CURSUL 12: ELEMENTE DE ALGEBRĂ UNIVERSALĂ

G. MINCU

1. Operaţii de aritate finită

Definiţia 1. Fie M o mulţime nevidă şi $n \in \mathbb{N}^*$. Numim **lege de compoziţie (operaţie) n -ară** pe M orice funcţie $f : M^n \to M$.

Definiţia 2. Dacă f este o operaţie n-ară pe mulţimea M, atunci n se numeşte **aritatea** lui f.

Observaţia 3. O operaţie de aritate 1 pe mulţimea M este o funcţie $f : M \to M$; uneori, pentru a desemna o operaţie de aritate 1 folosim şi exprimarea ,,operaţie **unară**".

Observaţia 4. Noţiunea de operaţie n-ară generalizează noţiunea de operaţie cu care am lucrat în cursurile 7-11. Toate acele operaţii erau, în acord cu terminologia introdusă acum, operaţii de aritate 2, pe care le vom numi şi operaţii **binare** (acest epitet a fost deja menţionat avant la lettre în definiţiile din cursul 7).

Convenind că pentru orice mulţime nevidă M are loc $M^0 = \{\emptyset\}$, putem extinde definiţia 1 la $n \in \mathbb{N}$:

Definiţia 5. Fie M o mulţime nevidă. Numim **lege de compoziţie (operaţie) 0 -ară** pe M alegerea unui element al lui M.

Definiţia 6. Vom spune despre orice operaţie 0-ară că are aritate 0.

Definiţia 7. Dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca f să fie o operaţie de aritate n pe mulţimea M, atunci f se numeşte operaţie de aritate finită pe M.

2. Algebre universale

Definiţia 8. Prin **tip de algebră universală** vom înţelege o familie $\mathcal{F}$ de numere naturale indexată după o mulţime $S_{\mathcal{F}}$. În acest context vom folosi pentru elementele lui $S_{\mathcal{F}}$ denumirea de **simboluri funcţionale**.

Notaţie Dat fiind un tip $\mathcal{F}$ de algebră universală, vom nota cu $\mathcal{F}_n$ mulţimea $\{f \in S_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}(f) = n\}$.

Definiţia 9. Numim **algebră universală de tipul** $\mathcal{F}$ orice pereche $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ în care A este o mulţime nevidă, iar F este o familie indexată după $S_{\mathcal{F}}$ de operaţii de aritate finită pe mulţimea A cu proprietatea că pentru orice $f \in S_{\mathcal{F}}$ aritatea operaţiei asociate f^A este egală cu $\mathcal{F}(f)$.

Definiţia 10. Mulţimea A din definiţia de mai sus se numeşte **universul** (sau **mulţimea subiacentă a**) algebrei universale $\mathbf{A}$, $\mathcal{F}$ se numeşte **tipul** sau **signatura** lui $\mathbf{A}$, iar operaţiile $(f^A)_{f\in S_{\mathcal{F}}}$ se numesc **operaţiile fundamentale** ale lui $\mathbf{A}$.

Observaţia 11. Dacă $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ este o algebră universală, vom folosi frecvent notaţia F şi pentru a desemna imaginea familiei F, deducând din context ce înţeles trebuie atribuit notaţiei.

Observaţia 12. Vom face uneori referire la algebra universală $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ spunând ,,algebra universală A". Când se va întâmpla acest lucru, F trebuie să fie subînţeleasă fără a exista posibilitate de confuzie.

Observaţia 13. Dacă pentru algebra universală $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ de tipul $\mathcal{F}$ mulţimea $S_{\mathcal{F}}$ este finită, să zicem $S_{\mathcal{F}} = \{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$, atunci vom folosi şi **notaţia** $\mathbf{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_r\rangle$, simbolurile funcţionale fiind scrise în ordinea descrescătoare a arităţilor. În această situaţie, signatura lui $\mathbf{A}$ va fi prezentată sub forma r-uplului de numere naturale $(\mathcal{F}(f_1), \mathcal{F}(f_2), \ldots, \mathcal{F}(f_r))$.

Observaţia 14. În practică, exemplele concrete de algebre universale se vor încadra în şabloanele generale prezentate până acum, fiind însă individualizate de anumite condiţii pe care le satisfac operaţiile fundamentale din contextul respectiv pe întregul lor domeniu de definiţie (,,identităţi").

