# riptografie și Securitate

# - Prelegerea 9 -Construcții practice pentru PRP

Adela Georgescu, Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică Universitatea din București

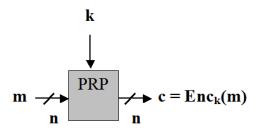
# Cuprins

1. Sisteme bloc ca PRP

2. Rețele de substituție - permutare

3. Rețele Feistel

► Am văzut că sistemele de criptare bloc folosesc *PRP*;



▶ În criteriile de evaluare pentru adoptarea AES s-a menționat: The security provovided by an algorithm is the most important factor... Algorithms will be judged on the following factors...

The extent to which the algorithm output is indistinguishable from a random permutation on the input block.

• În criteriile de evaluare pentru adoptarea AES s-a menționat: The security provovided by an algorithm is the most important factor... Algorithms will be judged on the following factors...

The extent to which the algorithm output is indistinguishable from a random permutation on the input block.

▶ Întrebare: Cum se obțin *PRP* în practică?

▶ Ideal ar fi să se utilizeze o permutare aleatoare pe n biţi;

- ▶ Ideal ar fi să se utilizeze o permutare aleatoare pe *n* biţi;
- ▶ Ar fi necesari  $\approx n \cdot 2^n$  biţi pentru stocare;

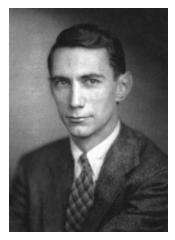
- ▶ Ideal ar fi să se utilizeze o permutare aleatoare pe *n* biţi;
- ▶ Ar fi necesari  $\approx n \cdot 2^n$  biţi pentru stocare;
- ▶ Pentru n = 50 este necesară o capacitate de stocare de  $\approx 200 \, TB$  !

- ▶ Ideal ar fi să se utilizeze o permutare aleatoare pe *n* biţi;
- ▶ Ar fi necesari  $\approx n \cdot 2^n$  biţi pentru stocare;
- ▶ Pentru n = 50 este necesară o capacitate de stocare de  $\approx 200 \, TB$  !
- ▶ Sistemele bloc au în general  $n \ge 64$  sau  $n \ge 128$  biţi;

- ▶ Ideal ar fi să se utilizeze o permutare aleatoare pe *n* biţi;
- ▶ Ar fi necesari  $\approx n \cdot 2^n$  biţi pentru stocare;
- ▶ Pentru n = 50 este necesară o capacitate de stocare de  $\approx 200 \, TB$  !
- ▶ Sistemele bloc au în general  $n \ge 64$  sau  $n \ge 128$  biţi;
- În consecință, NU se poate utiliza o (singură) permutare aleatoare!

# Claude Elwood Shannon (1916 - 2001)

- Shannon propune utilizarea mai multor permutări de dimensiune mai mică;
- Acesta este al doilea rezultat al lui Shannon pe care îl studiem, după securitatea perfectă.



[Wikipedia]

Se construiește permutarea F, pe baza mai multor permutări aleatoare  $f_i$  de dimensiune mai mică;

- Se construiește permutarea F, pe baza mai multor permutări aleatoare  $f_i$  de dimensiune mai mică;
- ► Considerăm F pe 128 biți și 16 permutări aleatoare  $f_1, \ldots, f_{16}$  pe câte 8 biți;

- Se construiește permutarea F, pe baza mai multor permutări aleatoare fi de dimensiune mai mică;
- ► Considerăm F pe 128 biți și 16 permutări aleatoare  $f_1, \ldots, f_{16}$  pe câte 8 biți;
- ▶ Pentru  $x = x_1 || \dots || x_{16}, x \in \{0, 1\}^{128} x_i \in \{0, 1\}^8$ :

$$F_k(x) = f_1(x_1)||\dots||f_{16}(x_{16})|$$

- Se construiește permutarea F, pe baza mai multor permutări aleatoare  $f_i$  de dimensiune mai mică;
- ► Considerăm F pe 128 biți și 16 permutări aleatoare  $f_1, \ldots, f_{16}$  pe câte 8 biți;
- ▶ Pentru  $x = x_1 || \dots || x_{16}, x \in \{0, 1\}^{128} x_i \in \{0, 1\}^8$ :

$$F_k(x) = f_1(x_1)||\dots||f_{16}(x_{16})|$$

▶ Spunem că  $\{f_i\}$  introduc confuzie în F.

▶ Întrebare: Considerând capacitatea necesară de stocare, este F fesabilă?

