23.02.2022

SEMINAR 1

SPAȚIUL EUCLIDIAN $\mathbb{R}^n$

(1) În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $a=(-1,2,-2)$, $b=(2,3,2)$

Să se det.

$a+b = (-1,2,-2)+(2,3,2) = (1,5,0)$

$a-b = (-3,-1,-4)$

$-3a+b = (3,-6,6)+(2,3,2) = (5,-3,8)$

$\langle a,b\rangle = \langle(-1,2,-2),(2,3,2)\rangle = -1\cdot 2+2\cdot 3+(-2)\cdot 2 = -2+6-4=0 \Rightarrow a\perp b$

$\|a\| = \sqrt{\langle a,a\rangle} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9}=3$

$\|b\| = \sqrt{\langle b,b\rangle} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

$d(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$

(2) În $\mathbb{R}^2$ se cons. vect. $a=(2,3)$, $b=(2,-1)$. Să se det ~~măsura~~ unghiul a,b

$\cos(\widehat{a,b}) = \dfrac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{65}}$

$\langle a,b\rangle = 4-3=1$

$m(\widehat{a,b}) = \arccos\frac{1}{\sqrt{65}}$

(3) Să se dem. inegalitatea Cauchy-~~Schwartz~~ Schwarz

$\forall x,y\in\mathbb{R}^n: |\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle} = \|x\|\cdot\|y\|$ (1)

Demonstrație

Fie $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

$(1) \Leftrightarrow \underbrace{|x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n|}_{\ge 0} \le \underbrace{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}}_{\ge 0} \quad /^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2 \le (x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)$ (2)

Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=(t\cdot x_1-y_1)^2+\dots+(t\cdot x_n-y_n)^2$

$f(t) = t^2x_1^2-2tx_1y_1+y_1^2+\dots+t^2x_n^2-2tx_ny_n+y_n^2 =$

$= t^2(x_1^2 + \dots + x_m^2) - 2t(x_1y_1 + \dots + x_my_m) + y_1^2 + \dots + y_m^2$

Dacă $x = O_m \Rightarrow (2)$ are loc cu egalitate $(0 \le 0)$

Dacă $x \neq O_m \Rightarrow f$ - funcție de gradul II $\left\{ \begin{array}{l} (a>0) \checkmark \\ f(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Rightarrow \Delta \leq 0$

$\Delta \leq 0$

dar $\Delta = 4(x_1y_1 + \dots + x_my_m)^2 - 4(x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4[(x_1y_1 + \dots + x_my_m)^2 - (x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2)] \leq 0 \ /:4$

$\Rightarrow (x_1y_1 + \dots + x_my_m)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_m^2)(y_1^2 + \dots + y_m^2) \Rightarrow (2)$ are loc $\checkmark$

4) Să se demonstreze că norma euclidiană pe $\mathbb{R}^n$ satisface inegalitatea triunghiului:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: are loc $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (1)

<u>Demonstrație</u>

Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$

$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \Rightarrow \| x+y \| = \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle}$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \ /^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle x+y, x+y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$ (2)

$\langle x+y, x+y \rangle \overset{(PS_1)}{=} \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle =$

$\overset{(PS_3)}{=} \langle x+y, x \rangle + \langle x+y, y \rangle =$

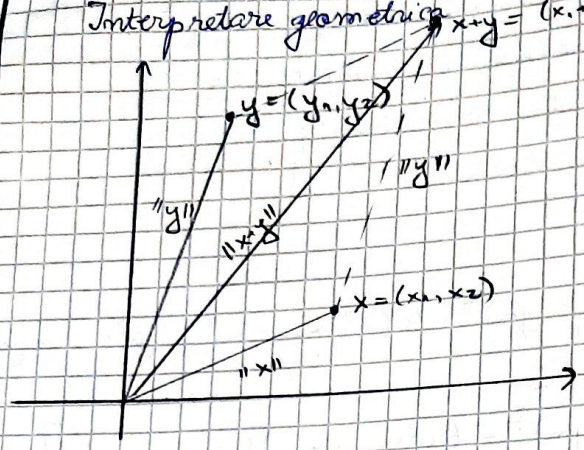
$\overset{(PS_1)}{=} \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$

$\overset{(PS_3)}{=} 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$

$(2) \Leftrightarrow \cancel{2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle} \ /:2$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle}$ (Adev. conform inegalității Cauchy Schwarz)

Interpretare geometrică



(5) Să se demonstreze identitatea paralelogramului:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (1)

<u>Demonstrație</u>

Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \overset{(4)}{=} \langle x,x\rangle + 2\cdot\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle \overset{(PS_1)}{=} \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle =$$

$$\overset{(PS_2)}{=} \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \overset{(PS_3)}{=} \langle x-y, x\rangle - \langle x-y, y\rangle =$$

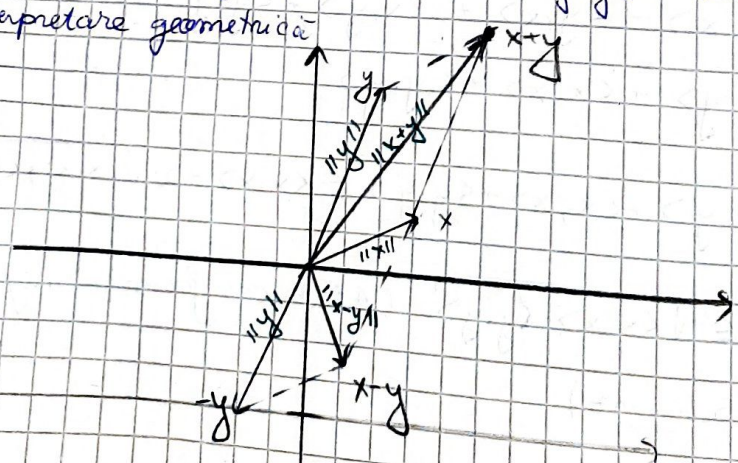
$$\overset{(PS_1)}{=} \langle x,x\rangle + \langle -y, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle -y, y\rangle =$$

$$\overset{(PS_2)}{=} \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\overset{(PS_3)}{=} \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\cdot\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Interpretare geometrică



Egalitatea (1) din enunț exprimă următoarea proprietate geometrică „cunoscută":

Într-un paralelogram, suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor

⑥ Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ a.î. $x+y \perp x-y$. Să se dem. că $\|x\| = \|y\|$

$x+y \perp x-y \Rightarrow$

$(\cos(x+y, x-y) = 0 \Rightarrow)$

$\Rightarrow \langle x+y, x-y \rangle = 0 \overset{(PS_1)}{\Leftrightarrow} \langle x, x-y \rangle + \langle y, x-y \rangle = 0$

$\overset{(PS_3)}{\Leftrightarrow} \langle x-y, x \rangle + \langle x-y, y \rangle = 0$

$\overset{(PS_1)}{\Leftrightarrow} \langle x, x \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle -y, y \rangle = 0$

$\overset{(PS_2)}{\Leftrightarrow} \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = 0$

$\overset{(PS_3)}{\Leftrightarrow} \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle = \langle y, y \rangle$

$\Leftrightarrow \langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle \Leftrightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 \Rightarrow \underset{\geq 0}{\|x\|} = \underset{\geq 0}{\|y\|}$

⑦ În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii nenuli a, b, c a.î. $c = \|a\| \cdot b + \|b\| \cdot a$. Să se dem. că vectorul c înjumătățește $\measuredangle$ dintre vectorii a și b

$\Updownarrow$

$\cos(\widehat{a,c}) = \cos(\widehat{c,b}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\langle a, c \rangle}{\|a\| \cdot \|c\|} = \dfrac{\langle c, b \rangle}{\|c\| \cdot \|b\|}$

Demonstrație

$\Leftrightarrow m(\widehat{c,a}) = m(\widehat{c,b}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{c,a}) = \cos(\widehat{c,b}) \Leftrightarrow$ (cos bij. pe $[0, \pi]$)

$\Leftrightarrow \dfrac{\langle c, a \rangle}{\cancel{\|c\|} \cdot \|a\|} = \dfrac{\langle c, b \rangle}{\cancel{\|c\|} \cdot \|b\|} \Leftrightarrow \|b\| \cdot \langle c, a \rangle = \|a\| \langle c, b \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \langle \|a\| \cdot b + \|b\| \cdot a, a \rangle \cdot \|b\| = \|a\| \langle \|a\| \cdot b + \|b\| \cdot a, b \rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\|a\|\cdot\langle b,a\rangle + \|b\|\cdot\langle a,a\rangle)\cdot\|b\| = \|a\|(\|a\|\langle b,b\rangle + \|b\|\langle a,b\rangle) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|a\|\cdot\|b\|\langle b,a\rangle + \|b\|^2\underbrace{\langle a,a\rangle}_{=\|a\|^2} = \|a\|^2\underbrace{\langle b,b\rangle}_{=\|b\|^2} + \|a\|\cdot\|b\|\langle a,b\rangle$

$\Leftrightarrow$

(8) Să se dem. că funcția $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o normă pe $\mathbb{R}^n$ (Norma Minkowski)

temă — (9) Să se dem că funcția $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ este o normă pe $\mathbb{R}^n$ numită norma Cebâșev

<u>Rezolvare 8:</u>

Avem de verificat axiomele normei

(N_1): $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0_n$ ✓

(N_2): $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, fie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ $\qquad x \sim x$

$\|\alpha x\|_1 = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \dots + |\alpha x_n| =$

$= |\alpha|\cdot|x_1| + \dots + |\alpha|\cdot|x_n|$

$= |\alpha|(|x_1| + \dots + |x_n|) = |\alpha|\cdot\|x\|$

(N_3): $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Fie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

Atunci

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

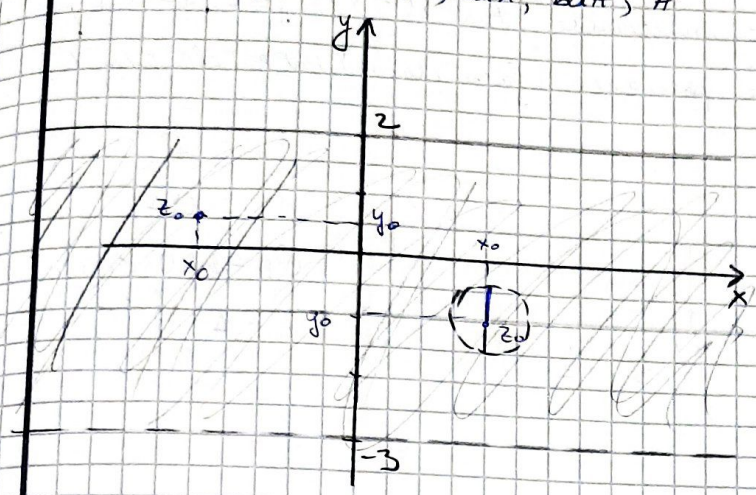
$\|x+y\| = |x_1 + y_1| + \dots + |x_1 + y_1| \le$

$\le |x_1| + |y_1| + \dots + |x_n| + |y_n| =$

$= (|x_1| + \dots + |x_n|) + (|y_1| + \dots + |y_n|) =$

$= \|x\|_1 + \|y\|_1$

(10) În $\mathbb{R}^2$ considerăm mulțimea $A = \mathbb{R} \times [-3,2]$. Să se det. (cu demonstrație) $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$, $\operatorname{bd} A$, A'



$A = \mathbb{R} \times (-3,2] =$

$= \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in (-3,2]\}$

Vom demonstra că $\operatorname{int} A = \mathbb{R} \times (-3,2)$ (1)

$\operatorname{cl} A = \mathbb{R} \times [-3,2]$

$\operatorname{bd} A = \mathbb{R} \times \{-3,2\}$

$A' = \mathbb{R} \times [-3,2]$

(1) Arătăm mai întâi că $\operatorname{int} A \subseteq \mathbb{R} \times (-3,2)$ (1')

Fie $z_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{int} A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(z_0, r) \subseteq A$

Vrem $z_0 \in \mathbb{R} \times (-3,2) \Leftrightarrow (x_0 \in \mathbb{R} \checkmark)\ y_0 \in (-3,2)$

Observăm că $z = (x_0, y) \in B(z_0, r)$, $\forall y \in (y_0 - r, y_0 + r)$

$d(z, z_0) = \sqrt{(x_0 - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = |y - y_0| < r$

$\Rightarrow z = (x_0, y) \in A = \mathbb{R} \times (-3,2]\ \forall y \in (y_0 - r, y_0 + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in (-3,2]\ \forall y \in (y_0 - r, y_0 + r) \Rightarrow$

$\Rightarrow (y_0 - r, y_0 + r) \subseteq (-3,2] \Rightarrow y_0 \in \operatorname{int}(-3,2] \Rightarrow y_0 \in (-3,2)$

Arătăm că $\mathbb{R} \times (-3,2) \overset{?}{\subseteq} \operatorname{int} A$ (1'')

Fie $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times (-3,2) \Rightarrow y_0 \in (-3,2)$

Notăm $r = \min\{2 - y_0, y_0 + 3\}$. Atunci $B(z_0, r) \subseteq A$

luăm pct din bila ...

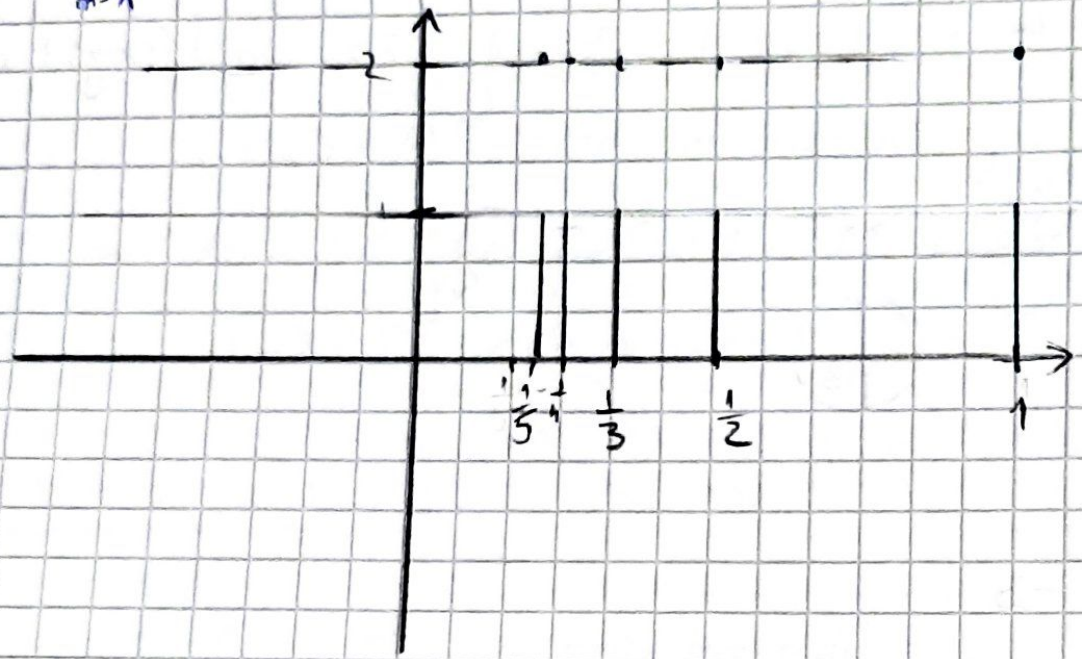
și ar. că y în ... 3,2

$\Rightarrow z_0 \in \operatorname{int} A$.

Temă: De dem. încă o egalitate

(11) În $\mathbb{R}^2$ se consideră mulțimile $A_n = \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in [0,1] \cup \{2\}\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

și $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Să se precizeze (fără dem.) $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$, $\operatorname{bd} A$, A'



$\operatorname{int} A = \emptyset$

$\operatorname{bd} A = \operatorname{cl} A$

$\operatorname{cl} A = A \cup \{(0, y) \mid y \in [0,1] \cup \{2\}\}$

$A' = \operatorname{cl} A \setminus \{(\frac{1}{n}, 2) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

2.03.2022

SEMINAR 2

TOPOLOGIE ÎN $\mathbb{R}^n$

① Fiind dată $A \subseteq \mathbb{R}^n$ să se dem. că

a) $clA = \mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n \setminus A)$

b) $bdA = clA \cap cl(\mathbb{R}^n - A)$

c) $clA = A \cup A'$

<u>Dem</u>:

a) Vom dem. că $clA \overset{?}{\subseteq} \mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n - A)$ (1)

Fie $x \in clA \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$ $V \cap A \neq \emptyset$ (*)

Vrem să arătăm că $x \in \mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n \setminus A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin int(\mathbb{R}^n \setminus A)$

P.p. că $x \in int(\mathbb{R}^n - A)$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{V}(x)$

Din (*) $\Rightarrow (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap A \neq \emptyset$, contradicție

Vom arăta că $\mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n \setminus A) \overset{?}{\subseteq} clA$ (2)

Fie $x \in \mathbb{R}^n \setminus int(\mathbb{R}^n \setminus A) \Rightarrow x \notin int(\mathbb{R}^n \setminus A)$

Vrem să arătăm că $x \in clA$

P.p. $x \notin clA \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $V \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A \\ V \in \mathcal{V}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in int(\mathbb{R}^n \setminus A)$, contradicție

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ a) are loc

c) Știm că $\left.\begin{array}{l} A \subseteq clA \\ A' \subseteq clA \text{ (a elipsă de gândire)} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup A' \subseteq clA$ (3)

$x \in clA \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$

Vom arăta că $cl_A \overset{?}{\subseteq} A \cup A'$ (A)

$x \in cl_A \Leftrightarrow \forall V \in V(x),\ V \cap A \neq \emptyset$ (**)

Vrem să ar. că $x \in A \cup A'$

P.p. că $x \notin A \cup A' \Rightarrow x \notin A$ și $x \notin A'$

$x \notin A' \Rightarrow \exists V \in V(x)$ a.î. $V \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{V \cap A = \{x\}}_{\text{Nu poate avea loc deoarece } x \notin A}$ sau $V \cap A = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$, contrad. cu (**)

Din (3), (4) $\Rightarrow$ are loc c)

2

Din (3) și (4) $\Rightarrow$ c) are loc

② Se dem. că $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ avem $\mathrm{int}(A \setminus B) \subseteq (\mathrm{int}\, A) \setminus (\mathrm{int}\, B)$ și $(\mathrm{cl}\, A) \setminus (\mathrm{cl}\, B) \subseteq \mathrm{cl}(A \setminus B)$.

Se dă exemplu de mulțimi A și B pt. care cele 2 incluziuni sunt stricte.

<u>Dem</u>:

Fie $x \in (\mathrm{cl}\, A) \setminus (\mathrm{cl}\, B) \Rightarrow x \in \mathrm{cl}\, A$ și $x \notin \mathrm{cl}\, B$

$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x)$, $U \cap A \neq \emptyset$

și $\exists U_0 \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $U_0 \cap B = \emptyset$

Vrem să arătăm că $x \in \mathrm{cl}(A \setminus B)$

Pp. că $x \notin \mathrm{cl}(A \setminus B) \Rightarrow \exists\, U_1 \in \mathcal{V}(x)$ a.î. $U_1 \cap \underbrace{(A \setminus B)}_{A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)} = \emptyset$

$\Rightarrow U_1 \cap A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \Rightarrow U_1 \cap A \subseteq B \Rightarrow U_0 \cap U_1 \cap A \subseteq \underbrace{U_0 \cap B}_{\emptyset}$

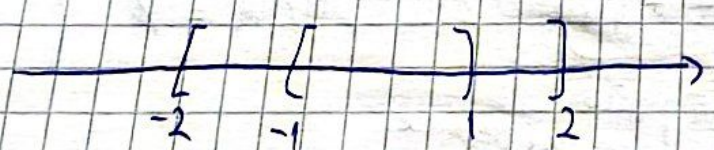
$\Rightarrow \underbrace{U_0 \cap U_1}_{\in \mathcal{V}(x)} \cap A = \emptyset$ contradicție

Exemplu: $A = \mathbb{R}^n = \mathrm{cl}\, A$

$B = \{0_n\} = \mathrm{cl}\, B$

$\mathrm{cl}\, A \setminus \mathrm{cl}\, B = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} = A \setminus B$

$\mathrm{cl}(A \setminus B) = \mathbb{R}^n$



$A = [-2, 2] = \mathrm{cl}\, A$

$B = [-1, 1] = \mathrm{cl}\, B$

$(\mathrm{cl}\, A) \setminus (\mathrm{cl}\, B) = [-2, 1) \cup (1, 2] = A \setminus B$

$d(A|B) = [-2,-1] \cup [1,2]$

<u>ex in $\mathbb{R}^n$</u>

$A = \{(x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in [-2,2]\}$

$B = \{(x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in [-1,1]\}$

Sem

$A = \overline{B}(0_n, 1)$

$B = \overline{B}(0_n, 2)$

③ Fiind date $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, să se dem. că

a) dacă $A \cup B = \mathbb{R}^n$, atunci $(\mathrm{cl}A) \cup (\mathrm{int}B) = \mathbb{R}^n$

tema

b) dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $(\mathrm{cl}A) \cap (\mathrm{int}B) = \emptyset$

Dem:

b) P.p. că $\exists\, x \in (\mathrm{cl}A) \cap (\mathrm{int}B)$

$\Rightarrow x \in \mathrm{cl}A$ ~~și $x \in \mathrm{int}B$~~ $\Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$ avem $V \cap A \neq \emptyset$ $\quad V = B \Rightarrow B \cap A \neq \emptyset$ contradicție

și

$x \in \mathrm{int}B \Rightarrow B \in \mathcal{V}(x)$

$\Rightarrow$

④ Să se dem. că orice bilă deschisă în $\mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă

tema

și orice bilă închisă în $\mathbb{R}^n$ este o mulțime închisă

Dem:

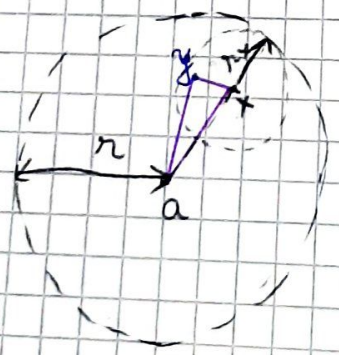
Fie $a \in \mathbb{R}^n$ și fie $r > 0$

? $B(a,r)$ este mulțime deschisă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \in B(a,r)$ avem $B(a,r) \in \mathcal{V}(x)$

$\Leftrightarrow \forall x \in B(a,r), \exists\, r_x > 0$ a.î. $B(x, r_x) \subseteq B(a,r)$

Fie $x \in B(a,r)$



Alegem $r_x = r - \|x-a\| > 0$

Vom demonstra că $B(x, r_x) \subseteq B(a,r)$ ✓

Fie $y \in B(x, r_x)$

$\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \le \underbrace{\|y-x\|}_{<r_x} + \|x-a\| < r_x + \|x-a\| = r$

$\Rightarrow y \in B(a,r)$

⑤ Să se dem. că $\forall A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ avem $cl(A_1 \cup A_2) = (clA_1) \cup (clA_2)$.

