Criptografie și Securitate

- Prelegerea 22 -
Criptografia bazată pe curbe eliptice

Adela Georgescu, Ruxandra F. Olimid

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea din București

Cuprins

Grupuri ciclice pentru uz criptografic

- În cursul precendent am discutat despre grupuri ciclice și am subliniat faptul că sunt de preferat, pentru criptografie, grupurile ciclice de ordin prim;

Grupuri ciclice pentru uz criptografic

- În cursul precendent am discutat despre grupuri ciclice și am subliniat faptul că sunt de preferat, pentru criptografie, grupurile ciclice de ordin prim;
- Am menționat că, de obicei, se lucrează în grupul $\mathbb{Z}_p^*$ cu p prim iar un subgrup de ordin prim al lui este format din mulțimea resturilor pătratice modulo p;

Grupuri ciclice pentru uz criptografic

- În cursul precendent am discutat despre grupuri ciclice și am subliniat faptul că sunt de preferat, pentru criptografie, grupurile ciclice de ordin prim;
- Am menționat că, de obicei, se lucrează în grupul $\mathbb{Z}_p^*$ cu p prim iar un subgrup de ordin prim al lui este format din mulțimea resturilor pătratice modulo p;
- În continuare introducem o altă clasă de grupuri care constă din punctele unei curbe eliptice;

Grupuri ciclice pentru uz criptografic

- În cursul precendent am discutat despre grupuri ciclice și am subliniat faptul că sunt de preferat, pentru criptografie, grupurile ciclice de ordin prim;
- Am menționat că, de obicei, se lucrează în grupul $\mathbb{Z}_p^*$ cu p prim iar un subgrup de ordin prim al lui este format din mulțimea resturilor pătratice modulo p;
- În continuare introducem o altă clasă de grupuri care constă din punctele unei curbe eliptice;
- Aceste grupuri sunt folosite în criptografie pentru că, spre deosebire de $\mathbb{Z}_p^*$, nu se cunoaște deocamdată nici un algoritm sub-exponențial pentru rezolvarea DLP în aceste grupuri.

Curbe eliptice

Definiție

O curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$, $p > 3$ *prim, este mulțimea perechilor* (x, y) *cu* $x, y \in \mathbb{Z}_p$ *așa încât*

$$y^2 = x^3 + Ax + B \bmod p$$

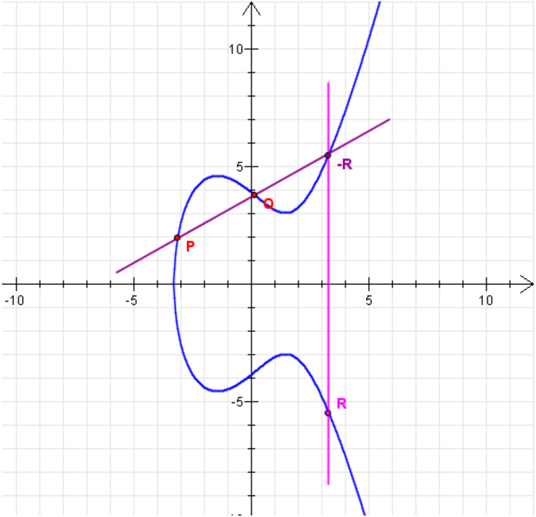
împreună cu punctul la infinit $\mathcal{O}$ *unde* $A, B \in \mathbb{Z}_p$ *sunt constante care respectă* $4A^3 + 27B^2 \neq 0 \bmod p$

- Vom nota cu $E(\mathbb{Z}_p)$ o curbă eliptică definită peste $\mathbb{Z}_p$

Curbe eliptice

O curbă eliptică peste spațiul numerelor reale $\mathbb{R}$

$E(\mathbb{R}) : y^2 = x^3 - x + 1$



Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Pentru a arăta că punctele de pe o curbă eliptică formează un grup ciclic, definim o operație de grup peste aceste puncte:

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Pentru a arăta că punctele de pe o curbă eliptică formează un grup ciclic, definim o operație de grup peste aceste puncte:
- Definim operația binară aditivă "$+$" astfel:

