03.10.2017

Ecuații diferențiale - Curs 1

Examen: lucrare scrisă, seminar maxim 1p

Bibliografie: A.C Elemente de teoria ec. diferențiale, Ed. „U"

St. Mirică Ec. dif vol I, vol II, Ed „U"

I. Vrabie, Ec. dif, Ed. Matrix Rom

A. Halamay, Ec. dif. Ed. didactică și pedagogică

Pt. exerciții: Șt. Mirică, vol III

Obiectul teoriei ecuațiilor diferențiale

Def 1: Fiind dată funcția $f(\cdot;\cdot): D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ spunem că definește obiectul matematic numit ec. diferențială:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x' = f(t,x) \quad \dot{x} = f(t,x)$$

Def 2: Funcția $\varphi(\cdot): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s.n soluție a ecuației dif. dacă:

- Graph $\varphi(\cdot) = \{(t, \varphi(t)), \ t \in I\} \subset D$
- $\varphi(\cdot)$ este derivabilă
- $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I$

Def 3: Mulțimea tuturor sol. unei ec. dif. s.n soluția generală a ecuației.

Obs: în coordonate: Dacă $B = \{b_1, \dots b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ bază,

$x \in \mathbb{R}^n = (x_1, \dots x_n), \quad f(\cdot;\cdot) = (f_1(\cdot;\cdot), \dots f_n(\cdot;\cdot))$

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x), \ i = \overline{1,n}$$

$\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots \varphi_n(\cdot))$ soluție $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$,

$\forall i = \overline{1,n}, \quad \forall t \in I$

- a dat răspuns la probleme concrete din diverse ramuri ale științei (mecanică, astronomie, fizică etc).

Cel mai bun exemplu: Legea a II-a a lui Newton

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$x(t)$ - starea unui sistem fizic la momentul t

$x'(t) = v(t)$ - viteza ~~la momentul~~ de schimbare a stării

$x''(t) = a(t)$ - accelerația

$$\vec{F}: \quad (x, x') \to F(x, x')$$

$$m x''(t) = F(x(t), x'(t))$$

$$x''(t) = \frac{1}{m} F(x(t), x'(t))$$

$$x'' = \frac{1}{m} F(x, x')$$

SV: $y = x' \quad (y(t) = x'(t)) \Rightarrow y' = x''$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(x, y) \end{cases}$$

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(t, (x, y)) = \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{m} F(x, y) \end{pmatrix}$$

$$z' = f(t, z)$$

Obiective (Probleme fundamentale)

1. Existența soluțiilor $\quad f = ?$ a.î. $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ are soluții
2. Unicitatea soluțiilor $\quad f = ?$ a.î. $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ are soluții unice
3. Studiu calitativ $\quad f = ?$ a.î. soluțiile ec. au anumite proprietăți

4. Determinarea soluțiilor ↗ găsirea de formule explicite → ec. sn **integrabilă prin cuadraturi**
↘ găsirea de soluții aproximative numerice s.n **analiză numerică**

Teoria elementară a ec. diferențiale

$\boxed{\text{I} \quad \text{Ec. diferențiale scalare}}$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad f(\cdot,\cdot) : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad n = 1$$

$\boxed{\text{① Ecuații cu variabile separabile}}$

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot b(x), \quad a(\cdot) : \dot{I} \to \mathbb{R}, \quad b(\cdot) : J \to \mathbb{R}, \quad \text{fct. continue}$$

Prop 1: Structura soluțiilor

1. Dacă $x_0 \in J$ a.î. $b(x_0) = 0$ atunci fct. const ~~f(~~ $\varphi(t) \equiv x_0$ e soluție

2. A primitivă a lui a, B primitivă a lui $\frac{1}{b(\cdot)}$ J_0,

$J_0 = \{x \in J ; \ b(x) \neq 0\}$

$\varphi(\cdot) : \dot{I}_0 \subseteq \dot{I} \to J_0$ soluție $\iff \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c$

Dem: 1. $b(x_0) = 0$

$\varphi(\cdot)$ derivabilă și $\varphi'(t) \equiv a(t)\, b(\varphi(t))$

$$0 \equiv a(t) \cdot \underset{\overset{\parallel}{0}}{b(x_0)} = 0$$

2. "$\Rightarrow$" $(B(\varphi(t)) - A(t) \equiv c)$

Fie $g(t) = B(\varphi(t)) - A(t)$

g e derivabilă

$$g'(t) = B'(\varphi(t)) \cdot \varphi(t) - A'(t) = \frac{1}{b(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) - a(t) \overset{\varphi(\cdot)\text{ sol}}{=\!=}$$

„$\Longleftarrow$" Fie $\varphi(\cdot): \mathring{I}_0 \subseteq I \to J_0$

Arătăm că $\varphi(\cdot)$ deriv. și că $\varphi(\cdot)$ verifică ecuația.

