Laborator 4: Utilizarea unei reţele cu un singur neuron (reţea de tip perceptron) pentru rezolvarea problemelor de clasificare liniar separabile.

1 Definirea modelului de învăţare

- Se dă mulţimea de antrenare, de forma,

$$S_m = \left\{ \left(\mathbf{x}^1, d^1\right), \left(\mathbf{x}^2, d^2\right), \ldots, \left(\mathbf{x}^m, d^m\right) \right\} \tag{1.1}$$

unde $\mathbf{x}^i$ este un vector de intrare al perceptronului/reţelei de forma

$$\mathbf{x}^i = \left[x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\right]^T,$$

iar $d^i \in \{-1, 1\}$ reprezintă măsurătoarea de ieşire (eticheta, clasa) asociată intrării $\mathbf{x}^i$, pentru orice $i = 1, \ldots, m$. Se defineşte vectorul

$$\mathbf{X}^i = \left[\left(\mathbf{x}^i\right)^T, 1\right]^T \tag{1.2}$$

ca fiind o extindere a vectorului $\mathbf{x}^i$, prin adăugarea componentei $x_{n+1}^i = 1$ la vectorul de intrare $\mathbf{x}^i$ căreia i se asociază o pondere numită bias (deplasare).

- Reprezentarea grafică a modelului perceptronului poate fi vizualizată în Figura 1.

- Se notează cu $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]^T$ vectorul conţinând parametrii modelului perceptronului, reprezentat în Figura 1.

- Relaţia intrare $\mathbf{x}$/ieşire $\mathbf{y}$ este dată de $y = sgn(\mathbf{X}^T\mathbf{w})$, unde $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}^T, 1\right]^T$.

- Obiectivul este de a determina parametrii $w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$ ai perceptronului astfel încât pentru un nou vector de intrare $\mathbf{x}$, ieşirea $\mathbf{y}$ a perceptronului să estimeze corect eticheta/clasa reală a acestuia. Dacă acest obiectiv este realizat pentru vectorii din mulţimea de antrenare spunem că perceptronul clasifică corect mulţimea de antrenare.

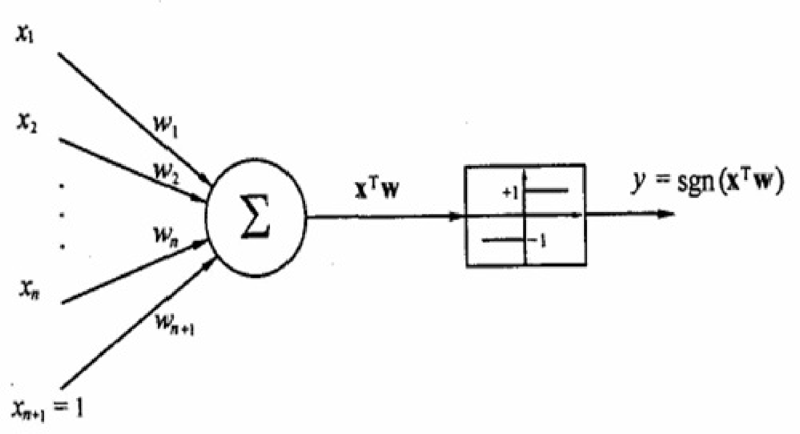

Figura 1: Reprezentarea grafică a modelului perceptronului
Atenţie: în această reprezentare grafică "$\mathbf{x}$" este "$\mathbf{X}$", unde $\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}^T, 1\right]^T$

2 Algoritmul de învăţare al lui Rosenblatt

2.1 Detalii teoretice premergătoare dezvoltării algoritmului de învăţare

- A găsi un perceptron care să clasifice corect mulţimea de antrenare înseamnă a determina un vector $\mathbf{w}*$ care să satisfacă relaţiile:

$$\begin{cases} (\mathbf{X}^k)^T\mathbf{w}* > 0, & \text{dacă } d^k = 1 \\ \\ (\mathbf{X}^k)^T\mathbf{w}* < 0, & \text{dacă } d^k = -1 \end{cases} \tag{2.1}$$

  pentru $k = 1, \ldots, m$.

- Mulţimea punctelor $\mathbf{x}$ care satisfac ecuaţia $\mathbf{X}^T\mathbf{w}* = 0$ ($\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}^T, 1\right]^T$) formează un hiperplan în $\mathbb{R}^n$. Deci, a găsi o soluţie $\mathbf{w}*$ a sistemului de mai sus înseamnă a determina un hiperplan care separă spaţiul intrărilor $\left\{\mathbf{x}^k, k = 1, \ldots, m\right\}$, în două semiplane, unul conţinând mulţimea punctelor $\left\{\mathbf{x}^k | d^k = 1, k = 1, \ldots, m\right\}$, iar celălalt mulţimea punctelor $\left\{\mathbf{x}^k | d^k = -1, k = 1, \ldots, m\right\}$.