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Pentru a arăta că punctele de pe o curbă eliptică formează un grup ciclic, definim o operație de grup peste aceste puncte:
- Definim operația binară aditivă "$+$" astfel:
  - punctul la infinit $\mathcal{O}$ este element neutru: $\forall P \in E(\mathbb{Z}_p)$ definim

$$P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P.$$

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Pentru a arăta că punctele de pe o curbă eliptică formează un grup ciclic, definim o operație de grup peste aceste puncte:
- Definim operația binară aditivă "+" astfel:
  - punctul la infinit $\mathcal{O}$ este element neutru: $\forall P \in E(\mathbb{Z}_p)$ definim

$$P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P.$$

  - fie $P = (x_1, y_1)$ și $Q = (x_2, y_2)$ două puncte de pe curbă; atunci:

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Pentru a arăta că punctele de pe o curbă eliptică formează un grup ciclic, definim o operație de grup peste aceste puncte:
- Definim operația binară aditivă "+" astfel:
  - punctul la infinit $\mathcal{O}$ este element neutru: $\forall P \in E(\mathbb{Z}_p)$ definim

$$P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P.$$

  - fie $P = (x_1, y_1)$ și $Q = (x_2, y_2)$ două puncte de pe curbă; atunci:
  - dacă $x_1 = x_2$ și $y_2 = -y_1$, $P + Q = \mathcal{O}$

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- altfel, P + Q = R de coordonate (x_3, y_3) care se calculează astfel:

$$x_3 = [m^2 - x_1 - x_2 \bmod p]$$
$$y_3 = [m(x_1 - x_3) - y_1 \bmod p]$$

- iar m se calculează astfel:

$$m = \begin{cases} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \bmod p & \text{dacă } P \neq Q \\ \frac{3x_1 + A}{2y_1} \bmod p & \text{dacă } P = Q \end{cases}$$

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Geometric, suma a două puncte P si Q se obține trasând o linie prin cele două puncte și găsind cel de-al trelea punct R de intersecție al liniei cu E;

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Geometric, suma a două puncte P si Q se obține trasând o linie prin cele două puncte și găsind cel de-al trelea punct R de intersecție al liniei cu E;
- În această situație, *m* reprezintă panta dreptei care trece prin P și Q;

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Geometric, suma a două puncte P si Q se obține trasând o linie prin cele două puncte și găsind cel de-al trelea punct R de intersecție al liniei cu E;
- În această situație, *m* reprezintă panta dreptei care trece prin P și Q;
- Se poate arăta că mulțimea de puncte $E(\mathbb{Z}_p)$ împreună cu operația aditivă definită formează un grup abelian;

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

- Geometric, suma a două puncte P si Q se obține trasând o linie prin cele două puncte și găsind cel de-al trelea punct R de intersecție al liniei cu E;
- În această situație, m reprezintă panta dreptei care trece prin P și Q;
- Se poate arăta că mulțimea de puncte $E(\mathbb{Z}_p)$ împreună cu operația aditivă definită formează un grup abelian;
- Există o teoremă de structură pentru $E(\mathbb{Z}_p)$ care exprimă condițiile în care grupul este ciclic.

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

Teoremă

Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$ cu $p > 3$ număr prim. Atunci există două numere întregi n_1 și n_2 așa încât

$$E(\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$$

unde $n_2 | n_1$ și $n_2 | (p-1)$

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

Teoremă

Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$ cu $p > 3$ număr prim. Atunci există două numere întregi n_1 și n_2 așa încât

$$E(\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$$

unde $n_2 | n_1$ și $n_2 | (p-1)$

- Consecință: dacă $n_2 = 1$, atunci $E(\mathbb{Z}_p)$ este ciclic;

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

Teoremă

Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$ cu $p > 3$ număr prim. Atunci există două numere întregi n_1 și n_2 așa încât

$$E(\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$$

unde $n_2 | n_1$ și $n_2 | (p-1)$

- Consecință: dacă $n_2 = 1$, atunci $E(\mathbb{Z}_p)$ este ciclic;
- In practică, sunt căutate acele curbe eliptice pentru care ordinul grupului ciclic generat este prim;

Grupul punctelor de pe o curba eliptică

Teoremă

Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$ *cu* $p > 3$ *număr prim. Atunci există două numere întregi* n_1 *și* n_2 *așa încât*

$$E(\mathbb{Z}_p) \approx \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$$

unde $n_2 | n_1$ *și* $n_2 | (p-1)$

- Consecință: dacă $n_2 = 1$, atunci $E(\mathbb{Z}_p)$ este ciclic;
- In practică, sunt căutate acele curbe eliptice pentru care ordinul grupului ciclic generat este prim;
- O curbă eliptică definită peste $\mathbb{Z}_p$ are aproximativ p puncte. Mai precis [Teorema lui Hasse]:

