Curs 9

Obiectiv I

Să considerăm următoarea specificație pentru numere naturale în Maude:

```
fmod SIMPLE-NAT is
  sort Nat .
  op 0 : -> Nat .
  op s_ : Nat -> Nat .
  op _+_ : Nat Nat -> Nat .
  vars X Y : Nat .
  eq X + 0 = X .
  eq X + s Y = s(X + Y) .
endfm
```

Să analizăm următoarea comandă `red`:

```
red s s 0 + s s s 0 .
```

```
reduce in SIMPLE-NAT : s s 0 + s s s 0 .
rewrites :  4 in 0ms cpu ...
result Nat:  s s s s s 0
```

Obiectiv I

```
set trace on .
red s s 0 + s s s 0 .
```

```
reduce in SIMPLE-NAT : s s 0 + s s s 0 .
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
X --> s s 0
Y --> s s 0
s s 0 + s s s 0
--->
s (s s 0 + s s 0)
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
X --> s s 0
Y --> s 0
s s 0 + s s 0
--->
s (s s 0 + s 0)
```

Obiectiv I

```
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
X --> s s 0
Y --> 0
s s 0 + s 0
--->
s (s s 0 + 0)
*********** equation
eq X + 0 = X .
X --> s s 0
s s 0 + 0
--->
s s 0
rewrites: 4 in 0ms cpu ...
result Nat: s s s s s 0
```

Obiectiv I

Care este teoria din spatele acestui exemplu?

Execuția în Maude este o rescriere.

Obiectiv II

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff):

- (S, Σ) signatură multisortată, X și Y mulțimi de variabile
- E mulțime de ecuații necondiționate

$$\mathsf{R}\quad \frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$$

$$\mathsf{S}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$$

$$\mathsf{T}\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$$

$$\mathsf{C}\Sigma\quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t_1', \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t_n'}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t_1', \ldots, t_n')}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

$$\mathsf{Sub}_E\quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}$$, unde $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$

Obiectiv II

Logica ecuațională:

(S, Σ) signatura multisortată, X mulțime de variabile, $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$

- Echivalența sintactică: $t \sim_{E_s} t' \Leftrightarrow E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Echivalența semantică: $t \equiv_{E_s} t' \Leftrightarrow E \models (\forall X)t \doteq_s t'$.
- Corectitudinea deducției: $\sim_E \subseteq \equiv_E$.
- Completitudinea deducției: $\equiv_E \subseteq \sim_E$.

Teoremă (Teorema de completitudine)

$$E \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$$

$$(\equiv_E = \sim_E)$$

Obiectiv II

Există vreo legatură între deducția ecuațională și rescriere?

Dacă da, ce câștigăm?

Cuprins

Rescrierea termenilor

Reguli de rescriere

(S, Σ) signatură și Y mulțime de variabile.

Definiție

O regulă de rescriere (peste Y) este formată din doi termeni $l, r \in T_\Sigma(Y)_s$ astfel încât:

1. l nu este variabilă,
2. $Var(r) \subseteq Var(l)$.

Vom nota o regulă de rescriere (peste Y) prin:

$$l \to_s r.$$

Reguli de rescriere

Exemplu

- $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{a :\to s, f : s \to s, g : s\ s \to s\}$
- Reguli de rescriere peste $Y = \{x\}$:
  - $f(x) \to x$
  - $g(f(x), x) \to f(x)$
  - $f(x) \to a$
  - $f(x) \to g(a, f(x))$
- Incorecte:
  - $f(x) \to y$ $\quad Y = \{x, y\}$
  - $a \to g(x, y)$ $\quad Y = \{x, y\}$
  - $x \to f(x)$ $\quad Y = \{x\}$

Sisteme de rescriere

Un sistem de rescriere (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere.

