

## CURSUL 3: FUNCȚII

G. MINCU

### 1. FUNCȚII

**Definiția 1. (provizorie!)** Numim **funcție** orice triplet format din două mulțimi și o „lege de corespondență” care asociază *fiecărui* element din prima mulțime un *unic* element din cea de-a doua.

**Definiția 2.** Prima dintre cele două mulțimi care intră în componența unei funcții se numește **domeniul** (de **definiție** al) funcției, iar cea de a doua se numește **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcției.

**Observația 3.** Două funcții sunt egale dacă și numai dacă au același domeniu, același codomeniu și aceeași lege de corespondență.

**Notăția** uzuală pentru o funcție  $f$  care are domeniul  $A$  și codomeniul  $B$  este  $f : A \rightarrow B$  (citim „ $f$  este definită pe  $A$  și ia valori în  $B$ ”). Faptul că elementului  $a \in A$  îi corespunde prin  $f$  elementul  $b \in B$  se notează  $f(a) = b$ .

**Definiția 4.** Prin **graficul** unei funcții  $f : A \rightarrow B$  înțelegem mulțimea  $\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$ .

**Observația 5.** Dacă  $f : A \rightarrow B$ , atunci  $\Gamma_f \subset A \times B$ .

**Observația 6.** Cunoscând graficul unei funcții, putem identifica domeniul de definiție al funcției, precum și legea de corespondență a acesteia<sup>1</sup>. Din acest motiv, se preferă reformularea definiției 1 astfel încât să se evite termenul „lege”, care nu are în situația respectivă un înțeles foarte bine precizat:

**Definiția 7.** Numim **funcție** orice triplet format din trei mulțimi  $A, B, G$ ,  $G \subset A \times B$ , cu proprietatea:  $\forall a \in A \exists! b \in B (a, b) \in G$ .

**Observația 8.** O consecință a axiomelor din teoria mulțimilor este faptul că, date fiind două mulțimi  $A$  și  $B$ , funcțiile definite pe  $A$  cu valori în  $B$  constituie o mulțime.

---

<sup>1</sup>Nu însă și codomeniul; putem însă „vedea” imaginea funcției.

**Observația 9.** Dacă mulțimile finite  $A$  și  $B$  au  $a$ , respectiv  $b$  elemente, se arată ușor (temă!) că numărul funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $B$  este  $b^a$ . Această observație ne sugerează utilizarea pentru mulțimea tuturor funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $B$  a notației  $B^A$ .

## 2. CLASE IMPORTANTE DE FUNCȚII

**Definiția 10.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **injectivă** dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .

**Observația 11.** În cuvinte, o funcție este injectivă dacă duce orice două elemente diferite în elemente diferite.

O caracterizare des utilizată a funcțiilor injective este dată de:

**Propoziția 12.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  este injectivă dacă și numai dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ .

**Exemplul 13.** Dacă  $A \subset B$ , atunci  $i : A \rightarrow B$ ,  $i(a) = a$  este o funcție injectivă. Ea se numește **injectia canonică** a lui  $A$  în  $B$ .

**Definiția 14.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **surjectivă** dacă  $\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$ .

**Observația 15.** În cuvinte, o funcție este surjectivă dacă „își umple codomeniul”.

**Exemplul 16.**  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ ,  $\pi_A(a, b) = a$  și  $\pi_B : A \times B \rightarrow B$ ,  $\pi_B(a, b) = b$  sunt funcții surjective (ele se numesc **proiecțiile canonice** ale produsului cartezian  $A \times B$ ).

**Definiția 17.** O funcție injectivă și surjectivă se numește **bijectivă**.

**Exemplul 18.** Dată fiind o mulțime  $A$ , funcția  $\text{id}_A : A \rightarrow A$ ,  $\text{id}_A(a) = a$  este o funcție bijectivă. Ea se numește **funcția identică a mulțimii**  $A$ .

**Definiția 19.** O mulțime  $A$  se numește **infinită** dacă există  $f \in A^A$  injectivă, dar nesurjectivă. Mulțimea  $A$  se numește **finită** dacă nu este infinită.

**Propoziția 20.** Fie  $A$  o mulțime nevidă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- a)  $A$  este finită.
- b) Există un număr  $n \in \mathbb{N}^*$  și o funcție bijectivă  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ .

Pentru considerațiile de până la finalul acestei secțiuni vom considera că  $A$  și  $B$  desemnează submulțimi ale lui  $\mathbb{R}$ .

**Definiția 21.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **crescătoare** dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$ .

**Definiția 22.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **descrescătoare** dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$ .

**Definiția 23.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **monotonă** dacă este fie crescătoare, fie descrescătoare.

**Definiția 24.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **strict crescătoare** dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$ .

**Definiția 25.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **strict descrescătoare** dacă  $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2)$ .

**Definiția 26.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **strict monotonă** dacă este fie strict crescătoare, fie strict descrescătoare.

### 3. FUNCȚIA CARACTERISTICĂ A UNEI SUBMULTIMI

**Definiția 27.** Fie  $E$  o mulțime și  $A \subset E$ . Funcția

$$\chi_A : E \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

se numește **funcția caracteristică<sup>2</sup> a lui  $A$  în  $E$** .