Este adevărat că pt. orice familie $(A_i)_{i\in J}$ are loc egalitatea

$cl(\bigcup_{i\in J} A_i) = \bigcup_{i\in J} (clA_i)$?

Dem.:

Observație: $A \subseteq B \Rightarrow clA \subseteq clB$ (o clipă de gândire)

$A_1 \subseteq A_1 \cup A_2 \Rightarrow clA_1 \subseteq cl(A_1 \cup A_2)$

$A_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \Rightarrow clA_2 \subseteq cl(A_1 \cup A_2)$ $\Big\} \Rightarrow (clA_1) \cup (clA_2) \subseteq cl(A_1 \cup A_2)$ (1)

Vom arăta că $cl(A_1 \cup A_2) \subseteq (clA_1) \cup (clA_2)$

Fie $x \in cl(A_1 \cup A_2) \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$; $V \cap (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\forall V \in \mathcal{V}(x): (V \cap A_1) \cup (V \cap A_2) \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\forall V \in \mathcal{V}(x): V \cap A_1 \neq \emptyset$ sau $V \cap A_2 \neq \emptyset$

$(\forall V \in \mathcal{V}(x): V \cap A_1 \neq \emptyset)$ sau $(\forall V \in \mathcal{V}(x)\ V \cap A_2 \neq \emptyset)$

$x \in clA_1$ sau $x \in clA_2$

$\Downarrow$

$x \in$

[$\forall m \in \mathbb{N}$ m este par sau impar (T)

$(\forall m \in \mathbb{N}: m$ e par$)$ sau $(\forall m \in \mathbb{N}: m$ e impar$)$]

Pp. că $x \notin (clA_1) \cup (clA_2)$

$\Rightarrow x \notin (clA_1) \Rightarrow \exists V_1 \in \mathcal{V}(x): V_1 \cap A_1 = \emptyset$

și

$x \notin (clA_2) \Rightarrow \exists V_2 \in \mathcal{V}(x): V_2 \cap A_2 = \emptyset$

Notăm $V = V_1 \cap V_2$

Avem $V \cap (A_1 \cup A_2) = (V \cap A_1) \cup (V \cap A_2) = \underbrace{(V_1 \cap V_2 \cap A_1)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(V_1 \cap V_2 \cap A_2)}_{=\emptyset} = \emptyset$

contradicție

Răspunsul este NU

contraex:

$A_k = [-1+\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}] = cl A_k$

$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = (-1,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} cl A_k$

$cl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = [-1,1]$

În $\mathbb{R}^n$: $A_k = \overline{B}(0_n, 1-\frac{1}{k}) = cl A_k$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = B(0_n, 1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (cl A_k)$

$cl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \overline{B}(0_n, 1)$

(6) Fie (x_k) șir convergent de puncte din $\mathbb{R}^n$ și fie $x = \lim_{k\to\infty} x_k$

Să se dem. că $A = \{x\} \cup \{x_k \mid k = 1,2,3,\dots\}$ este compactă

dem cu secvențial compactă $\Rightarrow$ 1 punct în plus la examen

<u>Dem</u>:

Fie $(G_i)_{i\in J}$ acoperire deschisă arbitrară a lui A $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$, $x \in A$ $\Rightarrow \exists\, i_0 \in J$ a.î. $x \in G_{i_0}$, G_{i_0} - mult deschisă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $B(x,\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$

$x = \lim_{k\to\infty} x_k \Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall k \geq k_0$ avem că $\|x_k - x\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall k \geq k_0$, $x_k \in B(x,\varepsilon) \subseteq G_{i_0}$

$x_k \in A \subseteq \bigcup_{i\in J} G_i \Rightarrow \exists\, i_k \in J$ a.î. $x_k \in G_{i_k}$

$A \subseteq \bigcup_{k=0}^{k} G_{i_k}$

9.03.2022

SEMINAR 3

MULȚIMI COMPACTE

Examen

① Să se dem. că dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ și $B \subseteq \mathbb{R}^m$ sunt mulțimi compacte, atunci și $A \times B$ este mulțime compactă în $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$

Rezolvare:

? $A \times B$ e mulțime compactă $\Leftrightarrow$ $A \times B$ este secvențial compactă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ orice șir din $A \times B$ are un subșir convergent către un punct din $A \times B$

Fie (x_k) șir arbitrar din $A \times B$

$\forall k \geq 1 : x_k \in A \times B \Rightarrow \exists a_k \in A, \exists b_k \in B$ a.î. $x_k = (a_k, b_k)$

$\left.\begin{array}{l} (a_k) \text{ este șir din } A \\ A\text{-compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (a_{k_j})$ - subșir al șirului (a_k) și $\exists a \in A$ a.î. $\lim\limits_{j \to \infty} a_{k_j} = a$

$\left.\begin{array}{l} \cancel{(b_k) \text{ este șir din } B} \\ \cancel{B\text{-compactă}} \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\exists (b_{k_j})}$ - $\cancel{\text{subșir al șirului } (b_k) \text{ și}}$ $\cancel{\exists b \in B \text{ a.î. } \lim\limits_{j \to \infty} b_{k_j} = b}$

$\left.\begin{array}{l} (b_{k_j}) \text{ este șir din } B \\ B\text{-compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (b_{k_{j_i}})_{i \geq 1}$ subșir al lui (b_{k_j}) și $\exists b \in B$ a.î. $\lim\limits_{i \to \infty} b_{k_{j_i}} = b$

Dar avem și $\lim\limits_{i \to \infty} a_{k_{j_i}} = a$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{i \to \infty} (a_{k_{j_i}}, b_{k_{j_i}}) = (a, b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{i \to \infty} x_{k_{j_i}} = (a, b) \in A \times B$

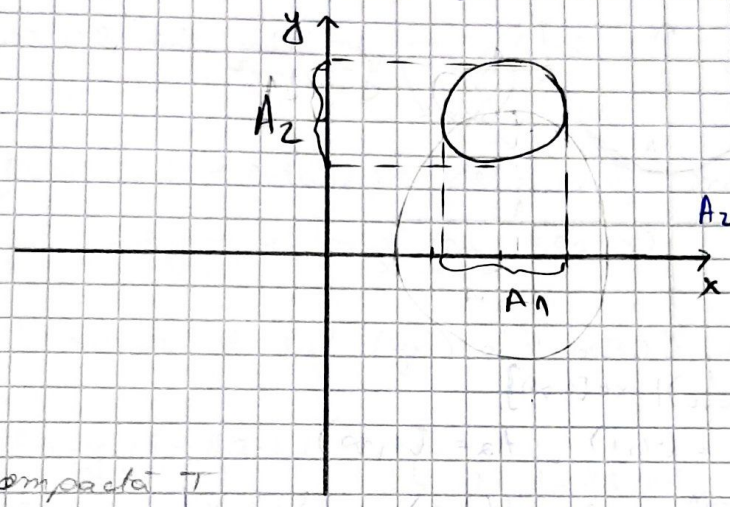
9.03.2022

② Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}^2$ și fie A_1 pr. lui A pe axa Ox, și A_2 proiecția lui A pe axa Oy

a) S.e.dem. că dacă A este compactă, atunci A_1 și A_2 sunt, de asemenea compacte

b) Să se dea ex. de mult. închisă A pt. care A_1 și A_2 sunt ambele deschise, dar nu închise

c) Să se dea ex. de mult. închisă A pt. care una dintre mulțimile A_1 și A_2 este închisă, dar nu deschisă, iar ceaalaltă este deschisă dar nu închisă



$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}$ a.î. $(x,y) \in A\}$

$A_2 = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $(x,y) \in A\}$

A_1 - compactă ?

a) ? A_2 - compactă $\Leftrightarrow$ A_2 secvențial compactă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ orice șir de puncte din A_2 posedă un subșir convergent către un punct din A_2

Fie (y_k) șir arbitrar din A_2

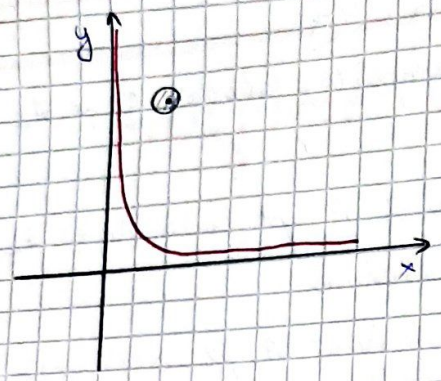
$y_k \in A_2 \Rightarrow \exists x_k \in \mathbb{R}$ a.î. $(x_k, y_k) \in A$

$\left.\begin{array}{l} ((x_k, y_k)) \text{ - șir din } A \\ A \text{ - compactă} \end{array}\right\}$ $\exists ((x_{k_j}, y_{k_j}))$ - subșir al lui $((x_k, y_k))$ și $\exists (x,y) \in A$ a.î. $\lim\limits_{j \to \infty} (x_{k_j}, y_{k_j}) = (x,y)$

$\Rightarrow \lim\limits_{j \to \infty} y_{k_j} = y$

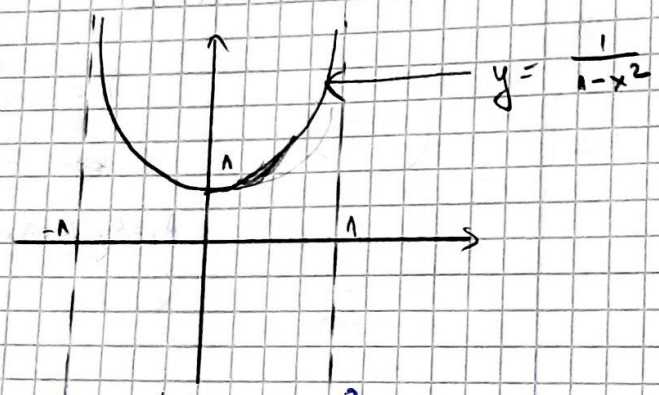
$(x,y) \in A \Rightarrow y \in A_2$.

b) $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in (0,\infty)\}$ - mult. închisă



$A_1 = (0,\infty)$; $A_2 = (0,\infty)$

c)



$A = \{(x, \frac{1}{1-x^2}) \mid x \in [0,1)\}$

$A_1 = (-1,1)$, $A_2 = [1,\infty)$

③ Fie $A, B \in \mathbb{R}^n$ și fie $d(A,B) = \inf\{\|x-y\| \mid x \in A, y \in B\}$.

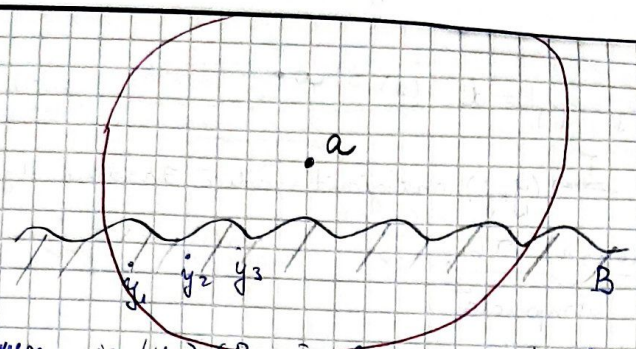
a) S.o. dem. că dacă $A = \{a\}$ și B - închisă, atunci $\exists b \in B$ a.î. $d(A,B) = \|a-b\|$

b) S.o. dem. că dacă A este compactă și B - închisă, atunci $\exists a \in A$, $\exists b \in B$ a.î. $d(A,B) = \|a-b\|$

c) Să se dea un contraexemplu care să arate că b) nu rămâne adevărată dacă A și B sunt ambele închise, dar niciuna compactă

<u>Rezolvare</u>:

a) $d(A,B) = \inf\{\|a-y\| \mid y \in B\} =: d$



$\exists$ ~~y~~ şir $(y_k) \in B$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} \|a-y_k\| = d$

$\exists r>0$ a.î. $\|a-y_k\| \le r \ \forall k \ge 1$ (orice şir conv. de nr. reale e mărg.)

$\Rightarrow \forall k \ge 1$, $\left.\begin{array}{l} y_k \in \overline{B}(a,r) \\ y_k \in B \end{array}\right\} \to y_k \in \overline{B}(a,r) \cap B$

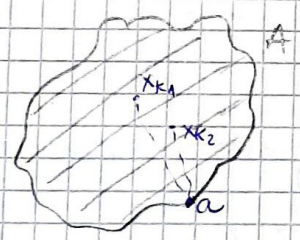
$\overline{B}(a,r) \cap B$ este mulţime $\to$ închisă, $\to$ mărginită $\Big\} \to \overline{B}(a,r) \cap B$ e compact $\Rightarrow$

[justificare: inch $\to$ intersecţie de 2 mulţ. închise
mărg $\to$ e cont. în $\overline{B}(a,r)$]

$\Rightarrow \exists (y_{k_j})$ - subşir al lui (y_k) şi $\exists\, b \in B \cap \overline{B}(a,r)$ a.î. $\lim\limits_{j\to\infty} y_{k_j} = b$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{j\to\infty} \|a-y_{k_j}\| = \|a-b\| \\ \text{dar } \lim\limits_{j\to\infty} \|a-y_{k_j}\| = d \end{array}\right\} \Rightarrow d = \|a-b\|$.

b)



Notăm $d(A,B) =: d$

$\exists (x_k)$ şir din A şi $\exists (y_k)$ şir din B a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - y_k\| = d$

A - compactă $\Rightarrow \exists (x_{k_j})$ subşir al lui (x_k) şi $\exists\, a \in A$ a.î. $\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_j} = a$ (1)

Avem $\lim_{j\to\infty} \|x_{k_j} - y_{k_j}\| = d$ (2)

Din (1) și (2) $\xrightarrow{T}$ (y_{k_j}) mărginit, adică $\exists r>0$ a.î. $\|y_{k_j}\| \le r \ \forall j \ge 1$

$\Rightarrow y_{k_j} \in \underbrace{\overline{B}(0_m, r) \cap B}_{\text{compactă}}$

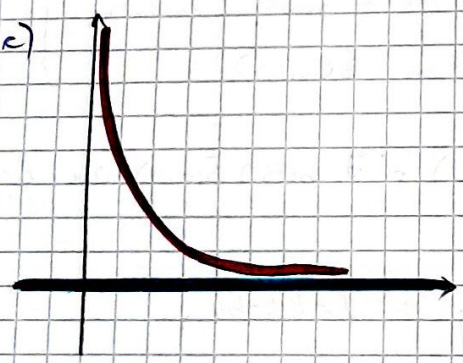
$\Rightarrow \exists (y_{k_{j_i}})$ subșir al lui (y_{k_j}) și $\exists b \in \overline{B}(0_m, r) \cap B$ a.î. $\lim_{i\to\infty} y_{k_{j_i}} = b$

Avem $\lim_{i\to\infty} x_{k_{j_i}} = a$

$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \|x_{k_{j_i}} - y_{k_{j_i}}\| = \|a-b\|$, dar $\lim_{i\to\infty} \|x_{k_{j_i}} - y_{k_{j_i}}\| = d$

$\Rightarrow d = \|a-b\|$

c)



$A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x \in (0,\infty)\}$

$B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$d(A,B) = 0$

$\nexists\, a \in A$

$\nexists\, b \in B$

$\|a-b\| = 0$

(4) Să se det. urm. limite

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cdot(\sin\frac{1}{xy}) = 0$

$-1 \le \sin\frac{1}{xy} \le 1 \ / \cdot (x^2+y^2)$

$-(x^2+y^2) \le (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} \le x^2+y^2$

$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \left(\frac{\sin(xy)}{xy}\right)\cdot \lim_{(x,y)\to(0,2)} y = 1\cdot 2 = 2$

c) $\ell = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \dfrac{\frac{x+y}{2} - \frac{2xy}{x+y}}{\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy}}$, $a>0$

$$l = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{2(x+y)}}{\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2}} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x-y)^2}{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{1}{x+y} \cdot \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(x-y)(x-y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} =$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2}{2a} = \frac{(2\sqrt{a})^2}{2a} = \frac{4a}{2a} = 2$$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2) \cdot \frac{1}{x^2+y^2} =$

$$= e^{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\ln(x^2-y^2) - \ln(x^2+y^2))}$$

Met I

Vom demonstra că limita nu există

$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\lim_{k\to\infty} (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = (0,0)$

$\lim_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$

$\lim_{k\to\infty} (0, \frac{1}{k}) = (0,0)$

$\lim_{k\to\infty} f(0, \frac{1}{k}) = \lim_{k\to\infty} (-1) = -1$

$\xRightarrow{\text{T. Heine}} \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$\frac{2}{k^3}$

Metoda II

Alegem $y = m \cdot x$ și calculăm

$$L = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

- Dacă L depinde de $m \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
- Dacă L nu depinde de $m \Rightarrow$?

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

$$0 \le \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}|x| + \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}|y| \le |x|+|y|$$

$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

2. Dacă f e ...

15.03.2022

SEMINAR 4

① Să se det. urm. limite:

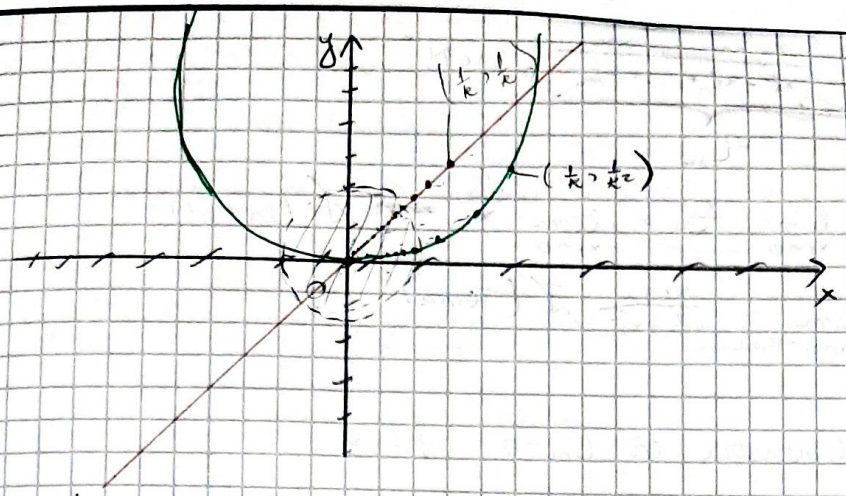
a) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{x-y}{\sin x-\sin y} = \lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{x-y}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \frac{1}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} \underbrace{\frac{\frac{x-y}{2}}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}}_{=1} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{xy} =$

Vom demonstra că limita nu există.

$f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{xy}$, $f: A \to \mathbb{R}$, unde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ și } y \neq 0\}$



$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k} = 0$$

$$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$$

$$f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^3}} = \frac{\cancel{\frac{1}{k^3}}\left(1 + \frac{1}{k^3}\right)}{\cancel{\frac{1}{k^3}}} \to 1$$

$\xrightarrow{\text{T. Heine}} \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

2 polin omogene de acelaşi grad $\Rightarrow \nexists \lim$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \overset{\frac{0}{0}}{=} 0$

exp tinde mai repede la 0 decât polin

$$0 \le \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \le$$

media pătratică

$$m_h = \boxed{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$

$$\frac{x^2+y^2}{2} \le \sqrt{\frac{x^4+y^4}{2}} \quad /^2 \iff \frac{(x^2+y^2)^2}{4} \le \frac{x^4+y^4}{2} \quad /^{-1}$$

$$\iff \frac{2}{x^4+y^4} \le \frac{2}{(x^2+y^2)^2} \quad / \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$0 \le \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4} \le \frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{2 \cdot e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} 2t^2 e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2}{e^t} = 0$$

$2t^2 \ll e^t$

Notăm $t = \frac{1}{x^2+y^2}$

d) $\underbrace{\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}}_{=L_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$n=1$: $L_1 = \lim_{x_1\to 0} \frac{x_1}{x_1^2} = \lim_{x_1\to 0} \frac{1}{x_1} \nexists$ (ls $\neq$ ld)

$n=2$: $L_2 = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} \nexists$ (Temă)

~~$n \geq 3$~~

Vom demonstra că $L_n = 0$ $\forall n \geq 3$

$$0 \leq \left| \frac{x_1 \cdots x_n}{x_1^2+\dots+x_n^2} - 0 \right| \leq \frac{|x_1| \cdots |x_n|}{x_1^2+\dots+x_n^2} \quad (1)$$

$$m h_m = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+\dots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}}$$

$$\sqrt[n]{|x_1| \cdots |x_n|} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|x_1| \cdots |x_n|} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}} \quad \Big/^n$$

$$\Rightarrow |x_1| \cdots |x_n| \leq \frac{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} \quad \Big/ \cdot \frac{1}{x_1^2+\dots+x_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1| \cdots |x_n|}{x_1^2+\dots+x_n^2} \leq \frac{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^{\frac{n}{2}}} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $0 \leq \left| \frac{x_1 \cdots x_n}{x_1^2+\dots+x_n^2} - 0 \right| \leq \frac{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^{\frac{n}{2}}}$

$\xrightarrow{(x_1,\dots,x_n)\to 0_n} 0$

R: L_1 și L_2 nu există și $L_n = 0$ $\forall n \geq 3$

2) Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție continuă pe $\mathbb{R}^n$ și fie $B \subseteq \mathbb{R}^m$ o mulțime deschisă. Să se dem. că mulțimea $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B\}$ ~~să se~~ este deschisă.