Exemplu

- $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{a :\to s, f : s \to s, g : s\ s \to s\}$
- Sistem de rescriere:

$$R = \{f(x) \to x, g(f(x), x) \to f(x)\}$$

Contexte

- (S, Σ) signatură și X mulțime de variabile
- dacă $t \in T_\Sigma(X)$ și $y \in X$ notăm

$$nr_y(t) = \text{numărul de apariții ale lui } y \text{ în } t$$

Definiție

Fie z a.î. $z \notin X$. Un termen $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ se numește context dacă $nr_z(c) = 1$.

- Dacă $t_0 \in T_\Sigma(X)$ și t_0 are același sort cu z, definim substituția $\{z \leftarrow t_0\} : X \cup \{z\} \to T_\Sigma(X)$, prin

$$\{z \leftarrow t_0\}(x) = \begin{cases} t_0, & \text{dacă } x = z \\ x, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Pentru un context $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$, notăm:

$$c[z \leftarrow t_0] := \{z \leftarrow t_0\}(c).$$

Relația de rescriere generată de R

- (S, Σ) signatură și R sistem de rescriere
- pentru $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$ definim relația $t \to_R t'$ astfel:

$$\boxed{\begin{array}{lll} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și} \\ & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \\ & & l \to_s r \in R \text{ cu } Var(l) = Y, \\ & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție} \end{array}}$$

- Observați că $t \to_R t'$ ddacă t' se poate obține din t înlocuind o instanță a lui l cu o instanță a lui r, unde $l \to_s r \in R$.
- $\to_R$ este relația de rescriere generată de sistemul de rescriere R.

Echivalența generată de $\rightarrow_R$

- Închiderea tranzitivă:
  $t \stackrel{*}{\rightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R t_n = t'$

- Închiderea simetrică:
  $t \leftrightarrow_R t' \Leftrightarrow t \rightarrow_R t'$ sau $t' \rightarrow_R t$

- Echivalența generată de $\rightarrow_R$:
  $t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \leftrightarrow_R \ldots \leftrightarrow_R t_n = t'$

Sistemul de rescriere R_E

- (S, Σ) signatură
- E mulțime de ecuații astfel încât, pt. or. $(\forall Y) l \doteq_s r \in E$:
  - $l \notin Y$ (nu este variabilă),
  - $Var(r) \subseteq Var(l)$.
- Sistemul de rescriere determinat de E:

$$R_E := \{l \to_s r \mid (\forall Y) l \doteq_s r \in E\}$$

- Ecuațiile devin reguli de rescriere prin orientare!
- Relația de rescriere generată de R_E:

$$\to_E := \to_{R_E}$$

Ecuații în Maude

- În Maude, ecuațiile `eq t = t'` trebuie să verifice condițiile:
  - `t` nu este variabilă,
  - $Var(\mathtt{t}') \subseteq Var(\mathtt{t})$.

  deoarece în execuții sunt folosite ca reguli de rescriere.

Exemplu

Exemplu

```
fmod SIMPLE-NAT is
  sort Nat .
  op 0 : -> Nat .
  op s_ : Nat -> Nat .
  op _+_ : Nat Nat -> Nat .
  vars X Y : Nat .
  eq X + 0 = X .
  eq X + s Y = s(X + Y) .
endfm
```

- $S = \{Nat\}$ și $\Sigma = \{0 :\to Nat,\ s : Nat \to Nat,\ + : Nat\ Nat \to Nat\}$
- $E = \{x + 0 \doteq x,\ x + s\ y \doteq s(x + y)\}$
- Sistemul de rescriere:

$$R_E = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Relația de rescriere: $\to_E$

Exemplu

Exemplu (cont. 1)

$t \to_E t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta_s(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta_s(r)]$, unde
$c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ context, $l \to_s r \in R_E$ cu $Var(l) = Y$,
$\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție

$$R_E = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

```
reduce in SIMPLE-NAT :
         s s 0 + s s s 0 .
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
```

