CURSUL 6: NUMERE CARDINALE

G. MINCU

1. Numere cardinale

Aşa cum am precizat încă de la primul curs, considerarea unei mulţimi a tuturor mulţimilor conduce la paradoxuri. Vom conveni că toate mulţimile alcătuiesc un alt tip de entitate, pe care o vom numi **clasă**. Fără a intra în detalii tehnice, vom considera că definiţiile pe care le-am dat pentru relaţiile de ordine şi relaţiile de echivalenţă pot fi utilizate şi în contextul claselor.

Definim relaţia $\sim$ între două mulţimi astfel: $A \sim B$ dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă de la A la B.

Propoziţia 1. Relaţia $\sim$ este de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 1!

Definiţia 2. Dacă pentru mulţimile A şi B avem $A \sim B$, unde $\sim$ este relaţia introdusă mai sus, spunem că A şi B sunt **cardinal echivalente** sau **echipotente**.

Definiţia 3. Clasa de echivalenţă cardinală a unei mulţimi A se numeşte **numărul cardinal al lui** A. În acest text, vom folosi pentru numărul cardinal al mulţimii A notaţiile $|A|$ sau Card A.

Definiţia 4. O mulţime se numeşte **numărabilă** dacă ea este cardinal echivalentă cu $\mathbb{N}$.

Definiţia 5. O mulţime se numeşte **cel mult numărabilă** dacă ea este finită sau numărabilă.

Definiţia 6. O mulţime se numeşte **nenumărabilă** dacă nu este cel mult numărabilă.

Vom nota numărul cardinal al mulţimii $\mathbb{N}$ cu $\aleph_0$, iar numărul cardinal al mulţimii $\mathbb{R}$ cu $\mathfrak{c}$.

Propoziţia 7. Mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

Demonstraţie: Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ care trimite numerele pare în jumătăţile lor, iar pe cele impare în numerele întregi negative, luate la rând, începând cu -1 şi în ordine descrescătoare este bijectivă. Lăsăm verificările calculatorii în grija cititorului. $\square$

2. Inegalitatăţi pentru numere cardinale

Definim pe clasa numerelor cardinale relaţia $|A| \preceq |B|$ dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă $f : A \to B$. Vom scrie $|A| \prec |B|$ dacă $|A| \preceq |B|$ şi $|A| \neq |B|$.

Observaţia 8. Relaţia $\preceq$ este corect definită deoarece dacă $f : A \to B$ este injectivă, $|A| = |A'|$, iar $|B| = |B'|$, atunci există funcţii bijective $\alpha : A \to A'$ şi $\beta : B \to B'$; în consecinţă, $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : A' \to B'$ este injectivă.

Observaţia 9. Deoarece pentru orice mulţime funcţia sa identică este injectivă, relaţia $\preceq$ este reflexivă.

Observaţia 10. Deoarece compusa oricăror două funcţii injective este injectivă, relaţia $\preceq$ este tranzitivă.

Teorema 11. (Cantor, Bernstein, Schröder)
Fie două mulţimi A şi B. Dacă există funcţiile injective $f : A \to B$ şi $g : B \to A$, atunci există o funcţie bijectivă $h : A \to B$.

Corolarul 12. Relaţia $\preceq$ este antisimetrică.

Cele precedente demonstrează

Propoziţia 13. Relaţia $\preceq$ este de ordine.

Utilizând cele precedente, putem proba:

Propoziţia 14. Mulţimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 14 utilizând eventual funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = \operatorname{sgn} a \cdot 2^{|a|} \cdot 3^b$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$.

Propoziţia 15. Mulţimile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt nenumărabile.

3. Operaţii cu numere cardinale

3.1. **Înmulţirea numerelor cardinale.** Observaţia că pentru $|A| = a \in \mathbb{N}$ şi $|B| = b \in \mathbb{N}$ avem $|A \times B| = ab$ ne sugerează:

Definiţia 16. Prin **produsul** numerelor cardinale $\alpha = |A|$ şi $\beta = |B|$ înţelegem numărul cardinal $\alpha\beta \overset{\text{def}}{=} |A \times B|$.

Definiţia 16 este corectă în virtutea observaţiei următoare:

Observaţia 17. Dacă $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$, atunci $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Demonstraţie: Date fiind bijecţiile $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$, funcţia $f \times g : A \times B \to A' \times B'$, $f \times g\,(a, b) = (f(a), g(b))$ este bijecţie (temă!). Prin urmare, $|A \times B| = |A' \times B'|$. $\square$

3.2. **Ridicarea la putere a numerelor cardinale.** Observaţia că pentru $|A| = a \in \mathbb{N}$ şi $|B| = b \in \mathbb{N}$ avem $|\{f : A \to B\}| = b^a$ ne-a condus în cursul 2 la notaţia $B^A = \{f : A \to B\}$. În contextul discuţiei de faţă, ea ne sugerează:

Definiţia 18. Date fiind numerele cardinale $\alpha = |A|$ şi $\beta = |B|$,

$$\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} |B^A|.$$

Definiţia 18 este corectă în virtutea observaţiei următoare:

Observaţia 19. Dacă $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$, atunci $|B^A| = |(B')^{A'}|$.

Demonstraţie: Date fiind bijecţiile $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$, funcţia $h : B^A \to (B')^{A'}$, $h(\varphi) = g \circ \varphi \circ f^{-1}$ este bijecţie (temă!). Prin urmare, $|B^A| = |(B')^{A'}|$. $\square$

3.3. **Adunarea a numerelor cardinale.** Ordinea întrucâtva nefirească a prezentării operaţiilor cu numere cardinale este cauzată de faptul că, în timp ce pentru înmulţirea şi ridicarea la putere a numerelor cardinale am putut utiliza operaţii binecunoscute cu mulţimi, pentru adunare sunt necesare câteva pregătiri. Începem prin a constata că, dacă $|A| = a \in \mathbb{N}$, $|B| = b \in \mathbb{N}$ şi $A \cap B = \emptyset$, atunci $|A \cup B| = a + b$, relaţia nerămânând valabilă dacă $A \cap B \neq \emptyset$.