2.2 Regula de învăţare a lui Rosenblatt

Pornind de la ipoteza că mulţimea de antrenare este liniar separabilă, se dezvoltă următoarea regulă de învăţare (a lui Rosenblatt), având ca scop determinarea soluţiei $\mathbf{w}*$ care verifică relaţiile (2.1):

$$
\begin{cases}
\mathbf{w}^1 & \text{arbitrar} \\
\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k + d^i\mathbf{X}^i, & \text{dacă } d^i \neq y^i, i = (k-1) \mod m + 1 \\
\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k, & \text{altfel}
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

Indicele superior k indică iteraţia la care se se actualizează vectorul de ponderi $\mathbf{w}$.

2.3 Paşii algoritmului de învăţare al lui Rosenblatt

Algoritm 1: Algoritmul de învăţare al lui Rosenblatt

Intrare	Mulţimea de date de antrenare $S_m = \{(\mathbf{x}^1, d^1), (\mathbf{x}^2, d^2), \ldots, (\mathbf{x}^m, d^m)\}$
Pas 1	Se iniţializează componentele vectorului de ponderi $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]$ cu valori aleatoare uniform distribuite în intervalul $(0, 1)$. Repetă Pas 2 pentru un număr fixat de epoci, maxEpochs
Pas 2	Pentru fiecare punct $i = 1, \ldots, m$ din mulţimea de antrenare execută iterativ/succesiv Pas 3 – Pas 5
Pas 3	$n = (\mathbf{X}^i)^T * \mathbf{w}$, unde $\mathbf{X}^i = \left[(\mathbf{x}^i)^T, 1\right]^T$ şi $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]^T$
Pas 4	Dacă $n > 0$ atunci $y = 1$; altfel $y = -1$
Pas 5	Dacă $d^i \neq y$ atunci $\mathbf{w} = \mathbf{w} + d^i * \mathbf{X}^i$
Ieşire	Vectorul de ponderi $\mathbf{w}$

În cele ce urmează sunt prezentate câteva observaţii privind algoritmul de învăţare al lui Rosenblatt descris în Algoritm 1:

- La început, se selectează vectorul ponderilor, notat $\mathbf{w}^1$ aleator, apoi utilizând succesiv perechile $(\mathbf{x}^i, d^i), i \in 1, \ldots, m$ din mulţimea de antrenare se actualizează vectorul ponderilor $\mathbf{w}^{k+1}$ de la pasul $k+1$, unde $i = (k-1) \mod m+1$, pentru a găsi soluţia $\mathbf{w}^*$ care clasifică corect mulţimea de antrenare.

- De obicei, sunt necesare mai multe cicluri (epoci), adică parcurgerea în întregime a mulţimii de antrenare, până când eroarea, determinată de diferenţele dintre ieşirile perceptronului/reţelei şi etichetele corecte, va fi zero.

- Problema de clasificare descrisă mai sus poate fi rezolvată folosind un singur perceptron, adică există vectorul $\mathbf{w}^*$ dacă şi numai dacă mulţimea de antrenare este liniar separabilă (i.e. există un hiperplan care să clasifice corect punctele din mulţimea de antrenare).

- Din punctul de vedere al liniar separabilităţii, funcţiile booleene OR (disjuncţia) şi AND (conjuncţia) corespund unor probleme liniar separabile, pe când funcţia XOR (disjuncţia exclusivă) corespunde unei probleme neliniar separabile.

3 Aplicaţie

Se consideră punctele din plan $\mathbf{x}^1 = (1,1)^T$, $\mathbf{x}^2 = (-1,1)^T$, $\mathbf{x}^3 = (-1,-1)^T$ şi $\mathbf{x}^4 = (1,-1)^T$ împărţite în 2 clase liniar separabile (de exemplu $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^4\}$ din clasa codificată cu 1 şi $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^4\}$ din clasa codificată cu -1).

Se cere să se determine parametrii perceptronului capabil să clasifice corect în cele două clase datele indicate mai sus.

Indicaţie: Modelul perceptronului corespunzător aplicaţiei este ilustrat în Figura 2.

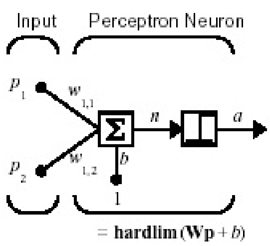

Figura 2: Modelul perceptronului pentru vectori de intrare bidimensionali

Bibliografie

[1] D. Enăchescu (2003), *Elements of Statistical Learning. Applications in Data Mining*, Padova University Press

[2] T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman (2008), *The Elements of Statistical Learning*, Springer