**Teorema 28.** Fie  $E$  o mulțime. Funcția  $\chi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \{0, 1\}^E$ ,  $\chi(A) = \chi_A$  este bijectivă.

Funcțiile caracteristice ale submulțimilor au proprietăți calculatorii interesante care, laolaltă cu teorema 28, le conferă o largă aplicabilitate:

**Propoziția 29.** Fie  $E$  o mulțime și  $A, B$  submulțimi ale sale. Au loc relațiile:

- a)  $\chi_E = 1$ ;  $\chi_\emptyset = 0$ .
- b)  $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \chi_B$ .
- c)  $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$ .
- d)  $\chi_{\complement_E A} = 1 - \chi_A$ .

### 4. „TRANSPORTUL” SUBMULTIMILOR PRIN FUNCȚII

**Definiția 30.** Dacă  $f : A \rightarrow B$  și  $C \subset A$ , notăm  $f(C)$  și numim **imaginea submulțimii  $C$  prin funcția  $f$**  mulțimea

$$\{b \in B : \exists c \in C \quad f(c) = b\}.$$

---

<sup>2</sup>Uneori, cu precădere în teoria probabilităților, se mai folosește pentru funcția prezentată denumirea de **funcția indicator a submulțimii  $A$  a lui  $E$**

**Definiția 31.** Prin **imaginea** funcției  $f : A \rightarrow B$  înțelegem mulțimea  $f(A)$ .

**Notăția** folosită în mod uzual pentru imaginea funcției  $f$  este  $\text{Im} f$ .

**Observația 32.** O funcție este surjectivă dacă și numai dacă imaginea sa coincide cu codomeniul său.

**Definiția 33.** Dacă  $f : A \rightarrow B$  și  $D \subset B$ , notăm  $f^{-1}(D)$  și numim **preimaginea**<sup>3</sup> **submulțimii**  $D$  **prin funcția**  $f$  mulțimea  $\{a \in A : f(a) \in D\}$ .

**Observația 34.** Notăția din definiția 33 se utilizează și în situația în care funcția  $f$  nu este inversabilă!

**Propoziția 35.** Considerăm funcția  $f : A \rightarrow B$ . Atunci:

- a) Dacă  $M \subset N \subset A$ , atunci  $f(M) \subset f(N)$ .
- b) Dacă  $M, N \subset A$ , atunci  $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$ .
- c) Dacă  $M, N \subset A$ , atunci  $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$ .
- d) Dacă  $P \subset Q \subset B$ , atunci  $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$ .
- e) Dacă  $P, Q \subset B$ , atunci  $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$ .
- f) Dacă  $P, Q \subset B$ , atunci  $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$ .

**Temă:** Demonstrați propoziția 35!

**Temă:** Generalizați afirmațiile din propoziția 35 la situația unei familii arbitrare de submulțimi!

**Observația 36.** Observăm că în cazul relațiilor din propoziția 35 imaginea inversă „se poartă mai bine” decât imaginea directă. Aparenta „anomalie” de la punctul c) dispăre pentru funcțiile injective:

**Propoziția 37.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  este injectivă dacă și numai dacă

$$\forall M, N \subset A \quad f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

## 5. COMPUNEREA FUNCȚIILOR

**Definiția 38.** Date fiind funcțiile  $f : A \rightarrow B$  și  $g : C \rightarrow D$  cu<sup>4</sup>  $B \subset C$ , definim funcția  $g \circ f : A \rightarrow D$ ,  $g \circ f(x) = g(f(x))$ . Funcția  $g \circ f$  se numește **compusa lui**  $g$  **cu**  $f$ .

O situație importantă din punctul de vedere al compunerii funcțiilor este prezentată în

<sup>3</sup>sau **imaginea inversă**, sau încă **imaginea reciprocă**

<sup>4</sup>în caz de necesitate, se poate impune doar condiția mai slabă  $\text{Im} f \subset C$

**Exemplul 39.** Dată fiind o funcție arbitrară  $f : A \rightarrow B$ ,  $\text{id}_B \circ f = f$  și  $f \circ \text{id}_A = f$ .

**Propoziția 40.** Fie funcțiile  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : C \rightarrow D$  și  $h : E \rightarrow F$ , unde  $B \subset C$  și  $D \subset E$ . Atunci<sup>5</sup>  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**Propoziția 41.** Fie funcțiile  $f : A \rightarrow B$  și  $g : C \rightarrow D$ , unde  $B \subset C$ . Atunci:

- a) Dacă  $f$  și  $g$  sunt injective, atunci  $g \circ f$  este injectivă.
- b) Dacă  $g \circ f$  este injectivă, atunci  $f$  este injectivă.
- c) Dacă  $f$  și  $g$  sunt surjective și  $B = C$ , atunci  $g \circ f$  este surjectivă.
- b) Dacă  $g \circ f$  este surjectivă, atunci  $g$  este surjectivă.
- e) Dacă  $f$  și  $g$  sunt bijective și  $B = C$ , atunci  $g \circ f$  este bijectivă.
- b) Dacă  $g \circ f$  este bijectivă, atunci  $f$  este injectivă, iar  $g$  este surjectivă.

