Curs 10

Cuprins

Din cursurile trecute

- (S, Σ) signatură și R sistem de rescriere
- pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relația $t \to_R t'$ astfel:

$$
\boxed{
\begin{array}{lll}
t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\
 & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)] \text{, unde} \\
 & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context,} \\
 & & l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\
 & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție}
\end{array}
}
$$

- $\to_R$ este relația de rescriere generată de sistemul de rescriere R.

Din cursurile trecute

- (S, Σ) signatură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- $\to_E$ relația de rescriere generată de R_E
- $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ echivalența generată de $\to_E$

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$$

Sisteme de rescriere abstracte

Sisteme de rescriere abstracte

Definitie

Un sistem de rescriere abstract este o pereche $(T, \to)$ unde:

- T este o mulțime,
- $\to \subseteq T \times T$ ($\to$ este o relație binară pe T).

Definitii:

- $\leftarrow := \to^{-1}$ (relația inversă)
- $\leftrightarrow := \to \cup \leftarrow$ (închiderea simetrică)
- $\stackrel{*}{\to} := (\to)^*$ (închiderea reflexivă și tranzitivă)
- $\stackrel{*}{\leftrightarrow} := (\leftrightarrow)^*$ (echivalența generată)

Rescrierea termenilor

(S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

regulă de rescriere	$l \to_s r$	l, r termeni din $T_\Sigma(Y)$
sistem de rescriere (TRS)	R	mai multe $l \to_s r$
relația de rescriere	$\to_R$	generată de R
echivalența	$\overset{*}{\leftrightarrow}_R$	generată de $\to_R$

$(T_\Sigma(Y), R)$ este un sistem de rescriere abstract.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k | m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k | m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1 | k_2$ sau $k_2 | k_1\}$
- $\stackrel{+}{\rightarrow} = \{(m, k) \mid$ ex. $n \geq 0,$ ex. $k_1, \ldots, k_n \in T$ a.i. $m \rightarrow k_1 \rightarrow \ldots \rightarrow k_n \rightarrow k\} = \rightarrow$
- $\stackrel{*}{\rightarrow} = \stackrel{+}{\rightarrow} \cup \{(k, k) \mid k \in T\}$

Sisteme de rescriere abstracte

$(T, \to)$ sistem de rescriere.

Definitie

- $t \in T$ este reductibil dacă există $t' \in T$ a.î. $t \to t'$.
- O reducere este un șir $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$
- $t \in T$ este în formă normală (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este o formă normală a lui t dacă
  - $t \xrightarrow{*} t_0$ și
  - t_0 este în formă normală.
- t_1 și t_2 se intâlnesc dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$.
  - notație: $t_1 \downarrow t_2$.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- k este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele.
- k este o formă normală a lui m dacă k este un factor prim al lui m.

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- w este în formă normală dacă $w = a^n b^k$, cu $n, k \geq 0$.
- $w_1 \downarrow w_2$ dacă
  - $nr_a(w_1) = nr_a(w_2)$ și
  - $nr_b(w_1) = nr_b(w_2)$.

Sisteme de rescriere abstracte

$(T, \to)$ sistem de rescriere.

Definitie

$(T, \to)$ se numește

- noetherian (se termină): dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.
  - orice rescriere se termină.
- confluent: $t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- local confluent: $t_1 \leftarrow t \to t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- Church-Rosser: $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- Normalizat: orice element are o formă normală.
- Complet (convergent, canonic): confluent și noetherian.

Sisteme de rescriere abstracte

Confluent:

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl, "*"'] \arrow[dr, "*"] & \\
t_1 \arrow[dr, "*"'] & & t_2 \arrow[dl, "*"] \\
 & t'' &
\end{tikzcd}$$

Local confluent:

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
t_1 \arrow[dr, "*"'] & & t_2 \arrow[dl, "*"] \\
 & t'' &
\end{tikzcd}$$

Sisteme de rescriere abstracte

Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $(T, \rightarrow)$ este noetherian:
    - orice m se rescrie într-un factor prim al său.
- $(T, \rightarrow)$ nu este confluent:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 12 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & 6 \arrow[dl] & & 4 \arrow[dr] & \\
3 & & & & 2
\end{tikzcd}
$$

Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (1)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere. Dacă $t \downarrow t'$, atunci $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$.

Demonstrație

Dacă $t \downarrow t'$, atunci există t_0 a.î. $t \overset{*}{\to} t_0 \overset{*}{\leftarrow} t'$, i.e. $t \overset{*}{\leftrightarrow} t'$.