Este instructiv să precizăm în acest punct, abătându-ne un moment de la direcţia prezentării, că în condiţiile descrise mai sus avem

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Această relaţie se generalizează după cum urmează:

Propoziţia 20 (Principiul includerii şi excluderii). Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimile finite $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Atunci

$$(1) \qquad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Demonstraţie: Fie $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Atunci x contribuie cu o unitate la suma din membrul drept al relaţiei (1). Dacă x se află în m dintre mulţimile $A_1, A_2 \ldots, A_n$ el contribuie la suma din membrul drept al relaţiei (1) cu

$$\mathbf{C}_m^1 - \mathbf{C}_m^2 + \ldots + (-1)^{m-1}\mathbf{C}_m^m = 1 - (1-1)^m,$$

adică tot cu o unitate. $\square$

Revenind acum pe direcţia principală a prezentării, constatăm, inspirându-ne din abordările de la definiţiile operaţiilor de înmulţire şi de ridicare la putere a numerelor cardinale, că ne-ar conveni în acest moment să avem la dispoziţie o operaţie cu mulţimi care să asocieze la două mulţimi date nu reuniunea lor, ci mai degrabă reuniunea a două mulţimi cardinal echivalente cu ele şi disjuncte. Aceste consideraţii conduc la:

Definiţia 21. Prin reuniunea disjunctă a mulţimilor A şi B înţelegem mulţimea $A \sqcup B \overset{\text{def}}{=} (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$.

Observaţia 22. (i) $f : A \to A \times \{1\}$, $f(a) = (a, 1)$ şi $g : B \to B \times \{2\}$, $g(b) = (b, 2)$ sunt bijective, deci $|A \times \{1\}| = |A|$ şi $|B \times \{2\}| = |B|$.
(ii) Evident, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$.

Definiţia 23. Date fiind numerele cardinale $\alpha = |A|$ şi $\beta = |B|$,

$$\alpha + \beta \overset{\text{def}}{=} |A \sqcup B|.$$

Definiţia 23 este corectă în virtutea observaţiei următoare:

Observaţia 24. Dacă $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$, atunci $|A \sqcup B| = |A \sqcup B'|$.

Demonstraţie: Date fiind bijecţiile $f : A \to A'$ şi $g : B \to B'$, funcţia

$$h : A \sqcup B \to A' \sqcup B', \quad h(x) = \begin{cases} (f(a), 1) & \text{dacă} \quad x = (a, 1) \\ (g(b), 2) & \text{dacă} \quad x = (b, 2) \end{cases}$$

este bijecţie (temă!). Prin urmare, $|A \sqcup B| = |A \sqcup B'|$. $\square$

4. CATEVA PROPRIETĂŢI ALE OPERAŢIIOR CU NUMERE CARDINALE

Prezentăm aici câteva proprietăţi ale operaţiilor cu numere cardinale definite în capitolul precedent. Cu două excepţii, marcate cu asterisc, ele sunt uşor de demonstrat şi vi le propunem ca temă. Menţionăm şi că bună parte dintre aceste proprietăţi pot fi enunţate şi demonstrate în forme mult mai generale; trimitem cititorul interesat, de pildă, la [4].

Propoziţia 25. (i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
(ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
(iii) $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.
(iv) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
(v) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.
(vi) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
(vii) $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.
(viii) $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Corolarul 26. $|\mathbb{C}| = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Propoziţia 27. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relaţiile:
(i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
(ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
(iii) $\alpha + 0 = \alpha$.
(iv)* Dacă α este infinit, $\alpha + \alpha = \alpha$.

Propoziţia 28. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relaţiile:
(i) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
(ii) $\alpha\beta = \beta\alpha$.
(iii) $\alpha \cdot 0 = 0$.
(iv) $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
(v)* Dacă α este infinit, $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.
(vi) $\alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$.

Propoziţia 29. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relaţiile:
(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = (\alpha^\gamma)(\beta^\gamma)$.
(ii) $(\alpha\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma) + (\beta^\gamma)$.
(iii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
(iv) $\alpha^0 = 1$.
(v) $\alpha^1 = \alpha$.

5. Numerele cardinale nu constituie o mulţime

Teorema 30 (Cantor). Pentru orice mulţime A avem $\mathcal{P}(A) \nsim A$.

Demonstraţie: Presupunem că $\mathcal{P}(A) \sim A$. Există deci o bijecţie $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Notăm $M = \{a \in A : a \notin f(a)\}$; fie $m \in A$ astfel încât $f(m) = M$ (există, căci f e surjectivă!).
Dacă $m \in M$, atunci $m \notin f(m) = M$, contradicţie.
Dacă $m \notin M$, atunci $m \in f(m) = M$, contradicţie.
Rămâne aşadar că $\mathcal{P}(A) \nsim A$. $\square$

Corolarul 31. Pentru orice număr cardinal α are loc relaţia $\alpha \prec 2^\alpha$.

Teorema 32. Numerele cardinale nu constituie o mulţime.

Demonstraţie: Presupunem că numerele cardinale constituie o mulţime, fie ea $\mathcal{M}$. Notăm cu R reuniunea mulţimii formate din câte un reprezentant al fiecărui element al lui $\mathcal{M}$. Atunci $2^{|R|}$ este un număr cardinal şi avem relaţiile $2^{|R|} \preceq |R| \prec 2^{|R|}$, contradicţie. $\square$

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.