Rezolvare:

Ș. $f^{-1}(B)$ este deschisă $\Leftrightarrow$ $\forall x \in f^{-1}(B)$ $\exists r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq f^{-1}(B)$

Fie $x \in f^{-1}(B) \to f(x) \in B$
B - deschisă $\Big\} \to \exists \varepsilon > 0$ a.î. $B(f(x), \varepsilon) \subseteq B$

f - continuă în $x \Rightarrow \exists \delta > 0$ a.î. $\underbrace{\forall y \in \mathbb{R}^n, \|y - x\| < \delta}$ să avem $\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon$

$\forall y \in B(x, \delta)$ avem $\underline{f(y)} \in B(f(x), \varepsilon) \underline{\subseteq B}$

$\forall y \in B(x, \delta)$ avem $y \in f^{-1}(B) \Rightarrow$

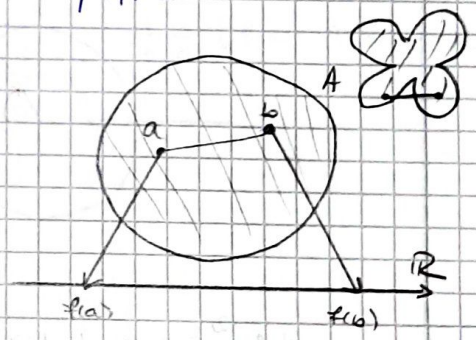
$\Rightarrow B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B)$

③ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă, compactă, nevidă și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe A. Să se dem. că f(A) este un interval compact

Rezolvare:

A - compactă
f - continuă pe A $\Big\} \to$ f - mărginită și își atinge marginile
$\exists a \in A$ a.î. $f(a) = \inf(f(A))$
$\exists b \in A$ a.î. $f(b) = \sup(f(A)) \Big\} \Rightarrow$

$\to f(A) \subseteq [f(a), f(b)]$ (1)



mulțime convexă → dacă luăm 2 pct. din mulțime, între ele este o dr. de sol

A - convexă $\Rightarrow (1-t)a + t \cdot b \in A \ \forall t \in [0,1]$

Considerăm funcția $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\underbrace{(1-t)a + tb}_{h})$

g - continuă (fiind compusa dintre 2 fct. cont. f și h) $\Big\} \Rightarrow$
$\Downarrow$
Img este un interval
$g(0) = f(a)$
$g(1) = f(b)$
$\Rightarrow [f(a), f(b)] \underset{\text{dar } Img \subseteq f(A)}{\subseteq} Img \Big\} \Rightarrow [f(a), f(b)] \subseteq f(A)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f(A) = [f(a), f(b)]$

(4) Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicație liniară având matricea $[\varphi] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine $\|\varphi\|$.

<u>Rezolvare:</u>

$\|\varphi\| = \max\{\|\varphi(x)\| \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$

$\|\varphi\| = \max\{\|\varphi(x_1, x_2)\| \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — imag. unui punct printr-o aplicație liniară

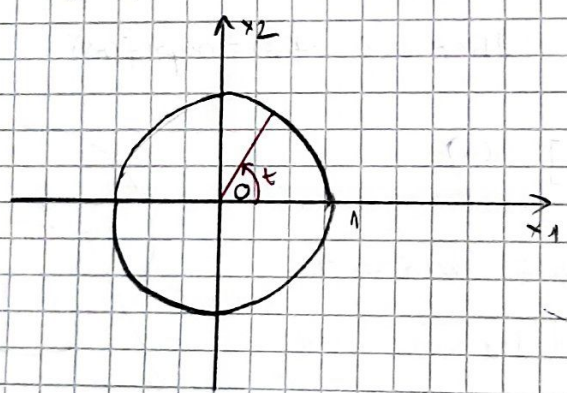
$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

$\varphi(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, -x_1 + x_2)$

$\|\varphi(x_1, x_2)\| = \sqrt{(3x_1 + x_2)^2 + (-x_1 + x_2)^2} = \sqrt{10x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2}$

$\|\varphi\| = \max\{\sqrt{10x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2} \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ sau $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$, $x_1 \in [-1, 1]$



$\cos 2t = 2\cos^2 - 1$

cercul trigonom.

$\|\varphi\|^2 = \max\{10x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$x_1^2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow \exists! t \in [0, 2\pi)$ a.î. $x_1 = \cos t$ și $x_2 = \sin t$

$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \max\limits_{t \in [0, 2\pi)} \underbrace{(10\cos^2 t + 4\sin t\cos t + 2\sin^2 t)}_{:= f(t)}$

$f(t) = 8 + 2\sin 2t + 2 + 8 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} = 6 + 2\sin 2t + 4\cos 2t =$

$= 6 + \sqrt{2^2 + 4^2}\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\sin 2t + \frac{4}{\sqrt{20}}\cos 2t\right)$

$\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0, 2\pi)$ a.î. $\frac{2}{\sqrt{20}} = \cos\alpha$, $\frac{4}{\sqrt{20}} = \sin\alpha$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(t) = 6 + \sqrt{20}\left(\cos\alpha \sin 2t + \sin\alpha \cos 2t\right) =$$

$$= 6 + \sqrt{20} \sin(\alpha + 2t)$$

$$\Rightarrow \max_{t \in [0, 2\pi)} (f(t)) = 6 + \sqrt{20} = \|\varphi\|^2 \Rightarrow \|\varphi\| = \sqrt{6 + \sqrt{20}}$$

21.03.2022

CURS 5

SEMINAR 5

23.03.2022

① Fie $f:(0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Să se dem. că $x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1\ \forall\ x,y\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot y\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-y\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1.$$

② Fie $f:\mathbb{R}^2\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=(xy+z^2)\cdot\cos\frac{xy}{z^2}$

Să se dem. că $x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2f(x,y,z)$
$\forall\ x,y,z\in\mathbb{R}^2\times(0,\infty)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=y\cos\frac{xy}{z^2}+(xy+z^2)\cdot\left(-\sin\frac{xy}{z^2}\right)\cdot\frac{y}{z^2}=$$

$$=y\cos\frac{xy}{z^2}-\frac{y(xy+z^2)}{z^2}\cdot\sin\frac{xy}{z^2}\ /\cdot x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x\cos\frac{xy}{z^2}+(xy+z^2)\cdot\left(-\sin\frac{xy}{z^2}\right)\cdot\frac{x}{z^2}=$$

$$=x\cos\frac{xy}{z^2}-\frac{x(xy+z^2)}{z^2}\sin\frac{xy}{z^2}\ /\cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z\cos\frac{xy}{z^2}+(xy+z^2)\cdot\left(-\sin\frac{xy}{z^2}\right)\cdot xy\cdot\left(\frac{-2}{z^3}\right)=$$

$$=2z\cos\frac{xy}{z^2}+\frac{2xy(xy+z^2)}{z^3}\sin\frac{xy}{z^2}\ /\cdot z$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=$$

$$=xy\cos\frac{xy}{z^2}-\cancel{\frac{xy(xy+z^2)}{z^2}\cdot\sin\frac{xy}{z^2}}$$
$$+xy\cos\frac{xy}{z^2}-\cancel{\frac{xy(xy+z^2)}{z^2}\sin\frac{xy}{z^2}}$$
$$+2z\cos\frac{xy}{z^2}+\cancel{\frac{2xyz(xy+z^2)}{z^3}\sin\frac{xy}{z^2}}$$

$= (2xy + 2z^2)\cos\frac{xy}{z^2} = 2 \cdot f(x,y,z)$

③ Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y\cdot\sqrt{x^2+y^2}$. Să se det. derivatele parțiale de ordinul I ale lui f, $\nabla f(3,4)$, $df(3,4)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\nabla f(3,4) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(3,4), \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)\right) = \left(\frac{12}{5}, \frac{41}{5}\right)$$

$df(3,4) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$$df(3,4)(h_1,h_2) = h_1\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = \frac{15}{5}h_1 + \frac{41}{5}h_2$$

④ Fie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + 2z > 0\}$ și $f: A \to \mathbb{R}^2$, ~~fa~~

$f(x,y,z) = (\underbrace{\ln(xy+2z)}_{f_1(x,y,z)}, \underbrace{\sin(xy+yz+zx)}_{f_2(x,y,z)})$. Să se determine derivatele parțiale de ord. I ale lui f și $df(2,-1,2)$

Rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)\right) = \left(\frac{y}{xy+2z}, (y+z)\cos(xy+yz+zx)\right)$$

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \dots\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z)\right) = \left(\frac{x}{xy+2z}, (x+z)\cos(xy+yz+xz)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(\frac{2}{xy+2z}, (x+y)\cos(xy+yz+xz)\right)$$

$df(2,-1,2) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$$[df(2,-1,2)] = J(f)(2,-1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(2,-1,2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(2,-1,2) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(2,-1,2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(2,-1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,-1,2) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(2,-1,2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$df(2,-1,2)(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3 \\ h_1 + 4h_2 + h_3 \end{pmatrix}$$

$$df(2,-1,2)(h_1,h_2,h_3) = \left(-\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3,\ h_1 + 4h_2 + h_3\right)$$

(5) Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (\underbrace{x^2-y}_{f_1(x,y)}, \underbrace{xy+y^2}_{f_2(x,y)}, \underbrace{e^{x^2-y^2}}_{f_3(x,y)})$. Să se det. $df(1,1) = ?$

$df(1,1) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)\right) =$$

$$= \left(2x,\ y,\ e^{x^2-y^2} \cdot 2x\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$$= \left(-1,\ x+2y,\ -e^{x^2-y^2} 2y\right)$$

$$[df(1,1)] = J(f)(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$df(1,1)(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h_1 - h_2 \\ h_1 + 3h_2 \\ 2h_1 - 2h_2 \end{pmatrix}$$

$$df(1,1)(h_1,h_2) = (2h_1 - h_2,\ h_1 + 3h_2,\ 2h_1 - 2h_2).$$

(6) Printr-un punct arbitrar al suprafeței de ec. implicită $xyz = 1$ se duce planul tangent π. Fie A, B, C punctele de intersecție ale lui π cu axele Ox, Oy, Oz. Să se dem. că vol. tetraedrului $OABC$ nu depinde de alegerea punctului pe suprafață.

$df(1,1)(h_1, h_2) = (2h_1 - h_2,\ h_1 + 3h_2,\ 2h_1 - 2h_2)$

6. Printr-un punct arbitrar al suprafeței de ec. implicită $x \cdot y \cdot z = 1$ se duce planul tangent π. Fie A, B, C punctele de intersecție ale lui π cu axele Ox, Oy, Oz. Să se dem că vol. tetraedrului $OABC$ nu depinde de alegerea punctului pe suprafață.

<u>Rezolvare</u>:

$\Sigma : x \cdot y \cdot z = 1 \iff F(x, y, z) = 0$, unde $F(x, y, z) = xyz - 1$

Fie $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$

$\vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),\ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$

↳ este un vector normal la Σ în punctul (x_0, y_0, z_0)

$\vec{N}(y_0 z_0,\ x_0 z_0,\ x_0 y_0)$

$\vec{n}(A, B, C)$

$(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$\pi : y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0)$

$\pi : y_0 z_0 x - x_0 y_0 z_0 + x_0 z_0 y - x_0 y_0 z_0 + x_0 y_0 z - x_0 y_0 z_0$

$\pi : y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z - 3 x_0 y_0 z_0$

$\pi : \frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3y_0} + \frac{z}{3z_0} = 1$

$\Rightarrow A(3x_0, 0, 0),\ B(0, 3y, 0),\ C(0, 0, 3z_0)$

$V_{OABC} = \frac{A_{OAB} \cdot h}{3} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{6} = \frac{|3x_0| \cdot |3y_0| \cdot |3z_0|}{6} = \frac{9}{2}|x_0 y_0 z_0|$

$= \frac{9}{2}$

(7) (Ex. de funcție continuă derivabilă după orice direcție).

Să se dem. că: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ este discont.

în punctul $(0,0)$ dar este derivabilă după orice direcție în acest punct.

$\frac{1}{k^3}$

R:

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3}\right) = (0,0)$$

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^3}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^6} + \frac{1}{k^6}} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^5} \cdot \frac{k^6}{2} = \lim_{t \to \infty} \frac{k}{2} = \infty \neq 0 = f(0,0)$$

$\Rightarrow f$ e discontinuă în $(0,0)$
(caract. cu șiruri a continuității)

Fie $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(0_2 + tv) - f(0_2)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(tv_1, tv_2) - f(0,0)\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 v_1^2 \, t v_2}{t^6 v_1^6 + t^2 v_2^2} = \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^4 v_1 + v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}, \text{ dacă } (v_2 \neq 0)$$

Dacă $v_2 = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(tv_1, tv_2) - f(0,0)\right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow f$ este derivabilă în $(0,0)$ după orice direcție $v=(v_1,v_2)$ și

$$f'(0_2;v) = \begin{cases} \dfrac{v_1^2}{v_2}, & \text{dacă } v_2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } v_2 = 0 \end{cases}$$

(8) Să se stud. diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$

Rezolvare:

Obs: Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime deschisă și $f: A \to \mathbb{R}$ este derivabilă parțial pe A, cu toate derivatele parțiale continue pe A, atunci f este diferențiabilă pe A.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left[(x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}\right]'_x = \frac{1}{3}(x^3-y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-y^3)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y^2}{\sqrt[3]{(x^3-y^3)^2}} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y$$

Fie $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \mid x \neq y\}$

f este derivabilă parțial pe A cu $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe A (pt ca sunt raporturi de fct continue)

A este deschisă $\Rightarrow$

Obs $\Rightarrow$ f este diferențiabilă pe A

Studiem în continuare diferențiabilitatea lui f în puncte de pe prima bisectoare, adică în puncte de forma (a,a), $a \neq 0$

I Verificăm existența derivatelor parțiale în (a,a),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x^3-a^3}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \sqrt[3]{\frac{\cancel{(x-a)}(x^2+ax+a^2)}{(x-a)^{\cancel{3}\,2}}} = \sqrt[3]{\frac{3a^2}{0_+}} = +\infty, \text{ dacă } a \neq 0$$

$\Rightarrow f$ nu e diferențiabilă în (a,a)

Rămâne de stud. diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$

I $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

II Studiem limita $l = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - h_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sqrt[3]{h_1^3-h_2^3} - h_1 + h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{=\omega(h_1,h_2)}$$

$\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$, $\omega\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right) = 0 \to 0$

$\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) \to (0,0)$, $\omega\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right) = \dots = \frac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{5}} \to \frac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{5}}$ $\Bigg\} \to \nexists\, l \to$

$\to f$ nu e diferențiabilă în $(0,0)$

R: f e diferențiabilă pe A și nu e dif. pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$

SEMINAR 6

30.03.2022

① Să se stud. diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$\to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots$ este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ este mult. deschisă $\Downarrow$

$\Rightarrow f$ e diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

$$l = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 + h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\cancel{h_1^3} - \cancel{h_2^3} - \cancel{h_1^3} - \cancel{h_1 h_2^2} + \cancel{h_2^3} + \cancel{h_1^2 h_2}}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{h_2 h_1^2 - h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}}_{=\omega(h_1,h_2)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (0,0)$$

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = 0 \quad (1)$$

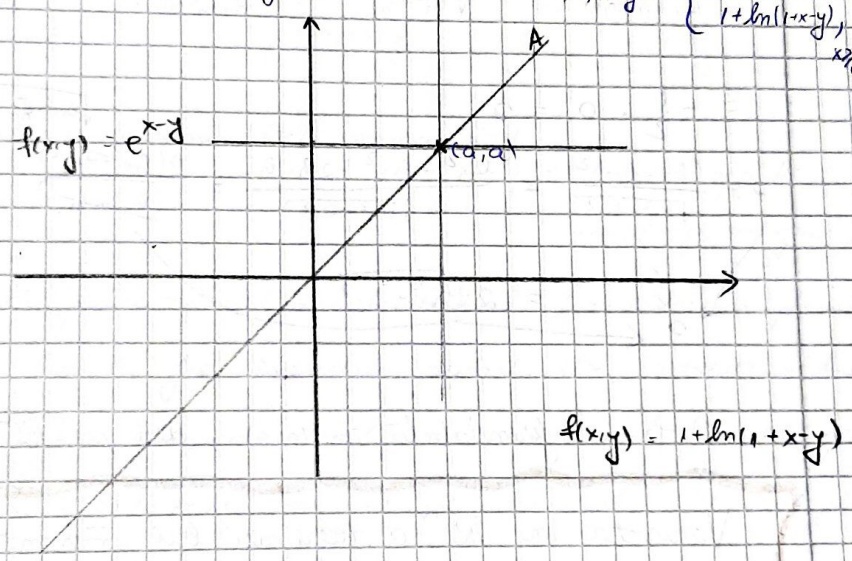
$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) = (0,0)$$

$$\lim_{k\to\infty} \omega\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{5\sqrt{5}} \quad (2)$$

$\Rightarrow l$ nu există $\Rightarrow f$ nu este diferențiabilă în $(0,0)$

② Să se stud. diferențiabilitatea funcției $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} e^{x-y}, & x \le y \\ 1+\ln(1+x-y), & x \ge y \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$



Evident, f este derivabilă parțial pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$ și $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$,

unde $A = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

A - este mulțime închisă $\to \mathbb{R}^2 \setminus A$ este deschisă $\Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus A$

Studiem diferențiabilitatea lui f pe A

Fie $(a,a) \in A$ arbitrar.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} \overset{(1),(2)}{=} 1,$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x,a) - f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{e^{x-a}-1}{x-a} = 1. \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to a}} \frac{f(x,a)-f(a,a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ x\to a}} \frac{1+\ln(1+x-a)-1}{x-a} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = \lim_{y\to a} \frac{f(a,y)-f(a,a)}{y-a} = 1.$$

$\lim_{y\to a}$ - temă

$$l = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a+h_1,a+h_2)-f(a,a)-h_1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(a,a)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a,a)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a+h_1,a+h_2)-1-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

Vom demonstra că $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{e^{h_1-h_2}-1-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0$

și că $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1+\ln(1+h_1-h_2)-1-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \overset{?}{=} 0$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\ln(1+h_1-h_2)-h_1+h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\ln(1+h_1-h_2)-(h_1-h_2)}{(h_1-h_2)^2} \cdot \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1-h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{2+2x} = -\frac{1}{2}}$$

$$0 \le \frac{(h_1-h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^2+h_2^2-2h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{2(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 2\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$\Rightarrow$ f e diferențiabilă în (a,a), deci pe $\mathbb{R}^2$

Varianta în $\mathbb{R}^n$ a teoremei lui Fermat

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $a \in n$ punct cu următoarele proprietăți

i) $a \in \operatorname{int} A$

ii) f este derivabilă parțial în a

iii) a este punct de extrem local pt. f

atunci $\nabla f(a) = 0_n$

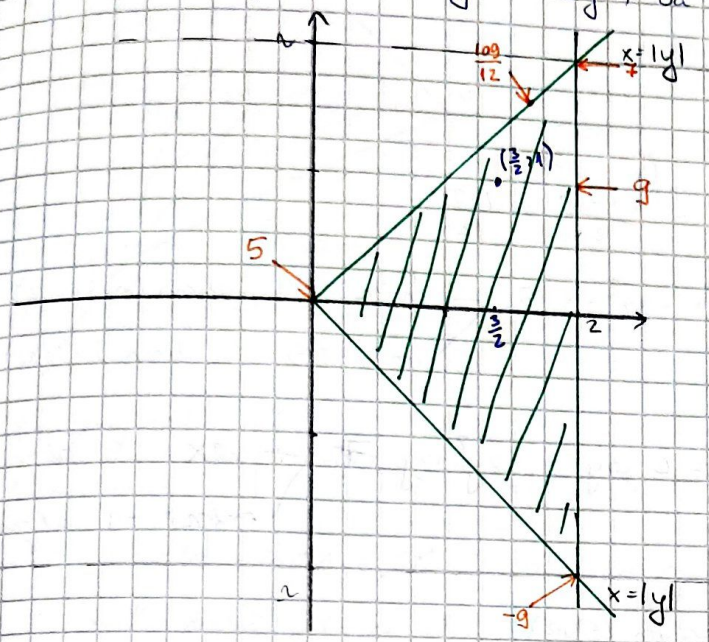
Punctele în care gradientul unei funcții se anulează se numesc puncte critice (sau puncte staționare). Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcții diferențiabile din interiorul domeniului său de def. se

TEORIE

găsesc printre punctele critice.