**Temă:** Demonstrați propoziția 41!

**Propoziția 42.** Fie  $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$ ,  $B \subset C$ , și funcțiile  $f : A \rightarrow B$  și  $g : C \rightarrow D$ . Atunci:

- a) Dacă  $f$  și  $g$  sunt de aceeași monotonie, atunci  $g \circ f$  este crescătoare.
- b) Dacă  $f$  și  $g$  sunt de monotonii opuse, atunci  $g \circ f$  este descrescătoare.
- c) Dacă  $f$  și  $g$  sunt de aceeași monotonie strictă, atunci  $g \circ f$  este strict crescătoare.
- d) Dacă  $f$  și  $g$  sunt de monotonii stricte opuse, atunci  $g \circ f$  este strict descrescătoare.

**Temă:** Demonstrați propoziția 42!

**Propoziția 43.** Orice funcție strict monotonă este injectivă.

**Temă:** Demonstrați propoziția 43!

## 6. INVERSAREA FUNCȚIILOR

**Definiția 44. (provizorie!)** Prin **inversă a funcției**  $f : A \rightarrow B$  înțelegem orice funcție  $g : B \rightarrow A$  cu proprietățile  $g \circ f = \text{id}_A$  și  $f \circ g = \text{id}_B$ .

**Definiția 45.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **inversabilă** dacă ea admite (cel puțin o) inversă.

**Propoziția 46.** Dacă funcția  $f : A \rightarrow B$  este inversabilă, atunci ea admite o unică inversă

<sup>5</sup>Anticipând discuția referitoare la legi de compoziție, această relație arată că, dată fiind o mulțime  $M$ , compunerea funcțiilor este o operație asociativă pe  $M^M$ .

*Demonstrație:* Presupunem că  $f$  este inversabilă și că  $g$  și  $h$  sunt inverse ale sale. Atunci,

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_A \circ h = h. \quad \square$$

**Definiția 47.** Dacă funcția  $f : A \rightarrow B$  este inversabilă, atunci prin **inversa** lui  $f$  înțelegem unica (conform propoziției 46) funcție  $g : B \rightarrow A$  cu proprietățile  $g \circ f = \text{id}_A$  și  $f \circ g = \text{id}_B$ .

**Notăția** pe care o vom folosi pentru a desemna inversa funcției inversabile  $f$  este  $f^{-1}$ .

**Observația 48.** Dacă  $f : A \rightarrow B$  este inversabilă, iar  $D \subset B$ , atunci, în acord cu definiția 33, notația  $f^{-1}(D)$  ar desemna atât preimagea lui  $D$  prin  $f$ , cât și imaginea lui  $D$  prin  $f^{-1}$ . Întrucât aceste două mulțimi coincid, utilizarea aceleiași notații nu prezintă ambiguități.

**Teorema 49.** O funcție este inversabilă dacă și numai dacă ea este bijectivă.

## 7. PRODUSUL CARTEZIAN AL UNEI FAMILII DE MULȚIMI

**Observația 50.** Perechea ordonată  $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$  poate fi interpretată ca fiind o reprezentare a funcției  $a : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$ ,  $a(1) = a_1$ ,  $a(2) = a_2$ . Evident,  $a(1) \in A_1$  și  $a(2) \in A_2$ . Aceste considerații ne sugerează:

**Definiția 51.** Dată fiind familia de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$ , definim produsul său cartezian ca fiind mulțimea  $\{a : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : \forall i \in I \ a(i) \in A_i\}$ <sup>6,7</sup>

**Vom nota** produsul cartezian al familiei de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$  cu  $\prod_{i \in I} A_i$ , iar elementul  $a \in \prod_{i \in I} A_i$  cu  $(a(i))_{i \in I}$  sau, mai frecvent, cu  $(a_i)_{i \in I}$ .

**Definiția 52.** Pentru  $j \in I$ , funcția  $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ ,  $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$  se numește **proiecția canonică** a produsului  $\prod_{i \in I} A_i$  pe componenta  $j$ .

**Observația 53.** Proiecțiile canonice ale produsului cartezian sunt surjective.

<sup>6</sup>Axiomele teoriei mulțimilor au drept consecință faptul că aceasta este într-adevăr o mulțime.

<sup>7</sup>Una dintre axiomele teoriei mulțimilor (așa-numita „axiomă a alegerii”) afirmă că dacă toate mulțimile familiei date sunt nevide, atunci produsul cartezian al familiei este nevid.

**Observația 54.** Dacă avem familia de mulțimi  $(A_i)_{i \in I}$  cu proprietatea  $A_i = A$  pentru orice  $i \in I$ , atunci, conform definiției 51, produsul cartezian  $\prod_{i \in I} A_i$  constă exact în funcțiile definite pe  $I$  și care iau valori în  $A$ . Deci, în acest caz avem  $\prod_{i \in I} A_i = A^I$ . Dacă în situația prezentată avem  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , vom folosi în loc de  $A^I$  notația  $A^n$ .

**Observația 55.** Conform observației anterioare,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}.$$

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.
- [4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.