$t := s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$

$x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R_E$

$l := x\ +\ s\ y \qquad r := s(x\ +\ y)$

```
X --> s s 0
Y --> s s 0
```

$\theta(x) = s\ s\ 0$
$\theta(y) = s\ s\ 0$

$c := z$

$c[z \leftarrow \theta(l)] = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0 = t$

$c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s\ s\ 0 + s\ s\ 0) = t'$

```
s s 0 + s s s 0
--->
s (s s 0 + s s 0)
```

$s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0 \to_E s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$

Exemplu

Exemplu (cont. 2)

$t \to_E t'$	$\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta_s(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta_s(r)]$, unde $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ context, $l \to_s r \in R_E$ cu $Var(l) = Y$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție

$$R_E = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

$$t := s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$$

```
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
```

$$x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R_E$$

$$l := x\ +\ s\ y \qquad r := s(x\ +\ y)$$

```
X --> s s 0
Y --> s 0
```

$$\theta(x) = s\ s\ 0$$
$$\theta(y) = s\ 0$$

$$c := s(z)$$
$$c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0) = t$$
$$c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s\ s\ 0 + s\ 0)) = t'$$

```
s s 0 + s s 0
--->
s (s s 0 + s 0)
```

$$s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)\ \to_E\ s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$$

Exemplu

Exemplu (cont. 3)

$$t \to_E t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde}$$
$$c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \ l \to_s r \in R_E \text{ cu } Var(l) = Y,$$
$$\theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție}$$

$$R_E = \{x + 0 \to x, \ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

$$t := s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$$

```
*********** equation
eq X + s Y = s (X + Y) .
```

$$x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R_E$$
$$l := x\ +\ s\ y \qquad r := s(x\ +\ y)$$

```
X --> s s 0
Y --> 0
```

$$\theta(x) = s\ s\ 0$$
$$\theta(y) = 0$$

$$c := s(s(z))$$
$$c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0)) = t$$
$$c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0 + 0))) = t'$$

```
s s 0 + s 0
--->
s (s s 0 + 0)
```

$$s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0)) \to_E s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$$

Exemplu

Exemplu (cont. 4)

$t \to_E t'$	$\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta_s(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta_s(r)]$, unde $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ context, $l \to_s r \in R_E$ cu $Var(l) = Y$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție

$$R_E = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

$$t := s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$$

```
*********** equation
eq X + 0 = X .
```

$$x\ + 0 \to x \in R_E$$
$$l := x\ + 0 \qquad r := x$$

```
X --> s s 0
```

$$\theta(x) = s\ s\ 0$$

$$c := s(s(s(z)))$$
$$c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s(s\ s\ 0\ + 0))) = t$$
$$c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0))) = t'$$

```
s s 0 + 0
--->
s s 0
```

$$s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))\ \to_E\ s(s(s(s(s\ s\ 0))))$$

Privire de ansamblu

regulă de rescriere	$l \to_s r$	termeni cu două condiții
sistem de rescriere (TRS)	R	mai multe $l \to_s r$
relația de rescriere	$\to_R$	generată de R
echivalența	$\overset{*}{\leftrightarrow}_R$	generată de $\to_R$

Logica ecuațională și rescrierea termenilor

Regula de deducție SR_Γ

Fie (S, Σ, Γ) o specificație.

$$\boxed{\mathrm{SR}_\Gamma \quad \frac{(\forall X)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall X)\theta(u_n) \doteq_{s_n} \theta(v_n)}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$ (c context).

Dacă $c = z$ atunci $\mathrm{SR}_\Gamma = \mathrm{Sub}_\Gamma$.

Dacă E mulțime de ecuații necondiționate:

$$\boxed{\mathrm{SR}_E \quad \frac{}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]}}$$, unde

$(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$.

Două deducții ecuaționale

Fie (S, Σ, Γ) o specificație.