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \leq card(E(\mathbb{Z}_p)) \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$$

ECDLP - Problema logaritmului discret pe curbe eliptice

- ECDLP = Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem

ECDLP - Problema logaritmului discret pe curbe eliptice

- ECDLP = Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem
- Putem defini acum DLP în grupul punctelor unei curbe eliptice (ECDLP):

ECDLP - Problema logaritmului discret pe curbe eliptice

- ECDLP = Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem
- Putem defini acum DLP în grupul punctelor unei curbe eliptice (ECDLP):
- Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$, un punct $P \in \mathbb{Z}_p$ de ordin n si Q un element din subgrupul ciclic generat de P:

$$Q \in [P] = \{sP \mid 1 \leq s \leq n-1\}$$

ECDLP - Problema logaritmului discret pe curbe eliptice

- ECDLP = Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem
- Putem defini acum DLP în grupul punctelor unei curbe eliptice (ECDLP):
- Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$, un punct $P \in \mathbb{Z}_p$ de ordin n si Q un element din subgrupul ciclic generat de P:

$$Q \in [P] = \{sP \mid 1 \leq s \leq n-1\}$$

- Problema ECDLP cere găsirea unui k așa încât $Q = kP$;

ECDLP - Problema logaritmului discret pe curbe eliptice

- ECDLP = Elliptic Curve Discrete Logarithm Problem
- Putem defini acum DLP în grupul punctelor unei curbe eliptice (ECDLP):
- Fie E o curbă eliptică peste $\mathbb{Z}_p$, un punct $P \in \mathbb{Z}_p$ de ordin n si Q un element din subgrupul ciclic generat de P:

$$Q \in [P] = \{sP \mid 1 \leq s \leq n-1\}$$

- Problema ECDLP cere găsirea unui k așa încât $Q = kP$;
- Notație: $\underbrace{P + P + ... + P}_{s\ ori} = sP$.

ECDLP - Securitate

- Alegând cu grijă curbele eliptice, cel mai bun algoritm pentru rezolvarea ECDLP este considerabil mai slab decât cel mai bun algoritm pentru rezolvarea problemei DLP în $\mathbb{Z}_p^*$;

ECDLP - Securitate

- Alegând cu grijă curbele eliptice, cel mai bun algoritm pentru rezolvarea ECDLP este considerabil mai slab decât cel mai bun algoritm pentru rezolvarea problemei DLP în $\mathbb{Z}_p^*$;
- De exemplu, algoritmul de calcul al indicelui nu este deloc eficient pentru ECDLP;

ECDLP - Securitate

- Alegând cu grijă curbele eliptice, cel mai bun algoritm pentru rezolvarea ECDLP este considerabil mai slab decât cel mai bun algoritm pentru rezolvarea problemei DLP în $\mathbb{Z}_p^*$;
- De exemplu, algoritmul de calcul al indicelui nu este deloc eficient pentru ECDLP;
- Pentru anumite curbe eliptice, singurii algoritmi de rezolvare sunt algoritmii generici pentru DLP, adică metoda baby-step giant-step și metoda Pollard rho;

ECDLP - Securitate

- Alegând cu grijă curbele eliptice, cel mai bun algoritm pentru rezolvarea ECDLP este considerabil mai slab decât cel mai bun algoritm pentru rezolvarea problemei DLP în $\mathbb{Z}_p^*$;
- De exemplu, algoritmul de calcul al indicelui nu este deloc eficient pentru ECDLP;
- Pentru anumite curbe eliptice, singurii algoritmi de rezolvare sunt algoritmii generici pentru DLP, adică metoda baby-step giant-step și metoda Pollard rho;
- Cum numărul de pași necesari pentru un astfel de algoritm este de ordinul rădăcinii pătrate a cardinalului grupului, se recomandă folosirea unui grup de ordin cel puțin 2^{160}.