Exemplul 15. Un grup este o algebră universală $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1}, 1\rangle$ de signatură $(2, 1, 0)$ pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(A) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
(EN) $(x \cdot 1) = 1 \cdot x = x$ şi
(TES) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

Exemplul 16. Un grup abelian este o algebră universală de signatură $(2, 1, 0)$, $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, {}^{-1}, 1\rangle$, pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(A) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
(EN) $(x \cdot 1) = 1 \cdot x = x$,
(TES) $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ şi
(C) $x \cdot y = y \cdot x$.

Exemplul 17. Un monoid este o algebră universală $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$ de signatură $(2, 0)$ pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(A) $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ şi
(EN) $\quad (x \cdot 1) = 1 \cdot x = x$.

Exemplul 18. Un monoid comutativ este o algebră universală de signatură $(2, 0)$, $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$, pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(A) $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
(EN) $\quad (x \cdot 1) = 1 \cdot x = x$ şi
(C) $\quad x \cdot y = y \cdot x$.

Exemplul 19. Un semigrup este o algebră universală $\mathbf{S} = \langle S, \cdot\rangle$ de signatură (2) pentru care este satisfăcută identitatea
(A) $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Exemplul 20. Un semigrup comutativ este o algebră universală de signatură (2), $\mathbf{S} = \langle S, \cdot\rangle$, pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(A) $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ şi
(C) $\quad x \cdot y = y \cdot x$.

Exemplul 21. O latice este o algebră universală $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge\rangle$ de signatură $(2, 2)$ pentru care sunt satisfăcute identităţile:
(C) $\quad x \vee y = y \vee x$ şi $x \wedge y = y \wedge x$,
(A) $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ şi $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, şi
(Ab) $\quad x \vee (x \wedge y) = x$ şi $x \wedge (x \vee y) = x$.

3. Subalgebre universale

În acest capitol $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ va desemna o algebră universală de tip $\mathcal{F}$.

Definiţia 22. Date fiind $n \in \mathbb{N}^*$ şi o operaţie n-ară $f : M^n \to M$, spunem că $N \subset M$ este **parte stabilă a lui M în raport cu f** dacă

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in N \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N.$$

Definiţia 23. Fie f o operaţie de aritate 0 pe mulţimea M. Spunem că $N \subset M$ este **parte stabilă a lui M în raport cu f** dacă $\operatorname{Im} f \subset N$.

Definiţia 24. Submulţimea B a lui A se numeşte **parte F-stabilă** a (sau **subunivers** al) lui $\mathbf{A}$ dacă B este parte stabilă a lui A în raport cu fiecare operaţie fundamentală a lui A.

Definiţia 25. O algebră universală $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ de tip $\mathcal{F}$ se numeşte **subalgebră universală** a lui $\mathbf{A}$ dacă $B \subset A$ şi dacă fiecare operaţie fundamentală f^B a lui $\mathbf{B}$ se obţine din operaţia corespunzătoare f^A a lui $\mathbf{A}$ prin (restricţie şi) corestricţie.

Vom nota faptul că $\mathbf{B}$ este subalgebră universală a lui $\mathbf{A}$ cu $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$.

Observaţia 26. Mulţimea vidă este parte F-stabilă a lui $\mathbf{A}$.

Observaţia 27. Orice parte F-stabilă nevidă a lui $\mathbf{A}$ este mulţime subiacentă pentru o subalgebră universală a lui $\mathbf{A}$.

Observaţia 28. Dacă $\mathbf{A}$ are şi operaţii fundamentale de aritate zero, atunci o parte a lui A este F-stabilă dacă şi numai dacă ea este mulţime subiacentă a unei subalgebre universale a lui $\mathbf{A}$.

Observaţia 29. Deşi obiectele de interes pentru noi sunt subalgebrele universale, proprietăţi ,,mai bune" găsim pentru părţile F-stabile, care sunt mai comod de manevrat decât acestea. Motivul principal pentru această situaţie este acela că părţile F-stabile pot fi şi vide, lucru nepermis mulţimilor subiacente de algebre universale.

4. SUBALGEBRE GENERATE DE SUBMULŢIMI

În acest capitol $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ va desemna o algebră universală de tip $\mathcal{F}$.

Propoziţia 30. Intersecţia oricărei familii de părţi F-stabile ale lui $\mathbf{A}$ este la rândul său parte F-stabilă a lui $\mathbf{A}$.

Definiţia 31. Fie M o submulţime a lui A. **Prin partea F-stabilă a lui $\mathbf{A}$ generată de** M înţelegem mulţimea

$$\mathrm{Sg}(M) \overset{\text{not}}{=} \bigcap\{N : N \text{ este parte } F\text{-stabilă a lui } \mathbf{A}\}.$$

Observaţia 32. $\mathrm{Sg}(M)$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) parte F-stabilă a lui $\mathbf{A}$ care conţine submulţimea M.

