)$

d) $[x^O_{aprox}, N_O, \sigma_O] =$ **MetJacobiRO**(A, a, ε)

e) $[x_{aprox}, N] =$ **MetGaussSeidelR**$(A, a, \varepsilon, \sigma)$

f) $[x^O_{aprox}, N_O, \sigma_O] =$ **MetGaussSeideRO**(A, a, ε)

conform metodelor: a) Metoda Jacobi, b) Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii, c) Metoda Jacobi relaxată, d) Algoritmul de determinare a parametrului optim în cazul Metodei Jacobi relaxată, e) Metoda Gauss - Seidel, f) Algoritmul de determinare numerică a parametrului optim în cazul Metodei Gauss - Seidel relaxată.

Ex. 5 1) Să se studieze aplicabilitatea metodelor în cazul următoarelor matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0,04 \\ 0 & 0,02 & 1 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi;

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante;

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ - Metodele Jacobi şi Gauss - Seidel relaxate.

2) În caz afirmativ să se afle soluţia aproximativă a sistemului $Ax = a$ pentru matricele de la a) şi b) apelând procedurile **MetJacobi** şi respectiv **MetJacobiDDL** pentru $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $\varepsilon = 10^{-5}$.

3) În cazul algoritmului de determinare a parametrului optim pentru metoda Jacobi relaxată, să se construiască grafic punctele $(\sigma_s, V_s)_{s=\overline{1,p-1}}$, $p = 10, 20, 50$, unde $(\sigma_s)_{s=\overline{0,p}}$ reprezintă o discretizare a intervalului $\left[0, \dfrac{2}{\| A \|_\infty}\right]$, iar V_s, $s = \overline{1, p-1}$ reprezintă numărul de iteraţii necesar pentru obţinerea soluţiei aproximative prin metoda Jacobi relaxată. Deasemenea, se cere graficul aceluiaşi set de puncte dacă se consideră intervalul $\left[0, \dfrac{2}{\rho(A)}\right]$, unde raza spectrală se va calcula cu ajutorul funcţiei predefinite *eigs*.
Ce observaţi?

4) Să se calculeze soluţia aproximativă x^O_{aprox} şi numărul de iteraţii optim N_o apelând procedura **MetJacobiRO**.

5) Să se efectueze cerinţele de la subpunctele 3) şi 4) în cazul metodei Gauss - Seidel relaxată.