Pp. că $\varphi(\cdot)$ este derivabilă.

$$B(\varphi(t)) \equiv A(t) + c \quad \Big| \frac{\partial}{\partial t}$$

$$B'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \equiv a(t)$$

$$\frac{1}{b(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) \equiv a(t), \quad \varphi'(t) \equiv a(t) \cdot b(\varphi(t));$$

Dem că $\varphi(\cdot)$ derivabilă.

Fie $t_0 \in \mathring{I}_0$ arbitrar fixat.

$x_0 := \varphi(t_0)$, $b(x_0) \neq 0$.

Pp. că $b(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, J_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $b(x) > 0, \forall x \in J_1$

$$B'(x) = \frac{1}{b(x)} > 0, \forall x \in J_1 \Rightarrow B(\cdot) \text{ strict crescătoare}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B(\cdot) \text{ bijectivă} \\ B(\cdot) \text{ derivabilă} \end{array}\right\} \Rightarrow B^{-1}_{(\cdot)} \text{ derivabilă}$$

$$\varphi(t) \equiv B^{-1}(A(t) + c)$$

$$t \in \mathring{I}_1 \in \mathcal{V}(t_0)$$

$\varphi(t)$ derivabilă (compunere de fct. deriv.)

$\Rightarrow \varphi(\cdot)$ derivabilă în t_0.

<u>Prop 2</u>: (Lipirea soluțiilor)

Fie $f(\cdot,\cdot): D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuă, $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$

$\varphi_1: (a, b) \to \mathbb{R}^n$ sol $\qquad \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t < b}} \varphi_1(t) = \lim\limits_{\substack{t \to b \\ t > b}} \varphi_2(t) =: x_0$

$\varphi_2: (b, c) \to \mathbb{R}^n$ sol

Fie $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in (a, b) \\ x_0, & t = b \\ \varphi_2(t), & t \in (b, c) \end{cases}$

Atunci $\varphi(\cdot)$ este sol. a ecuației.

<u>Dem</u>: $t \in (a, b) \Longrightarrow \varphi(t) = \varphi_1(t)$, $\varphi_1(\cdot)$ sol

$$\varphi(\cdot)\Big|_{(a,b)} = \varphi_1(\cdot) \text{ sol}$$

$t \in (b, c)$ analog

$$\varphi'_s(b) = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \frac{\varphi(t) - \varphi(b)}{t - b} = \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \frac{\varphi_1(t) - x_0}{t - b} \overset{L.H}{=} \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} \varphi_1'(t)$$

$$\overset{\varphi_1 \text{ sol pe } (a,b)}{=} \lim_{\substack{t \to b \\ t < b}} f(t, \varphi_1(t)) \overset{f(\cdot) \text{ cont}}{=} f(b, x_0) = f(b, \varphi(b))$$

Analog pt $\varphi'_d(b)$

$$\varphi'_s(b) = \varphi'_d(b) = \varphi(b) = \varphi(b, \varphi(b))$$

(Verifică ec. și în b)

<u>Prop 3</u>: (Existența și unicitatea locală a sol)

1. $\forall (t_0, x_0) \in \dot{I} \times J$ $(\exists)$ $i_0 \in \mathcal{V}(t_0)$, $\exists \varphi(\cdot): \dot{I}_0 \to J$ sol cu $\varphi(t_0) = x_0$

2. $\forall (t_0, x_0) \in \dot{I} \times J_0$ $\exists \dot{I}_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ $\exists! \varphi(\cdot): \dot{I}_0 \to J$ sol cu $\varphi(t_0) = x_0$

Algoritm $\frac{dx}{dt} = a(t)\, b(x)$

1. Rezolvă ec. algebrică $b(x) = 0 \to$ rădăcinile $x_1, \dots x_n, \dots$
Scriem $\varphi_1(t) \equiv x_1$, $\varphi_2(t) \equiv x_2, \dots$ $\varphi_n(t) \equiv x_n, \dots$
sol. staționare

Se integrează $\int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)\,dt$

$B(x) = A(t) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Soluția generală sub formă implicită

Se inversează (dacă este posibil):

$\varphi(t, c) = B^{-1}(A(t) + c),\ c \in \mathbb{R}$

Soluția generală sub formă explicită

② Ecuații liniare scalare

$\frac{dx}{dt} = a(t)x,\quad a(\cdot): \dot{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cont

Caz particular, $b(x) \equiv x$

Prop 1 (Structura soluțiilor)

Fie $A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$

Atunci $\varphi(\cdot): \dot{I} \to \mathbb{R}$ e sol. a ec $\Longleftrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î.

