

Curs 8

Scop

Fie (S, Σ) o signatură multisortată.

- O **ecuație** este $(\forall X)t \dot{=}_s t'$, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.
- O **ecuație condiționată** este $(\forall X)t \dot{=}_s t' \text{ if } H$, unde $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ și $H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$.

Scop: să înțelegem când o ecuație se poate obține din alte ecuații (condiționate)!

- Două puncte de vedere diferite:
 - semantic: când o ecuație este adevărată într-o algebră anume
 - sintactic: axiome + reguli de deducție care ne permit să deducem alte ecuații
- O dată fixate pentru **logica ecuațională**, vom arăta că ele coincid, i.e. corectitudinea și completitudinea logicii ecuaționale.

Cuprins

- 1 Substituții
- 2 Deducție ecuațională
 - Cazul necondiționat
 - Cazul condiționat
- 3 Logica ecuațională
 - Corectitudinea
 - Completitudinea

Substituții

Substituție

Fie (S, Σ) o semnătură multisortată și X, Y mulțimi de variabile.

- Am văzut că, pentru orice (S, Σ) -algebră $\mathcal{B} = (B_S, B_\Sigma)$, orice funcție S -sortată $e : X \rightarrow B_S$ se **extinde unic** la un morfism $\tilde{e} : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{B}$.
- Ce se întâmplă dacă \mathcal{B} este liber generată de Y , i.e. $B \simeq T_\Sigma(Y)$?

Definiție

O **substituție** a variabilelor din X cu termeni din $T_\Sigma(Y)$ este o funcție S -sortată

$$\tau : X \rightarrow T_\Sigma(Y).$$

Proprietăți

- $\{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}$ este notația uzuală pentru $\sigma : X \rightarrow T_\Sigma(X)$, cu $\sigma(x_i) = t_i$ și $\sigma(x) = x$, pt. $x \neq x_i$, or. $i = 1, \dots, n$.
- O substituție $\tau : X \rightarrow T_\Sigma(Y)$ se extinde unic la un (S, Σ) -morfism
$$\tilde{\tau} : T_\Sigma(X) \rightarrow T_\Sigma(Y)$$
 - $\tilde{\tau}_s(x) := \tau_s(x)$, or. $x \in X_s$,
 - $\tilde{\tau}_s(\sigma) := \sigma$, or. $\sigma : \rightarrow s$,
 - $\tilde{\tau}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) := \sigma(\tilde{\tau}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{\tau}_{s_n}(t_n))$, or. $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ și or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \dots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.
- Vom identifica uneori $\tilde{\tau}$ cu τ .

Proprietăți

Fie X , Y și Z mulțimi de variabile.

- Compunerea substituțiilor $\tau : X \rightarrow T_{\Sigma}(Y)$ și $\mu : Y \rightarrow T_{\Sigma}(Z)$ este

$$\begin{aligned} &\tau; \mu : X \rightarrow T_{\Sigma}(Z) \\ &(\tau; \mu)_s(x) := (\tau; \tilde{\mu})_s(x), \\ &\text{or. } x \in X_s. \end{aligned}$$

- Compunerea substituțiilor este asociativă.
- Compunerea substituțiilor nu este în general comutativă.

Exemplu

Exemplu

- $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{a : \rightarrow s, f : s \rightarrow s, g : s \rightarrow s, p : sssss \rightarrow s\}$
- $X = \{x, y, z, u, v\}$
- $t = p(u, v, x, y, z) \in T_{\Sigma}(X)$
- $\tau : X \rightarrow T_{\Sigma}(X), \tau = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow f(a), z \leftarrow u\}$
- $\tilde{\tau}(t) = p(u, v, f(y), f(a), u)$
- $\mu : X \rightarrow T_{\Sigma}(X), \mu = \{y \leftarrow g(a), u \leftarrow z, v \leftarrow f(f(a))\}$
- $\tilde{\mu}(t) = p(z, f(f(a)), x, g(a), z)$
- $(\tilde{\tau}; \tilde{\mu})(t) = \tilde{\mu}(\tilde{\tau}(t)) = \tilde{\mu}(p(u, v, f(y), f(a), u)) =$
 $= p(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z)$
- $(\tilde{\mu}; \tilde{\tau})(t) = \tilde{\tau}(\tilde{\mu}(t)) = \tilde{\tau}(p(z, f(f(a)), x, g(a), z)) =$
 $= p(u, f(f(a)), f(y), g(a), u)$

Deducție ecuațională

Două variante

În funcție de tipul **ipotezelor** avem două variante:

- **Cazul necondiționat:**

- E mulțime de ecuații necondiționate.
- Vom încerca să înțelegem ce înseamnă $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

- **Cazul condiționat:**

- Γ mulțime de ecuații condiționate.
- Vom încerca să înțelegem ce înseamnă $\Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.