Definiţia 33. Fie M o submulţime a lui A. Spunem că M este **sistem de generatori** pentru $\mathbf{A}$ dacă $\mathrm{Sg}(M) = A$.

Propoziţia 34. Pentru orice submulţime M, N ale lui A au loc relaţiile:
(i) $M \subset \mathrm{Sg}(M)$.
(ii) Dacă $M \subset N$, atunci $\mathrm{Sg}(M) \subset \mathrm{Sg}(N)$.
(iii) $\mathrm{Sg}(\mathrm{Sg}(M)) = \mathrm{Sg}(M)$.

Observaţia 35. În acord cu terminologia introdusă la cursul de Logică, propoziţia 34 afirmă că Sg este un operator de închidere.

Propoziţia 36. Mulţimea părţilor F-stabile ale lui $\mathbf{A}$ are în raport cu incluziunea o structură de latice completă.

Demonstraţie: Pentru orice familie $\mathcal{M} = (M_\tau)_{\tau\in T}$ de părţi F-stabile ale lui A avem $\inf \mathcal{M} = \bigcap_{\tau\in T} M_\tau$ şi $\sup \mathcal{M} = \mathrm{Sg}\left(\bigcup_{\tau\in T} M_\tau\right)$. □

5. MORFISME DE ALGEBRE UNIVERSALE

În acest capitol $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ şi $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ desemnează două algebre universale de tip $\mathcal{F}$.

Definiţia 37. Numim **morfism de algebre universale de la A la B** orice funcţie $\alpha : A \to B$ cu proprietăţile:
(i) $\alpha(f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f^B(\alpha(a_1), \alpha(a_2), \ldots, \alpha(a_n))$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_n$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$
(ii) $\alpha \circ f^A = f^B$ pentru orice $f \in \mathcal{F}_0$.

Exemplul 38. Dacă $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, atunci $j : B \to A$, $j(b) = b$ este un morfism de algebre universale.

Definiţia 39. Morfismul din exemplul 38 se numeşte **morfismul incluziune** al lui **B** în **A**.

Propoziţia 40. Dacă două morfisme de algebre universale de la **A** la **B** coincid pe un sistem de generatori al lui **A**, atunci ele sunt egale.

Propoziţia 41. Fie $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$, $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ şi $\mathbf{E} = \langle E, H\rangle$ trei algebre universale de tip $\mathcal{F}$, α un morfism de algebre universale de la **A** la **B** şi β un morfism de algebre universale de la **B** la **E**. Atunci $\beta \circ \alpha$ este morfism de algebre universale de la **A** la **E**.

Definiţia 42. Numim **izomorfism de algebre universale de la A la B** orice morfism inversabil de la **A** la **B** al cărui invers este morfism de algebre universale de la **B** la **A**.

Teorema 43. Un morfism de algebre universale este izomorfism dacă şi numai dacă este bijectiv.

Demonstraţie: Partea de necesitate este evidentă.
Pentru suficienţă, fie $\alpha : A \to B$ un morfism bijectiv de algebre universale, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_n$ *şi* $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Avem succesiv:

$$\alpha^{-1}(f^B(b_1, b_2, \ldots, b_n)) = \alpha^{-1}(f^B(\alpha(\alpha^{-1}(b_1)), \ldots, \alpha(\alpha^{-1}(b_n)))) =$$

$$\alpha^{-1}(\alpha(f^A(\alpha^{-1}(b_1), \ldots, \alpha^{-1}(b_n)))) = f^A(\alpha^{-1}(b_1), \alpha^{-1}(b_2), \ldots, \alpha^{-1}(b_n)).$$

Pentru $f \in \mathcal{F}_0$, $\quad \alpha^{-1} \circ f^B = \alpha^{-1} \circ (\alpha \circ f^A) = f^A$. $\square$

Definiţia 44. Prin **endomorfism** al algebrei universale **A** înţelegem un morfism de la **A** la **A**, iar prin **automorfism** al lui **A** înţelegem un izomorfism de la **A** la **A**.

Exemplul 45. id_A este automorfism al algebrei universale **A**.