$\varphi(t) \equiv c \cdot e^{A(t)}$

Dem: "$\Longrightarrow$" $\varphi(\cdot)$ sol $\Rightarrow \varphi'(t) \equiv a(t)\cdot \varphi(t) \,\Big|\cdot e^{-A(t)}$

$\varphi'(t)\, e^{-A(t)} - a(t)\cdot e^{-A(t)}\, \varphi(t) = 0$

$\left(\varphi(t)\cdot e^{-A(t)}\right)' = 0 \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi(t)\cdot e^{-A(t)} \equiv c$

$\Rightarrow \varphi(t) \equiv c\, e^{A(t)}$

"$\Longleftarrow$" $\varphi'(t) \equiv c \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) \equiv a(t, \varphi(t))$

Prop 2 (EUG)

~~$\forall (x_0, t_0) \in \dot{I} \times \mathbb{R},\ \exists!\ \varphi_{t_0}$~~

$\forall (t_0, x_0) \in \dot{I} \times \mathbb{R},\ \exists!\ \varphi_{t_0, x_0}(\cdot): \dot{I} \to \mathbb{R}$ soluție cu

Mai exact, $\varphi_{t_0,x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$

③ Ecuații afine

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t), \quad a(\cdot), b(\cdot) : \dot{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Prop1: (Principiul variației constantelor)

Fie $A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$

Atunci $\varphi(\cdot) : \dot{I} \to \mathbb{R}$ e sol. a ec. $\iff \exists\, c(\cdot)$ primitivă a lui $t \to e^{-A(t)} \cdot b(t)$ a.î. $\varphi(t) \equiv c(t) \cdot e^{A(t)}$

Dem (Vezi algoritm)

Existența și unicitatea generală

Prop2: (E.U.G)

$\forall (t_0, x_0) \in \dot{I} \times \mathbb{R} \quad \exists!\ \varphi_{t_0,x_0}(\cdot) : \dot{I} \to \mathbb{R}$ sol. cu $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$

Mai precis, $\varphi_{t_0,x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma} \cdot b(s)ds$

$t \in \dot{I}$

Dem: $\varphi_{t_0,x_0}(t_0) = x_0$

$\varphi'_{t_0,x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)dx} \cdot a(t) +$

Paranteză

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma}\, b(s)ds = \int_{t_0}^{t} \left(e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma - \int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma}\right) b(s)ds}$$

$$= e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)d\sigma}\, b(s)ds$$

$$\varphi_{t_0, x_0}(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \cdot a(t) + e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma}\, a(t) \cdot$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)\,d\sigma}\, b(s)\,ds + e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma} \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d}$$

$$= a(t) \cdot \underbrace{\left(x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} + e^{\int_{t_0}^{t} a(\sigma)\,d\sigma} \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\sigma)\,d\sigma} \cdot b(s)\,ds \right)}_{= \varphi_{t_0, x_0}(t)} + b(t)$$

Algoritm $\dfrac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)$

1. Considerăm ec. liniară asociată $\dfrac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\,\overline{x}$

Scriem sol $\overline{x}(t) = c \cdot e^{A(t)}$

2. „Variația constantelor"

Căutăm sol de forma $x(t) = c(t)\, e^{A(t)}$

$x(\cdot)$ sol $\Rightarrow x'(t) \equiv a(t)\,x(t) + b(t)$

$\left(c(t) \cdot e^{A(t)}\right)' \equiv a(t) \cdot c(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$

$c'(t)\, e^{A(t)} + c(t)\, e^{A(t)} \cdot a(t) \equiv a(t)\, c(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$

$c'(t) \cdot e^{A(t)} \equiv b(t)$

$\Rightarrow c'(t) \equiv b(t)\, e^{-A(t)} \Rightarrow c(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + k$

$\Rightarrow x(t) = e^{A(t)} \left(\int b(t)\, e^{-A(t)}\, dt + k \right)$

10.10.2017

4. Ecuații de tip Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\cdot x + b(t)\cdot x^{\alpha}, \cancel{a, b}\ a(\cdot), b(\cdot) : \overset{\circ}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ con}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

$\alpha = 0$: $x' = a(t)\cdot x + b(t)$

$\alpha = 1$: $x' = (a(t) + b(t))\cdot x$

PROP (Principiul variației constantelor)

Fie $A(\cdot)$ primitivă a lui $a(\cdot)$.

Atunci $\varphi(\cdot) : \overset{\circ}{I} \to \mathbb{R}$ e sol a ec $\Leftrightarrow \exists$ $c(\cdot)$ sol a ec.

cu var separabile $\frac{dc}{dt} = e^{(\alpha-1)A(t)} \cdot b(t)\cdot c^{\alpha}$ a.î. $\varphi(t) = c(t)\cdot$

Dem: „$\Rightarrow$" Fie $c(t) := \varphi(t)\cdot e^{-A(t)} \Rightarrow \varphi(t) = c(t)\cdot e^{A(t}$

$\varphi(\cdot)$ sol $\Rightarrow (c(t)\cdot e^{A(t)})' = a(t)\cdot c(t)\, e^{A(t)} + b(t)(c(t)\, e^{A(t}$