▶ Întrebare: Considerând capacitatea necesară de stocare, este F fesabilă?

► Răspuns: DA.

- ▶ Întrebare: Considerând capacitatea necesară de stocare, este F fesabilă?
- ► Răspuns: DA.
- ► Fiecare  $f_i$  necesită  $\approx 8 \cdot 2^8$  biţi pentru stocare;

- ▶ Întrebare: Considerând capacitatea necesară de stocare, este F fesabilă?
- ► Răspuns: DA.
- ► Fiecare  $f_i$  necesită  $\approx 8 \cdot 2^8$  biţi pentru stocare;
- ▶ Sunt 16 funcții  $\{f_i\}$ , deci în total F necesită pentru stocare  $\approx 16 \cdot 8 \cdot 2^8 \approx 32KB$ .

▶ Întrebare: Este *F* PRP?

▶ Întrebare: Este F PRP?

► Răspuns: NU.

- ▶ Întrebare: Este F PRP?
- ► Răspuns: NU.
- Fie  $x \neq x \neq x'$  2 intrări care diferă numai prin primul bit:

$$msb(x) \neq msb(x')$$

- ▶ Întrebare: Este F PRP?
- ► Răspuns: NU.
- Fie  $x \neq x'$  2 intrări care diferă numai prin primul bit:

$$msb(x) \neq msb(x')$$

Atunci  $F_k(x)$  și  $F_k(x')$  diferă numai prin primul byte;

- ▶ Întrebare: Este F PRP?
- ► Răspuns: NU.
- Fie  $x ext{ si } x' ext{ 2 intrări care diferă numai prin primul bit:}$

$$msb(x) \neq msb(x')$$

- Atunci  $F_k(x)$  și  $F_k(x')$  diferă numai prin primul byte;
- În cazul unei permutări aleatoare, acest lucru nu se întâmplă.

► F se transformă în PRP în 2 pași:

- ► F se transformă în PRP în 2 pași:
  - ▶ Pasul 1: se introduce difuzie prin amestecarea (permutarea) biţilor de ieşire;

- F se transformă în PRP în 2 pași:
  - ▶ Pasul 1: se introduce difuzie prin amestecarea (permutarea) biţilor de ieşire;
  - ▶ Pasul 2: se repetă o rundă (care presupune confuzie şi difuzie) de mai multe ori;

- F se transformă în PRP în 2 pași:
  - ▶ Pasul 1: se introduce difuzie prin amestecarea (permutarea) biţilor de ieşire;
  - ▶ Pasul 2: se repetă o rundă (care presupune confuzie şi difuzie) de mai multe ori;
- Repetarea confuziei și difuziei face ca o modificarea unui singur bit de intrare să fie propagată asupra tutoror biților de ieșire;

- ► F se transformă în PRP în 2 pași:
  - ▶ Pasul 1: se introduce difuzie prin amestecarea (permutarea) biţilor de ieşire;
  - ▶ Pasul 2: se repetă o rundă (care presupune confuzie şi difuzie) de mai multe ori;
- Repetarea confuziei și difuziei face ca o modificarea unui singur bit de intrare să fie propagată asupra tutoror biților de ieșire;
- ▶ Un exemplu pentru 2 runde și intrarea *x*:

- F se transformă în PRP în 2 pași:
  - ▶ Pasul 1: se introduce difuzie prin amestecarea (permutarea) biţilor de ieşire;
  - ▶ Pasul 2: se repetă o rundă (care presupune confuzie şi difuzie) de mai multe ori;
- Repetarea confuziei și difuziei face ca o modificarea unui singur bit de intrare să fie propagată asupra tutoror biților de ieșire;
- ▶ Un exemplu pentru 2 runde și intrarea *x*:
  - $\triangleright x' = F_k(x);$
  - $\triangleright$   $x_1$  se obține prin reordonarea biților din x';
  - $x_1' = F_k(x_1);$
  - $x_2$  se obține prin reordonarea biților din  $x'_1$ .