Cazul necondiționat

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

- (S, Σ) semnătură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de **ecuații necondiționate**

R

$$\frac{}{(\forall X)t \dot{=}_s t}$$

S

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2}{(\forall X)t_2 \dot{=}_s t_1}$$

T

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2, (\forall X)t_2 \dot{=}_s t_3}{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_3}$$

CΣ

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)}$$

, unde $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$

Sub_E

$$\frac{}{(\forall X)\tilde{\theta}(t) \dot{=}_s \tilde{\theta}(t')}$$

, unde $(\forall Y)t \dot{=}_s t' \in E$ și $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$

Observații

- R - reflexivitate
- S - simetrie
- T - tranzitivitate
- $C\Sigma$ - compatibilitate cu operații
- Sub_E - substituție
- Dacă $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$, există un unic morfism $\tilde{\theta} : T_\Sigma(Y) \rightarrow T_\Sigma(X)$
a.î. $\tilde{\theta}_s(y) = \theta_s(y)$, or. $y \in Y_s$
- Convenție: Pentru ușurință, vom identifica substituția
 $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$ cu morfismul $\tilde{\theta} : T_\Sigma(X) \rightarrow T_\Sigma(Y)$!

$$\text{Sub}_E \quad \overline{(\forall X)\tilde{\theta}(t) \doteq_s \tilde{\theta}(t')}$$

vs.

$$\text{Sub}_E \quad \overline{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$$

Deducția ecuațională

Fie E o mulțime de ecuații numite **axiome** sau **ipoteze**.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \dot{=} _s t'$ **se deduce ecuațional** din E dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \dots, n\}$ avem:
 - $\epsilon_i \in E$ sau
 - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. **R**, **S**, **T**, **CΣ**, **Sub_E**.

În acest caz

- scriem $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t'$, $E \vdash \epsilon$,
- spunem că ϵ este **deductibilă**, **demonstrabilă**, **derivabilă** din E ,
- secvența $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \epsilon$ este o **E -demonstrație** pt. ϵ .

Exemplu

Exemplu

- $NAT = (S, \Sigma)$, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 : \rightarrow s, succ : s \rightarrow s\}$
- Deoarece avem un singur sort, putem renunța la cuantificare!
- $E = \{x + 0 \doteq x, x + succ(y) \doteq succ(x + y)\}$
- Arătăm că $E \vdash 0 + succ(0) \doteq succ(0)$:
 - 1 $0 + succ(0) \doteq succ(0 + 0)$
(Sub_E pt. $x + succ(y) \doteq succ(x + y) \in E$ și $\{x \leftarrow 0, y \leftarrow 0\}$)
 - 2 $0 + 0 \doteq 0$
(Sub_E pt. $x + 0 \doteq x \in E$ si $\{x \leftarrow 0\}$)
 - 3 $succ(0 + 0) \doteq succ(0)$ (2, C_Σ)
 - 4 $0 + succ(0) \doteq succ(0)$ (1, 3, T)

Cazul condiționat

Ipotezele sunt ecuații condiționate

Fie E o mulțime de ecuații necondiționate.

$$\boxed{\text{Sub}_E \quad \overline{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}} \quad , \text{ unde } (\forall Y)t \dot{=}_s t' \in E \text{ și } \theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$$

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\boxed{\text{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \dot{=}_{s_1} \theta(v_1), \dots, (\forall X)\theta(u_n) \dot{=}_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}} \quad , \text{ unde}$$

$(\forall Y)t \dot{=}_s t' \text{ if } H \in \Gamma, H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\} \text{ și } \theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X).$

Dacă $H = \emptyset$, atunci $\boxed{\text{Sub}_\Gamma \quad \overline{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}}$

Regulile deducției ecuaționale

- (S, Σ) semnătură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- Γ mulțime de **ecuații condiționate**

$$\text{R} \quad \frac{}{(\forall X)t \dot{=}_s t}$$

$$\text{S} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2}{(\forall X)t_2 \dot{=}_s t_1}$$

$$\text{T} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2, (\forall X)t_2 \dot{=}_s t_3}{(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_3}$$

$$\text{CS} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)}, \text{ unde } \sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$$

$$\text{Sub}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \dot{=}_{s_1} \theta(v_1), \dots, (\forall X)\theta(u_n) \dot{=}_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}, \text{ unde}$$

$(\forall Y)t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$.