$c'(t)\cdot e^{A(t)} + c(t)\cdot \cancel{e^{A(t)}}\, a(t) \equiv a(t)\cdot c(t)\cancel{e^{A(t)}} + b(t$

$\cdot c^{\alpha}(t)\cdot e^{\alpha A(t)}$

$\Rightarrow c'(t) \equiv b(t)\cdot c^{\alpha}(t)\cdot e^{(\alpha-1)A(t)}$ ok

„$\Leftarrow$" $\varphi(\cdot) = c(t)\, e^{A(t)} \Rightarrow \varphi'(t) \equiv c'(t)e^{A(t)} + \underbrace{c(t)\, e^{A(}}$

$\equiv e^{(\alpha-1)A(t)}\, b(t)\, c^{\alpha}(t)\, e^{A(t)} + \varphi(t)\cdot a(t) \equiv$

$\equiv e^{\alpha A(t)}\, c^{\alpha}(t)\, b(t) + \varphi(t) a(t) \equiv (\varphi(t))^{\alpha}\, b(t) + \varphi(t) a$

$\Rightarrow \varphi(\cdot)$ sol a ecuației

Algoritm $\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$

1. Se consideră ec. liniară asociată $\frac{d\overline{x}}{dt} = a(t)\overline{x}$

2. „Variația constantelor"

Se caută soluții de forma $x(t) = c(t)\, e^{A(t)}$

$x(\cdot)$ soluție $\Longrightarrow c'(t) = e^{(\alpha-1)A(t)}\, b(t) \cdot c^{\alpha}(t)$ ec. cu var.

sel $\rightarrow$ <u>vezi Algoritm</u>

$\Longrightarrow c(t) = \dots$

$x(t) = \dots$

$\boxed{\text{5. Ecuații de tip Riccati}}$

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad \underset{\text{cont}}{a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot)} : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\Downarrow$

pol. de gradul $\underline{\text{II}}$ în x

$x' = x^2 + t^2$ nu este integrabilă prin cuadraturi

<u>Caz particular</u>: Se cunoaște o soluție particulară $\varphi_0(\cdot)$

<u>PROP</u> Fie $\varphi_0(\cdot) : \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sol a ec.

Atunci $\varphi(\cdot) : \mathring{I} \to \mathbb{R}$ e sol a ec $\Longleftrightarrow \psi(t) := \varphi(t) - \varphi_0(t)$

este sol. a ec. Bernoulli următoare:

$$y' = (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))\, y + a(t)\, y^2$$

<u>Dem</u>: „$\Longrightarrow$" $\varphi(\cdot), \varphi_0(\cdot)$ sol $\Longrightarrow \varphi'(t) \equiv a(t)\varphi^2(t) + b(t) \cdot$

$\cdot\, \varphi(t) + c(t)$

$\varphi_0'(t) = a(t)\varphi_0^2(t) + b(t)\varphi_0(t) + c(t)$

$\psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t) \Longrightarrow \varphi(t) = \psi(t) + \varphi_0(t)$

$(\psi(t) + \varphi_0(t))' \equiv a(t)(\psi(t) + \varphi_0(t))^2 + b(t) \cdot (\psi(t) + \varphi_0(t))$

$+ c(t)$

$\psi'(t) + \cancel{\varphi_0'(t)} \equiv a(t)\psi^2(t) + 2a(t)\psi(t)\varphi_0(t) + \cancel{a(t)\varphi_0^2(t)}$

$+ b(t)\psi(t) + \cancel{b(t)\varphi_0(t)} + \cancel{c(t)}$

$$\psi'(t) \equiv \left(2a(t)\varphi_0(t) + b(t)\right)\psi(t) + a(t)\psi^2(t)$$

$$\overset{\shortparallel}{\Longleftarrow} \quad \psi(t) = \varphi(t) - \varphi_0(t)$$

$\varphi_0(\cdot)$ sol a ec $\Longrightarrow \varphi_0'(t) \equiv a(t)\varphi_0^2(t) + b(t)\varphi_0(t) + c(t)$

$\psi(\cdot)$ sol $\Longrightarrow \psi'(t) \equiv (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))\psi(t) + a(t)\psi^2$

$$(\varphi(t) - \varphi_0(t))' \equiv (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))(\varphi(t) - \varphi_0(t)) + a(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi_0(t))^2$$

$$\varphi'(t) - \underbrace{\varphi_0'(t)}_{-(\cancel{a(t)\varphi_0^2(t)} + \cancel{b(t)\varphi_0(t)} + c(t))} \equiv (2a(t)\cdot\varphi_0(t) + b(t))\varphi(t) - \cancel{2a(t)\varphi_0^2(t)} - \cancel{b(t)\varphi_0(t)} + a(t)\varphi^2(t) - 2a(t)\varphi(t)\varphi_0(t) + a(t)$$

$\Longrightarrow \varphi'(t) \equiv a(t)\cdot\varphi^2(t) + b(t)\varphi(t) + c(t)$ OK