▶ O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);

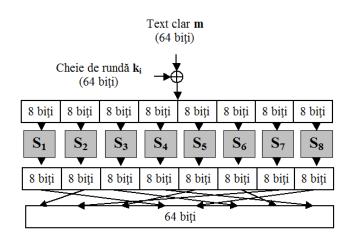
- O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);
- ▶  $\{f_i\}$  se numesc S-boxes (Substitution-boxes);

- O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);
- ▶  $\{f_i\}$  se numesc S-boxes (Substitution-boxes);
- S-box-urile rămân în continuare permutări;

- O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);
- ▶  $\{f_i\}$  se numesc S-boxes (Substitution-boxes);
- S-box-urile rămân în continuare permutări;
- Cum nu mai depind de cheie, aceasta este utilizată în alt scop;

- O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);
- ▶  $\{f_i\}$  se numesc S-boxes (Substitution-boxes);
- S-box-urile rămân în continuare permutări;
- Cum nu mai depind de cheie, aceasta este utilizată în alt scop;
- Din cheie se obțin mai multe chei de rundă (sub-chei) în urma unui proces de derivare a cheilor (key schedule);

- O rețea de substituție-permutare este o implementare a construcției anterioare de confuzie-difuzie în care funcțiile {f<sub>i</sub>} sunt fixe (i.e. nu depind de cheie);
- ▶  $\{f_i\}$  se numesc S-boxes (Substitution-boxes);
- S-box-urile rămân în continuare permutări;
- Cum nu mai depind de cheie, aceasta este utilizată în alt scop;
- ▶ Din cheie se obţin mai multe chei de rundă (sub-chei) în urma unui proces de derivare a cheilor (key schedule);
- Fiecare cheie de rundă este XOR-ată cu valorile intermediare din fiecare rundă.



Există 2 principii de bază în proiectarea rețelelor de substituție
 permutare:

- Există 2 principii de bază în proiectarea rețelelor de substituție
   permutare:
  - Principiul 1: Inversabilitatea S-box-urilor;

- Există 2 principii de bază în proiectarea rețelelor de substituție
   permutare:
  - ▶ **Principiul 1**: Inversabilitatea S-box-urilor;
  - ▶ Principiul 2: Efectul de avalanșă.

O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- ▶ Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;
- ▶ Într-o rundă:

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;
- Într-o rundă:
  - XOR este inversabil;

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;
- Într-o rundă:
  - ► XOR este inversabil:
  - Permutarea finală a biţilor de ieşire este inversabilă;

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;
- Într-o rundă:
  - XOR este inversabil;
  - Permutarea finală a biţilor de ieşire este inversabilă;
- În concluzie, dacă toate S-box-urile sunt inversabile, atunci rețeaua este inversabilă;

- O rețea de substituție-permutare trebuie să fie inversabilă;
- Dacă fiecare rundă este inversabilă, atunci rețeaua este inversabilă;
- Într-o rundă:
  - XOR este inversabil;
  - Permutarea finală a biţilor de ieşire este inversabilă;
- În concluzie, dacă toate S-box-urile sunt inversabile, atunci rețeaua este inversabilă;
- Principiul 1 necesitate funcțională (pentru decriptare).

► Un singur bit modificat la intrare **trebuie** să afecteze toți biții din secvența de ieșire;

- Un singur bit modificat la intrare trebuie să afecteze toți biții din secvența de ieșire;
- Efectul de avalanșă apare într-o rețea de substituție-permutare dacă:

- Un singur bit modificat la intrare trebuie să afecteze toți biții din secvența de ieșire;
- Efectul de avalanșă apare într-o rețea de substituție-permutare dacă:
  - 1. S-box-urile sunt proiectate a.î. un singur bit schimbat la intrare să schimbe cel puțin 2 biți de la ieșire;

- Un singur bit modificat la intrare trebuie să afecteze toți biții din secvența de ieșire;
- Efectul de avalanșă apare într-o rețea de substituție-permutare dacă:
  - 1. S-box-urile sunt proiectate a.î. un singur bit schimbat la intrare să schimbe cel puțin 2 biți de la ieșire;
  - Permutarea este proiectată a.î. biții de la ieșirea unui S-box să fie împărțiți între intrările în S-box-uri diferite la runda următoare.

- Un singur bit modificat la intrare trebuie să afecteze toți biții din secvența de ieșire;
- Efectul de avalanșă apare într-o rețea de substituție-permutare dacă:
  - 1. S-box-urile sunt proiectate a.î. un singur bit schimbat la intrare să schimbe cel puțin 2 biți de la ieșire;
  - Permutarea este proiectată a.î. biții de la ieșirea unui S-box să fie împărțiți între intrările în S-box-uri diferite la runda următoare.
- Principiul 2 necesitate de securitate.

▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?

- ▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;

- Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- ▶ Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;
- ▶ După Runda 1, ieșirile diferă prin 2 biți (*Proprietatea 1*);

- ▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- ▶ Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;
- După Runda 1, ieșirile diferă prin 2 biți (Proprietatea 1);
- ▶ La intrarea în Runda 2, biții care diferă sunt intrări în S-box-uri diferite (*Proprietatea 2*);

- ▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;
- ▶ După Runda 1, ieșirile diferă prin 2 biți (*Proprietatea 1*);
- ► La intrarea în Runda 2, biții care diferă sunt intrări în S-box-uri diferite (*Proprietatea 2*);
- ▶ După Runda 2, ieşirile diferă prin 4 biţi (Proprietatea 1);

- ▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;
- ▶ După Runda 1, ieșirile diferă prin 2 biți (*Proprietatea 1*);
- ► La intrarea în Runda 2, biții care diferă sunt intrări în S-box-uri diferite (*Proprietatea 2*);
- ▶ După Runda 2, ieșirile diferă prin 4 biți (*Proprietatea 1*);
- Urmând acest raționament, după Runda r, ieșirile diferă prin aproximativ 2<sup>r</sup> biți;

- ▶ Întrabare: De ce sunt suficiente cele 2 proprietăți pentru obținerea efectului de avalanșă?
- Presupunem 2 intrări care diferă printr-un singur bit;
- ▶ După Runda 1, ieșirile diferă prin 2 biți (*Proprietatea 1*);
- ► La intrarea în Runda 2, biții care diferă sunt intrări în S-box-uri diferite (*Proprietatea 2*);
- ▶ După Runda 2, ieșirile diferă prin 4 biți (*Proprietatea 1*);
- Urmând acest raționament, după Runda r, ieșirile diferă prin aproximativ 2<sup>r</sup> biți;
- ▶ În concluzie, un sistem bloc cu intrarea de  $n = 2^r$  biţi obţine efectul de avalanşă după cel puţin r runde.

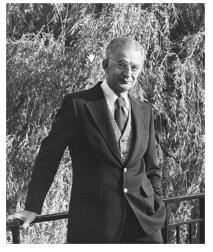
► Se aseamănă rețelelor de substituție-permutare în sensul că păstrează aceleași elementele componente: S-box, permutare, procesul de derivare a cheii, runde;

- Se aseamănă rețelelor de substituție-permutare în sensul că păstrează aceleași elementele componente: S-box, permutare, procesul de derivare a cheii, runde;
- Se diferențiază de rețelele de substituție-permutare prin proiectarea de nivel înalt;

- Se aseamănă rețelelor de substituție-permutare în sensul că păstrează aceleași elementele componente: S-box, permutare, procesul de derivare a cheii, runde;
- Se diferențiază de rețelele de substituție-permutare prin proiectarea de nivel înalt;
- Introduc avantajul major că S-box-urile NU trebuie să fie inversabile;

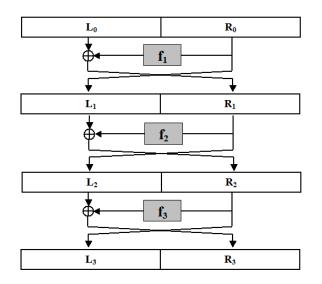
- Se aseamănă rețelelor de substituție-permutare în sensul că păstrează aceleași elementele componente: S-box, permutare, procesul de derivare a cheii, runde;
- Se diferențiază de rețelele de substituție-permutare prin proiectarea de nivel înalt;
- Introduc avantajul major că S-box-urile NU trebuie să fie inversabile;
- Permit așadar obținerea unei structuri inversabile folosind elemente neinversabile.

# Horst Feistel (1915 - 1990)



[Wikipedia]

- Structurile simetrice utilizate în construcția sistemelor bloc poartă numele lui Feistel;
- Munca sa de cercetare la IBM a condus la sistemul de criptare Lucifer şi mai târziu la DES.



▶ Intrarea în runda i se împarte în 2 jumătăți:  $L_{i-1}$  și  $R_{i-1}$  (i.e. Left și Right);

- Intrarea în runda i se împarte în 2 jumătăți:  $L_{i-1}$  și  $R_{i-1}$  (i.e. Left și Right);
- ▶ leşirile din runda *i* sunt:

$$L_i = R_{i-1}$$

$$R_i = L_{i-1} \oplus f_i(R_{i-1})$$

- Intrarea în runda i se împarte în 2 jumătăți:  $L_{i-1}$  și  $R_{i-1}$  (i.e. Left și Right);
- ▶ leşirile din runda *i* sunt:

$$L_i = R_{i-1}$$

$$R_i = L_{i-1} \oplus f_i(R_{i-1})$$

Funcțiile  $f_i$  depind de cheia de rundă, derivând dintr-o funcție publică  $\hat{f_i}$ :

$$f_i(R) = \widehat{f}_i(k_i, R)$$

► Rețelele Feistel sunt inversabile indiferent dacă funcțiile *f*<sub>i</sub> sunt inversabile sau nu;

