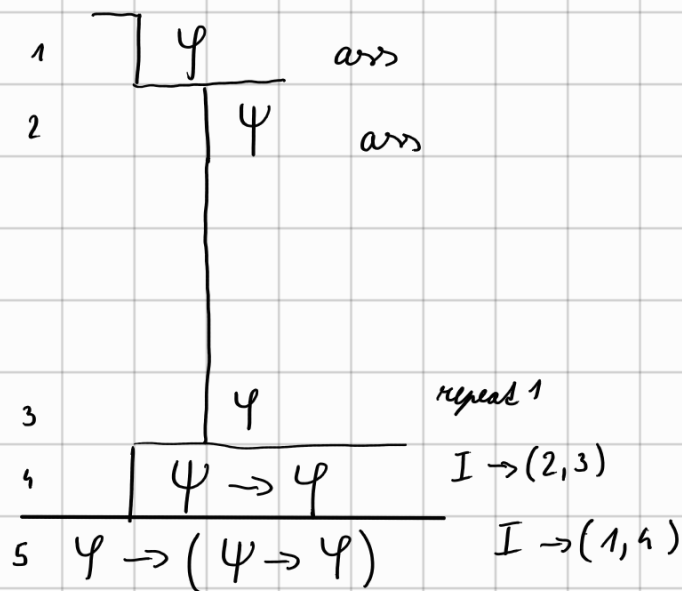
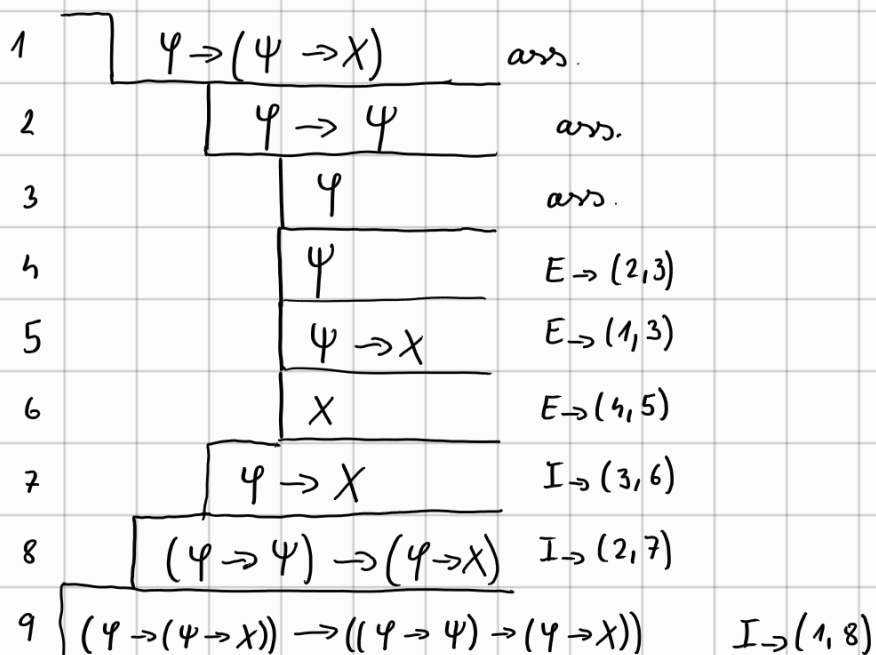


want to prove: $\Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow \Psi)$



we want to prove: $(\Psi \rightarrow (\Psi \rightarrow X)) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Psi \rightarrow X))$



" $\neg \psi$ " is " $\psi \rightarrow \perp$ "
is an abbreviation of

$\neg \psi$
\vdots
\perp
ψ

prove $(\neg \psi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$

1	$\neg \psi \rightarrow \neg \psi$	ass
2	ψ	ass
3	$\neg \psi$	ass
4	$\neg \psi$	$E \rightarrow (3, 1)$
5	\perp	$E \rightarrow (2, 4)$
6	ψ	refutation 3, 5
7	$\psi \rightarrow \psi$	deduction 2, 6
8	$(\neg \psi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)$	deduction 1, 7

EX

① $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q))$

1	$P \rightarrow Q$	ass
2	$R \rightarrow P$	ass
3	R	ass
4	P	$E \rightarrow (2, 3)$
5	Q	$E \rightarrow (1, 4)$
6	$Q \rightarrow R$	$I \rightarrow (3, 5)$
7	$(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)$	$I \rightarrow (2, 6)$

$$8 \quad | (P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)) \quad I \rightarrow (1, 7)$$

$$(2) ((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$$

1		$(P \vee Q) \wedge R$	ass
2		R	$E_{\wedge}(1)$
3		$P \vee R$	$I_{\vee}(2)$
4		$Q \vee R$	$I_{\vee}(2)$
5		$(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$	$I_{\wedge}(3, 4)$
6		$((P \vee Q) \wedge R) \rightarrow ((P \vee R) \wedge (Q \vee R))$	$I \rightarrow (1, 5)$

$$(4) ((P \rightarrow R) \wedge (S \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow R)$$

1		$((P \rightarrow R) \wedge (S \rightarrow R))$	ass
2		$P \vee S$	ass
3		$P \rightarrow R$	$E_{\wedge}(1)$
4		$S \rightarrow R$	$E_{\wedge}(1)$
5			ass ($\vee(2)$)
6			$E_{\rightarrow}(3, 5)$
7			ass ($\vee(2)$)
8			$E_{\rightarrow}(4, 7)$
9		R	$E_{\vee}(2, 5, 7, (6, 8))$
10		$(P \vee S) \rightarrow R$	$I \rightarrow (2, 9)$
11		$((P \rightarrow R) \wedge (S \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow R)$	$I \rightarrow (1, 10)$

$$(5) (\neg Q \wedge \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

1		$\neg Q \wedge \neg P$	ass
2			ass
3			$E_{\wedge}(1)$
4			$E_{\neg}(2, 3)$
5			ass

6	$\neg Q$	\perp	repeat 4
7	Q	$I_{\neg} (5,6)$	
8	$P \rightarrow Q$	$I_{\rightarrow} (2,7)$	
9	$(\neg Q \wedge \neg P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$		$I_{\rightarrow} (1,8)$

③ **HARD !**

$P \vee \neg P$

← proof by contradiction

1	$\neg (P \vee \neg P)$	ass
2	$\neg P$	ass
3	$P \vee \neg P$	$I_{\vee} (2)$
4	\perp	$E_{\neg} (1,3)$
5	P	$I_{\neg} (2,4)$
6	$P \vee \neg P$	$I_{\vee} (5)$
7	\perp	
8	$P \vee \neg P$	