Algoritm $\quad x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$, $\varphi_0(\cdot)$ sol

SV $\quad y = x - \varphi_0(t)$ $\quad [y(t) = x(t) - \varphi_0(t) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x(t) = y(t) + \varphi_0(t)]$

$x(\cdot)$ sol $\Longrightarrow y' = (2a(t)\cdot\varphi_0(t) + b(t))y + a(t)\cdot y^2$

ec. Bernoulli $\to$ vezi Algoritm

$\Longrightarrow y(t) = \dots$

$x(t) = y(t) + \varphi_0(t)$

6. Ecuații omogene

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad f(\cdot) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

$\psi : I \to \mathbb{R},\ \psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t}$ e sol. a ec. cu var separabile

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(y) - y}{t}$$

Dem: "$\Longrightarrow$" $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t} \iff \varphi(t) = t \cdot \psi(t)$, $\varphi(\cdot)$ sol. a

ec $\Rightarrow \ (t\ \psi(t))' \equiv f\left(\dfrac{t \cdot \psi(t)}{t}\right)$

$$t \cdot \psi'(t) + \psi(t) \equiv f(t \cdot \psi(t))$$

$$\psi'(t) \equiv \frac{f(\psi(t)) - \psi(t)}{t} \quad \text{ok}$$

"$\Longleftarrow$" $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{t}$, ψ sol $\quad \left(\dfrac{\varphi(t)}{t}\right)' \equiv \dfrac{f\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) - \frac{\varphi(t)}{t}}{t}$

$$\frac{\varphi'(t) \cdot t - \cancel{\varphi(t)}}{t^2} \equiv \frac{t \cdot f\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) - \cancel{\varphi(t)}}{t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) \equiv f\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right) \quad \text{ok}$$

Algoritm $\quad \dfrac{dx}{dt} = f\left(\dfrac{x}{t}\right)$

SV $\quad y = \dfrac{x}{t} \ \left(y(t) = \dfrac{x(t)}{t} \iff x(t) = t \cdot y(t) \right)$

$x(\cdot)$ sol $\Rightarrow y' = \dfrac{f(y) - y}{t}$ ec. cu var. separabile $\to$ vezi Algoritm

$\Rightarrow y(t) = \ldots$

$x(t) = t \cdot y(t) = \ldots$

II Ecuații de ordin superior care admit reducerea ordinului

Def: a) $F(\cdot, \cdot) : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ def. ec. dif de ordin n,

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0.$$

b) $\varphi(\cdot) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ...

1) $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots x^{(n)}) = 0$, $k = 1$

SV $\quad y = x^{(k)} \Longrightarrow F(t, y, y', \dots y^{(n-k)}) = 0$

$\Longrightarrow y(t) = \dots$

$x(t) = \dots$

2) $F\left(t, \frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \dots \frac{x^{(n)}}{x}\right) = 0$

SV $\quad y = \frac{x'}{x}$ ($\forall\, x(\cdot)$ sol s.v def. o nouă funcție $y(\cdot)$ după regula $y(t) = \frac{x'(t)}{x(t)}$)

$\Longrightarrow G(t, y, y', \dots y^{(n-1)}) = 0 \Rightarrow y(t) = \dots \Rightarrow x' = y$

care este ec. liniară $\Rightarrow x(t) = \dots$

3) Ecuații autonome $F(x, x', \dots x^{(n)}) = 0$

SV $\quad x' = y(x)$

Se caută funcția $y(\cdot)$ a.î. $x'(t) \equiv y(x(t))$

$\Longrightarrow G(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) = 0$

4) Ecuații de tip Euler

$F(x, tx', t^2x'', \dots t^n x^{(n)}) = 0$

SV $\quad |t| = e^s$ $\begin{cases} t = e^s, t > 0 \\ t = -e^s, t < 0 \end{cases}$

$t = e^s$ $(t > 0)$: $\forall\, x(\cdot)$ sol a ec. SV def $y(\cdot)$ după regula $y(s) = x(e^s) \Longleftrightarrow x(t) = y(\ln t)$

$\cancel{x(t) = x(e^s)} =: y(s)$

Noțiuni fundamentale

Problema Cauchy: Se știe $\begin{cases} f(\cdot,\cdot) \text{ def. ec } x' = f(t,x) \\ (t_0, x_0) \in D \text{ condiție inițială} \end{cases}$

Se caută $\varphi(\cdot): \dot{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluție a ec. cu $\varphi(t_0) = x_0$.

În acest caz spunem că $\varphi(\cdot)$ sol. a problemei Cauchy ~~dacă~~ (f, t_0, x_0).