- $\Gamma \vdash_{\mathsf{R,S,T,C\Sigma,Sub_\Gamma}} (\forall X)t \doteq_s t'$:
  - dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ a.î.
    - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
    - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, CΣ, Sub$_\Gamma$.
- $\Gamma \vdash_{\mathsf{R,S,T,SR_\Gamma}} (\forall X)t \doteq_s t'$:
  - dacă există o secvență de ecuații $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = (\forall X)t \doteq_s t'$ a.î.
    - $\epsilon_i \in \Gamma$ sau
    - ϵ_i se obține din $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}$ aplicând una din reg. R, S, T, SR$_\Gamma$.

- Dacă avem E în loc de Γ, folosim notația adaptată la acest caz.

Regula de deducție SR_Γ

Exemplu

- $NAT = (S, \Sigma)$, unde $S = \{s\}$ și $\Sigma = \{0 :\to s, succ : s \to s\}$
- Deoarece avem un singur sort, putem renunța la cuantificare!
- $E = \{x + 0 \doteq x,\ x + succ(y) \doteq succ(x + y)\}$
- $E \vdash_{R,S,T,C\Sigma,Sub_E} 0 + succ(0) \doteq succ(0)$:
  1. $0 + succ(0) \doteq succ(0 + 0)$
     (Sub_E pt. $x + succ(y) \doteq succ(x + y) \in E$ si $\{x \leftarrow 0, y \leftarrow 0\}$)
  2. $0 + 0 \doteq 0$
     (Sub_E pt. $x + 0 \doteq x \in E$ si $\{x \leftarrow 0\}$)
  3. $succ(0 + 0) \doteq succ(0)$ $\quad (2, C_\Sigma)$
  4. $0 + succ(0) \doteq succ(0)$ $\quad (1, 3, T)$

Regula de deductie SR_Γ

Exemplu (cont.)

- $E \vdash_{R,S,T,SR_E} 0 + succ(0) \doteq succ(0)$:
  1. $0 + succ(0) \doteq succ(0+0)$
     $(SR_E$ pt. $x + succ(y) \doteq succ(x+y) \in E$, $\{x \leftarrow 0, y \leftarrow 0\}$, $c = z)$
  2. $succ(0+0) \doteq succ(0)$
     $(SR_E$ pt. $x + 0 \doteq x \in E$, $\{x \leftarrow 0\}$, $c = succ(z))$
  3. $0 + succ(0) \doteq succ(0) \qquad (1, 2, T)$

Regula de deducție SR_Γ

Propoziția

SR_Γ este regulă de deducție corectă.

Demonstrație

- Fie $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$, $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție, $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'}$, $z \notin X$, $nr_z(c) = 1$ astfel încât $\Gamma \models (\forall X)\theta_{s_i}(u_i) \doteq_{s_i} \theta_{s_i}(v_i)$, or. $1 \leq i \leq n$.
- Demonstrăm că $\Gamma \models (\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]$ prin inducție după $|c|$ (lungimea lui c):
  - Dacă $|c| = 1$, atunci $c = z$ și $\Gamma \models (\forall X)\theta(t) \doteq_{s'} \theta(t')$, deoarece Sub_Γ este corectă.

Regula de deducție SR_Γ

Demonstrație (cont.)

- (cont. cu pasul de inducție)
  - Pres. că $\Gamma \models (\forall X)c'[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c'[z \leftarrow \theta(t')]$ dacă $|c'| < |c|$.
  - Există $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s' \in \Sigma$, $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$ și k a.î.
    $$c = \sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \text{ și } nr_z(t_k) = 1.$$
  - Pentru contextul t_k aplicăm ipoteza de inducție:
    $$\Gamma \models (\forall X)t_k[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s_i} t_k[z \leftarrow \theta(t')]$$
  - Cum regula R este corectă, avem $\Gamma \models (\forall X)t_i \doteq_{s_i} t_i$, or. $i \neq k$.
  - Cum regula $C\Sigma$ este corectă obținem:

$$\Gamma \models (\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow \theta(t)], \ldots, t_n) \doteq_{s'} \sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow \theta(t')], \ldots, t_n)$$

  - Observăm că $c[z \leftarrow p] = \sigma(t_1, \ldots, t_k[z \leftarrow p], \ldots, t_n)$, or. $p \in T_\Sigma(X)_s$
  - Deci $\Gamma \models (\forall X)c[z \leftarrow \theta(t)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(t')]$.