Propoziţia 46. Fie α un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$.
(i) Dacă M e parte F-stabilă a lui $\mathbf{A}$, atunci $\alpha(M)$ este parte G-stabilă a lui $\mathbf{B}$.
(ii) Dacă N e parte G-stabilă a lui $\mathbf{B}$, atunci $\alpha^{-1}(N)$ este parte F-stabilă a lui $\mathbf{A}$.

Definiţia 47. Fie α un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{C} \leq \mathbf{A}$. Numim **imaginea lui C prin** α, şi notăm $\alpha(\mathbf{C})$, subalgebra universală a lui $\mathbf{B}$ care are ca mulţime subiacentă $\alpha(C)$.

Definiţia 48. Fie α un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$ Numim **imaginea lui** α, şi notăm $\mathbf{Im}\ \alpha$, imaginea lui $\mathbf{A}$ prin α.

Definiţia 49. Fie α un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$ şi $\mathbf{D} \leq \mathbf{B}$. Dacă $\alpha^{-1}(D) \neq \emptyset$, numim **preimaginea lui D prin** α, şi notăm $\alpha^{-1}(\mathbf{D})$, subalgebra universală a lui $\mathbf{A}$ care are ca mulţime subiacentă $\alpha^{-1}(D)$.

6. Congruenţe. Algebre factor

În acest capitol $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ va desemna o algebră universală de tip $\mathcal{F}$.

Definiţia 50. O relaţie de echivalenţă ρ pe mulţimea A se numeşte **congruenţă** a algebrei universale $\mathbf{A}$ dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{F}_n$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \in A$ are loc

$$(\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad a_j \rho\, a'_j) \Rightarrow f^A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \rho f^A(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n).$$

Propoziţia 51. Dacă ρ este o congruenţă a algebrei universale $\mathbf{A}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f \in \mathcal{F}_n$, atunci operaţia $f^A/\rho : (A/\rho)^n \to A/\rho$,

$$(f^A/\rho)(a_1/\rho, \ldots, a_n/\rho) = f^A(a_1, \ldots, a_n)/\rho$$

este corect definită.

Definiţia 52. Fie ρ o congruenţă a algebrei universale $\mathbf{A}$ şi $f \in \mathcal{F}_0$. Definim $(f^A/\rho)(\emptyset) = f^A(\emptyset)/\rho$.

Definiţia 53. Fie ρ o congruenţă a algebrei universale $\mathbf{A}$. Prin **algebra universală factor** a lui $\mathbf{A}$ în raport cu ρ înţelegem algebra universală care are mulţimea subiacentă A/ρ şi operaţiile fundamentale $(f^A/\rho)_{f \in S_{\mathcal{F}}}$.

Vom nota algebra universală factor a lui $\mathbf{A}$ în raport cu ρ prin $\mathbf{A}/\rho$.

Propoziţia 54. Dacă ρ este o congruenţă a algebrei universale $\mathbf{A}$, atunci $\pi : A \to A/\rho$, $\pi(a) = a/\rho$ este morfism surjectiv de algebre universale.

Definiţia 55. Morfismul din propoziţia 54 se numeşte **surjecţia canonică** a lui $\mathbf{A}/\rho$.

7. Teorema fundamentală de izomorfism

În acest capitol $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ şi $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ vor desemna algebre universale de tip $\mathcal{F}$.

Definiţia 56. Fie α un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$. Vom numi **nucleul** lui α mulţimea

$$\ker\alpha \stackrel{\text{not}}{=} \{(a_1, a_2) \in A^2 : \alpha(a_1) = \alpha(a_2)\}.$$

Propoziţia 57. În condiţiile din definiţia anterioară, $\ker\alpha$ este o congruenţă a lui $\mathbf{A}$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 57!

Teorema fundamentală de izomorfism pentru algebre universale. Dacă $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$ şi $\mathbf{B} = \langle B, G\rangle$ sunt algebre universale de tip $\mathcal{F}$, α este un morfism de algebre universale de la $\mathbf{A}$ la $\mathbf{B}$, π este surjecţia canonică a lui $\mathbf{A}/\ker\alpha$, iar $j : \operatorname{Im}\alpha \to B$ este morfismul incluziune, atunci există un (unic) izomorfism de algebre universale $\beta : \mathbf{A}/\ker\alpha \to \mathbf{Im}\ \alpha$ cu proprietatea că $j \circ \beta \circ \pi = \alpha$.

Bibliografie

[1] G. Birkhoff, *On the structure of abstract algebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 31, 1935, pp.433-454.
[2] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, 1981.
[3] P. M. Cohn, *Algebra*, Wiley and sons, 1991.
[4] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[5] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[6] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.