<u>Def</u>: Spunem că $f(\cdot,\cdot)$ (sau ec. $x' = f(t,x)$) admite prop de:

a) existență locală (EL) în $(t_0, x_0) \in D$ dacă

$\exists \dot{I}_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ $\exists \varphi(\cdot): \dot{I}_0 \to \mathbb{R}^n$ soluție a prob. Cauchy dată de (f, t_0, x_0)

b) unicitate locală (U.L) în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $\forall \varphi_i : \dot{I}_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$ soluții ale aceiași probleme Cauchy (f, t_0, x_0) $\exists \dot{I}_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ a.î. $\varphi_1\big|_{\dot{I}_1 \cap \dot{I}_2 \cap \dot{I}_0} = \varphi_2\big|_{\dot{I}_1 \cap \dot{I}_2 \cap \dot{I}_0}$

c) existență globală (EG) în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $D = \dot{I} \times G$, $\dot{I} \in \mathbb{R}$, $G \in \mathbb{R}^n$ și dacă ~~există~~ $\exists \varphi(\cdot): \dot{I} \to \mathbb{R}^n$ soluție a pb. Cauchy (f, t_0, x_0)

d) unicitate globală (UG) în $(t_0, x_0) \in D$ dacă $\forall \varphi_i : \dot{I}_i \to \mathbb{R}^n$, $i = 1,2$ sol ale pb Cauchy (f, t_0, x_0) $\varphi_1\big|_{\dot{I}_1 \cap \dot{I}_2} = \varphi_2\big|_{\dot{I}_1 \cap \dot{I}_2}$

<u>PROP</u> (Ecuația integrală asociată unei ec. diferențiale)

Fie $f(\cdot,\cdot): D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ cont, $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$

Atunci $\varphi(\cdot): \dot{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e sol a ec $\Longleftrightarrow$

1. $\varphi(\cdot)$ continuă
2. $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$, $\forall t, t_0 \in \dot{I}$

Dem: "$\Longrightarrow$" $\varphi(\cdot)$ sol $\Rightarrow$ $\varphi(\cdot)$ derivabilă $\Rightarrow$ $\varphi(\cdot)$ cont ~~sol~~

$\Rightarrow \varphi'(s) = f(s, \varphi(s))\ \forall s \in \mathring{I} \Big| \int$

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \overset{LN}{=} \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$$

"$\Longleftarrow$" $\varphi(\cdot)$ cont, $f(\cdot,\cdot)$ cont $\Rightarrow s \to f(s, \varphi(s))$ cont

$\Rightarrow t \to \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\,ds$ derivabilă $\overset{2}{\Rightarrow} \varphi(\cdot)$ deriva

$\overset{(\,)'}{\Longrightarrow} \dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$ ok

$\boxed{\text{Teorema lui Peano (Existență locală a sol)}}$

Fie $f(\cdot,\cdot): D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuă,

$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$. Atunci $f(\cdot,\cdot)$ admite prop de EL pe D

$\left(\forall (t_0, x_0) \in D\ \exists\ \mathring{I}_0 \in \mathcal{V}_{(t_0)}\ \exists\ \varphi(\cdot): \mathring{I}_0 \to \mathbb{R}^n \text{ sol cu } \varphi(t_0) = x_0\right)$

10.10.2017

Seminar 2 – 331

① Ec. cu variabile separabile

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\cdot b(x), \quad a(\cdot): \dot{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

$$b(\cdot): J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

$$J_0 = \{x \in J;\ b(x) \neq 0\}$$

Algoritm

1\. Rezolvă ec. algebrică $b(x)=0 \Rightarrow x_1, x_2, \dots x_m, \dots$

Scrie $\varphi_1(t) \equiv x_1,\ \varphi_2(t) \equiv x_2, \dots \varphi_m(t) = x_m, \dots$ soluții staționare.

2\. Pe $J_0 \to$ se separă variabilele $\frac{dx}{b(x)} = a(t)dt$

$\to$ se integrează $\int \frac{dx}{b(x)} = \int a(t)\,dt$

$$B(x) = A(t) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Sol generală sub forma implicită

$\to$ se inversează $x = \varphi(t, c),\ c \in \mathbb{R}$

$$(= B^{-1}(A(t)+c)),\ c \in \mathbb{R}$$

Sol generală sub forma explicită

Ex: Să se determine sol. generală

1) $x'(t^2-1) = x+1$

2) $t x' - x = x^2$

3) $x - t x' = 1 + t^2 x'$

4) $\sqrt{t^2+1}\, x' - x = 0.$

$$x' = \frac{x+1}{t^2-1}$$

$$x' = x+1 \cdot \frac{1}{t^2-1}$$

$$\frac{dx}{dt} = x+1 \cdot \frac{1}{t^2-1} \quad (t \neq \{\pm 1\})$$

$x+1 = 0 \iff x_1 = -1$

$\Rightarrow \varphi_1(t) \equiv -1$ sol. staționară

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{dt}{t^2-1} \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{dt}{t^2-1} \quad \cancel{\ln(x+1)}$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t+1-t+1}{(t-1)(t+1)}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{t^2-1}$$