③ Se consideră mulțimea $A = \{(x,y) \mid |y| \le x \le 2\}$

$f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5 + 3x + 4y - x^2 - 2y^2$. Să se det. - min din $f(A)$
- max din $f(A)$
- $f(A)$



$|y| \le x \Rightarrow -x \le y \le x$

$-2 \le y \le 2$

A este mărginită și închisă, deci compactă
f este continuă
} T.W. $\Rightarrow$ f e mărginită și își atinge marginile pe A

f își poate atinge minimul sau maximul fie într-un punct de pe frontiera lui A, fie într-un punct din interiorul lui A. În cel de-al doilea caz, minimul sau maximul se atinge într-un punct critic. Rezultă de aici următorul algoritm pt. determinarea valorilor extreme ale lui a

- Se determină $m_1 = \min\limits_{(x,y) \in \text{bd}A} f(x,y)$

  $M_1 = \max\limits_{(x,y) \in \text{bd}A} f(x,y)$

- Se determină $C = \{(x,y) \in \text{int}A \mid \nabla f(x,y) = (0,0)\}$

  $m_2 = \min\limits_{(x,y) \in C} f(x,y)$

  $M_2 = \max\limits_{(x,y) \in C} f(x,y)$

Atunci, minimul/m $\min f(A) = \min\{m_1, m_2\}$

$\max f(A) = \max\{M_1, M_2\}$

$bdA = \{(x,x) \mid x \in [0,2]\} \cup \{(x,-x) \mid x \in [0,2]\} \cup \{(2,y) \mid y \in [-2,2]\}$

$f(x,x) = 5 + 7x - 3x^2 = \underbrace{-3x^2 + 7x + 5}_{=g(x)}$ — min $= 5$, atins în $(0,0)$; max $= \frac{109}{12}$, atins în $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$

$x_V = \frac{7}{6}$

$g(0) = 5$

$g(2) = 7$

$g\left(\frac{7}{6}\right) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{49+60}{12} = \frac{109}{12}$

$f(x,-x) = 5 - x - 3x^2 = -3x^2 - x + 5$ — min $= -9$, atins în $(2,-2)$; max $= 5$, atins în $(0,0)$

$x_V = \frac{-1}{6}$

$f(2,y) = 5 + 6 + 4y - 4 - 2y^2 = -2y^2 + 4y + 7$ — max $= 9$, atins în $(2,1)$; min $= -9$, atins în $(2,$

$x_V = \frac{-4}{-4} = 1$

$m_1 = -9$, atins în $(2,-2)$

$M_1 = \frac{109}{12}$, atins în $\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}\right)$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x = 0 \\ 4 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

$C = \{(\frac{3}{2}, 1)\}$

$m_2 = M_2 = f(\frac{3}{2}, 1) = 5 + \frac{9}{2} + 4 - \frac{9}{4} - 2 = 7 + \frac{9}{4} = \frac{37}{4}$

$\min f(A) = \min\{-9, \frac{37}{4}\} = -9$, atins în $(2,-2)$

$\max f(A) = \max\{\frac{109}{12}, \frac{37}{4}\} = \frac{37}{4}$, atins în $(\frac{3}{2}, 1)$

$f(A) = [-9, \frac{37}{4}]$ (seminar 4 ex 3)

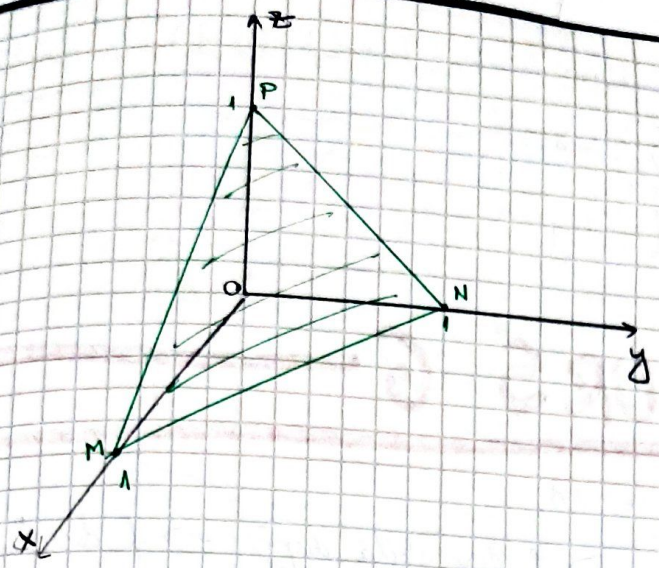
(7) Fie $x, y, z \geq 0$ a.î. $x + y + z \geq 1$. Să se dem. că $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

Fie $f(x,y,z) = xy + yz + zx - 2xyz$

$f: A \to \mathbb{R}$, unde $A = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0$ și $x+y+z = 1\}$

ex. punct interior

$\min f(A) = ?$, $\max f(A) = ?$



$x, y, z \geq 0 \Rightarrow$ suntem în primul octant

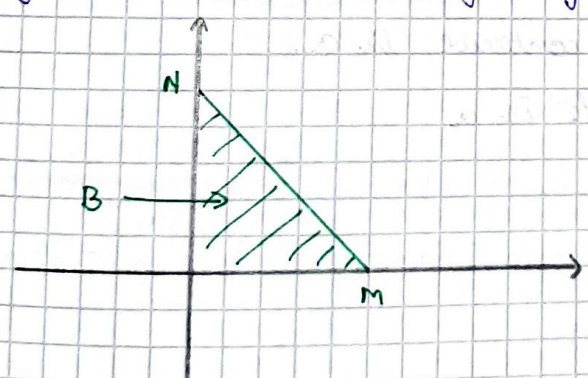
f compactă
f-continuă $\Big\} \Rightarrow f$ este mărg. și își atinge marginile pe A

Din păcate, $\operatorname{int} A = \emptyset \Rightarrow$ nu putem aplica metoda din probl. anterioară pt a determina $\min f(A)$ și $\max f(A)$

$z = 1 - x - y$

$$f(x, y, 1-x-y) = xy + y(1-x-y) + x(1-x-y) - 2xy(1-x-y) =$$
$$= xy + y - xy - y^2 + x - x^2 - xy - 2xy + 2x^2y + 2xy^2$$
$$= 2x^2y + 2xy^2 - x^2 - y^2 - 3xy + x + y = g(x,y)$$

$g: B \to \mathbb{R}$, unde $B = \{(x,y) \mid x, y \geq 0 \text{ și } x+y \leq 1\}$



$\min f(A) = \min g(B)$

$\max f(A) = \max g(B)$

- $\operatorname{bd} B = \{(x, 0) \mid x \in [0,1]\} \cup \{(0, x) \mid x \in [0,1]\} \cup \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\}$

$g(x,0) = -x^2 + x = g(0,x) = g(x, 1-x)$

$m_1 = \min\limits_{(x,y) \in \operatorname{bd} B} g(x,y) = 0$ atins în $(0,0), (1,0), (0,1)$

$M_1 = \max_{(x,y)\in B\times B} g(x,y) = \frac{1}{4}$ atins in $\left(\frac{1}{2},0\right), \left(0,\frac{1}{2}\right)$ și $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

- $\nabla g(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

unde t_0 și $F'(t_0) = df((1-t_0)a + t_0 b)(b-a)$

SEMINAR 7

6.03.2022

① Fie $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

Fie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x^2 - y + 2yz^2, z^2 \cdot e^{xy})$. Să se det. deriv. parțiale de ordinul I ale lui F în funcție de derivatele parțiale de ord. I ale lui f.

$F = f \circ g$, unde $g(x,y,z) = (\underbrace{x^2 - y + 2yz^2}_{=u(x,y,z)}, \underbrace{z^2 \cdot e^{xy}}_{=v(x,y,z)})$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u} g(x,y,z)} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z)}_{=2x} + \frac{\partial f}{\partial v} g(x,y,z) \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)}_{=yz^2e^{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(x^2-y+2yz^2, z^2 \cdot e^{xy}) + yz^2 \cdot e^{xy} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(x^2-y+2yz^2, z^2e^{xy})$$

② Fie $f = f(u,v,w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ - o funcție diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3$ și fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = f(\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y})$

a) S.o.d. că dacă f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$, atunci F este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

b) Știind că $J(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ să se det. $dF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Def: O funcție s.n. $\boxed{\text{de clasă } C^1}$ pe o mulțime deschisă dacă ea este derivabilă parțial, cu toate derivatele parțiale continue

Rezolvare:

$F = f \circ g$, unde $g(x,y) = (\underbrace{\cos x + \sin y}_{u(x,y)}, \underbrace{\sin x + \cos y}_{v(x,y)}, \underbrace{e^{x-y}}_{w(x,y)})$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y)) \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}^{-\sin x} + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y)) \cdot \overbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)}^{-\cos x} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial w}(g(x,y)) \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}(x,y)}_{= e^{x-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y})(-\sin x) -$$

$$- \cos x \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y}) +$$

$$+ e^{x-y} \cdot \frac{\partial f}{\partial w}(\cos x + \sin y, \sin x + \cos y, e^{x-y})$$

f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}$ sunt continue pe $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$ (compunere de fct. cont.)

Analog $\frac{\partial F}{\partial y}$ este continuă pe $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow F$ este de clasă C_1 pe $\mathbb{R}^2$

b) $dF(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$[dF(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})] = J(f)(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = J(f)(\underbrace{g(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})}_{(1,1,1)}) \cdot J(g)(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= J(f)(1,1,1) \cdot J(g)(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J(g)(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ \cos x & -\sin y \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix} \Rightarrow J(g)(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

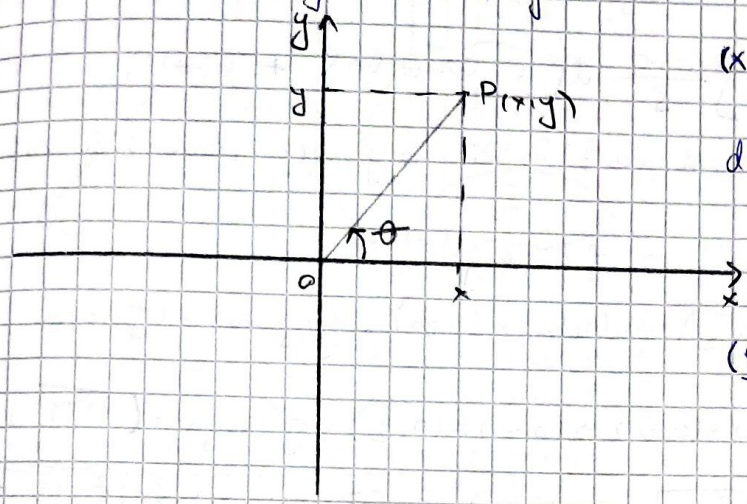
$$\Rightarrow [dF(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$dF(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3h_1 - 7h_2 \\ h_1 - 2h_2 \end{pmatrix}$$

$df\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)(h_1, h_2) = (3h_1 - 7h_2, h_1 - 2h_2)$

③ Folosind eventual coordonatele polare să se determine toate funcțiile diferențiabile $f: (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ care satisfac

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall (x,y) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \qquad (1)$$



(x,y) = coordonatele carteziene ale lui P

$d(O,P) = \rho$

(ρ, θ) = coordonatele polare ale lui P

$\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$

$\Rightarrow \boxed{x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta}$ COORD. POLARE

Rezolvare:

Considerăm funcția $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$F: (0,\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$F = f\circ g$, unde $g(\rho,\theta) = (\underbrace{\rho\cos\theta}_{=x(\rho,\theta)}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{=y(\rho,\theta)})$, ~~$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$~~

$g: (0,\infty)\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \to (0,\infty)\times(0,\infty)$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(\rho,\theta))\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta)}_{=\cos\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(\rho,\theta))\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta)}_{=\sin\theta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \,/\cdot\rho$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \rho\cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + \rho\sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\text{Din (1)} \Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\cos\theta}{\rho} \quad \forall (\rho, \theta) \in (0, \infty) \times (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow F(\rho, \theta) = \int \frac{\cos\theta}{\rho} \, d\rho = \cos\theta \ln\rho + h(\theta),$$

unde $h : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ - o funcție derivabilă arbitrară

$$F = f \circ g \;/ \circ g^{-1} \Rightarrow f = F \circ g^{-1}$$

$$g : (0, \infty) \times (0, \tfrac{\pi}{2}) \to (0, \infty) \times (0, \infty), \quad g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$g^{-1} : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty) \times (0, \tfrac{\pi}{2}), \quad g^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\left(\tfrac{y}{x}\right)\right)$$

$$f(x, y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}\right) = \cos\left(\operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}\right) \cdot \ln\sqrt{x^2+y^2} + h\left(\operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{cum desen}} \cdot \ln(x^2+y^2) + h\left(\operatorname{arctg}\tfrac{y}{x}\right)$$

EXTREME CONDIȚIONATE

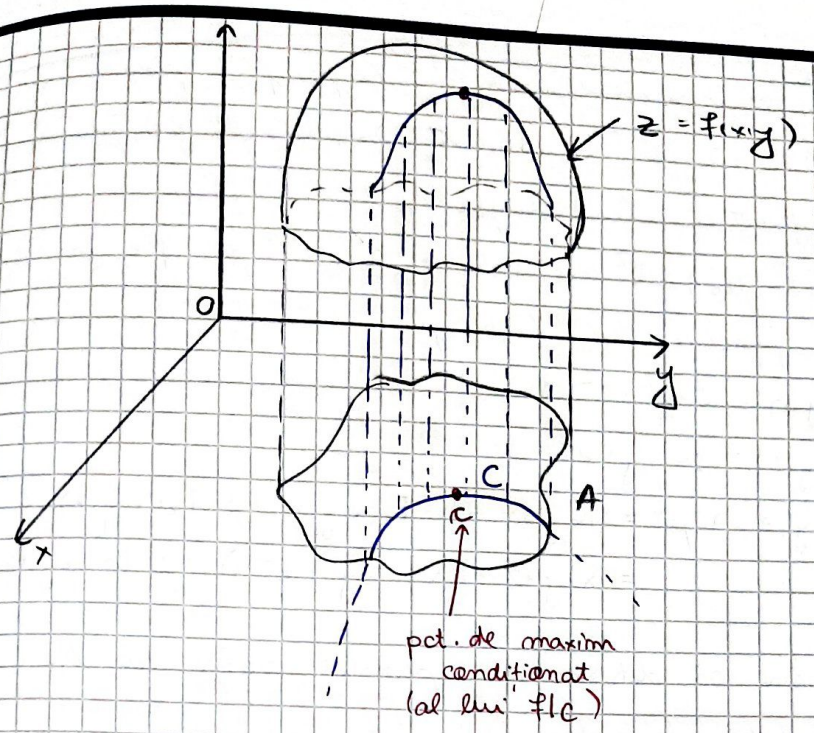
Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $f : A \to \mathbb{R}$, $F = (F_1, \dots, F_m) : A \to \mathbb{R}^m$

$$C = \{x \in A \mid F(x) = 0_m\} = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in A \;\middle|\; \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}\right\}$$

$c \in C$ s.n. PUNCT DE EXTREM al lui f relativ la C sau PUNCT DE EXTREM LOCAL CONDIȚIONAT sau pct. de extrem local CU LEGĂTURI, dacă c este pct. de extrem local pt. restricția funcției f la mulțimea C. $(f|_C)$

$n = 2$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $m = 1$ $F : A \to \mathbb{R}$, $C = \{(x, y) \in A \mid \underbrace{F(x, y) = 0}_{\text{ec. implicită a unei curbe}}\}$

$f : A \to \mathbb{R}$



REGULA MULTIPLICATORILOR LUI LAGRANGE

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, $f: A \to \mathbb{R}$, $F = (F_1, \dots, F_m): A \to \mathbb{R}^m$ funcții de clasă C^1 pe A, și $c \in C$ pct. de extrem local al lui f relativ la C. Dacă $\text{rang } J(F)(c) = m$, atunci

$\Rightarrow \exists\, \lambda_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m}) \in \mathbb{R}^m$ a.î. (c, λ_0) să fie punct critic pt. funcția lui Lagrange.

multiplicatori

fct. lui Lagrange

$L: A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \dots + \lambda_m F_m(x)$ $\forall x \in A$

$\forall \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$

(4) Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ 2x+y+2z = 1\}$

Să se det. $\min f(C)$ și $\max f(C)$

Rezolvare:

C mărginită și închisă, deci compactă
f e continuă
$\Rightarrow f$ este mărginită și își atinge marginile pe C

$\Rightarrow \exists (a,b,c) \in C$ a.î. $f(a,b,c) = \min f(C)$

$\exists (a',b',c') \in C$ a.î. $f(a',b',c') = \max f(C)$

Regula multiplicatorilor lui Lagrange implică:

$\Rightarrow \exists\, (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $(a, b, c; \lambda_0, \mu_0)$ să fie punct critic al funcției lui Lagrange

$\exists\, (\lambda_0', \mu_0') \in \mathbb{R}^2$ a.î. $(a', b', c', \lambda_0', \mu_0')$ să fie punct critic al funcției lui Lagrange

$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$F_2(x,y,z) = 2x - y + 2z - 1$

$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda \cdot F_1(x,y,z) + \mu \cdot F_2(x,y,z) =$

$= x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(2x + y + 2z - 1)$

Rămâne să determinăm punctele critice ale lui L. Ele sunt soluții ale sistemului

$L'_x(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 + 2\lambda x + 2\mu = 0 \quad (1)$

$L'_y(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 + 2\lambda y + \mu = 0 \quad (2)$

$L'_z(x,y,z,\lambda,\mu) = 1 + 2\lambda z + 2\mu = 0 \quad (3)$

$L'_\lambda(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (4)$

$L'_\mu(x,y,z,\lambda,\mu) = 2x + y + 2z - 1 = 0 \quad (5)$

$(1) - (3) \Rightarrow 2\lambda(x - z) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ sau $x = z$

Dacă $\lambda = 0$: $(1) \Rightarrow 2\mu = -1 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}$
$(2) \qquad \mu = -1$ } - contradicție

$\Rightarrow x = z$

Din (4), (5): $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 1 - 8x + 16x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 18x^2 - 8x = 0 \\ 4x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 4x \end{cases}$

$\Rightarrow 2x(9x - 4) = 0$

$\boxed{x = 0} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 1$

(1) devine $1 + 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = -\frac{1}{2}$

(2) devine $1 + 2\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ avem punctul critic $(0, 1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$

$\boxed{x = \frac{4}{9}} \Rightarrow z = \frac{4}{9} \Rightarrow y = -\frac{7}{9}$

(1) devine $1 + \frac{8}{9}\lambda + 2\mu = 0$ $\quad \lambda = \ldots$

$\Rightarrow$

(2) — " — $1 - \frac{14}{9}\lambda + \mu = 0$ $\quad \mu = \ldots$

$\Rightarrow$ avem punctul critic $(\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \ldots, \ldots)$

$f(0,1,0) = 1 = \max f(C)$

$f(\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}) = \frac{1}{9} = \min f(C)$

8.03.2022

$9a^2 + 9a^2 f'(3a) = 0 \to f'(3a) = -1$

Tangenta la foliu în $(3a, 3a)$: $y - 3a = -(x - 3a)$

$x + y - 6a = 0$

SEMINAR 8

13.04.2022

DIN SEMINAR 7...

(5) Fie funcția $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2\sqrt{2}y + 2z$ și $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Să se det $\min f(B)$ și $\max f(B)$

Rezolvare:

B - mărginită și închisă, deci compactă
f continuă $\Big\} \to f$ este mărginită și își atinge marginile pe B

$\to \exists (a,b,c) \in B$ a.î. $f(a,b,c) = \min(f(B))$

$\exists (a',b',c') \in B$ a.î. $f(a',b',c') = \max f(B)$

• Dacă $(a,b,c) \in \operatorname{int} B \xrightarrow{\text{T. Fermat}} \nabla f(a,b,c) = (0,0,0)$

$$\nabla f(a,b,c) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 & \to x = 1 \\ 2y + 2\sqrt{2} = 0 & \to y = -\sqrt{2} \\ 2z + 2 = 0 & \to z = -1 \end{cases}$$

$\to f$ are un singur punct critic $(1, -\sqrt{2}, -1) \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b,c) \in \operatorname{bd} B$

Analog, $(a',b',c') \in \operatorname{bd} B$

$\operatorname{bd} B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} \Rightarrow (a,b,c), (a',b',c')$ sunt puncte de extrem condiționat

Aplicând regulile multiplicatorilor lui Lagrange $\to$

$\to \exists \lambda_0, \lambda_0' \in \mathbb{R}$ a.î. $(a,b,c,\lambda_0), (a',b',c',\lambda_0')$ să fie puncte critice ale funcției lui Lagrange

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda F(x,y,z) =$

$= x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2\sqrt{2}y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$L'_x(x,y,z,\lambda) = 2x - 2 + 2\lambda x = 0 \to x(1+\lambda) = 1$

$L'_y(x,y,z,\lambda) = 2y + 2\sqrt{2} + 2\lambda y = 0 \to y(1+\lambda) = -\sqrt{2}$

$L'_z(x,y,z,\lambda) = 2z + 2 + 2\lambda z = 0 \to z(1+\lambda) = -1$

$L'_\lambda(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{1}{(1+\lambda^2)} = 1 \to (1+\lambda)^2 = 4 \to 1+\lambda = \pm 2$$

I $1+\lambda = 2 \to \lambda = 1 \to x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}, z = -\frac{1}{2}$

$\to \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

II $1+\lambda = -2 \to \lambda = -3 \to x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{1}{2}$

$\to \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -3\right)$

$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 1-1-2-1 = -3 = \min f(B)$

$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1+1+2+1 = 5 = \max f(B)$

SEMINAR 8

① Să se studieze dacă $\exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ vecinătate deschisă a punctului $(1,1)$ și $f: U \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe U a.î.

$f(1,1) = 1$ și $e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2) - 2x_1+x_2-f(x_1,x_2) = 0$

$\forall (x_1,x_2) \in U$

În caz afirmativ, să se determine $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$

Rezolvare:

În termeni de funcții implicite, cerința problemei poate fi reformulată astfel: este adevărat că ecuația ~~$F(x_1,x_2,y)=$~~

$F(x_1,x_2,y) = e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+y-2) - 2x_1 - x_2 + y = 0$

definește implicit pe y ca funcție de x_1 și x_2 în jurul punctului $(a,b) = (\underbrace{1,1}_{a}, \underbrace{1}_{b})$?

Verificăm ipotezele teoremei funcției implicite

$$\begin{cases} F(a,b) = F(1,1,1) \overset{?}{=} 0 \ \checkmark \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) \neq 0 \ \checkmark \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,x_2,y) = \frac{e^{x_1+x_2}}{x_1+x_2+y-2} + 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = \frac{e^2}{1+1-1} + 1 = e^2+1 \neq 0$$

Aplicând teorema funcției implicite $\Rightarrow \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ vecinătate deschisă a lui $(1,1)$ și $\exists f: U \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe U a.î.

$f(1,1)=1$ și $e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2) - 2x_1 + x_2 + f(x_1,x_2) = 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in U$

$$\Rightarrow e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2) + \frac{e^{x_1+x_2} \cdot \left(1+\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right)}{x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2} - 2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in U$$

Punem $(x_1,x_2)=(1,1)$ și ținem seamă că $f(1,1)=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^2 \cdot \underbrace{\ln(1+1+1-2)}_{=0} + e^2 \cdot \frac{1+\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)}{1+1+1-2} - 2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow e^2 + e^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) - 2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)\left(e^2+1\right) = 2-e^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = \frac{2-e^2}{e^2+1}$$

Temă

$$e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2) - 2x_1 + x_2 + f(x_1,x_2) = 0 \quad \Big| \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \forall (x_1,x_2) \in U$$

$$\Rightarrow e^{x_1+x_2} \cdot \ln(x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2) + 1 + \frac{e^{x_1+x_2} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)}{x_1+x_2+f(x_1,x_2)-2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0$$

Punem $(x_1,x_2)=(1,1)$ și ținem seamă că $f(1,1)=1$

$$\Rightarrow e^2 \cdot \underbrace{\ln(1+1+1-2)}_{=0} + 1 + \frac{e^2\left(1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)\right)}{1+1+1-2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + e^2 + e^2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = \frac{-1-e^2}{1+e^2} = -1$$

② Să se dem. că sistemul $\begin{cases} x^2 + uy + e^v = 0 \\ 2x + u^2 - uv = 5 \end{cases}$ (*) definește implicit

într-o vecinătate a punctului $(2,5)$ o funcție

$f = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ de clasă C^1 și cu proprietatea $f(2,5) = (-1,0)$.

Să se determine (diferențiala lui f în punctul) $df(2,5)$

Soluție:

Problema cere să dem. că sistemul (*) definește implicit variabilele u și v în funcție de x și y în jurul punctului

$(a,b) = (\underbrace{2,5}_{a}, \underbrace{-1,0}_{b})$

$$F(x,y,u,v) = (\underbrace{x^2 + uy + e^v}_{=F_1(x,y,u,v)}, \underbrace{2x + u^2 - uv - 5}_{=F_2(x,y,u,v)})$$

Verificăm ipotezele teoremei funcției implicite

$F(a,b) = F(2,5,-1,0) \overset{?}{=} (0,0)$ ✓

$\det J_{(u,v)}(F)(2,5,-1,0) \neq 0$

în funcție de variabilele care vor deveni funcții

$$J_{(u,v)}(F)(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x,y,u,v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x,y,u,v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x,y,u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y & e^v \\ 2u - v & -u \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{(u,v)}(F)(2,5,-1,0) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

Aplicând teorema funcției implicite $\Rightarrow \exists\, U \subseteq \mathbb{R}^2$ vecinătate deschisă a lui $(2,5)$ și $\exists\, f = (f_1(x,y), f_2(x,y)) : U \to \mathbb{R}^2$ de clasă C^1 pe U a.î.