$\square$

Proprietăți

Propoziție (2)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \quad \text{orice element are o formă normală}$$

Exemplu

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 :\to Nat, s : Nat \to Nat, + : NatNat \to Nat\}$
- $E = \{x + 0 = x,\ x + s\ y = s(x + y), 0 + y = y + 0\}$
- $R_E = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y), 0 + y \to y + 0\}$
- orice termen are o formă normală, de forma $s(s(\ldots(0)\ldots))$
- R_E nu este noetherian: $0 + 0 \to_E 0 + 0 \to_E \ldots$
- eliminând ultima regulă de rescriere, obținem un sistem de rescriere noetherian

Proprietăți

Propoziție (3)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere.

complet $\Rightarrow$ orice element t are o unică formă normală $fn(t)$

Demonstrație

- Deoarece $(T, \to)$ este noetherian, t are o formă normală, i.e.

$$t \xrightarrow{*} t' \text{ și } t' \text{ este în formă normală.}$$

- Presupunem că t mai are o altă formă normală t''.
- Cum $t \xrightarrow{*} t''$ și $t \xrightarrow{*} t'$, din confluență avem

$$t' \downarrow t''.$$

- Cum t' și t'' sunt în formă normală, putem obține doar $t' = t''$.

$\square$

Proprietăți *(goto 25)*

Propoziție (4)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere.

$$\text{confluent} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Church-Rosser}$$

Demonstrație

$(\Leftarrow)$

- Presupunem $t_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\to} t_2$.
- Atunci avem $t_1 \stackrel{*}{\leftrightarrow} t_2$.
- Cum $(T, \to)$ este Church-Rosser, obținem că $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci $(T, \to)$ este confluent.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

($\Rightarrow$)

- Presupunem $t_1 \stackrel{*}{\leftrightarrow} t_2$. Atunci există n și $t'_1, \ldots, t'_n$ a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după n că dacă $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow t'_n$, atunci $t'_1 \downarrow t'_n$:
  - $n = 1$: Atunci evident $t'_1 \downarrow t'_1$.
  - $n \to n+1$: Pres. $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$.
    Din ip. de inducție știm $t'_1 \downarrow t'_n$. Atunci ex. w a.î. $t'_1 \stackrel{*}{\to} w \stackrel{*}{\leftarrow} t'_n$.
    Avem două cazuri:

$$\begin{tikzcd}
t'_1 \arrow[dr, "*"'] & & t'_n \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl, "*"] & t'_{n+1} \arrow[dl, dotted, "*"] \\
& w \arrow[r, dotted, "*"'] & w' &
\end{tikzcd}$$

- $t'_{n+1} \to t'_n$: evident $t'_1 \stackrel{*}{\to} w \stackrel{*}{\leftarrow} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$, deci $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- $t'_n \to t'_{n+1}$: Cum $w \stackrel{*}{\leftarrow} t'_n \to t'_{n+1}$ și $(T, \to)$ este confluent, obținem $w \downarrow t'_{n+1}$. Deci există w' a.î. $w \stackrel{*}{\to} w' \stackrel{*}{\leftarrow} t'_{n+1}$.
  Deci $t'_1 \stackrel{*}{\to} w \stackrel{*}{\to} w' \stackrel{*}{\leftarrow} t'_{n+1}$, adică $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$.

- În concluzie, $t_1 \downarrow t_2$. $\square$

Proprietăți

Propoziție (5)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere.

$$\text{confluent} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \quad \text{local confluent}$$

Exemplu

- $T = \{a, b, c, d\}$
- $\to$:
$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l] \arrow[r, bend right] & c \arrow[l, bend right] \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$
- T este local confluent:
  - $a \leftarrow b \to c$ și $a \downarrow c$ (în a)
  - $b \leftarrow c \to d$ și $b \downarrow d$ (în d)
- T nu este confluent:
  - $a \overset{*}{\leftarrow} b \overset{*}{\to} d$, dar $a \not\downarrow d$
  - $a \overset{*}{\leftarrow} c \overset{*}{\to} d$, dar $a \not\downarrow d$

Proprietăți

Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \quad \Rightarrow \quad \text{confluent}$$

Demonstrație

- Deoarece $(T, \to)$ este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.
- Fie M mulțimea elementelor care au cel puțin două forme normale diferite:

$$M = \{t \mid n_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\rightarrow} n_2, n_1 \neq n_2, n_1, n_2 \text{ în formă normală } \}.$$

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

- Demonstrăm următoarea proprietate:

$$(\star)\ \text{pt. or. } t \in M, \text{ există } t' \in M \text{ a.î. } t \to t'.$$