ECDLP - Securitate

- O consecință a teoremei lui Hasse este că dacă avem nevoie de o curbă eliptică cu 2^{160} elemente, trebuie să folosim un număr prim p pe aproximativ 160 biți;

ECDLP - Securitate

- O consecință a teoremei lui Hasse este că dacă avem nevoie de o curbă eliptică cu 2^{160} elemente, trebuie să folosim un număr prim p pe aproximativ 160 biți;
- Deci, dacă folosim o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_p)$ cu p pe 160 biți, un atac generic asupra ECDLP are 2^{80} complexitate timp;

ECDLP - Securitate

- O consecință a teoremei lui Hasse este că dacă avem nevoie de o curbă eliptică cu 2^{160} elemente, trebuie să folosim un număr prim p pe aproximativ 160 biți;
- Deci, dacă folosim o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_p)$ cu p pe 160 biți, un atac generic asupra ECDLP are 2^{80} complexitate timp;
- Un nivel de securitate de 80 biți oferă securitate pe termen mediu;

ECDLP - Securitate

- O consecință a teoremei lui Hasse este că dacă avem nevoie de o curbă eliptică cu 2^{160} elemente, trebuie să folosim un număr prim p pe aproximativ 160 biți;
- Deci, dacă folosim o curbă eliptică $E(\mathbb{Z}_p)$ cu p pe 160 biți, un atac generic asupra ECDLP are 2^{80} complexitate timp;
- Un nivel de securitate de 80 biți oferă securitate pe termen mediu;
- În practică, curbe eliptice peste $\mathbb{Z}_p$ cu p până la 256 biți sunt folosite, cu un nivel de securitate pe 128 biți.

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- A fost inventată independent în 1987 de Neal Koblitz și în 1986 de Victor Miller;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- A fost inventată independent în 1987 de Neal Koblitz și în 1986 de Victor Miller;
- La începutul anilor 1990 se făceau foarte multe speculații despre securitatea și practicalitatea ECC, mai ales comparativ cu RSA;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- A fost inventată independent în 1987 de Neal Koblitz și în 1986 de Victor Miller;
- La începutul anilor 1990 se făceau foarte multe speculații despre securitatea și practicalitatea ECC, mai ales comparativ cu RSA;
- După cercetări intensive, ECC pare foarte sigură, la fel de sigură precum RSA sau schemele bazate pe DLP;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- A fost inventată independent în 1987 de Neal Koblitz și în 1986 de Victor Miller;
- La începutul anilor 1990 se făceau foarte multe speculații despre securitatea și practicalitatea ECC, mai ales comparativ cu RSA;
- După cercetări intensive, ECC pare foarte sigură, la fel de sigură precum RSA sau schemele bazate pe DLP;
- Încrederea a crescut după ce în 1999 și 2001 au fost standardizate, pentru domeniul bancar, semnături digitale și schimburi de chei bazate pe curbe eliptice.

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- Curbele eliptice sunt folosite pe larg și în standardele comerciale precum IPsec sau TLS;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- Curbele eliptice sunt folosite pe larg și în standardele comerciale precum IPsec sau TLS;
- ECC este adesea preferată în fața criptografiei cu cheie publică pentru sistemele încorporate precum dispozitivele mobile...

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- Curbele eliptice sunt folosite pe larg și în standardele comerciale precum IPsec sau TLS;
- ECC este adesea preferată în fața criptografiei cu cheie publică pentru sistemele încorporate precum dispozitivele mobile...
- ...din motive de performanță;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- Curbele eliptice sunt folosite pe larg și în standardele comerciale precum IPsec sau TLS;
- ECC este adesea preferată în fața criptografiei cu cheie publică pentru sistemele încorporate precum dispozitivele mobile...
- ...din motive de performanță;
- implementările pentru ECC sunt considerabil mai mici și mai rapide decât cele pentru RSA;

Criptografia pe curbe eliptice - ECC (Elliptic Curve Cryptography)

- Curbele eliptice sunt folosite pe larg și în standardele comerciale precum IPsec sau TLS;
- ECC este adesea preferată în fața criptografiei cu cheie publică pentru sistemele încorporate precum dispozitivele mobile...
- ...din motive de performanță;
- implementările pentru ECC sunt considerabil mai mici și mai rapide decât cele pentru RSA;
- ECC cu chei pe 160-250 biți oferă cam același nivel de securitate precum RSA sau sistemele bazate pe DLP cu chei pe 1024-3072 biți.

Comparație între ECC, criptografia simetrică și asimetrică

Chei criptografia simetrică	Chei RSA	Chei ECC
80	1024	160
112	2048	224
128	3072	256
192	7680	384
256	15360	521

Tabel: Dimensiunile cheilor recomandate de NIST

Important de reținut!

- Curbele eliptice oferă un suport bun pentru criptografie;
- ECDLP este dificilă.