$f(2,5) = (-1,0)$ și $F(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y)) = (0,0)\ \forall (x,y) \in U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + f_1(x,y)\cdot y + e^{f_2(x,y)} = 0 & \Big|\frac{\partial}{\partial x} \\ 2x + f_1^2(x,y) - f_1(x,y)\cdot f_2(x,y) - 5 = 0 & \Big|\frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \forall (x,y) \in U$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\cdot y + e^{f_2(x,y)} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \\ 2 + 2 f_1(x,y)\cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\cdot f_2(x,y) - f_1(x,y)\cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \forall (x,y) \in U$$

Punem $(x,y)=(2,5)$ și ținem seama că $f_1(2,5)=-1$ și $f_2(2,5)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4+5\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,5)+\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,5)=0 \\ 2-2\cdot\underbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(2,5)}_{s}+\underbrace{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(2,5)}_{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5s+t=-4 \\ -2s+t=-2 \quad (-) \end{cases}$$

$$7s=-2 \Rightarrow s=-\frac{2}{7}$$

$$t=-2+2s=-2-\frac{4}{7}=-\frac{18}{7}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(2,5)=-\frac{2}{7} \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(2,5)=-\frac{18}{7}$$

$$\begin{cases} x^2+f_1(x,y)\cdot y+e^{f_2(x,y)}=0 & \Big|\ \dfrac{\partial}{\partial y} \quad \forall (x,y)\in U \\ 2x+f_1^2(x,y)-f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)-5=0 & \Big|\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\cdot y+f_1(x,y)+e^{f_2(x,y)}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=0 \\ 2f_1(x,y)\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)-\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\cdot f_2(x,y)-\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\cdot f_1(x,y)=0 \end{cases}$$

Punem $(x,y)=(2,5)$ și ținem seama că $f_1(2,5)=-1$, și $f_2(2,5)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1+5\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(2,5)+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(2,5)=0 \\ -2\underbrace{\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(2,5)}_{s}+\underbrace{\dfrac{\partial f_2}{\partial y}(2,5)}_{t}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5s+t=1 \\ -2s+t=0 \quad (-) \end{cases}$$

$$7s=1 \Rightarrow s=\frac{1}{7}$$

$$t=2s=\frac{2}{7}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(2,5)=\frac{1}{7} \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(2,5)=\frac{2}{7}$$

$$[df(2,5)]=J(f)(2,5)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$df(2,5)(h_1,h_2)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{18}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{7}h_1+\frac{1}{7}h_2 \\ -\frac{18}{7}h_1+\frac{2}{7}h_2 \end{pmatrix}$$

③ Fie $a>0$ și $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2a(x+\sqrt{x^2+y^2})=0\}$. Punctele lui C se găsesc pe o curbă plană numită cardioidă. Să se determine toate punctele cardioidei în jurul cărora aceasta poate fi parametrizată folosindu-l pe x ca parametru. Să se scrie ecuația tangentei la cardioidă în punctele $(0,2a)$, $(0,-2a)$ și $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)$

Soluție:

Fie $(x_0,y_0)\in C$. Cardioida se poate parametriza folosindu-l pe x ca parametru în jurul punctului (x_0,y_0) dacă y se poate exprima ca funcție de x în jurul punctului (x_0,y_0)

$$\boxed{F(x,y)=x^2+y^2-2a(x+\sqrt{x^2+y^2})}$$

$(x_0,y_0)\in C \Leftrightarrow F(x_0,y_0)=0$ O

O condiție suficientă ca y să poată fi exprimat ca funcție de x în jurul lui (x_0,y_0) este

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$

Rezolvând sistemul $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$ vom determina punctele de pe cardioidă în jurul cărora nu se poate explicita y în funcție de x.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2a(x+\sqrt{x^2+y^2})=0 \\ 2y-\cancel{2}a\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y=\frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow y=0 \text{ sau } \sqrt{x^2+y^2}=a$$

CI $y=0 \Rightarrow x^2-2a(x+|x|)=0$

Dacă $x<0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ nu convine

Dacă $x\geq 0 \Rightarrow x^2-4ax=0 \Rightarrow x=0$ sau $x=4a$

CII $\sqrt{x^2+y^2}=a \Rightarrow a^2-2a(x+a)=0 \Rightarrow a^2-2ax-2a^2=0$

$\Rightarrow -2ax=a^2 \Rightarrow x=-\frac{a}{2}$

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+y^2}=a \,\Big|^2 \Rightarrow \frac{a^2}{4}+y^2=a^2 \Rightarrow y^2=\frac{3a^2}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Punctele de pe cardioidă în jurul cărora nu se poate aplica y ca funcție de x sunt $(0,0)$, $(4a,0)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Tangenta la cardioidă în $(0,2a)$

Metoda I

- folosind teorema funcției implicite

Aplicând teorema funcției implicite $\Rightarrow \exists U \subseteq \mathbb{R}$ vecinătate deschisă a lui 0 (zero) și $\exists f: U \to \mathbb{R}$ funcție de clasă C^1 pe U a.î.

$f(0) = 2a$ și $F(x, f(x)) \neq 0 \ \forall x \in U$

$$\Rightarrow x^2 + f^2(x) - 2a\left(x + \sqrt{x^2 + f^2(x)}\right) = 0 \ \Big| \ \forall x \in U \ \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow 2x + 2f(x) f'(x) - 2a - 2a \frac{1}{2\sqrt{x^2+f^2(x)}}\left(2x + 2f(x) \cdot f'(x)\right) = 0$$

Punem $x = 0$ și ținem seama că $f(0) = 2a$

$$\Rightarrow 4a \cdot f'(0) - 2a - 2a \cdot \frac{\cancel{2a} \cdot f'(0)}{\cancel{2a}} = 0$$

$$\Rightarrow 4a \cdot f'(0) - 2a - 2a f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow 2a f'(0) - 2a = 0 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$t: y - 2a = x \Leftrightarrow x - y + 2a = 0$$

Metoda II

- folosind semnificația geometrică a derivatelor parțiale

Știm că $\vec{N}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(0,2a), \frac{\partial F}{\partial y}(0,2a)\right)$ este un vector normal la cardioidă în punctul $(0,2a)$, adică $\vec{N} \perp t$ în punctul $(0,2a)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 2x - 2a - 2a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2y - 2a \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{N}(-2a, 2a) \text{ este perpendic. pe } t = \text{tangenta la cardioidă în punctul } (0,2a)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

$$t: -2a(x-0) + 2a(y - 2a) = 0 \ \Big/ \cdot \frac{-1}{2a}$$

$$t: x - y + 2a = 0$$

(4) Să se dem. că $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x - e^y, x+y)$ este difeomorfism C^1.

Rezolvare:

? f difeomorfism de clasă $C^1 \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijectivă} \\ f \text{ de clasă } C^1 \text{ pe } \mathbb{R}^2 \\ f^{-1} \text{ de clasă } C^1 \text{ pe } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

f bijectivă $\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \exists! (x,y) \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x,y) = (u,v)$

Fie $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y = u \\ x + y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^{v-x} = u \\ y = v - x \end{cases} \quad (*)$$

considerăm funcția $g(x) = e^x - e^{v-x}$

$g'(x) = e^x + e^{v-x} > 0 \Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - e^{v-x}) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (e^x - e^{v-x}) = \infty$

g - continuă pe $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. $g(x) = u$ are soluția unică x_0

$\Rightarrow$ sistemul $(*)$ are soluția unică $(x_0, v - x_0)$

$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2+b^2)$

SEMINAR 9

20.04.2022

① Să se det. punctele critice ale urm. funcții și să se precizeze natura lor:

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$

Punctele critice ale lui f sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y + 2z = 0 \to y = 2x \\ -x - 1 + 3y^2 = 0 \to \cancel{x = 3y^2} \; x \\ 2x + 2z = 0 \to x + z = 0 \to z = -x \end{cases}$$

$3y^2 - \cancel{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - \cancel{x} - 1 = 0$

$\Delta = \cancel{A} + 48 = 49$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{24} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$

dim sp. $(\mathbb{R}^3)$

$x = \frac{1}{3} \to y = \frac{2}{3}, \; z = -\frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{4} \to y = -\frac{1}{2}, \; z = \frac{1}{4}$

Deci punctele critice ale lui f sunt $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ și $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Formăm matricea Hessiană a lui f

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 2$

$$H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6y & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

$$\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32 - 0 - 0 - 16 - 0 - 2 = 14$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, -\frac{1}{3}\right) \text{ este punct de minim local}$$

$$H(f)\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 - 0 - 0 + 12 - 0 - 2 = -14$$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ este punct șa

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

b) Punctele critice ale lui f sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 6x^2 - y^2 + 4xy = 0 \\ -3 - 2xy + 2x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \quad (S)$$

$$(+)$$

$$-4x^2 + 2y^2 + 2xy = 0 \quad / : y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{y}{x} - 4 = 0}$$

$$\Rightarrow -4\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 2 = 0$$

$\Delta = 4 + 4\cdot 4\cdot 2 = 4+32 = 36$

$\frac{x}{y} = \frac{-2+6}{-8} = -\frac{1}{2}$ sau $\frac{-2-6}{-8} = 1$

• $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -2x$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3 - 6x^2 - 4x^2 - 8x^2 = 0 \\ -3 + 4x^2 + 2x^2 + 12x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2 = 3 \\ 18x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{6}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{6}}$

• $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$

$\overset{(5)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3 - 6x^2 - x^2 + 4x^2 = 0 \\ -3 - \cancel{2x^2} + \cancel{2x^2} + 3x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3 \\ 3x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -1$

• Punctele critice ale lui f sunt $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), (1,1), (-1,-1)$

Formăm matricea Hesiană a lui f

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -12x + 4y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x + 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2y + 4x$

$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -12x + 4y & -2y + 4x \\ -2x + 4x & -2x + 6y \end{pmatrix}$

$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = -8, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -36 \Rightarrow (1,1)$ este punct șa

$H(f)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{20}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{14}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = -\frac{20}{\sqrt{6}}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{20}{\sqrt{6}} & \frac{8}{\sqrt{6}} \\ \frac{8}{\sqrt{6}} & -\frac{14}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{280}{6} - \frac{64}{6} = 36$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ punct de maxim local

- temă celelalte z

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$ punct de maxim local

c) ~~$f(x,y)$~~

Formăm sist ec:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 2xz = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z = xy \end{cases}$$

Obs că dacă una dintre variabilele x, y, z este 0, atunci și celelalte sunt 0.

Avem punctul critic $(0,0,0)$

Res în continuare că $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x$$

- $y = x \Rightarrow z = 1$, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ avem pct. critice $(1,1,1)$ și $(-1,-1,1)$
- $y = -x \Rightarrow z = -1$, $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$ avem pct critice $(-1,1,-1)$ și $(1,-1,-1)$

Formăm matricea Hessiană a lui f

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = -2z$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = -2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -2y$$

$$\Rightarrow H(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & 2x & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta_3 = 8$$

$\Rightarrow$ $(0,0,0)$ pct. de minim local

$$H(f)(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{8} + \cancel{8} - \cancel{8} - \cancel{8} + 8 - 8 = 0$$

$\Rightarrow$ crit. lui Sylvester nu poate fi aplicat

Formăm diferențiala ~~lui~~ a doua a lui f:

$$df^2(1,1,1)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1)\cdot h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1)\cdot h_2^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1)\cdot h_3^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1,1)\cdot h_1 h_2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,1,1)\cdot h_2 h_3$$

$$+ 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1)\, h_1 h_3 - 4 h_1 h_3 - 4 h_2 h_3$$

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x = 0 \to 4x(x^2-1) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 = 0 \to y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ sau $x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Punctele critice ale lui f sunt $(0,0), (1,0), (-1,0)$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -4$, $\Delta_2 = 0$ $\Rightarrow$ Criteriul lui Sylvester nu poate fi aplicat

$$d^2 f(0,0)(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \cdot h_1 h_2 = -4h_1^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $d^2 f(0,0)$ este o formă pătratică negativ semidefinită care, însă nu este negativ definită

$\Rightarrow$ natura punctului critic $(0,0)$ nu poate fi stabilită nici cu ajutorul diferențialei a doua

Observăm că $f(0,y) = y^4 > 0 = f(0,0)$ $\forall y \in \mathbb{R}^*$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ nu poate fi punct de maxim local $(*)$

$f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) < 0 = f(0,0)$ $\forall x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ nu poate fi punct de minim local $(**)$

Din $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ este punct șa

$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 8$, $\Delta_2 = 0 \Rightarrow$ crit. lui Sylvester nu poate fi aplicat

$d^2 f(1,0)(h_1, h_2) = 8h_1^2$ - formă pătratică pozitiv semidefinită, care însă nu e pozitiv definită

$\Rightarrow$ natura punctului critic $(1,0)$ nu poate fi stabilită nici cu diferențiala a doua

Observăm că $f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1 \geq -1 = f(1,0)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (1,0)$ este punct de minim global pt. f

Analog $(-1,0)$ e punct de minim global

② Să se calculeze

a) $\int_1^6 \int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$

b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy$

c) $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \sin^2 y}{1+\cos^2 x}\, dx\, dy$

d) $\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$

e) $\int_0^1 \int_0^1 \min\{x,y\}\, dx\, dy$

f) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, unde $a > 1$

a) $J = \int_1^6 \int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy$

$\int_1^6 \left(\int_2^3 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx = \int_1^6 \left(\int_2^3 (x+y)^{-2}\, dy \right) dx =$

$= \int_1^6 \left(\frac{-1}{x+y} \Big|_2^3 \right) dx = \int_1^6 \left(\frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right) dx = -\ln(x+3)\Big|_1^6 + \ln(x+2)\Big|_1^6 =$

$= -\ln 9 + \ln 4 + \ln 8 - \ln 3 = \ln \frac{32}{27}$

b) $J = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx \right) dy$

$t = 1+x^2+y^2 \rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2} dt$

$$J = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{t=1+y^2}^{t=2+y^2} \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} dt \right) dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \Big|_{t=1+y^2}^{t=2+y^2} \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} \Big|_{1+y^2}^{2+y^2} \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right) dy =$$

$$= -\ln\left(y+\sqrt{2+y^2}\right)\Big|_0^1 + \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\ln(1+\sqrt{3}) + \ln\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1$$

$$= \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

c) $J = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \sin^2 y}{1+\cos^2 x} dx\,dy = \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=0}^{y=\pi/2} \frac{x \sin x \sin^2 y}{1+\cos^2 x} dy \right) dx =$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \cdot \underbrace{\int_{y=0}^{y=\pi/2} \sin^2 y\, dy}_{=J_2} \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{x=\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \cdot J_2\, dx = J_2 \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{x=\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx}_{J_1} \Rightarrow J = J_1 \cdot J_2$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$J_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2y}{2} dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 y &= \frac{1-\cos 2y}{2} \\ \cos^2 y &= \frac{1+\cos 2y}{2} \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y - \frac{\sin 2y}{2} \right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,dx \\ &x = a+b-t \end{aligned}}$$

$x = \pi - t$

$$J_1 = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)} dt =$$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t}\,dt}_{J_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2J_1 = -\pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{(\cos t)'}{1+\cos^2 t}\,dt = -\pi \operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi\left(\operatorname{arctg}(\cos \pi) - \operatorname{arctg}(\cos 0)\right) =$$

$$= -\pi\left(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} 1\right) =$$

$$= -\pi\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow J_1 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{16}$$

<u>Observatie</u>: Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ și $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, atunci

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d f(x) \cdot g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)\,dy\right)}$$

d) $$J = \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{(x+y+z)^3}\,dx\,dy\,dz$$

$$J = \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=1}^{y=2} \left(\int_{z=1}^{z=2} \frac{1}{(x+y+z)^3}\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=1}^{y=2} \left(\frac{(x+y+z)^{-2}}{-2} \Big|_{z=1}^{z=2} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=1}^{y=2} \left(\frac{-1}{2(x+y+2)^2} + \frac{1}{2(x+y+1)^2} \right) dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=1}^{x=2} \left(\frac{1}{x+y+2} \Big|_{y=1}^{y=2} - \frac{1}{x+y+1} \Big|_{y=1}^{y=2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=1}^{x=2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

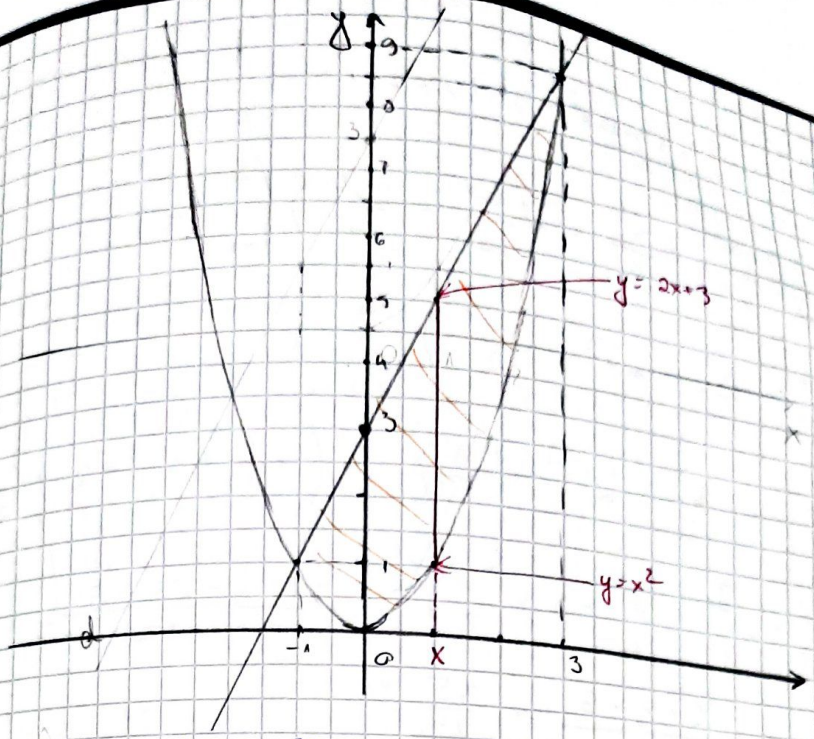
$$= \frac{1}{2} \left(\ln(x+4)\Big|_1^2 - 2\ln(x+3)\Big|_1^2 + \ln(x+2)\Big|_1^2 \right) = \dots = \frac{1}{2} \ln \frac{128}{\dots}$$

4.05.2022

SEMINAR 10

(1) Să se calc.:

$$I = \iint_A xy\,dx\,dy$$, A - mulțimea din plan mărginită de parab. $y = x^2$ și de dr. $y = 2x+3$



• Se proiectează mulțimea A pe axa Ox, pt. a determina mulțimea valorilor lui x

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Proiecția lui A pe axa Ox este $[-1, 3]$

$\Rightarrow x \in [-1, 3]$

• Pentru un $x \in [-1, 3]$ se secționează mulțimea A prin x pt. a determina mulțimea valorilor lui y

$y \in [x^2, 2x+3]$

$$I = \int_{x=-1}^{x=3} \left(\int_{y=x^2}^{y=2x+3} xy\,dy \right) dx \leftarrow \text{integrală iterată}$$

$$= \int_{x=-1}^{x=3} \left(x \int_{y=x^2}^{y=2x+3} y\,dy \right) dx = \int_{x=-1}^{x=3} \left(x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x+3} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(x \cdot \frac{(2x+3)^2 - x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{3} x(4x^2 + 12x + 9 - x^4)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(-x^5+4x^3+12x^2+9x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^6}{6}+\frac{4x^4}{4}+\frac{12x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{x^6}{12}+\frac{x^4}{2}+2x^3+\frac{9x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{3^6}{12}+\frac{3^4}{2}+2\cdot 3^3+\frac{9\cdot 3^2}{2}-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}-2+\frac{9}{2}\right)$$

$$= 3^3\left(-\frac{3^3}{4}+\frac{3}{2}+2+\frac{3}{2}\right)-\frac{-1+6-24+54}{12}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ 19 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$= 3^3\cdot\frac{-9+6+8+6}{4}-\frac{35}{12}$$

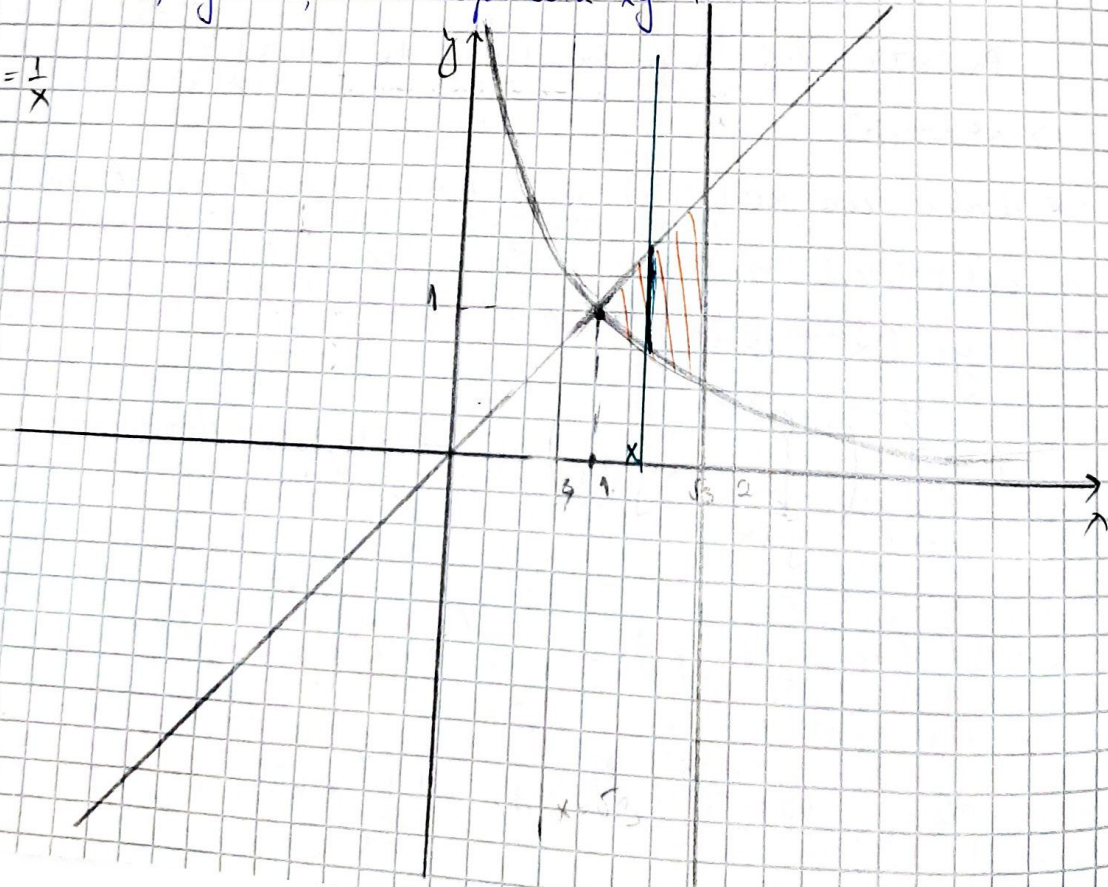
$$= 27\cdot\frac{11}{4}-\frac{35}{12} =$$

$$= \ldots$$

② Să se calculeze $J=\iint_A \frac{x}{y^2+1}\,dx\,dy$

dacă ~~$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$~~ A e mult. plană mărg. de $x=\sqrt{3}$, $y=x$ și de hiperbola $xy=1$