Deducția ecuațională

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate numite **axiome** sau **ipoteze**.

Spunem că ecuația $\epsilon := (\forall X)t \dot{=} _s t'$ **se deduce ecuațional** din Γ dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ a.î.

- $\epsilon_n = \epsilon$ și
- pt. or. $i \in \{1, \dots, n\}$ avem:
 - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
 - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. **R**, **S**, **T**, **CΣ**, **Sub Γ** .

În acest caz

- scriem $\Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t', \Gamma \vdash \epsilon$,
- spunem că ϵ este **deductibilă, demonstrabilă, derivabilă** din Γ ,
- secvența $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = \epsilon$ este o **Γ -demonstrație** pt. ϵ .

Exemplu

Exemplu

- $NATBOOL = (S, \Sigma)$, unde $S = \{n, b\}$ și $\Sigma = \{T, F, 0, s, \star, >\}$
- $\Gamma = \{\gamma, \epsilon_1, \epsilon_2\}$
 - $\gamma := (\forall\{x, y, z\})x \dot{=}_n y \text{ if } \{z \star x \dot{=}_n z \star y, z > 0 \dot{=}_b T\},$
 - $\epsilon_1 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) \star a \dot{=}_n s(s(s(0))) \star c,$
 - $\epsilon_2 := (\forall\{a, c\})s(s(s(0))) > 0 \dot{=}_b T$
- Arătăm că $\Gamma \vdash (\forall\{a, c\})a \dot{=}_n c$:
 - 1 $\epsilon_1 \in \Gamma$
 - 2 $\epsilon_2 \in \Gamma$
 - 3 $a \dot{=}_n c$
(1, 2, **Sub_r** pt. $\gamma \in \Gamma$ și $\{x \leftarrow a, y \leftarrow c, z \leftarrow s(s(s(0)))\}$)

Logica ecuațională

Logica ecuațională

- (S, Σ) semnătură multisortată
- Γ o mulțime de **ecuații condiționate**
- **Sintaxa:** $\Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$
 - există o Γ -demonstrație $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = (\forall X)t \dot{=}_s t'$
 - (vezi secțiunea anterioară)
- **Semantica:** $\Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t'$
 - pentru orice (S, Σ) -algebră \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \Gamma \Rightarrow \mathcal{A} \models (\forall X)t \dot{=}_s t'$
 - \mathcal{A} **satisface o ecuație condiționată** $(\forall X)t \dot{=}_s t'$ *if* H dacă pentru orice morfism $f : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{A}$,
$$f_{s'}(u) = f_{s'}(v), \text{ or. } u \dot{=}_{s'} v \in H \Rightarrow f_s(t) = f_s(t').$$
 - (vezi cursurile anterioare)

Corectitudinea

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sintaxa} & \Rightarrow & \text{Semantica} \\ \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t' & \Rightarrow & \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' \end{array}$$

Reguli de deducție corecte

O regulă de deducție
$$\frac{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}{\epsilon}$$
 este **corectă** dacă

$$\Gamma \models \epsilon_1, \dots, \Gamma \models \epsilon_n \Rightarrow \Gamma \models \epsilon.$$

Propoziție

Regulile de deducție R, S, T, C Σ , Sub Γ sunt corecte.

Demonstrație

- 1 R este corectă: Exercițiu!
- 2 S este corectă: Exercițiu!
- 3 T este corectă: Exercițiu!

Demonstrație (cont.)

4 $C\Sigma$ este corectă:

$$C\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)}, \text{ unde } \sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$$

- Fie $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s \in \Sigma$ și presupunem $\Gamma \models (\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, \Gamma \models (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n$.
- Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)$:
 - fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{A}$ un morfism.
 - din ip., $f_{s_1}(t_1) = f_{s_1}(t'_1), \dots, f_{s_n}(t_n) = f_{s_n}(t'_n)$
 - avem

$$f_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = A_\sigma(f_{s_1}(t_1), \dots, f_{s_n}(t_n)) = A_\sigma(f_{s_1}(t'_1), \dots, f_{s_n}(t'_n)) = f_s(\sigma(t'_1, \dots, t'_n))$$
 - deci $\mathcal{A} \models (\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=}_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)$

Demonstrație (cont.)