  - Fie $t \in M$.
  - Atunci ex. n_1 și n_2 în formă normală a.î. $n_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\to} n_2, n_1 \neq n_2$.
  - Pres. $n_1 \leftarrow t \to n_2$:
    - Din local confluență, obținem $n_1 \downarrow n_2$.
    - Cum n_1 și n_2 în formă normală, obținem $n_1 = n_2$ (contradicție).
  - Pres. $n_1 \leftarrow t \overset{*}{\to} n_2$:
    - Atunci există t_2 a.î. $n_1 \leftarrow t \to t_2 \overset{*}{\to} n_2$.
    - Din local confluența, obținem $n_1 \downarrow t_2$.
    - Cum n_1 în formă normală, obținem $t_2 \overset{*}{\to} n_1$.
    - Deci $t_2 \in M$ și $t \to t_2$.
  - Pres. $n_1 \overset{*}{\leftarrow} t \to n_2$:
    - Atunci există t_1 a.î. $n_1 \overset{*}{\leftarrow} t_1 \leftarrow t \to n_2$.
    - Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow n_2$ și, mai departe, $t_1 \overset{*}{\to} n_2$.
    - Deci $t_1 \in M$ și $t \to t_1$.

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

- $(\star)$ pt. or. $t \in M$, există $t' \in M$ a.î. $t \to t'$.
  Pres. $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2$:

- Atunci există t_1, t_2 a.î. $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \to t_2 \xrightarrow{*} n_2$.
- Din local confluență, obținem $t_1 \downarrow t_2$.
- Deci ex. n_3 în formă normală a.î. $t_1 \xrightarrow{*} n_3$ și $t_2 \xrightarrow{*} n_3$.
- Deoarece $n_1 \neq n_2$, deducem că $n_3 \neq n_1$ sau $n_3 \neq n_2$.
- Dacă $n_3 \neq n_1$, atunci $t_1 \in M$ și $t \to t_1$.
- Dacă $n_3 \neq n_2$, atunci $t_2 \in M$ și $t \to t_2$.

$$\begin{tikzcd}
 & t_1 \arrow[r, "*"] \arrow[dr, dotted, "*"] & n_1 \\
t \arrow[ur] \arrow[dr] & & n_3 \\
 & t_2 \arrow[r, "*"'] \arrow[ur, dotted, "*"'] & n_2
\end{tikzcd}$$

Proprietăți

Demonstrație (cont.)

- Arătăm unicitatea formei normale, i.e. $M = \emptyset$.
  - Pres. prin absurd că $M \neq \emptyset$. Atunci există $t_1 \in M$.
  - Din $(\star)$, ex. $t_2 \in M$ a.î. $t_1 \to t_2$.
  - Prin inducție, obținem un șir $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de elemente din M a.î.

    $$t_1 \to t_2 \to \ldots \to t_n \to \ldots$$

    ceea ce contrazice faptul că $(T, \to)$ este noetherian.
- Pres. $t_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\rightarrow} t_2$. Cum t are o unică formă normală n, obținem $t_1 \stackrel{*}{\rightarrow} n \stackrel{*}{\leftarrow} t_2$. Deci $t_1 \downarrow t_2$.
- În concluzie, $(T, \to)$ este confluent.

$\square$

Propoziție (7)

Fie $(T, \to)$ sistem de rescriere complet.

$$t \stackrel{*}{\leftrightarrow} t' \quad \Leftrightarrow \quad fn(t) = fn(t')$$

Demonstrație

$(\Leftarrow)$

- Dacă $fn(t) = fn(t')$, atunci evident $t \downarrow t'$.
- Aplicăm Propoziția (1) și obtinem $t \stackrel{*}{\leftrightarrow} t'$.

$(\Rightarrow)$

- Cum $(T, \to)$ este complet, este confluent și or. element are o unică formă normală. Din Propoziția (4), este Church-Rosser.
- Deoarece $t \stackrel{*}{\leftrightarrow} t'$, obținem că $t \downarrow t'$, i.e. există w a.î. $t \stackrel{*}{\to} w \stackrel{*}{\leftarrow} t'$.
- Fie n unica formă normală a lui w.
- În concluzie, $t \stackrel{*}{\to} n \stackrel{*}{\leftarrow} t'$, deci $fn(t) = fn(t')$.

$\square$

Deducția ecuațională și rescriere

- (S, Σ) signatură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- $\rightarrow_E$ relația de rescriere generată de R_E
- $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_E$ echivalența generată de $\rightarrow_E$

Teorema

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E t'$$

Corolar (8)

Dacă sistemul de rescriere $(T_\Sigma(X), R_E)$ *este complet, atunci:*

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E t' \quad \Leftrightarrow \quad fn(t) = fn(t')$$

Concluzii

Dacă E este o mulțime de ecuații a.î.
R_E este un sistem de rescriere complet,
atunci deducția ecuațională $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ este decidabilă:

Algoritm:

1. $t \xrightarrow{*}_E fn(t)$
2. $t' \xrightarrow{*}_E fn(t')$
3. $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$

Observații

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
  - echivalentă cu oprirea mașinilor Turing
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
  - diverse metode
- Pentru sisteme de rescriere care se termină, confluența este decidabilă.
  - algoritmul Knuth-Bendix

Pe săptămâna viitoare!