$y=\frac{1}{x}$



• P_1 - pe Ox

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = x \\ xy = 1 \end{cases}$$

Proiecția lui A pe Ox e $[1, \sqrt{3}]$

• luăm $x \in [1, \sqrt{3}]$ avem $y \in [\frac{1}{x}, x]$

$$J = \int_{x=1}^{x=\sqrt{3}} \left(\int_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \frac{x}{y^2+1} \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=1}^{x=\sqrt{3}} x (\operatorname{arctg} y) \Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} x \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dacă } x \in (0, \infty) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right) dx =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx - \frac{\pi}{2} \int_1^{\sqrt{3}} x \, dx = 2J - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2J - \frac{\pi}{4}(3-1) = 2J - \frac{\pi}{4} \cdot 2 = 2J - \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1}$$

$$J = 2\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{2}{2} \int_1^{\sqrt{3}} (x^2)' \operatorname{arctg} x \, dx =$$

$$= x^2 \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{1+x^2} \, dx =$$

$$= 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{1+x^2} \, dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} - x\Big|_1^{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} t\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \pi - \frac{\pi}{4} - \sqrt{3} + 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \overset{12}{\cancel{\pi}} - \overset{3}{\cancel{\frac{\pi}{4}}} - \sqrt{3} + 1 + \overset{4}{\cancel{\frac{\pi}{3}}} - \overset{3}{\cancel{\frac{\pi}{4}}} =$$

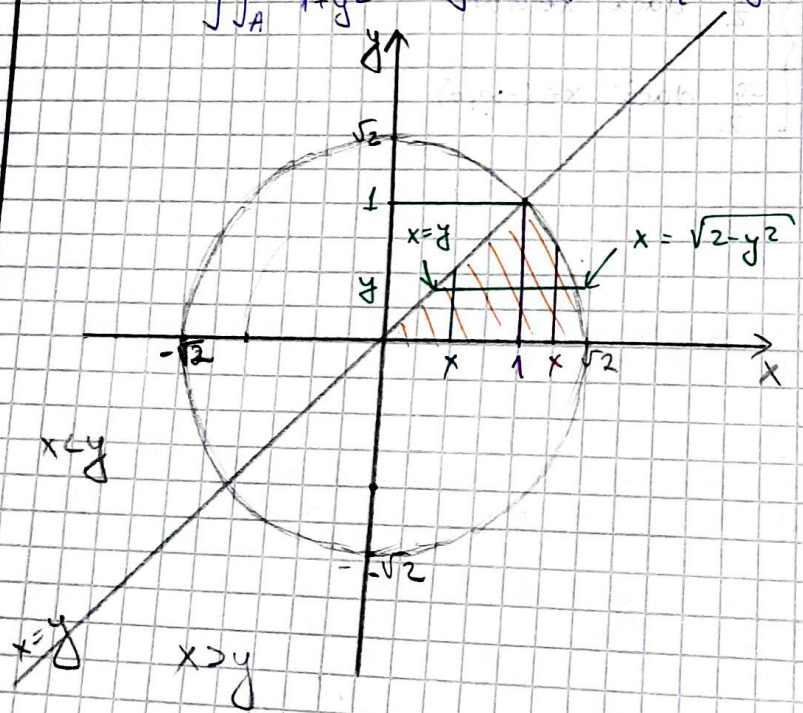
$$= \frac{12\pi - 3\pi + 4\pi - 3\pi}{12} - \sqrt{3} + 1$$

$$= \frac{10\pi}{12} - \sqrt{3} + 1 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$$

$$J = \frac{5\pi}{6} - \overset{3}{\cancel{\frac{\pi}{2}}} - \sqrt{3} + 1 = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1$$

③ Se se calculeze

$$J = \iint_A \frac{x}{1+y^2}\,dx\,dy \quad \text{dacă } A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geq y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 2$$



• $P_n \Rightarrow [0,\sqrt{2}]$

• Luăm x ~~dunde~~ din $[0,\sqrt{2}]$ sect.

Dacă $x\in[0,1] \Rightarrow y\in[0,x]$

$x\in[1,\sqrt{2}] \Rightarrow y\in[0,\sqrt{2-x^2}]$

din ec. cerc.

$$J=\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=0}^{y=x}\frac{x}{1+y^2}\,dy\right)dx+\int_{x=1}^{x=\sqrt{2}}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}}\frac{x}{1+y^2}\,dy\right)dx$$

- Se poate proiecta și pe axa Oy

$$J=\int_{y=0}^{y=1}\left(\int_{x=y}^{x=\sqrt{2-y^2}}\frac{x}{1+y^2}\,dx\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+y^2}\cdot x^2\Big|_{x=y}^{x=\sqrt{2-y^2}}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2(1+y^2)}(2-y^2-y^2)\,dy=$$

$$=\int_0^1\frac{1-y^2}{1+y^2}\,dy=-\int_0^1\frac{\cancel{1+y^2}}{\cancel{1+y^2}}\,dy+2\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,dy=$$

$$=-y\Big|_0^1+2\operatorname{arctg}y\Big|_0^1=$$

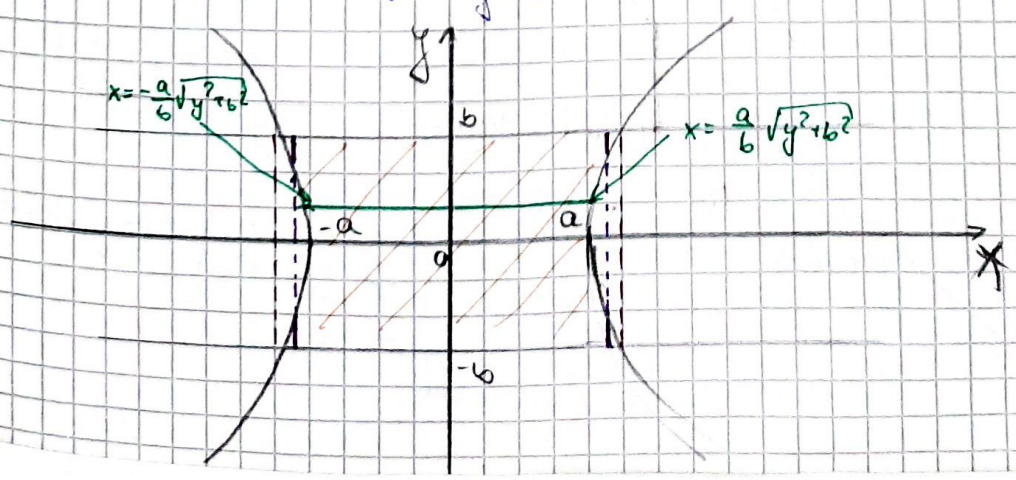
$$=-1+0+2\operatorname{arctg}1-2\operatorname{arctg}0=$$

$$=-1+2\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{2}-1$$

$x^2+y^2\le 2$

(4) Fie $a,b>0$ și fie $A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ -b\le y\le b\}$

Să se calculeze $J=\iint_A\frac{x^2}{y^2+b^2}\,dx\,dy$.



$y \in [-b, b]$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 = \frac{y^2+b^2}{b^2} \rightarrow x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2+b^2)$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$$

$$J = \int_{y=-b}^{y=b} \left(\int_{x=-\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}}^{x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}} \frac{x^2}{y^2+b^2}\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=-b}^{y=b} \frac{1}{y^2+b^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=-\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}}^{x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}} dy =$$

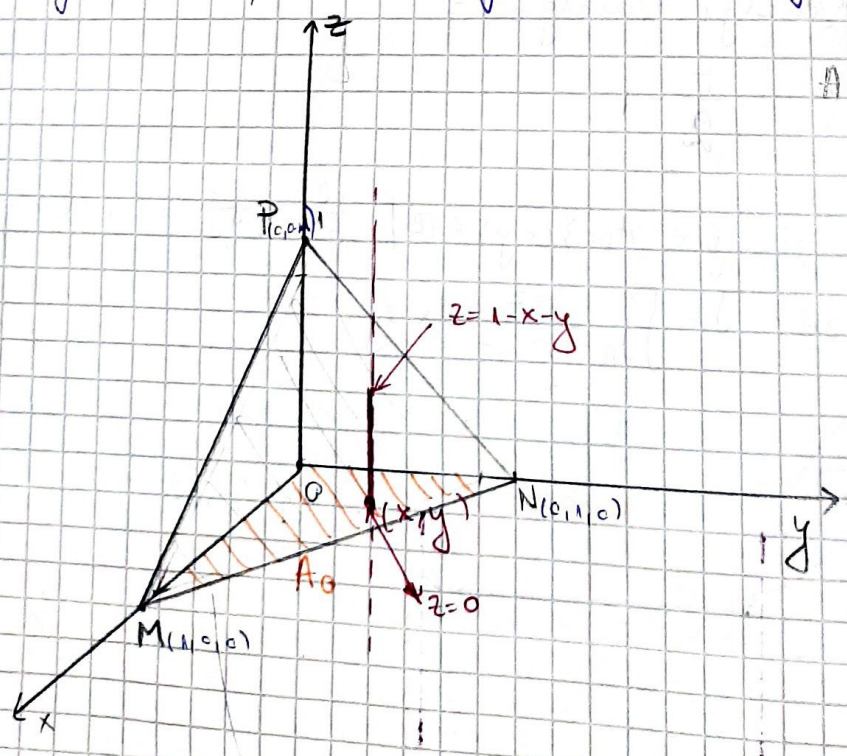
$$= \int_{-b}^{b} \frac{1}{\cancel{y^2+b^2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \cancel{(y^2+b^2)}\sqrt{y^2+b^2}\, dy =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3 \cdot \int_{-b}^{b} \sqrt{y^2+b^2}\, dy = \ldots$$

(5) Să se calc.

$$J = \iiint_A \frac{1}{(x+y+z+1)^2}\, dx\,dy\,dz$$, dacă A este mulț. din sp. ($\mathbb{R}^3$)

mărginită de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ și $x+y+z=1$



rec. prin tăietura

- Se proiectează mulțimea A pe planul xOy. Pr. este ΔMON

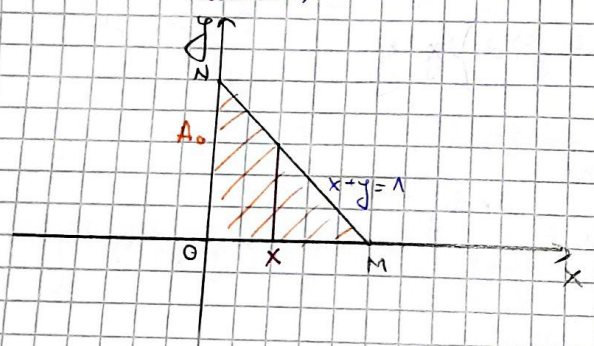
Pt. fiecare $(x,y) \in A_0$ se secționează mulțimea A prin (x,y) pt. a determina mult. valorilor lui z

$$J = \iint_{A_0} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^2}\, dz \right) dx\,dy \rightarrow \text{integrală iterată}$$

$$= \iint_{A_0} \frac{-1}{x+y+z+1} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dx\,dy =$$

$$= \iint_{A_0} \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{x+y+1} \right) dx\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2} \underbrace{\iint_{A_0} dx\,dy}_{\text{Aria}(A_0)} + \iint_{A_0} \frac{1}{x+y+1}\, dx\,dy = -\frac{1}{4} + J$$



$$J = \iint_{A_0} \frac{1}{x+y+1}\, dx\,dy$$

- $x \in [0,1] \Rightarrow y \in [0, 1-x]$

$$J = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} \frac{1}{x+y+1}\, dy \right) dx = \int_0^1 \ln(x+y+1) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

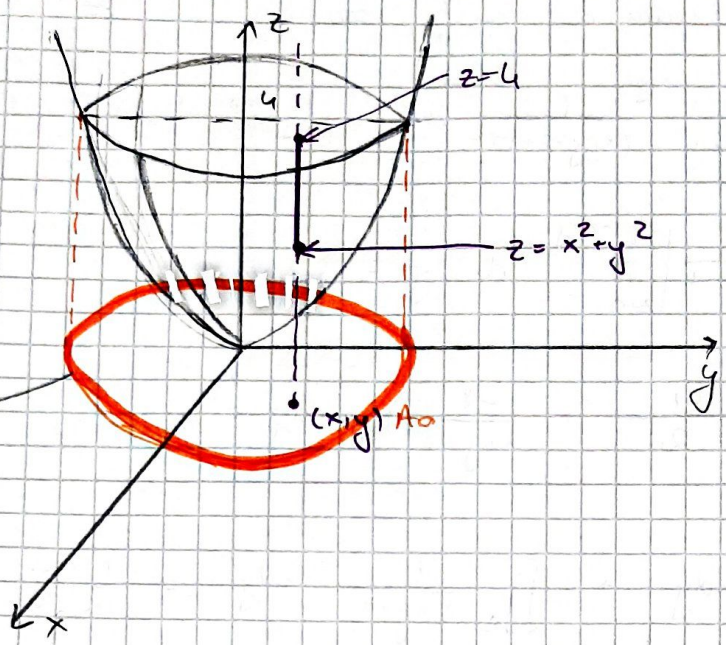
$$= \int_0^1 \left(\ln 2 - \ln(x+1) \right) dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(x+1)\, dx = \ldots$$

$$J = \frac{3}{4} - \ln 2$$

(6) Să se calculeze

$$J = \iiint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \text{ dacă } A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z \le 4\}$$

paraboloid eliptic

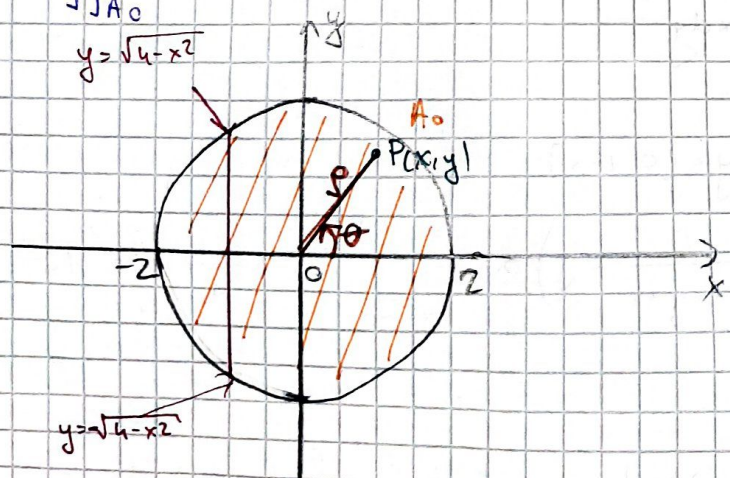


disc
=cerc

$$J = \iint_{A_0} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=4} (x^2+y^2)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{A_0} (x^2+y^2)\, z \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=4} dx\,dy =$$

$$= \iint_{A_0} (x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$



$$J = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\,dy \right) dx$$

Vom calcula integrala dublă nu cu ajutorul unei integrale iterate, ci cu ajutorul unei schimbări de variabilă (trecem la coordonate polare)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$\rho \in [0,2]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$dxdy \to \rho\, d\rho\, d\theta$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$J = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} (\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta)(4 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta =$$

SEMINAR 9

$$= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \rho^3(4-\rho^2)\, d\rho\, d\theta =$$

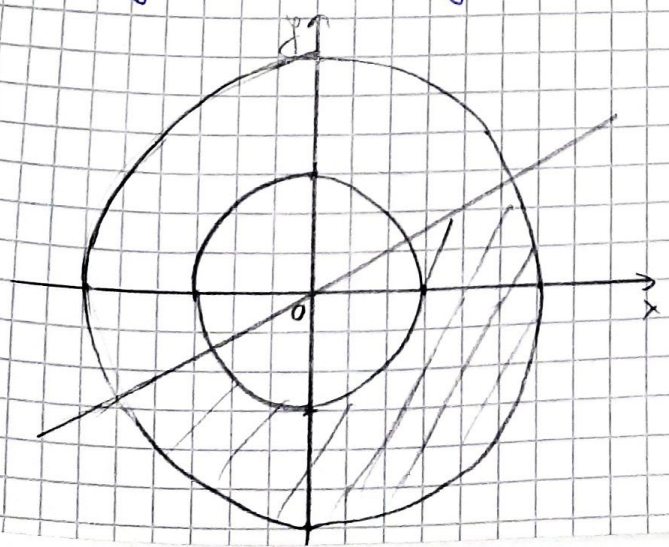
$$= \int_0^2 \rho^3(4-\rho^2)\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \ldots$$

R: $J = \frac{32\pi}{3}$

7) Să se calculeze $J = \iint_A x\sqrt{1-x^2-y^2}\, dxdy$.

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}x - 3y \geq 0,\ 1 \leq 4(x^2+y^2) \leq 4\}$

Rez.



$\sqrt{3}y - 3y \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x \geq 3y \Leftrightarrow y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$1 \leq 4(x^2+y^2) \leq 4 \quad / \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$\pi - \frac{\pi}{6}$

$\rho \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi\right]$

sau

$\theta \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

$-\pi + \frac{\pi}{6}$

11.05.2022

SEMINAR 11

continuare pb. din Seminar 10

$$J = \int_{\rho=\frac{1}{2}}^{\rho=1} \int_{\theta=-\frac{5\pi}{6}}^{\theta=\frac{\pi}{6}} \rho\cos\theta \cdot \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho^2 \sqrt{1-\rho^2} \, d\rho \underbrace{\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos\theta \, d\theta}_{= \sin\theta \Big|_{-\frac{5\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1}$$

facem schimbarea de var.

$$\rho = \sin t$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt =$$

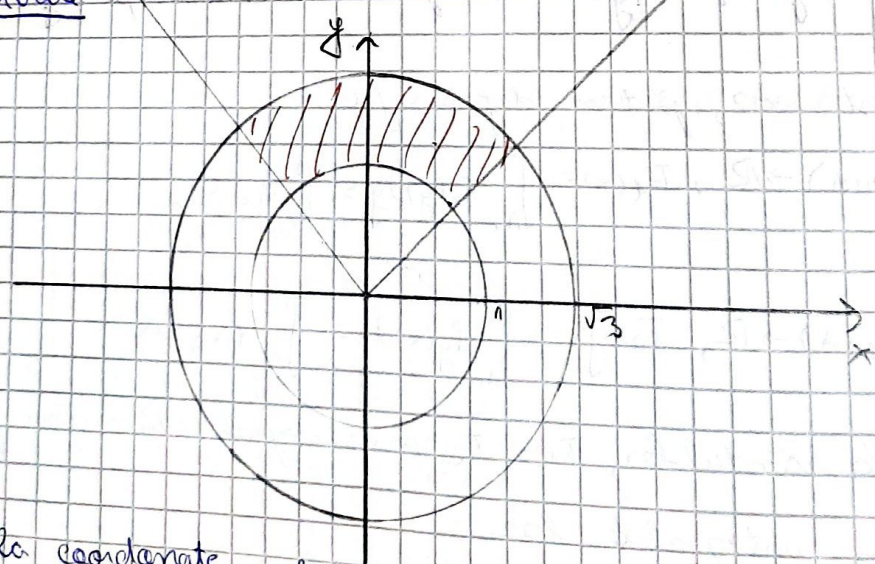
$$\boxed{\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8} \left(t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 4t}{4} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{64} + \frac{\pi}{24}$$

(1) $J = \iint_A \frac{x^2}{x^2+3y^2} \, dx \, dy$ dacă $A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 3, \; y \ge |x|\}$

Rezolvare



Trecem la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \rho \in [1, \sqrt{3}]$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

$$I = \int_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{3}} \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3\pi}{4}} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + 3\rho^2\sin^2\theta}\,\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho}_{=} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Integrale

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, unde R este o funcție rațională

$tg\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$, R - funcție rațională

$tg\,x = t$

sau

$ctg\,x = t$

$ctg\,\theta = t \Rightarrow \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{t^2}{1}$ $\xrightarrow{\text{proprietăți derivate}}$ $\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{t^2}{t^2+1} \Rightarrow$

$\theta = arctg\,t$

$d\theta = \frac{-1}{t^2+1}\,dt$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{t^2}{t^2+1}$

analog, $\sin^2\theta = \frac{1}{t^2+1}$

$$I = -\int_1^{-1} \frac{\frac{t^2}{t^2+1}}{\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{3}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{(t^2+3)(t^2+1)}\,dt$$

$$\frac{t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+3} + \frac{Ct+D}{t^2+1} = \frac{At^3 + At + Bt^2 + B + Ct^3 + 3Ct + Dt^2 + 3D}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

sau

$$\frac{t^2}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{A}{t^2+3} + \frac{B}{t^2+1} =$$

are loc doar datorită faptului că în stânga apare doar t^2

$$= \frac{(A+B)t^2 + A+3B}{(t^2+3)(t^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \quad /\cdot(-1) \\ A+3B=0 \quad (+) \end{cases}$$

$$2B=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{3}{2}$$

$$J = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\frac{3}{2}}{t^2+3} - \frac{\frac{1}{2}}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{3}\pi - 3\pi}{12} = \frac{(2\sqrt{3}-3)\cdot\pi}{12}$$

② Fie $a>0$, $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2ax\}$. Să se calc.