5 Sub_r este corectă:

$$\text{Sub}_r \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \dot{=}_{s_1} \theta(v_1), \dots, (\forall X)\theta(u_n) \dot{=}_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')}, \text{ unde}$$

$(\forall Y)t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$.

□ Fie $(\forall Y)t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$ și $\theta : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$ a.î. $\Gamma \models (\forall X)\theta(u_i) \dot{=}_{s_i} \theta(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.

□ Trebuie să arătăm că $\Gamma \models (\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')$:

- fie $\mathcal{A} \models \Gamma$ și $f : T_\Sigma(X) \rightarrow \mathcal{A}$ un morfism.
- atunci $\tilde{\theta}; f : T_\Sigma(Y) \rightarrow \mathcal{A}$
- din ip., avem $(\tilde{\theta}; f)_{s_i}(u_i) = (\tilde{\theta}; f)_{s_i}(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.
- deoarece $\mathcal{A} \models (\forall Y)t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, obținem

$$(\tilde{\theta}; f)_s(t) = (\tilde{\theta}; f)_s(t'), \text{ i.e. } f_s(\tilde{\theta}(t)) = f_s(\tilde{\theta}(t')).$$
- deci $\mathcal{A} \models (\forall X)\tilde{\theta}(t) \dot{=}_s \tilde{\theta}(t')$, echivalent cu $\mathcal{A} \models (\forall X)\theta(t) \dot{=}_s \theta(t')$.



Corectitudinea deducției ecuaționale

Teoremă (Corectitudinea deducției)

$$\Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t' \Rightarrow \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t'.$$

Demonstrație

- Fie $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n = (\forall X)t \dot{=}_s t'$ o Σ -demonstrație.
- Demonstrăm că $\Gamma \models \epsilon_i$ prin inducție după $i = 1, \dots, n$:
 - Pt. $i = 1$ avem trei cazuri:
 - 1 $\epsilon_1 \in \Gamma$,
 - 2 $\epsilon_1 = (\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t_1$ prin R,
 - 3 $\epsilon_1 = (\forall X)\theta(t_1) \dot{=}_{s_1} \theta(t'_1)$ prin Sub $_{\Gamma}$ pt. $(\forall Y)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1 \in \Gamma$ și $\theta : Y \rightarrow T_{\Sigma}(X)$.
 - cum R și Sub $_{\Gamma}$ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models \epsilon_1$.
 - Pres. $\Gamma \models \epsilon_1, \dots, \Gamma \models \epsilon_{i-1}$.
 - știm că ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din R, S, T, C Σ , Sub $_{\Gamma}$.
 - cum R, S, T, C Σ , Sub $_{\Gamma}$ sunt corecte, rezultă $\Gamma \models \epsilon_i$.



Completitudinea

Scop

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\begin{array}{ccc} \text{Semantica} & \Rightarrow & \text{Sintaxa} \\ \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' & \Rightarrow & \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t' \end{array}$$

Închiderea la reguli de deducție

Fie

- (S, Σ) o semnătură multisortată
- X o mulțime de variabile
- Regula de deducție

$$\text{Reg} \frac{(\forall X)t_1 \dot{=}_{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=}_{s_n} t'_n}{(\forall X)t \dot{=}_s t'}$$

O relație binară $\sim \subseteq T_\Sigma(X) \times T_\Sigma(X)$ este **închisă la regula Reg** dacă

$$t_1 \sim_{s_1} t'_1, \dots, t_n \sim_{s_n} t'_n \Rightarrow t \sim_s t'.$$

Închiderea la reguli de deducție

Propoziție

Sunt echivalente:

- 1 \sim este congruență pe $T_{\Sigma}(X)$,
- 2 \sim este închisă la R, S, T, C Σ .

Demonstrație

\Rightarrow Pres. că \sim este congruență pe $T_{\Sigma}(X)$.

□ Închisă la R, S, T: **Exercițiu!**

□ Închisă la C Σ :

□ fie $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ și $t_1 \sim_{s_1} t'_1, \dots, t_n \sim_{s_n} t'_n$.