- ► Rețelele Feistel sunt inversabile indiferent dacă funcțiile *f*<sub>i</sub> sunt inversabile sau nu;
- Fie  $(L_i, R_i)$  ieșirile din runda i;

- ▶ Rețelele Feistel sunt inversabile indiferent dacă funcțiile f<sub>i</sub> sunt inversabile sau nu;
- Fie  $(L_i, R_i)$  ieșirile din runda i;
- ▶ Intrările  $(L_{i-1}, R_{i-1})$  în runda i sunt:

$$R_{i-1}=L_i$$

$$L_{i-1}=R_i\oplus f_i(R_{i-1})$$

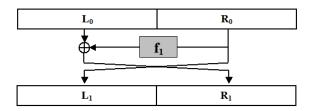
### Construcții

Am omis în cursurile anterioare ultima construcție:

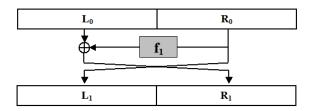
- ▶ PRF ⇒ PRG √
  Pornind de la PRF se poate construi PRG
- ▶ PRG ⇒ PRF √
  Pornind de la PRG se poate construi PRF
- ▶ PRP ⇒ PRF √
  Pornind de la PRP se poate construi PRF
- ▶ PRF ⇒ PRP
  Pornind de la PRF se poate construi PRP

 Revenim acum asupra construcției, când cunoaștem noțiunea de rundă Feistel;

- Revenim acum asupra construcției, când cunoaștem noțiunea de rundă Feistel;
- Considerăm o singură rundă Feistel pentru care  $f_1(x) = F_k(x)$ , cu F PRF;



- Revenim acum asupra construcției, când cunoaștem noțiunea de rundă Feistel;
- ► Considerăm o singură rundă Feistel pentru care  $f_1(x) = F_k(x)$ , cu F PRF;



▶ Întrebare: Este această construcție PRP?

► Răspuns: NU.

- ► Răspuns: NU.
- ► Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...

- ► Răspuns: NU.
- ▶ Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...
- ... este inversabilă,...

- ► Răspuns: NU.
- ► Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...
- ... este inversabilă,...
- ▶ ... dar ieșirea nu este o secvență pseudoaleatoare: primii n/2 biți de ieșire sunt egali cu ultimii n/2 biți de intrare;

- ► Răspuns: NU.
- ► Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...
- ... este inversabilă,...
- ▶ ... dar ieșirea nu este o secvență pseudoaleatoare: primii n/2 biți de ieșire sunt egali cu ultimii n/2 biți de intrare;
- Se mărește numărul de runde Feistel, păstrând  $f_i(x) = F_{k_i}(x)$ , unde  $k_i$  sunt chei independente;

- ► Răspuns: NU.
- ► Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...
- ... este inversabilă,...
- ▶ ... dar ieșirea nu este o secvență pseudoaleatoare: primii n/2 biți de ieșire sunt egali cu ultimii n/2 biți de intrare;
- Se mărește numărul de runde Feistel, păstrând  $f_i(x) = F_{k_i}(x)$ , unde  $k_i$  sunt chei independente;
- ▶ Pentru i = 3 se obține PRP;

- Răspuns: NU.
- ► Construcția este o permutare pe  $\{0,1\}^n$ ,...
- ... este inversabilă,...
- ▶ ... dar ieșirea nu este o secvență pseudoaleatoare: primii n/2 biți de ieșire sunt egali cu ultimii n/2 biți de intrare;
- Se mărește numărul de runde Feistel, păstrând  $f_i(x) = F_{k_i}(x)$ , unde  $k_i$  sunt chei independente;
- ▶ Pentru i = 3 se obţine PRP;
- ▶ Altfel spus, o rețea Feistel de 3 runde construită folosind 3 PRF  $f_1(x) = F_{k_1}(x)$ ,  $f_2(x) = F_{k_2}(x)$  și  $f_3(x) = F_{k_3}(x)$  cu  $k_1, k_2$  și  $k_3$  independente este PRP.

# Important de reținut!

- ► Rețele de substituție-permutare
- ► Rețele Feistel