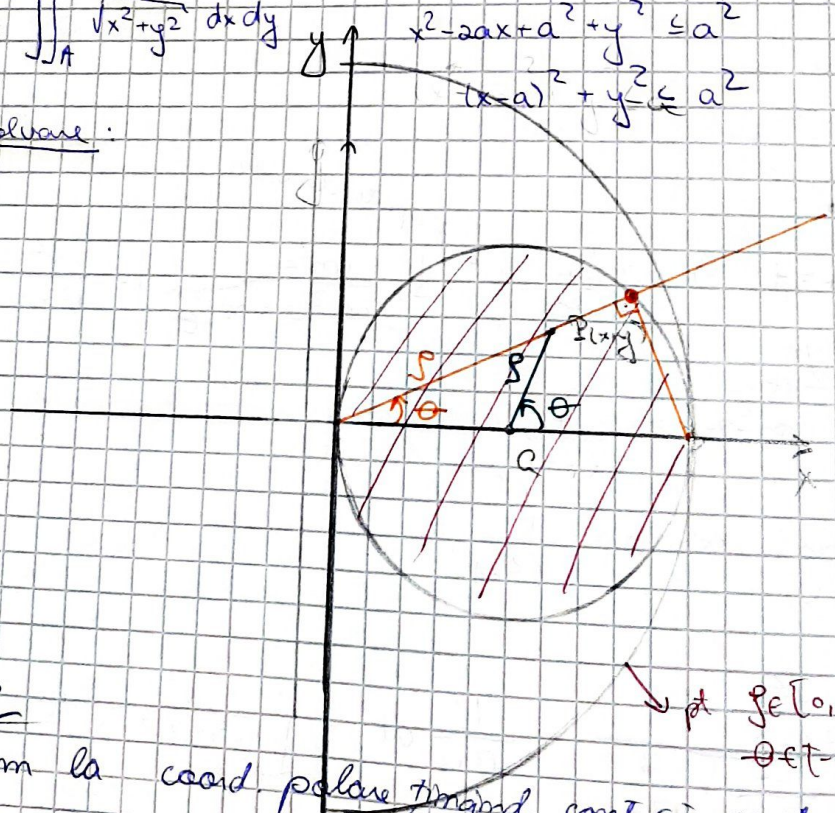
$$\parallel$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2 \le a^2$$

$$(x-a)^2+y^2 \le a^2$$

$$I = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Rezolvare:



$\rho \in [0, 2a]$

$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Metoda I

Trecem la coord. polare ținând cont că centrul cercului nu se găsește în origine

$$\boxed{\begin{cases} x-a=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}}$$

$\rho\in[0,a]$

$\theta\in[0,2\pi]$

jacobian $\dfrac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho$

$$J=\int_{\rho=0}^{\rho=a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\sqrt{(a+\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta=$$

$$=\int_{\rho=0}^{\rho=a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\rho\cdot\sqrt{a^2+2a\rho\cos\theta+\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

luând $d\rho$ ~~→~~ substit. lui Euler ⇒ se poate calcula, dar e mult

Metoda II

$$\boxed{\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}}$$

~~$\rho\in[0,2a]$~~

~~$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$~~

$\rho\in[0,2a\cos\theta]$

$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

din desen

din desen

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho$$

altfel

$x^2+y^2\le 2ax \iff \rho^2\le 2a\rho\cos\theta \iff \rho\le 2a\cos\theta \iff$

$\iff \begin{cases} \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ - e pozitiv} \\ \rho\in[0,2a\cos\theta] \end{cases}$

în afara cercului este fixat

$$J=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta}\rho^2\,d\rho\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^3}{3}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta}d\theta=$$

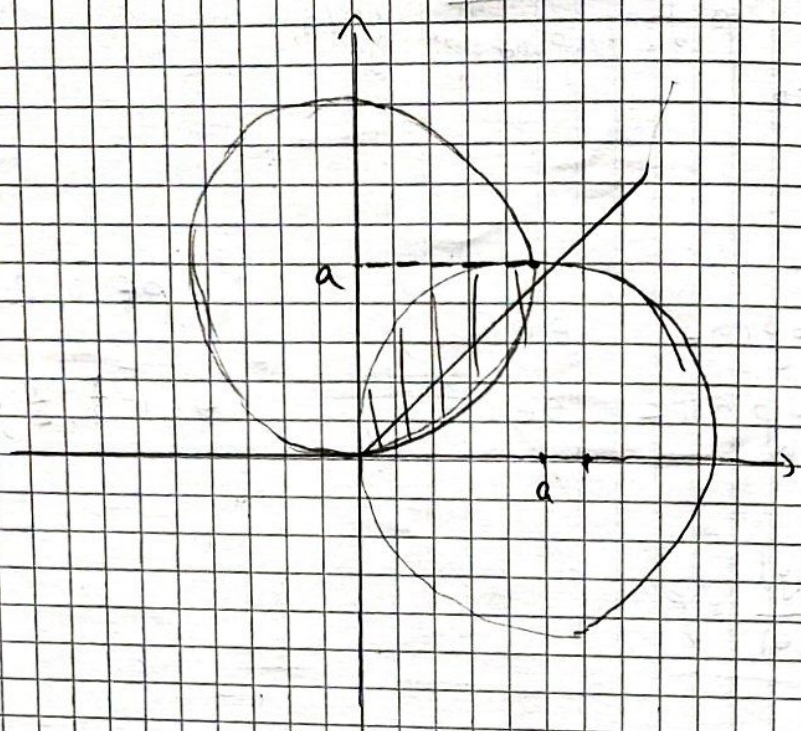
$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta=$$

$\sin\theta=t \Rightarrow \cos\theta\,d\theta=dt$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt=\ldots$$

(B) Fie $a>0$, $A=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2ax,\ x^2+y^2 \le 2ay\}$

Să se calc $J=\iint_A (x^2-y^2)\,dxdy$



$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

Algebric

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 2ax \\ x^2+y^2\le 2ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\le 2ax} \\ \rho^2\le 2a\rho\cos\theta \\ \rho^2\le 2a\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho\in[0,\min\{2a\cos\theta, \\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Dacă $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos\theta\le\sin\theta \Rightarrow \rho\in[0,2a\cos\theta]$

$\theta\in[0,\frac{\pi}{4}] \Rightarrow \sin\theta\le\cos\theta \Rightarrow \rho\in[0,2a\sin\theta]$

$$I=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\sin\theta}\rho^3\,d\rho\right)d\theta+\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta}\rho^3\,d\rho\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2a\sin\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^4}{4}\Big|_{\rho=0}^{\rho=2a\cos\theta}d\theta$$

$$= 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\theta \, d\theta + 4a^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta + 4a^4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\cos 2\theta + \underbrace{\cos^2\theta}_{= \frac{1+\cos 4\theta}{2}}\right) d\theta + a^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)$$

(4) Şă se calculeze

$$J = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy \right) dx$$

Soluţie

(4) Se cere calc.

se dat la examen

$$J = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy \right) dx$$

$$\int \sqrt{y^2+x^2}\, dy = \dots = \left[\frac{x^2 \left(\ln\left| x + \sqrt{x^2+y^2} \right| + \ln|x| \cdot y \right) + y \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(y \cdot \sqrt{y^2+x^2} + x^2 \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2} \right) \right) + c$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(y \cdot \sqrt{y^2+x^2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} + x^2 \ln\left(y + \sqrt{x^2+y^2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} \right) dx$$

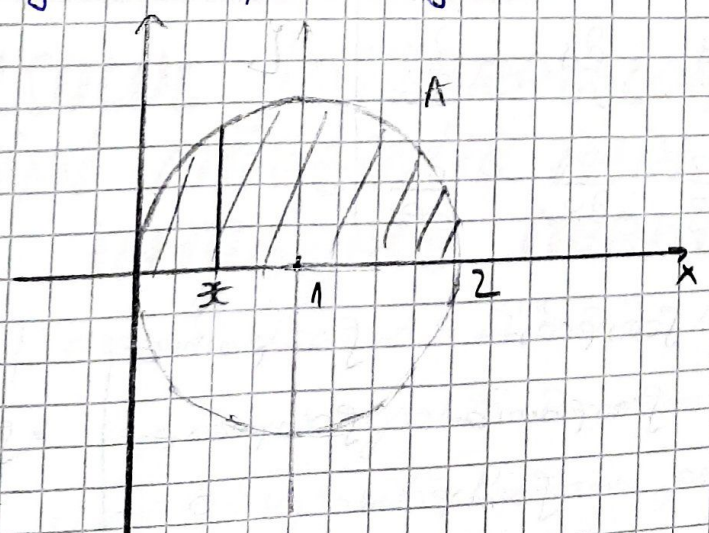
$\to$ prea mult

ca integrală itrată

Să descoperim din ce integrală dublă vine

Din ce curbe?

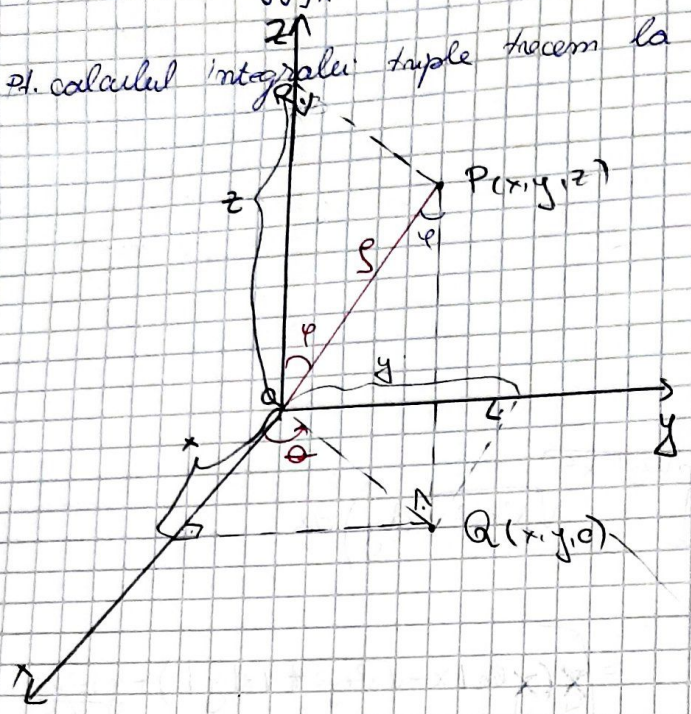
$$y = \sqrt{2x-x^2} \,/^2 \Rightarrow y^2 = 2x - x^2 \to x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



$$J = \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

(5) Să se calc. $J = \iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}\, dxdydz$, $A: x^2+y^2+z^2 \le 1$

Pt. calculul integralei triple trecem la coordonate sferice



$\theta \to$ latitudine a punctului $P \in \rho$ pe orizont

proiecția lui P în xOy

x, y, z = coord. carteziene ale lui P

ρ, φ, θ = coordonatele sferice ale lui P

$x = OQ \cdot \cos\theta$

$OQ = \rho \sin\varphi$

$$\to \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

– leg. dintre coord. cart. și coord. sferice

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

~~$\sin\varphi\cos\theta \quad \rho\cos\varphi\cos\theta$~~

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin\varphi$$

$dxdydz \to \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

la examen putem să nu mai deducem

$\rho \in [0,1]$

$\varphi \in [0,\pi]$ — în spațiu

$\theta \in [0,2\pi]$

în coord. sferice

$x^2+y^2+z^2$ — de ex. distanța

2 punct.

$$J = \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}}}_{\text{pt. că nu depind una de alta}} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

se poate desface în produs de Int. Diman...

$dx\,dy\,dz \to \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

$$= \left(\int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi\right)}_{= -\cos\varphi \big|_0^{\pi} = 2} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{2\pi} =$$

$= 4\pi \cdot J$

$$J = \int_0^1 \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho = \int_0^1 \sqrt{\rho^2+1} \, d\rho - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}} d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\rho\sqrt{\rho^2+1} + \ln\left(\rho+\sqrt{\rho^2+1}\right)\right)\Big|_0^1 - \ln\left(\rho+\sqrt{\rho+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\rho\sqrt{\rho^2+1} - \ln\left(\rho+\sqrt{\rho^2+1}\right)\right)\Big|_0^1 =$$

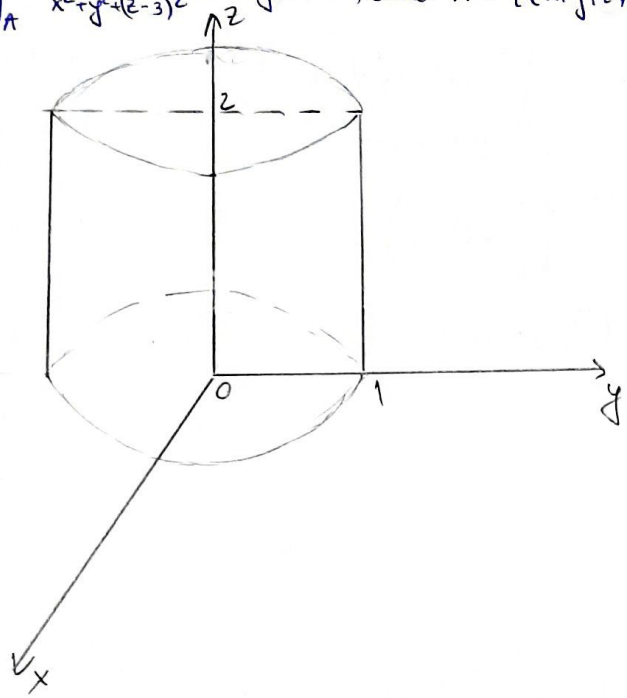
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \ln 1\right) = \frac{\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{2}$$

SEMINAR 12

18.05.2022

① Să se calculeze

$$J = \iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+(z-3)^2}\,dx\,dy\,dz \quad , \text{dacă } A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$$



Trecem la coord. cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi & \rho \in [0,1] \\ y = \rho\sin\varphi & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = z & z \in [0,2] \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$$

1 de

$$J = \int_{\rho=0}^{\rho=1}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{z=0}^{z=2} \frac{1}{\rho^2+(z-3)^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz =$$

- dacă fct. dim
- prod. 2 fct. $\int$ 1 depinde de 2 var
  1 depinde de celelalte 2 var

$$\rightarrow J = \underbrace{\iint \ldots}_{\text{integr. duble}} \cdot \underbrace{\int}_{\text{integr. Riemann}}$$

$$J = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{z=0}^{z=2} \frac{\rho}{\rho^2+(z-3)^2}\, d\rho\, dz =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{z=0}^{z=2} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=1} \frac{\rho}{\rho^2+(z-3)^2} d\rho \right) dz = 2\pi \cdot \int_{z=0}^{z=2} \frac{1}{2} \ln(\rho^2+(z-3)^2) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} dz =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_0^2 \ln(1+(z-3)^2)\, dz - \int_0^2 \ln(z-3)^2 dz \right)$$

Nat. $z-3=t$ Nat. $z-3=t$

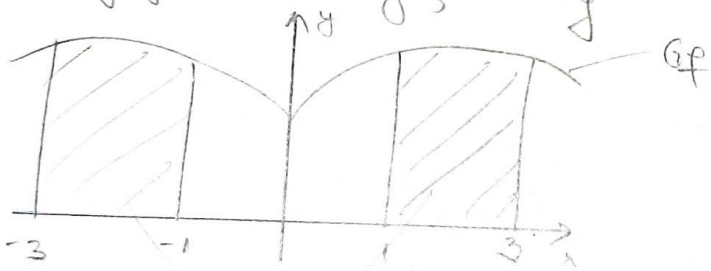
$$J = \pi \cdot \left(\int_{-3}^{-1} \underbrace{\ln(1+t^2)}_{\text{pară}} dt - \int_{-3}^{-1} \underbrace{\ln t^2}_{\text{pară}} dt \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_1^3 \ln(1+t^2)\, dt - \int_1^3 \ln t^2 dt \right) =$$

$= \ldots$

- pt. o funcție pară

" grafic simetric față de Oy

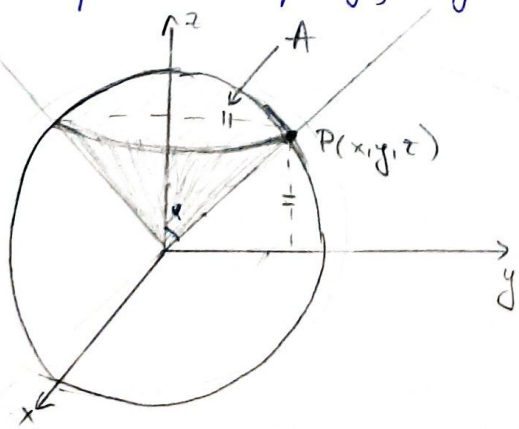


suprafețe egale $\rightarrow \int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx$, f fct. pară

② Să se det. volumul corpului mărginit inferior de pânza conului $z = \sqrt{x^2+y^2}$ și superior de suprafața sferei $x^2+y^2+z^2=1$

Rezolvare

dist. de la pct. de rezol. $O(0,0,0)$ - $M(x,y,z)$



un con cu vârful în origine

între coasta și Oz e un unghi de 45°

$$V = m(A) = \iiint_A dx\,dy\,dz$$

Trecem la coord. sferice

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,1] \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi$$

$$V = \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

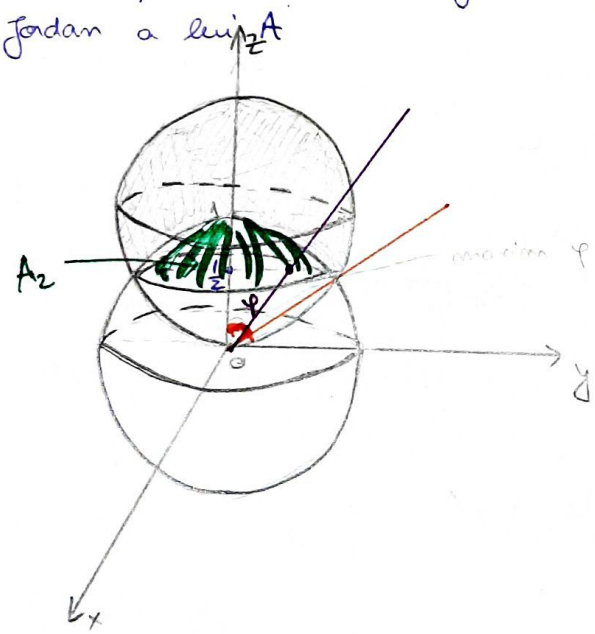
integrăm pe un paralelipipied

toate au limite de integrare finite, sunt fct. singure $\Rightarrow$ produs de I.R.

$$V = \int_0^1 \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} dt = \ldots$$

③ Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$ - mulțimea punctelor situate în interiorul sferei $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ și în exteriorul sferei $x^2+y^2+z^2=1$. Să se det. măsura Jordan a lui A

- calote sferice suprapuse



vol. sferei

$$m(A) = \frac{4\pi}{3} - V_1 = \frac{4\pi}{3} - 2 \cdot V_2$$

$$V_2 = \iiint_{A_2} dx\,dy\,dz$$

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \cancel{\rho \in [0,1]} \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{3}] \\ \theta = [0, 2\pi] \end{array} \qquad \rho \in [\frac{1}{2\cos\varphi}, 1]$$

găsim cota cercului de intersecție dintre cele 2 sfere

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \quad (-) \end{cases}$$

$$-2z+1=0 \Rightarrow 2z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{2}$$

$\cos\varphi_{max} = \frac{1}{2}$ (ipotenuza e rază în a doua sferă $\Rightarrow R=1$)

$\Downarrow$

$\varphi_{max} = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)}$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\rho_{min}} \Rightarrow \rho_{min} = \frac{1}{2\cos\varphi}$$

punem în ext. integr. cu limite fixe

$$V_2 = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\rho=1} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \right) d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_{\rho=\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\rho=1} d\varphi \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{3}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi \left(1 - \frac{1}{8\cos^3\varphi} \right) d\varphi \, d\theta$$

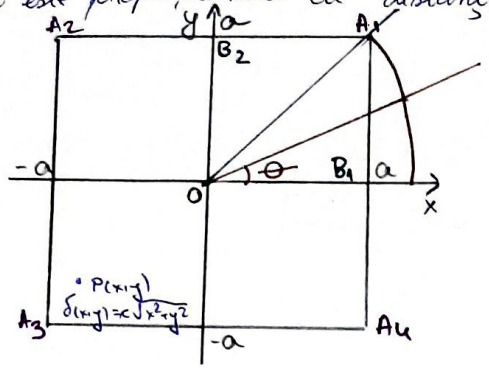
în integr. dublă, variabilele sunt separate $\Rightarrow J =$ prod. al 2 integr. Riem.

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\varphi - \frac{\sin\varphi}{8\cos^3\varphi} \right) d\varphi = \frac{2\pi}{3} \cdot J$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi \, d\varphi - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi = -\cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{8} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^3} = \dots$$

$\cos\varphi = t$

(4) Să se det. masa unei plăci pătrate de latură 2a ştiind că densitatea în fiecare punct este proporţională cu distanţa până la centrul plăcii



Alegem un sist. cartezian cu originea în centrul plăcii şi cu axele paralele cu laturile plăcii

Notăm densitatea cu δ delta

$$m = \iint_A \delta(x,y)\,dx\,dy \text{, unde } A = [-a,a]\times[-a,a]$$

$\delta(x,y) = c\sqrt{x^2+y^2}$ - densit proport. cu dist. până la centrul plăcii

$$m = c\iint_A \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{f(x,y)}\,dx\,dy$$

$(x,y)\in A_1 \Leftrightarrow (-x,y)\in A_2$ - simetria multi.

$f(-x,y) = f(x,y)$ - simetria fct.

$\Rightarrow \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$

$(x,y)\in A_1 \Leftrightarrow (-x,-y)\in A_3$

$f(-x,-y) = f(x,y)$

$\Rightarrow \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_3} f(x,y)\,dx\,dy$

- analog pt. A_4

$$m = 4c\iint_{A_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

simetria faţă de prima bisect.