□ deoarece \sim este congruență pe $T_{\Sigma}(X)$, obținem
 $\sigma(t_1, \dots, t_n) \sim_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)$.

Demonstrație (cont.)

⇐ Pres. că \sim este închisă la R, S, T, C Σ .

- Deoarece \sim este închisă la R, S, T, obținem că \sim este echivalență pe $T_{\Sigma}(X)$. (Exercițiu!)
- Arătăm că \sim este compatibilă cu operațiile:
 - fie $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$ și $t_1 \sim_{s_1} t'_1, \dots, t_n \sim_{s_n} t'_n$.
 - deoarece \sim este închisă la C Σ ., obținem $\sigma(t_1, \dots, t_n) \sim_s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)$.



Amintiri: Închiderea la substituții

Fie

- (S, Σ) o semnătură multisortată, X mulțime de variabile,
- Γ o mulțime de ecuații condiționate,
- \sim o congruență pe $T_\Sigma(X)$.

Spunem că \sim este **închisă la substituție** dacă

$CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$

or. $(\forall Y) t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, or. $h : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$
 $\tilde{h}_{s'}(u) \sim_{s'} \tilde{h}_{s'}(v)$, or. $u \dot{=}_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{h}_s(t) \sim_s \tilde{h}_s(t')$

Pentru simplitate, identificăm morfismul \tilde{h} cu h și scriem:

$CS(\Gamma, T_\Sigma(X))$

or. $(\forall Y) t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, or. $h : Y \rightarrow T_\Sigma(X)$
 $h_{s'}(u) \sim_{s'} h_{s'}(v)$, or. $u \dot{=}_{s'} v \in H \Rightarrow h_s(t) \sim_s h_s(t')$

Închiderea la substituții

Propoziția

Sunt echivalente:

- 1 \sim verifică $CS(\Gamma, T_{\Sigma}(X))$ (i.e. închisă la substituție),
- 2 \sim este închisă la Sub_{Γ} ,

Demonstrație

\sim verifică $CS(\Gamma, T_{\Sigma}(X))$ (i.e. închisă la substituție),

\Leftrightarrow

or. $(\forall Y) t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$ și. or.
 $h : Y \rightarrow T_{\Sigma}(X)$ a.î. $h_{s_1}(u_1) \sim_{s_1} h_{s_1}(v_1), \dots, h_{s_n}(u_n) \sim_{s_n} h_{s_n}(v_n)$ implică
 $h_s(t) \sim_s h_s(t')$

\Leftrightarrow

\sim este închisă la Sub_{Γ}



Echivalența sintactică

Echivalența sintactică pe $T_{\Sigma}(X)$ determinată de Γ este

$$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t', \text{ or. } s \in S.$$

Propoziția

\sim_{Γ} este o congruență pe $T_{\Sigma}(X)$ închisă la substituție.

Demonstrație

- Din def. deducției sintactice \vdash , \sim_{Γ} este închisă la R, S, T, C Σ , Sub $_{\Gamma}$.
- Rezultă \sim_{Γ} este congruență pe $T_{\Sigma}(X)$.
- Rezultă \sim_{Γ} este închisă la substituție.



Completitudinea deducției ecuaționale

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

Teoremă (Completitudinea deducției)

$$\Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'.$$

Demonstrație

- echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$.
- echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t'$.
- \sim_{Γ} congruență pe $T_{\Sigma}(X)$ închisă la substituție .
- \equiv_{Γ} este cea mai mică congruență pe $T_{\Sigma}(X)$ închisă la substituție.
- Deci $\equiv_{\Gamma} \subseteq \sim_{\Gamma}$, i.e. $\Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' \Rightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$.

□

Teorema de completitudine

(S, Σ) semnătură multisortată, X mulțime de variabile, $t, t' \in T_{\Sigma}(X)_s$

- Echivalența sintactică: $t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$.
- Echivalența semantică: $t \equiv_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t'$.
- Corectitudinea deducției: $\sim_{\Gamma} \subseteq \equiv_{\Gamma}$.
- Completitudinea deducției: $\equiv_{\Gamma} \subseteq \sim_{\Gamma}$.

Teoremă (Teorema de completitudine)

$$\Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t' \\ (\equiv_{\Gamma} = \sim_{\Gamma})$$



Vacanță plăcută!