$k = \ln c$, $c >$

$\cancel{\Rightarrow \ln|x+1| = \frac{1}{2}\ln|[illegible]|}$

$$\ln|x+1| = \frac{1}{2}(\ln|t-1| - \ln|t+1|) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\ln|x+1| = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} + \ln k$$

$$\Rightarrow |x+1| = k\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$$

$$x+1 = k\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}, \; k \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow x(t) = -1 + k\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$$

2) $t x' - x = x^2$.

$$\iff \frac{dx}{dt} \cdot t = x^2 + x$$

$$\iff \frac{dx}{dt} = \frac{x^2+x}{t} \; (t \neq 0) \iff \frac{dx}{dt} = (x^2+x) \cdot \frac{1}{}$$

$x^2 + x = 0 \iff x \in \{-1, 0\}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \varphi_1(t) \equiv -1 \\ &\Rightarrow \varphi_2(t) \equiv 0. \end{aligned}\right\} \text{sol. staţionare}$$

$$\frac{dx}{x^2+x} = \frac{dt}{t} \Big| \int \iff \int \frac{dx}{x^2+x} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\iff \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dt}{t} \iff \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$\iff \ln|x| - \ln|x+1| = \ln|t| + c$$

$$c = \ln k$$

$$\iff \ln|t| + \ln k = \ln|x| - \ln|x+1|, \ k > 0$$

$$\iff \left| \frac{x}{x+1} \right| = k \cdot |t|$$

$$\iff \frac{x}{x+1} = k \cdot |t|, \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow x(t) = k \cdot |t| \cdot \frac{1}{1 - k|t|}, \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

4) $\sqrt{t^2+1}\, x' - x = 0$

$$\iff \frac{dx}{dt} \sqrt{t^2+1} = x$$

$x = 0 \Rightarrow \varphi_1(t) \equiv 0$ sol staţionară

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \Big| \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \iff \ln|x| = \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$c = \ln k, \ k > 0$$

$$\Rightarrow x(t) = k \cdot (t + \sqrt{t^2+1}), \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

② Ec. liniare scalare

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x, \quad a(\cdot): \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

$\boxed{\text{Soluție generală: } x(t) = c \cdot e^{A(t)}, \ A(\cdot) \text{ primitivă a}}$

③ Ec. afine scalare

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t), \quad a(\cdot), b(\cdot): \mathring{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ cont}$$

$\boxed{\text{Algoritm (Metoda variației constantelor)}}$

1. Consider ec. liniară asociată $\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t) \cdot \bar{x}$

Scrie sol. generală:

$$\bar{x}(t) = c \cdot e^{A(t)}$$

2. „Variația constantelor"

Se caută sol. de forma $x(t) = c(t) \cdot e^{A(t)}$

$x(\cdot)$ sol

$$\Rightarrow \left(c(t) \cdot e^{A(t)}\right)' \equiv a(t) \cdot c(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$$

$$c'(t)\, e^{A(t)} \cdot a(t) \equiv a(t) \cdot c(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$$

$$c'(t) \equiv b(t) \cdot e^{-A(t)}$$

$$\Rightarrow c(t) = \int b(t)\, e^{-A(t)} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\int b(t)\, e^{-A(t)} + k\right) e^{A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Ex: Să se determine sol. generală

1) $x' + x \cdot tg\, t = \frac{1}{\cos t}$

3) $x' = \frac{2}{t} \cdot x + t^2 \cos t$

4) $x' = \frac{2x + \ln t}{t \ln t}$

5) $x = t(x' - t \cdot \cos t)$

1) $x' + x \cdot tg\, t = \frac{1}{\cos t}$

$\cancel{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos t} - x \cdot tg\, t}$

$\cancel{\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos t}(x - \sin t)(1 - x \sin t)}$

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{-x \cdot tg(t)}_{x \cdot a(t)} + \underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{b(t)}$$

Consider ec. asociată: $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}(-tg(t))$

Sol. generală:

$$\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int -tg(t)dt} = \cancel{c \cdot e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx}}$$

$$= c \cdot e^{-\int \frac{\sin t}{\cos t} dt} \overset{u = \cos t}{\underset{SV}{=}} c \cdot e^{-\int \frac{1}{u} du} =$$

$$= c \cdot e^{\ln|\cos t| + c} = c \cdot \cos t, c \in \mathbb{R}.$$

~~Caut sol de forma: $x(t) = c(t) \cdot e^{A(t)}$~~

$\cancel{x(t) = c(t) \cdot e^{\ln|\cos t| + k}}$

$\cancel{(c(t) \cdot e^{\ln|\cos t| + k})' = -tg\, t \cdot c(t) \cdot e^{\ln|\cos t| + k} + \frac{1}{\cos t}}$