$(x,y)\in B_1 \Leftrightarrow (y,x)\in B_2$

$f(x,y) = f(y,x)$

$\Rightarrow \iint_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow m = 8c\iint_{B_1} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$ - se poate cu teor. lui Fubini

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \cancel{\rho \in [0, \sqrt{2}a]} \qquad \theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}]$$

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho_{max}} \Rightarrow \rho_{max} = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow \rho \in [0, \frac{a}{\cos\theta}]$$

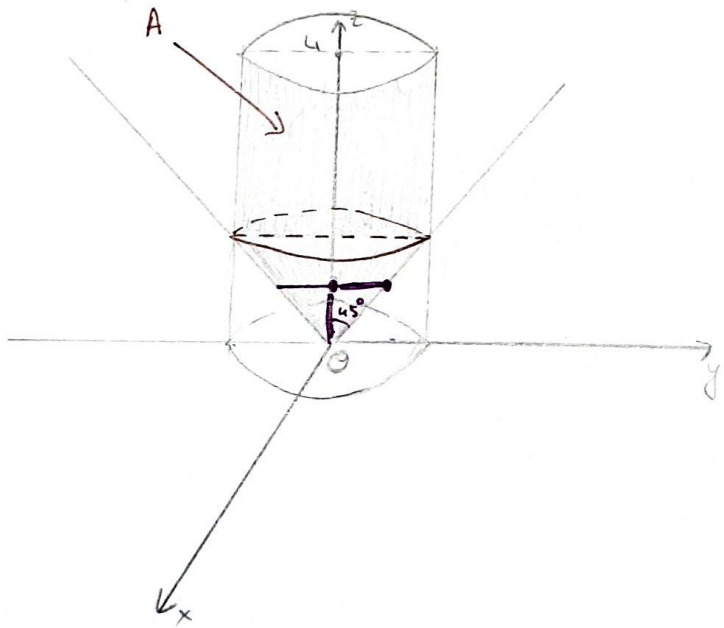
- Obs. că dintre coord. polare ... capete de integrare ...

$$m = 8\cdot k \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\rho=0}^{\rho\frac{a}{\cos\theta}} \rho\cdot\rho\, d\rho \right) d\theta = 8k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\frac{a}{\cos\theta}} d\theta =$$

$$= \frac{8k}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^3}{\cos^3\theta}\, d\theta = \frac{8ka^3}{3} \cdot J, \text{ unde } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\, d\theta = \ldots$$

Temă

(5) Fie $A \subseteq \mathbb{R}^3$, mult. mărg. de planele $z=0$ și $z=4$, situată în interiorul conului $z=\sqrt{x^2+y^2}$ și al cilindrului $x^2+y^2=1$. Să se determine momentul de inerție în rap. cu axa Oz al unui corp omogen de densitate 1, având forma mulțimii A.



ρ - distanța dintre un punct și axa Oz

$$J_z = \iiint_A (x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in [0,4] \end{cases}$$

$\rho \in [0,1] \Rightarrow$ integr. fața de tal cilindr

dacă $z \in [1,4] \Rightarrow \rho \in [0,1]$

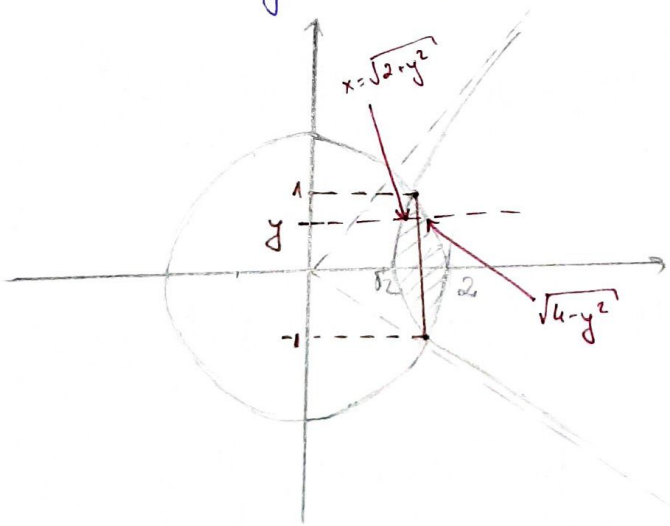
$z \in [0,1] \Rightarrow \rho \in [0,z]$

$$J_z = \underbrace{\int_{z=1}^{z=4} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 \cdot \rho \, dz \, d\theta \, d\rho}_{\text{mom inerție al cilindrului}} + \underbrace{\int_{z=0}^{z=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=z} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \right) dz \, d\theta}_{\text{mom. inerție al conului}}$$

integrăm pe paralelipipod

$$= \int_1^4 dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \rho^2 d\rho + \underbrace{\int_{z=0}^{z=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{z^4}{4} dz \, d\theta}_{\int_0^1 \frac{z^4}{4} dz \cdot \int_0^{2\pi} d\theta} = \ldots$$

(6) Să se det. centrul de greutate al unei plăci omogene având forma mulțimii situate în semiplanul $x \geq 0$, mărginită de hiperbola $x^2 - y^2 = 2$ și de cercul $x^2 + y^2 = 4$ - pb. dată la examen



- mulțimea este simetrică față de $Ox \Rightarrow G \in Ox \Rightarrow y_G = 0$

$$x_G = \frac{\iint_A x \, dx \, dy}{\iint_A dx \, dy}$$

- e omogenă $\Rightarrow f(x,y)$ - ieșe în față $\Rightarrow$ se simplifică
densitatea

$$\iint_A dx\,dy$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x^2+y^2=4 \quad (-) \end{cases}$$

$$-2y^2=-2 \to y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$\iint_A dx\,dy = \int_{y=-1}^{y=1}\left(\int_{x=\sqrt{2+y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dx\right)dy = \int_{-1}^{1} x\Big|_{x=\sqrt{2+y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-y^2}-\sqrt{2+y^2}\right)dy = \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{4-y^2}\,dy}_{=J} - \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{2+y^2}\,dy}_{=J}$$

$$J=\int_{-1}^{1}\sqrt{4-y^2}\,dy = 2\int_0^1\sqrt{4-y^2}\,dy = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt =$$

Not $y=2\sin t$

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$$

$x=a\sin t$

sau

$x=a\cos t$

$$= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 4\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{6}+0+\right.$$

$$J=\int_{-1}^{1}\sqrt{y^2+2}\,dy = 2\int_0^1\sqrt{y^2+2}\,dy = 2y\sqrt{y^2+2}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 y\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+2}}\,dy =$$

$$= 2\sqrt{3}-2\cdot\int_0^1\frac{y^2+2-2}{\sqrt{y^2+2}}\,dy = 2\sqrt{3}-\underbrace{2\int_0^1\sqrt{y^2+2}\,dy}_{=J}+4\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y^2+2}}$$

$$\Rightarrow 2J = 2\sqrt{3}+4\cdot\ln\left(y+\sqrt{y^2+2}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow J=\ldots$$

SEMINAR 13

25.05.2022

① Cicloida este curba plană de ecuații parametrice $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, unde $a>0$ și $t\in[0,2\pi]$. Să se determine lung. cicloidei

Fie l = lungimea cicloidei

$$l=\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|\,dt \quad , \quad \gamma(t)=(x(t),y(t))$$

$$\gamma(t)=(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$$

$$\gamma'(t)=(a(1-\cos t),\ a\sin t)$$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+(a\sin t)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2(1-2\cos t+\cos^2 t)+a^2\sin^2 t}=$$

$$=\sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2}=\sqrt{2a^2(1-\cos t)}$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=$$

$$\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}\Rightarrow \sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2}$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-4a(\cos\pi-\cos 0)=-4a(-1-1)=8a$$

Cardioida este curba plană având ecuația carteziană implicită $x^2+y^2=2a(x+\sqrt{x^2+y^2})$ unde $a>0$. Să se determine lungimea cardioidei.

O parametrizare a cardioidei poate fi obținută cu ajutorul coordonatelor polare: exprimați pe x și y în coord. polare și înlocuiți-le în ecuația cardioidei. După înlocuire, trebuie să putem exprima ρ în fct. de θ.

$\theta \in [0,2\pi]$

ρ - răt de depare $\rho \in [0,4a]$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \rho^2 = 2a(\rho\cos$$

$\rho = 2a(1-\cos\theta)$

ec. polară a cardioidei

O parametrizare a cardioidei este $\theta \in [0,2\pi]$

$$x(\theta) = 2a(1+\cos\theta)\cos\theta = 2a\cos\theta + 2a\cos^2\theta$$

$$y(\theta) = 2a(1+\cos\theta)\sin\theta = 2a\sin\theta + a\sin 2\theta$$

Not. l = lung. cardioidei

$$\cancel{\gamma(\theta) = (2a(1+\cos\theta)\cos\theta,\ 2a(1+\cos\theta)\sin\theta)}$$

$$\cancel{\gamma'(\theta) = (-2a(1+\cos\theta)\sin\theta - 2a\cos\theta\sin\theta,\ 2a(1+\cos\theta)\cos\theta - 2a\sin\theta\sin\theta)}$$

$$\cancel{= (-2a\sin\theta(1+2\cos\theta),\ 2a\cos\theta + 2a\cos^2\theta - 2a\sin^2\theta)}$$

$$\cancel{= (-2a\sin\theta(1+2\cos\theta),\ 2a(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta))}$$

sau

$$x'(\theta) = -2a\sin\theta - 4a\cos\theta\sin\theta = -2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta$$

$$y'(\theta) = 2a\cos\theta + 2a\cos 2\theta$$

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{(-2a\sin\theta - 2a\sin 2\theta)^2 + (2a\cos\theta + 2a\cos 2\theta)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2(\sin^2\theta + 2\sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)}$$

$$= 2a\sqrt{2 + 4\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} =$$

$$= 2a\sqrt{2 + 4\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$= 2a\sqrt{2 + 2\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta}$$

$$= 2a\sqrt{2 + 2\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}$$

$$= 2a\sqrt{2 + 2\cos\theta}$$

$$= 2\sqrt{2}a\sqrt{1 + \cos\theta}$$

$$l = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad /+1 \Rightarrow 1+\cos\theta = 2\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$l = 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\,d\theta = 4a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta - 4a\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - 8a\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 8a(1-0) - 8a(0-1) = +8a + 8a = 16a$$

Fie $a>0$ și $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ drumul definit prin $\gamma(t)=(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$. Să se calculeze $J=\int_\gamma y^2\,ds$

$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(t)=(x(t),y(t))$

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\,dt}$$

$\|\gamma'(t)\|=8a$

$f(x,y)=y^2$

$$J=\int_\gamma y^2\,ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{2a^2(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\,dt$$

$\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}\Rightarrow -\cos t=-1+2\sin^2\frac{t}{2}\Rightarrow 1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$

$$J=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^5}\,dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^5\,a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt$$

Not $x=\frac{t}{2}$

$dx=\frac{1}{2}dt$

$$J=2\cdot 8a^3\int_0^{\pi}\sin^5x\,dx=16a^3\int_0^{\pi}\sin x\cdot(\sin^2x)^2\,dx=$$

$$=16a^3\int_0^{\pi}\sin x(1-\cos^2x)^2\,dx=-16a^3\int_1^{-1}(1-t^2)^2\,dt=16a^3\int_{-1}^{1}(1-t^2)^2\,dt=$$

Not $\cos x=t$

$-\sin x\,dx=dt$

$$=2\cdot 16\cdot a^3\int_0^1(1-2t^2+t^4)\,dt=32a^3\left(t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1=32a^3\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

4

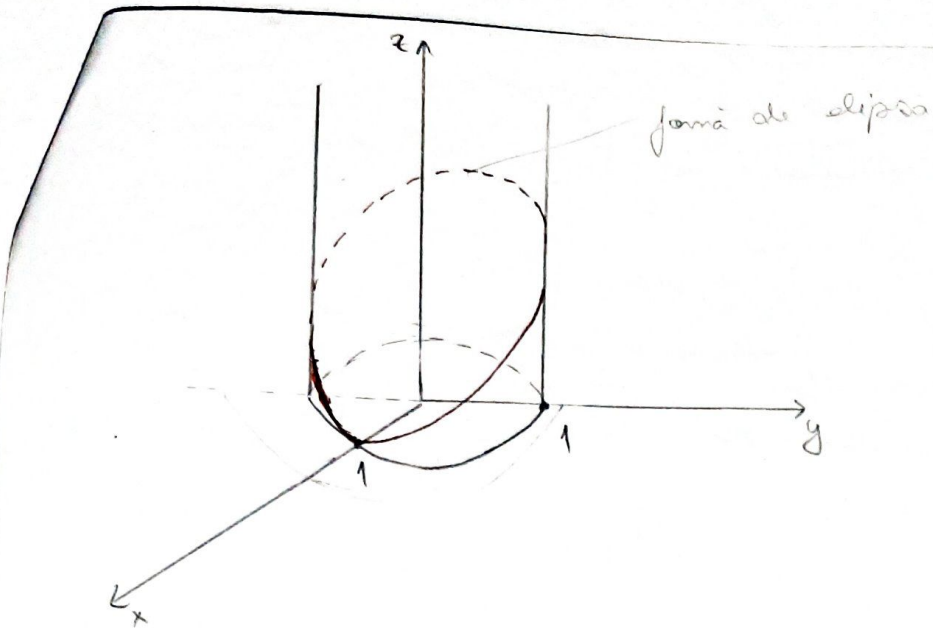
(4) Fie Γ curba simplă din $\mathbb{R}^3$ având drept imagine

$$J(\gamma) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ x+z=1\}$$

Să se calculeze $J = \int_\Gamma |xy|\, ds$

Soluție.

$J = \int_\gamma |xy|\, ds$ unde $\gamma \in \Gamma$ (se va vedea la cursul următor



O parametrizare a lui γ poate fi obținută cu ajutorul ec. cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin t \\ z = z \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \rho = 1$

ec. elipsei

$x\,d\theta = \cos\theta$

$y\,d\theta = \sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$z\,d\theta = 1 - \cos\theta$

$$J = \int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta| \cdot \|\gamma'(\theta)\| \, d\theta$$

$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 1-\cos\theta)$

$\gamma'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta)$

$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1+\sin^2\theta}$

$$J = \int_0^{2\pi} |\sin\theta\cos\theta| \cdot \sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta +$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta$$

Not. $\sqrt{1+\sin^2\theta} = t$

$1+\sin^2\theta = t^2$

$2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2t\,dt$

$\sin\theta\cos\theta\,d\theta = t\,dt$

$$J = \int_1^{\sqrt{2}} t^2dt - \int_{\sqrt{2}}^1 t^2dt + \int_1^{\sqrt{2}} t^2dt - \int_{\sqrt{2}}^1 t^2dt = 4\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt =$$

$$= \frac{4}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

5 Fie

$$J = \int_{\gamma} (x-y)\,dx - (x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t\cos t - e^t\sin t)(e^t\cos t - e^t\sin t)\,dt -$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t\sin t + e^t\cos t)(e^t\sin t + e^t\cos t)\,dt$$

$$= +\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t(\sin t - \cos t)^2\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t(\sin t + \cos t)^2\,dt$$

$$= +\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\left[(\sin t - \cos t)^2 - (\sin t + \cos t)^2\right]dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t(\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t - \sin^2 t - \cos^2 t - 2\sin t\cos t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$J = \int_{\sqrt{2}}^{1} t^2\,dt + \int_{\sqrt{2}}^{1} t^2\,dt + \int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\,dt - \int_{\sqrt{2}}^{1} t^2\,dt$$

$$= 4\int_{1}^{\sqrt{2}} t^2\,dt = 4\cdot \frac{t^3}{3}\Big|_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

5. Fie $\Gamma : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$. Să se calculeze

$$J = \int_{\gamma} \underbrace{(x-y)\,dx - (x+y)\,dy}_{\text{formă diferențială de gr. I}} \to \text{integrală curbilinie de al doilea tip}$$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = \int_a^b f_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t)\,dt +$$

$$\int_a^b f_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\,dt$$ (și obținem integralele pt care se mai pot simplifica)

$x(t) = e^t \cos t$

$x'(t) = e^t \cos t + e^t(-\sin t)$

$= e^t(\cos t - \sin t)$

$y(t) = e^t \sin t$

$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$

$f_1(x,y) = x - y$

$f_2(x,y) = -(x+y)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^t \cos t - e^t \sin t)\cdot e^t(\cos t - \sin t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} -(e^t \cos t + e^t \sin t)\cdot e^t(\sin t + \cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 - e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t - \cos^2 t - 2\cos t \sin t - \sin^2 t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t}(-4\cos t \sin t) = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2t} \cdot \sin 2t \, dt$$

$$2t = u \,\Big|'$$

$$2\,dt = du$$

Facem schimbare de variabilă de 2ori și ajungem din nou la aceeași integrală

$$I = \frac{-e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} = -e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cosh \frac{\pi}{4}$$

⑥ Fie $a, b > 0$ și fie Γ curba simplă având drept imagine arcul de elipsă $J(\Gamma) = \{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ parcurs în sens orar

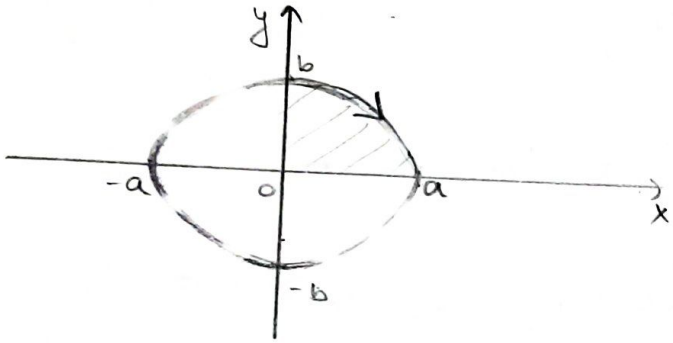
trebuie parcurs

Să se calculeze $J = \int_\Gamma \frac{1}{x+a}\, dy$

<u>Soluție</u>:

$$J = \int_\gamma \frac{1}{x+a}\, dy, \text{ unde } \gamma \in \Gamma$$

drum reprezentativ pt. curba orientată Γ



Parametrizarea standard a elipsei: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

$\overline{\gamma}: (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ → se parcurge în sens invers față din enunț

opusul drumului γ

$$J = -\int_{\overline{\gamma}} \frac{1}{x+a}\, dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a\cos t + a} (b\sin t)'\, dt = -\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + 1}\, dt$$

$$= -\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos t + 1}}{\cancel{\cos t + 1}}\, dt + \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos t + 1}\, dt$$

Not $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = u$, $dt = \frac{2}{u^2+1}\,du$

$$J = -\frac{b}{a}\frac{\pi}{2} + \frac{b}{a}\int_0^1 \frac{-u^2+1}{1-u^2}\cdot\frac{2}{u^2+1}\,du =$$

$$= -\frac{b}{a}\frac{\pi}{2} + \frac{2b}{a}\int_0^1 \frac{1}{1-u^2}\,du$$

7) Fie $a>0$ și $M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = ax,\ z \geq 0\}$ curba simplă Γ având imaginea $J(\Gamma) = M$ o.m. CURBA LUI VIVIANI

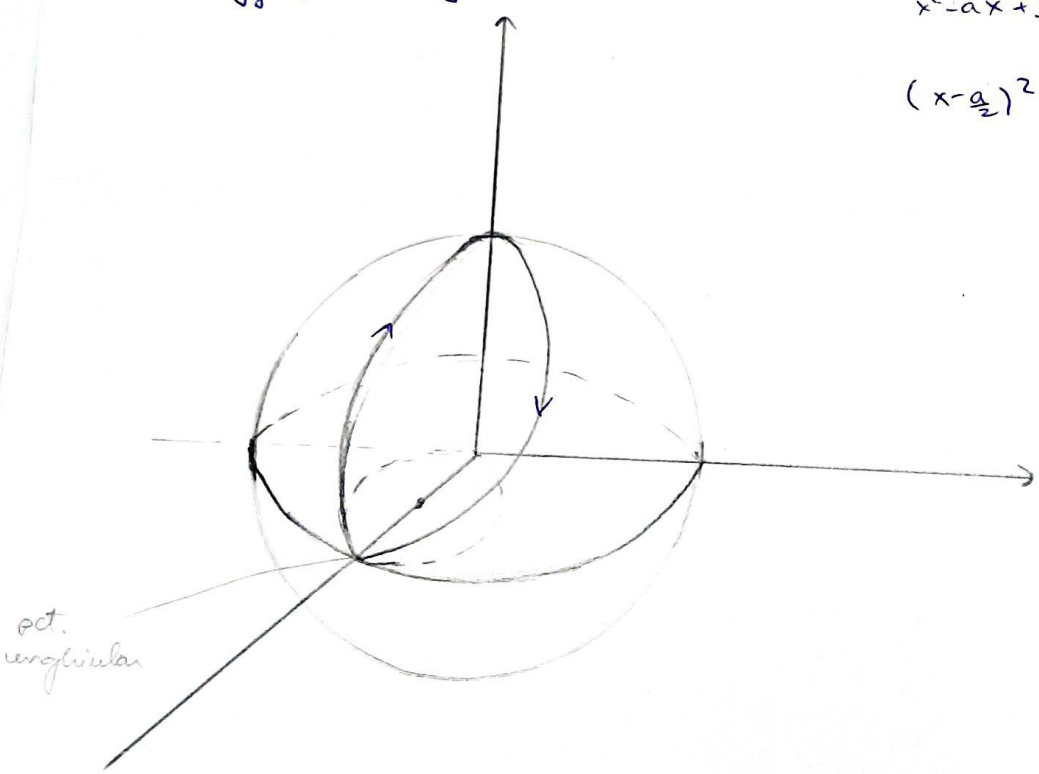
Să se calculeze $J = \int_\Gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$, unde ~~dacă~~ Γ este parcursă în sens antiorar dacă se privește din origine

Soluție:

$$J = \int_\gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$



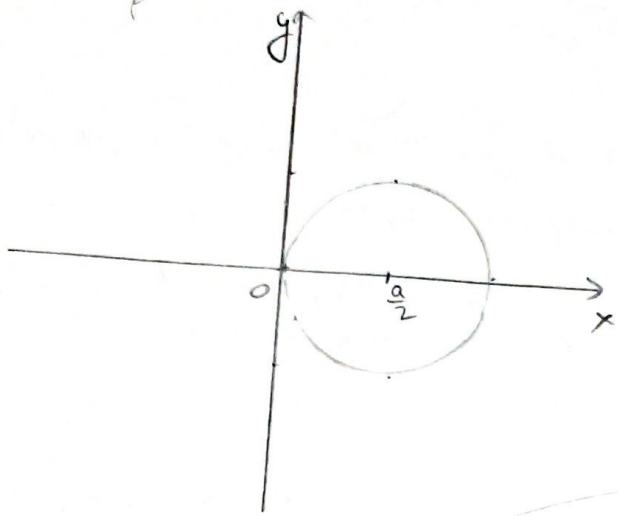
Parametrizare → coord. sferice

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi\cos\theta \\ y = a\sin\varphi\sin\theta \\ z = a\cos\varphi \end{cases}$$

$x^2+y^2 = ax \Leftrightarrow a^2\sin^2\varphi = a^2\sin\varphi\cos\theta \Leftrightarrow \sin\varphi = \cos\theta$

$$\Gamma: \begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\cos\theta\sin\theta \\ z = a|\sin\theta| \end{cases} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

pol. semplificata



pari

$$J = -\int_{\Gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\cdot(a\cos^2\theta)'d\theta -$$

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\,(a\cos\theta\sin\theta)'d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} a^2\cos^4\theta\cdot(-a\sin\theta)'d\theta - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^4\theta\,(a\sin\theta)'d\theta$$

$= \dots$

dispari → si annulla