$\square$

Regula de deducție SR_Γ

Definim relația binară pe $T_\Sigma(X)$:

$$t \sim_{SR_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathsf{R,S,T,SR_\Gamma}} (\forall X) t \doteq_s t'.$$

Propoziție (*)

$\sim_{SR}$ este o congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.

Regula de deducție SR_Γ

Fie (S, Σ, Γ) specificație, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$.

Teoremă

Sunt echivalente:

1. $\Gamma \vdash_{R,S,T,C\Sigma,Sub_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$,
2. $\Gamma \vdash_{R,S,T,SR_\Gamma} (\forall X)t \doteq_s t'$.

Demonstrație

Este suficient să arătăm că $\sim_\Gamma = \sim_{SR}$.

$\Rightarrow$

- $\sim_{SR}$ congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.
- $\sim_\Gamma = \equiv_\Gamma$ și $\equiv_\Gamma$ cea mai mică congruență pe $T_\Sigma(X)$ închisă la substituție.
- Deci $\sim_\Gamma \subseteq \sim_{SR}$.

Regula de deducție SR_Γ

Demonstrație (cont.)

$\Leftarrow$

- Din corectitudinea regulii SR_Γ, obținem $\sim_{SR} \subseteq \equiv_\Gamma$.
- În concluzie, $\sim_{SR} \subseteq \equiv_\Gamma = \sim_\Gamma$.

$\square$

Deducția ecuațională și rescriere

- (S, Σ) signatură, X mulțime de variabile și $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$
- E mulțime de ecuații
- R_E sistemul de rescriere determinat de E
- $\to_E$ relația de rescriere generată de R_E
- $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_E$ echivalența generată de $\to_E$

Teoremă

$$E \vdash (\forall X) t \doteq_s t' \quad \Leftrightarrow \quad t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E t'$$

Deducția ecuațională și rescriere

Demonstrație

Este suficient să arătăm că $t \sim_E t' \Leftrightarrow t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$.

Arătăm $\sim_E \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_E$:

- Evident $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ este închisă la R,S,T.
- $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ închisă la Sub_E:

$$\boxed{\text{Sub}_E \quad \frac{}{(\forall X)\theta(t) \doteq_s \theta(t')}}\text{, unde } (\forall Y)t \doteq_s t' \in E \text{ și } \theta : Y \to T_\Sigma(X)$$

  - Fie $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$ substituție
  - Deoarece $(\forall Y)t \doteq_s t' \in E$, avem $t \to_E t'$ sau $t' \to_E t$
  - Dacă $t \to_E t'$ atunci $\theta(t) \to_E \theta(t')$ pentru $c = z$
  - Dacă $t' \to_E t$ atunci $\theta(t') \to_E \theta(t)$ pentru $c = z$
  - Rezultă $\theta(t) \overset{*}{\leftrightarrow}_E \theta(t')$

Demonstrație (cont.)

- $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ închisă la C_Σ:

$$\boxed{\mathrm{C}\Sigma \quad \frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \ldots, t_n) \doteq_s \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)}}$$, unde $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s \in \Sigma$

Fie $\sigma : s_1 \cdots s_n \to s \in \Sigma$ și $k \in \{1, \ldots, n\}$

1. $t_k \to_E t'_k \Rightarrow \sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \to_E \sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$
   - Din ipoteză, $t_k = c[z \leftarrow \theta(l)]$ și $t'_k = c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde $c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})$ context, $l \to r \in R_E$ cu $Var(l) = Y$ și $\theta : Y \to T_\Sigma(X)$
   - Definim $c' := \sigma(t_1, \ldots, c, \ldots, t_n)$
   - Evident $t_k \to_E t'_k$ și pentru contextul c'
   - Dar am obținut

$$\sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) = c'[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și}$$
$$\sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n) = c'[z \leftarrow \theta(r)]$$

Deducția ecuațională și rescriere

Demonstrație (cont.)