$x(t) = c(t) \cdot \cos(t)$

$(c(t) \cdot \cos(t))' = -tg\, t \cdot c(t) \cos t + \frac{1}{\cos t}$

$c'(t) \cos t + \cancel{c(t) \cdot (-\sin t)} = -\cancel{\frac{\sin t}{\cos t}} \cdot c(t) \cdot \cancel{\cos t} + \frac{1}{\cos t}$

$c'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow c(t) = \int \frac{1}{\cos^2 t}\, dt$

$\Rightarrow c(t) = \left(\int \frac{1}{\cos^2 t} \right) \cdot \cos t$

2) $t x' - x = t^2 e^t$

$\frac{dx}{dt} \cdot t = t^2 e^t - x \quad (t \neq 0)$

$\frac{dx}{dt} = \underbrace{t \cdot e^t}_{b(t)} - \underbrace{x \cdot \frac{1}{t}}_{a(t) \cdot x}$

$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} \left(-\frac{1}{t}\right)$

$\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{t}\right) dt} = c \cdot e^{-\ln|t| + k}$

$= c \cdot \cancel{\ln} t, \; c \in \mathbb{R}.$

$x(t) = c(t) \cdot \ln(t)$

$(c(t) \cdot \cancel{\ln}(t))' = -\frac{1}{t} \cdot c(t) \ln(t) + t e^t$

~~$c'(t) \cdot \ln(t) + c(t) \cdot \frac{1}{t} = -\frac{1}{t} \cdot c(t) \ln(t) + t e^t$~~

$c'(t) \cdot t + \cancel{c(t)} = \cancel{c(t)} + t \cdot e^t$

$\Rightarrow c(t) = \int e^t dt \Rightarrow c(t) = e^t + k, \; k \in \mathbb{R}.$

4) $x' = \dfrac{2x + \ln t}{t \cdot \ln t} \iff \dfrac{dx}{dt} = \underbrace{x \cdot \dfrac{2}{t\ln t}}_{x \cdot a(t)} + \underbrace{\dfrac{1}{t}}_{b(t)}$

$\dfrac{d\bar{x}}{dt} = \dfrac{2}{t\ln t}\bar{x}$

$\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int \frac{2}{t\ln t} dt} = c \cdot e^{2\int (\ln t)' \cdot \frac{1}{\ln t} dt}$

$= c \cdot e^{2\ln(\ln|t|)} = c \cdot e^{\ln(\ln|t|)^2} = c \cdot \ln^2 t$

$x(t) = c(t) \cdot \ln^2 t$

$(c(t) \cdot \ln^2 t)' = c(t) \cdot \ln^2 t \cdot \dfrac{2}{t\ln t} + \dfrac{1}{t}$

$c'(t) \ln^2 t + c(t) \cdot 2\ln t \cdot \dfrac{1}{t} = c(t) \ln t \cdot \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{t}$

$c'(t) \cdot \ln^2 t = \dfrac{1}{t}$

$c'(t) = \dfrac{1}{t\ln^2 t} \iff c(t) = \int \dfrac{1}{t \ln^2 t} dt = \int (\ln t)' \cdot \dfrac{1}{\ln^2 t}$

5) $x' = \dfrac{x}{t} + t \cdot \cos t, \; t > 0$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}\bar{x}$

$\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int \frac{1}{t} dt} = c \cdot e^{\ln t} = c \cdot t$

Caut sol de forma: $x(t) = c(t) \cdot t$

$(c(t) \cdot t)' = c(t) \cdot \cancel{t} \cdot \dfrac{1}{\cancel{t}} + t \cdot \cos t$

$c'(t) t + \cancel{c(t)} = \cancel{c(t)} + t \cdot \cos t$

$c'(t) = \cos t \implies c(t) = \int \dfrac{\cos t}{~~\sin t~~} dt$

3) $x' = \frac{2}{t} \cdot x + t^2 \cdot \cos t$

$$\frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{2}{t} + t^2 \cdot \cos t \,, \quad t > 0$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x} \cdot \frac{2}{t}$$

$$\bar{x}(t) = c \cdot e^{\int \frac{2}{t} dt} = c \cdot e^{2\int \frac{1}{t} dt} = c \cdot e^{2 \ln|t|}$$

$$= c \cdot e^{(\ln|t|)^2} = c \cdot t^2 .$$

Caut sol de forma: $x(t) = c(t) \cdot t^2$.

$$(c(t) \cdot t^2)' = c(t) \cdot t^{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\cancel{t}} + t^2 \cdot \cos t$$

$$c'(t) \cdot t^2 + \cancel{c(t) \cdot 2 \cdot t} = \cancel{c(t) \cdot 2 \cdot t} + t^2 \cdot \cos t$$

$$c'(t) \cdot \cancel{t^2} = \cancel{t^2} \cdot \cos t$$

$$c'(t) = \cos t \implies c(t) = \int \cos t \, dt$$

$$\implies c(t) = \sin t + k, \; k \in \mathbb{R}.$$

$$x(t) = t^2 \cdot (\sin t + k), \; k \in \mathbb{R}.$$