- $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_E$ închisă la C_Σ (cont.):

  2. $t_k \stackrel{p}{\leftrightarrow}_E t'_k \Rightarrow \sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$
     - Demonstrăm prin inducție după $p \geq 1$
     - Pentru $p = 1$ aplicăm (1) și simetria.
     - Dacă $t_k \stackrel{p+1}{\leftrightarrow}_E t'_k$ atunci $t_k \stackrel{p}{\leftrightarrow}_E t''_k \leftrightarrow_E t'_k$.

       Din ipoteza de inducție avem:

       $\sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t_1, \ldots, t''_k, \ldots, t_n)$
       $\sigma(t_1, \ldots, t''_k, \ldots, t_n) \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$

       Deci $\sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$.

Demonstrație (cont.)

- $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ închisă la C_Σ (cont.):
  3. Din (2) obținem

$$t_k \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'_k \Rightarrow \sigma(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \overset{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$$

  or. $k \in \{1, \ldots, n\}$.

  4. Dacă $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'_1$, ..., $t_n \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'_n$, din (3) obținem

$$\sigma(t_1, \ldots, t_n) \overset{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t'_1, t_2 \ldots, t_n) \overset{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t'_1, t'_2, \ldots, t_n) \overset{*}{\leftrightarrow}_E \cdots \overset{*}{\leftrightarrow}_E \sigma(t'_1, \ldots, t'_n)$$

Am arătat că $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ este închisă la R, S, T, C_Σ, Sub_E.

Deci $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ este congruență închisă la substituții *(vezi Curs 8)*.

Cum $\sim_E = \equiv_E$ *(vezi Curs 8)* și $\equiv_E$ cea mai mică congruență închisă la substituție, rezultă că $\sim_E \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_E$.

Demonstratie (cont.)

Arătăm $\overset{*}{\leftrightarrow}_E \subseteq \sim_E$:

- dacă $t \to_E t'$, atunci $t \sim_{SR} t'$

$$\boxed{\begin{array}{lll} t \to_E t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde} \\ & & c \in T_\Sigma(X \cup \{z\}) \text{ context}, \ l \to_s r \in R_E \text{ cu } Var(l) = Y, \\ & & \theta : Y \to T_\Sigma(X) \text{ substituție} \end{array}}$$

$$\boxed{\mathrm{SR}_E \quad \frac{}{(\forall X)c[z \leftarrow \theta(l)] \doteq_{s'} c[z \leftarrow \theta(r)]}}\ , \text{ unde}$$

$$(\forall Y)l \doteq_s r \in E,\ \theta : Y \to T_\Sigma(X),\ c \in T_\Sigma(X \cup \{z\})_{s'},\ z \notin X,\ nr_z(c) = 1.$$

- dacă $t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$, atunci $t \sim_{SR} t'$, folosind R, S, T.
- deci $\overset{*}{\leftrightarrow}_E \subseteq \sim_{SR}$
- Cum $\sim_{SR} = \sim_E$, obținem $\overset{*}{\leftrightarrow}_E \subseteq \sim_E$

$\square$

Ce am obținut până acum și ce urmărim?

- Am investigat următoarele probleme:

  $E \models (\forall X)t \doteq_s t'$? și $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$?

- Probleme nedecidabile în general.

- Deducția ecuațională nu este algoritmică.

- Am obținut o reformulare a deducției ecuaționale:

  deducția ecuațională = echivalența generată de un TRS

- Scop: deducție automată
  (cazuri în care deducția ecuațională devine decidabilă)

- Pentru aceasta vom studia proprietăți suplimentare pentru TRS.

Pe săptămâna viitoare!